

---

# CHAPTER 1

---

## 2021-2022 学年微积分（一）（下）期末考试

### 1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 微分方程  $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$  的待定特解形式可设为【 】.

A.  $y^* = ax^2 + bx + c + x(A \sin x + B \cos x)$

B.  $y^* = ax^2 + bx + c + A \sin x$

C.  $y^* = x(ax^2 + bx + c + A \sin x + B \cos x)$

D.  $y^* = ax^2 + bx + c + A \cos x$

2. 在下列极限结果中, 正确的是【 】.

A.  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$

B.  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

C.  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{xy}{x + y} = 0$

D.  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x + y} = 0$

3. 设  $f(x)$  为连续函数,  $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$ , 则  $F'(2)$  等于【 】.

A.  $2f(2)$

B.  $f(2)$

C.  $-f(2)$

D. 0

4. 设曲线  $L: f(x, y) = 1$  ( $f(x, y)$  具有一阶连续偏导数), 过第 II 象限内的点  $M$  和第 IV 象限内的点  $N$ ,  $T$  为  $L$  上从点  $M$  到点  $N$  的一段弧, 则下列积分小于零的是【 】.

A.  $\int_T f(x, y) ds$

B.  $\int_T f(x, y) dx$

C.  $\int_T f(x, y) dy$

D.  $\int_T f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$

5. 设  $L$  为空间曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ , 则  $\oint_L x^2 ds = \mathbf{【 \quad \quad 】}$ .

A. 0

B.  $2\pi a^3$

C.  $\frac{1}{3}\pi a^2$

D.  $\frac{2}{3}\pi a^3$

6. 设两个数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则  $\mathbf{【 \quad \quad 】}$ .

A. 当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛

B. 当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  发散

C. 当  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$  收敛

D. 当  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$  发散

## 2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 经过点  $A(1, -2, 3)$  并且包含  $x$  轴的平面方程为 \_\_\_\_\_.

8. 设向量场  $\mathbf{A} = x^2 \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$ , 则  $\text{rot} \mathbf{A} \Big|_{(1,1,2)} =$  \_\_\_\_\_.

9.  $u = xe^y z^3$  在点  $(1, 1, 1)$  处的全微分  $du =$  \_\_\_\_\_.

10. 若将函数  $f(x) = \pi - x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 展开成正弦级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ , 则系数  $b_4$  的值为 \_\_\_\_\_.

## 3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 设方程组  $\begin{cases} u + v = x \\ u^2 + v^2 = y \end{cases}$  确定隐函数  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ , 且  $u \neq v$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ .

12. 设  $\mathbf{n}$  是曲面  $S: z = x^2 + y^2$  在点  $P_0(1, 1, 2)$  处指向上侧的法矢量, 求函数  $u = xz^3 - 3yz$  在点  $P_0$  处沿方向  $\mathbf{n}$  的方向导数  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ .

13. 计算  $I = \iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$ , 其中  $D$  是正方形区域  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ .

14. 计算  $I = \iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$ , 其中  $\Sigma$  为  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被  $x^2 + y^2 = 2ax$  所截得的有限部分.

15. 设  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  ( $R > 0$ ) 的外侧, 求  $I = \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z dx dy$ .

16. 确定幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$  的收敛域并求其和函数  $S(x)$ .

#### 4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 若二阶常系数线性齐次微分方程  $y'' + ay' + by = 0$  的通解为  $y = (C_1 + C_2x)e^x$ , 求非齐次方程  $y'' + ay' + by = x$  满足条件  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$  的解.

18. 求  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$  在区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$  上的最大值和最小值.

#### 5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - (-1)^n}$  是条件收敛的.

20. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内具有一阶连续导数,  $L$  是上半平面 ( $y > 0$ ) 内的有向分段光滑曲线, 其始点为  $(a, b)$ , 终点为  $(c, d)$ . 记  $I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$ , (1) 证明曲线积分  $I$  与路径  $L$  无关; (2) 当  $ab = cd$  时, 求  $I$  的值.

---

## CHAPTER 2

---

### 2021-2022 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

#### 1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** A.

多项式项  $x^2 + 1$  的特解可设为二次多项式, 而  $\sin x$  与齐次方程

$$y'' + y = 0$$

的解共振, 因此三角项须乘以  $x$ . 所以待定特解应设为

$$y^* = ax^2 + bx + c + x(A \sin x + B \cos x).$$

2. **Solution.** B.

由

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y|$$

可知当  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时该极限为 0. 其余选项均可取不同路径说明极限不存在或不一定为 0.

3. **Solution.** B.

先交换积分顺序:

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t (x-1)f(x) dx.$$

因而

$$F'(t) = (t-1)f(t),$$

所以

$$F'(2) = f(2).$$

4. **Solution.** C.

因为在曲线  $L: f(x, y) = 1$  上恒有  $f(x, y) = 1$ , 故

$$\int_T f(x, y) dy = \int_T dy = y_N - y_M < 0,$$

其中  $M$  在第二象限、 $N$  在第四象限, 所以  $y_N < y_M$ . 其余几个积分不小于零或恒为零.

5. **Solution.** D.

交线  $L$  是球面与过原点平面的交圆, 半径为  $a$ . 由对称性

$$\oint_L x^2 \, ds = \oint_L y^2 \, ds = \oint_L z^2 \, ds.$$

又

$$\oint_L (x^2 + y^2 + z^2) \, ds = a^2 \oint_L ds = a^2 \cdot 2\pi a = 2\pi a^3.$$

三者相等, 所以

$$\oint_L x^2 \, ds = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

6. **Solution.** C.

由  $a_n \rightarrow 0$  可知充分大时  $|a_n| \leq 1$ , 于是

$$a_n^2 b_n^2 \leq |b_n|.$$

若  $\sum |b_n|$  收敛, 则由比较判别法  $\sum a_n^2 b_n^2$  收敛. 其余命题都不成立.

## 2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.**  $3y + 2z = 0$ .

由于所求平面包含  $x$  轴, 所以它含有方向向量  $(1, 0, 0)$ . 又它经过点  $A(1, -2, 3)$ , 故还含有向量  $(1, -2, 3)$ . 两向量叉积可取法向量

$$(1, 0, 0) \times (1, -2, 3) = (0, -3, -2),$$

所以平面方程为

$$3y + 2z = 0.$$

8. **Solution.**  $-i - 2j$ .

$$\mathbf{A} = (x^2, yz, zx),$$

因而

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left( \frac{\partial(zx)}{\partial y} - \frac{\partial(yz)}{\partial z}, \frac{\partial(x^2)}{\partial z} - \frac{\partial(zx)}{\partial x}, \frac{\partial(yz)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} \right) = (-y, -z, 0).$$

在  $(1, 1, 2)$  处取值即得

$$-i - 2j.$$

9. **Solution.**  $e \, dx + e \, dy + 3e \, dz$ .

$$u = x e^y z^3, \quad u_x = e^y z^3, \quad u_y = x e^y z^3, \quad u_z = 3x e^y z^2.$$

在  $(1, 1, 1)$  处有  $u_x = u_y = e$ ,  $u_z = 3e$ , 故

$$du = e \, dx + e \, dy + 3e \, dz.$$

10. **Solution.**  $\frac{1}{2}$ .

由

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \sin nx \, dx,$$

当  $n = 4$  时分部积分可得

$$b_4 = \frac{1}{2}.$$

### 3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 对方程组

$$u + v = x, \quad u^2 + v^2 = y$$

关于  $x$  求偏导, 得

$$u_x + v_x = 1, \quad 2uu_x + 2vv_x = 0.$$

解得

$$u_x = \frac{v}{v - u}, \quad v_x = -\frac{u}{v - u}.$$

12. **Solution.** 曲面写成

$$z - x^2 - y^2 = 0,$$

所以上侧法向量可取

$$\mathbf{n} = (-2x, -2y, 1).$$

在  $P_0(1, 1, 2)$  处,

$$\mathbf{n} = (-2, -2, 1), \quad \mathbf{n}_0 = \frac{1}{3}(-2, -2, 1).$$

又

$$u = xz^3 - 3yz, \quad \nabla u = (z^3, -3z, 3xz^2 - 3y),$$

所以

$$\nabla u(P_0) = (8, -6, 9).$$

因而方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{P_0} = \nabla u(P_0) \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{-16 + 12 + 9}{3} = \frac{5}{3}.$$

13. **Solution.** 按曲线  $xy = 1$  将区域分开. 当  $xy < 1$  时  $\max\{xy, 1\} = 1$ , 当  $xy \geq 1$  时  $\max\{xy, 1\} = xy$ . 故

$$I = \iint_{D_1} xy \, dx dy + \iint_{D_2} 1 \, dx dy.$$

逐段积分得

$$I = \int_{1/2}^2 x \, dx \int_{1/x}^2 y \, dy + \int_0^{1/2} dy \int_0^2 dx + \int_{1/2}^2 dx \int_0^{1/x} dy = \frac{19}{4} + \ln 2.$$

14. **Solution.** 曲面  $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}$  关于  $xOz$  面对称, 而  $xy$  与  $yz$  都关于  $y$  为奇函数, 因此

$$\iint_{\Sigma} xy \, dS = 0, \quad \iint_{\Sigma} yz \, dS = 0.$$

从而

$$I = \iint_{\Sigma} zx \, dS.$$

投影到  $xOy$  面, 因

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

所以

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx dy = \sqrt{2} \, dx dy.$$

用极坐标  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 区域为

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2a \cos \theta.$$

又  $z = r$ , 故

$$I = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a \cos \theta} r^3 \cos \theta \, dr d\theta = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4.$$

15. **Solution.** 由高斯公式

$$I = \iiint_V \left( \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 1) dv.$$

再利用球域的轮换对称性,

$$\iiint_V (3x^2 + 3y^2) dv = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv.$$

因而

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv + \iiint_V 1 dv.$$

用球坐标可得

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv = \frac{4\pi R^5}{5}, \quad \iiint_V 1 dv = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

所以

$$I = \frac{4\pi R^5}{5} + \frac{4\pi R^3}{3}.$$

16. **Solution.** 由比值法, 收敛半径为 1. 当  $x = \pm 1$  时, 通项  $\frac{n}{n+1}x^n$  不趋于 0, 故两端点都发散, 所以收敛域为

$$(-1, 1).$$

对  $|x| < 1$ ,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{-\ln(1-x) - x}{x}.$$

因而

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{\ln(1-x)}{x} + 1 \quad (x \neq 0),$$

并且  $S(0) = 0$ .



## 4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 由齐次方程通解

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x$$

可知特征方程有二重根  $r = 1$ , 于是

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

因而原方程为

$$y'' - 2y' + y = x.$$

设特解为  $y^* = Ax + B$ , 代入得

$$Ax + B - 2A = x,$$

比较系数得  $A = 1, B = 2$ . 所以通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + x + 2.$$

由条件

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

解得  $C_1 = 0, C_2 = -1$ . 因而

$$y = -xe^x + x + 2.$$

18. **Solution.** 在区域内部,

$$f_x = 2x(1 - y^2), \quad f_y = 2y(2 - x^2).$$

解驻点方程得  $(0, 0), (\pm\sqrt{2}, 1)$ , 其函数值分别为

$$f(0, 0) = 0, \quad f(\pm\sqrt{2}, 1) = 2.$$

边界分两部分考察.

当  $y = 0$  时,

$$f(x, 0) = x^2, \quad -2 \leq x \leq 2,$$

所以最小值为 0, 最大值为 4.

当  $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$  时, 代入  $y^2 = 4 - x^2$  得

$$f = x^2 + 2(4 - x^2) - x^2(4 - x^2) = x^4 - 5x^2 + 8.$$

比较边界与内部函数值, 得全区域上

$$\max f = 8, \quad \min f = 0.$$

## 5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 设

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n - (-1)^n}.$$

先看绝对收敛性:

$$|a_n| = \frac{1}{n - (-1)^n} \sim \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow \infty),$$

故  $\sum |a_n|$  发散, 所以原级数不绝对收敛.

再将其写成

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + b_n,$$

其中  $b_n = O(n^{-2})$ , 因此  $\sum b_n$  绝对收敛; 而

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

是交错调和级数, 条件收敛. 所以原级数条件收敛.

20. **Proof.** 记

$$P(x, y) = \frac{1}{y}[1 + y^2 f(xy)], \quad Q(x, y) = \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1].$$

直接计算得

$$P_y = f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy), \quad Q_x = f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy),$$

即  $P_y = Q_x$ . 因而在上半平面  $y > 0$  内该积分与路径无关.

取势函数

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{y} + F(xy), \quad F'(t) = f(t),$$

则

$$d\Phi = P dx + Q dy.$$

因而

$$I = \Phi(c, d) - \Phi(a, b) = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + F(cd) - F(ab).$$

当  $ab = cd$  时, 最后两项相消, 所以

$$I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}.$$