CHAPTER 1

2024-2025 学年微积分（B）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ 的等值面**不可能**是【 】.

   A. 圆锥面　　**B.** 椭圆抛物面

   C. 双叶双曲面　　**D.** 单叶双曲面

2. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-1}{x^2+y^2}=2$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处【 】.

   A. 不存在偏导数　　**B.** 存在偏导数，但不可微

   C. 可微，$f_x(0,0)\neq 0, f_y(0,0)\neq 0$　　**D.** 可微，$f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0$

3. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的立体，化为累次积分为：

$$(1)\ I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^1 z\,\mathrm{d}z,\quad (2)\ I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_\rho^1 z\,\mathrm{d}z,$$
$$(3)\ I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z z\,\mathrm{d}\rho,\quad (4)\ I=\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

   其中正确的为【 】.

   A. （2）（4）　　**B.** （1）（3）

   C. （2）（3）　　**D.** （1）（4）

4. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}(x+1)^n$ 在 $x=-3$ 处【 】.

   A. 绝对收敛　　**B.** 条件收敛

   C. 发散　　**D.** 敛散性不确定

5. 设函数 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$，如果对于上半平面 $(y>0)$ 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有

$$\oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0,$$

那么函数 $P(x,y)$ 可取为

A. $y-\dfrac{x^2}{y^3}$ **B.** $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$

C. $x-\dfrac{1}{y}$ **D.** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$

6. 关于级数的描述，下列命题中正确的是【 】.

A. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $u_n>\dfrac{1}{n}$

B. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛

C. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{2k}$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{2k-1}$ 都收敛

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 绝对收敛

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 设 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}(a>0)$，则 $\iint\limits_S (x+z)^2\,\mathrm{d}S=$ ________.

8. 设 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，点 $P_0(1,2,-2)$ 为空间曲线 $L:x=t,y=2t^2,z=-2t^4$ 上的点，则 u 在点 $P_0(1,2,-2)$ 处沿曲线 L 的切线方向 $\boldsymbol{l}$（t 增大方向）的方向导数为 ________.

9. 设 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(2024)}(0)=$ ________.

10. 设 $f(x)=x-1(0\le x\le\pi)$ 展开成傅里叶级数为 $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,-\infty<x<+\infty$，其中 $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,n=0,1,2,\cdots$，则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\pi\right)=$ ________.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 设 Σ 是 xOy 面上的曲线 $C:y^2=x^2-1$ 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面，求曲线 $L:\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ 与曲面 Σ 的交点 P，并求曲面 Σ 在 P 点处的法线方程.

12. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $\mathrm{d}f\big|_{(1,1)} = 3\,\mathrm{d}u + 4\,\mathrm{d}v$，$y = f(\cos x, 1+x^2)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

13. 设 $f(x,y)$ 连续，$D: x^2+y^2 \le y$，若 $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，求 $f(x,y)$.

14. 求圆柱面 $x^2+y^2 = ay(a>0)$ 介于平面 $z=0$ 与圆锥面 $z = \dfrac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ 之间的柱面面积 S.

15. 下半球面 $S: z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ 取上侧，求积分 $I = \displaystyle\iint\limits_S \dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z+1)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

16. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 已知 $f(u,v)=\oint_L (ux^2+vy^2)\,\mathrm{d}s$，其中曲线 $L: x^2+y^2=u^2$，求 $f_{uv}(1,1)$.

18. 试求抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 的一张切平面，使得它与该抛物面及圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 所围成的立体体积最小.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设 $f(x)$ 为正值连续函数，曲线 $L:(x-a)^2+(y-a)^2=a^2(a>0)$，方向取逆时针方向. 证明：

$$\oint_L xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geq 2\pi a^2.$$

20. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ 是条件收敛的.

CHAPTER 2

2024-2025 学年微积分（B）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. B.

   函数的等值面为
   $$x^2+y^2-z^2=C.$$
   当 $C=0$ 时为圆锥面；当 $C>0$ 时为单叶双曲面；当 $C<0$ 时为双叶双曲面. 它不可能是椭圆抛物面.

2. **Solution**. D.

   由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-1}{x^2+y^2}=2$ 可知，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，
   $$f(x,y)-1=2(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)$$
   易知 $f(0,0)=1$，所以
   $$f(x,y)-f(0,0)=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$
   因而 f 在 $(0,0)$ 处可微，且线性主部为零，所以
   $$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0.$$

3. **Solution**. A.

   该区域在柱坐标下为
   $$0\le\theta\le2\pi,\quad 0\le\rho\le1,\quad \rho\le z\le1,$$
   也可写成
   $$0\le z\le1,\quad 0\le\rho\le z,\quad 0\le\theta\le2\pi.$$
   因此正确的是（2）和（4）.

4. **Solution**. A.

   原级数在 $x=3$ 处条件收敛，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n2^n$ 条件收敛，

特别地 $a_n 2^n \to 0$，故 $\{a_n 2^n\}$ 有界. 于是存在常数 M，使得

$$|a_n| \le \frac{M}{2^n}.$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}(x+1)^n$ 在 $x=-3$ 处为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,$$

且

$$\sum |a_n| \le M \sum \frac{1}{2^n} < \infty.$$

因此绝对收敛.

5. **Solution**. C.

在单连通区域 $y>0$ 内，任意闭曲线积分为零等价于

$$P_y = Q_x.$$

已知

$$Q = \frac{x}{y^2}, \qquad Q_x = \frac{1}{y^2}.$$

C、D 均满足 $P_y = \frac{1}{y^2}$，但 $P = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 在 $x=0$ 处无定义，故选 C.

6. **Solution**. D.

对于 A 选项，考虑 $u_n = \frac{1}{n}$，则 $\sum u_n$ 发散，但 $u_n > \frac{1}{n}$ 不成立；

对于 B 选项，考虑 $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}$，则 $\sum u_n^2 = \sum \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛，但 $\sum (-1)^n u_n = \sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ 发散；

对于 C 选项，考虑 $u_n = \frac{1}{n}$，则 $\sum (-1)^{n-1} u_n$ 条件收敛，

但 $\sum u_{2k} = \sum \frac{1}{2k}$ 与 $\sum u_{2k-1} = \sum \frac{1}{2k-1}$ 均发散；

对于 D 选项，若 $\sum a_n^2$ 收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n}\right| \le \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) < \infty,$$

因而 $\sum \frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $\frac{4\pi a^4}{3}$.

由对称性可知

$$\begin{aligned}\iint\limits_S (x+z)^2\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_S (x^2+2xz+z^2)\,\mathrm{d}S \\ &= \iint\limits_S (x^2+z^2)\,\mathrm{d}S = \frac{2}{3}\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{2a^2}{3}\iint\limits_S \mathrm{d}S \\ &= \frac{4\pi a^4}{3}.\end{aligned}$$

8. **Solution**. $\dfrac{25}{27}$.

$$\nabla u = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

因而

$$\nabla u(P_0) = \frac{1}{3}(1,2,-2).$$

曲线切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = (1,4t,-8t^3)\big|_{t=1} = (1,4,-8), \qquad |\boldsymbol{\tau}| = 9.$$

所以方向导数为

$$\nabla u(P_0)\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|} = \frac{25}{27}.$$

9. **Solution**. 0.

注意到当 $|x|<1$ 时，

$$\arctan\frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4} - \arctan x.$$

而 $\arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，

由 Taylor 定理对照可知

$$f^{(2024)}(0) = 0.$$

10. **Solution**. $\dfrac{\pi}{2}-1$.

余弦级数对应 $[0,\pi]$ 上函数的偶延拓，并作 2π 周期延拓. 因为

$$-\frac{5\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

所以

$$S\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}-1.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 曲线 $C : y^2 = x^2 - 1$ 绕 y 轴旋转所得曲面为

$$x^2 + z^2 - y^2 = 1.$$

直线 L 可写成

$$x = 0, \qquad y = 1 - t, \qquad z = t.$$

代入曲面方程得

$$t^2 - (1-t)^2 = 1,$$

解得 $t = 1$. 因此交点为

$$P = (0, 0, 1).$$

设

$$F(x, y, z) = x^2 + z^2 - y^2 - 1,$$

则

$$\nabla F(P) = (0, 0, 2).$$

故法线方程为

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}.$$

12. **Solution**. 由 $\mathrm{d}f|_{(1,1)} = 3\,\mathrm{d}u + 4\,\mathrm{d}v$ 可知

$$f_u(1,1) = 3, \qquad f_v(1,1) = 4.$$

计算 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_u \cdot (-\sin x) + f_v \cdot 2x$，

$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{\mathrm{d}f_u}{\mathrm{d}x}\sin x - f_u \cos x + 2x\dfrac{\mathrm{d}f_v}{\mathrm{d}x} + 2f_v.$

将 $x = 0$ 代入上式得

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = -f_u(1,1) + 2f_v(1,1) = -3 + 8 = 5.$$

13. **Solution**. 记

$$C = \frac{4}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

则

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - C.$$

两边在 D 上积分并乘以 $\dfrac{4}{\pi}$，得

$$C = \frac{4}{\pi}\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - C.$$

区域 D 在极坐标下为

$$0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le r \le \sin\theta.$$

因而

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta} \sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r \\ &= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sin\theta} \mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \left(|\cos\theta|^3-1\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}.\end{aligned}$$

所以

$$C = \frac{2}{3}-\frac{8}{9\pi}.$$

最终

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{2}{3}+\frac{8}{9\pi}.$$

14. **Solution**. 圆柱面 $x^2+y^2=ay$ 在极坐标下为

$$r=a\sin\theta,\qquad 0\le\theta\le\pi.$$

其底面圆周弧长元为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+(r')^2}\,\mathrm{d}\theta=a\,\mathrm{d}\theta.$$

圆锥面给出的高度为

$$z=\frac{r}{a}=\sin\theta.$$

因而柱面面积为

$$S=\int_0^\pi z\,\mathrm{d}s=a\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2a.$$

15. **Solution**. 下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 上满足 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$，因此

$$I=\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+1)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

记 S' 为 $x^2+y^2\le 1, z=0$ 取下侧，$\Sigma=S\cup S'$，则

$$\begin{aligned}I&=\oiint\limits_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+1)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{S'} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+1)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=-\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ z\le 0}}(1+2z+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint\limits_{S'}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=-3\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ z\le 0}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ z\le 0}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=-2\pi-2\int_{-1}^0 z\cdot\pi(1-z^2)\,\mathrm{d}z+\pi\\ &=-2\pi+\frac{\pi}{2}+\pi=-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

16. **Solution**. 当 $|x|<1$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)' = \frac{x}{(1-x)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)' = x\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]' = x\cdot\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{x(1-x^2)}{(1-x)^4}.$$

得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n\bigg|_{x=-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{27}+\frac{2}{9}+\frac{2}{3} = \frac{22}{27}.$$

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 将圆 $L: x^2+y^2=u^2$ 参数化为

$$x=u\cos\theta, \qquad y=u\sin\theta, \qquad 0\le\theta\le 2\pi,$$

则 $\mathrm{d}s = u\,\mathrm{d}\theta$. 因而

$$f(u,v) = \int_0^{2\pi} \left(u\cdot u^2\cos^2\theta + v\cdot u^2\sin^2\theta\right) u\,\mathrm{d}\theta = \pi u^4 + \pi v u^3.$$

所以

$$f_{uv}(u,v) = 3\pi u^2,$$

从而

$$f_{uv}(1,1) = 3\pi.$$

18. **Solution**. 抛物面在点 $(a,b,1+a^2+b^2)$ 处的切平面为 $2a(x-a)+2b(y-b)-(z-1-a^2-b^2)=0$，即

$$z = 1-a^2-b^2+2ax+2by.$$

圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 在 xOy 平面上的投影区域为圆域

$$D: x^2+y^2\le 2x, z=0.$$

因抛物面是凸曲面，故所围立体的体积为切平面上方、抛物面下方、圆柱面内侧部分的体积

$$V(a,b) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{1-a^2-b^2+2ax+2by}^{1+x^2+y^2} \mathrm{d}z,$$

即

$$V(a,b) = \iint_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2a\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2b\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \pi(a^2+b^2).$$

因为 D 的形心为 $(1,0)$，所以 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$，$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$，

故

$$\begin{aligned} V(a,b) &= \iint\limits_{D} \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2a\pi + \pi(a^2+b^2) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} r^3\,\mathrm{d}r - 2a\pi + \pi(a^2+b^2) \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta - 2a\pi + \pi(a^2+b^2) \\ &= \frac{3\pi}{2} - 2a\pi + \pi(a^2+b^2) = \pi\left[(a-1)^2+b^2+\frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

显然当 $a=1$ 且 $b=0$ 时，$V(a,b)$ 取得最小值 $V_{\min}=\dfrac{\pi}{2}$.

此时切点为 $(1,0,2)$，切平面方程为 $z=2x+0\cdot y+1-1-0$，即

$$z=2x.$$

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 记

$$P(x,y)=-\frac{y}{f(x)},\qquad Q(x,y)=xf(y).$$

由 Green 公式，

$$\oint_L xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\iint\limits_D \left(Q_x-P_y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D \left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 D 是圆盘 $(x-a)^2+(y-a)^2\le a^2$.

由圆盘关于直线 $y=x$ 对称，

$$\iint\limits_D f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

所以

$$\begin{aligned} \oint_L xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \iint\limits_D \left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D \left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\ge 2\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi a^2. \end{aligned}$$

20. **Proof**. 设

$$\alpha_n=\sqrt{n^2+1}-n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

则

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=\sin(n\pi+\pi\alpha_n)=(-1)^n\sin(\pi\alpha_n).$$

因为

$$\alpha_n\sim\frac{1}{2n},$$

所以
$$\sin(\pi\alpha_n) \sim \frac{\pi}{2n}.$$
于是绝对值级数与调和级数同阶，故发散.

另一方面，α_n 严格单调递减，且趋于零，

而 $\pi\alpha_n = \dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} < \dfrac{\pi}{2}$，因此 $\sin(\pi\alpha_n)$ 也严格单调递减，且趋于零.

由 Leibniz 判别法，级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\pi\alpha_n)$$
收敛. 故原级数条件收敛.