

机械振动

上册

清华大学工程力学系
固体力学教研组振动组 编

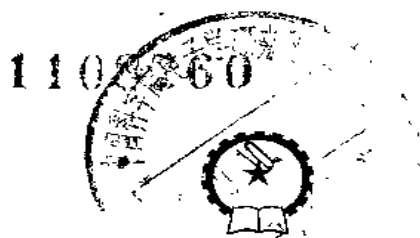
机械工业出版社

机 械 振 动

(上 册)

清华大学工程力学系

固体力学教研组 振动组 编



机 械 工 业 出 版 社

本书系统地论述了振动的基本理论以及在工程上的应用。上册主要内容为线性振动，共分十章和三个附录，包括单自由度、多自由度系统和弹性体振动，以及原则上可对任何结构离散化的有限单元法和实现工程计算的电子计算机算法，附有计算程序。

本书可作为高等院校振动课程的教学参考书，以及从事机械振动、结构振动方面研究和计算工作的工程技术人员的参考书。

机 械 振 动

(上 册)

清华大学工程力学系

固体力学教研组 振动组 编

*

机械工业出版社出版 (北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业登记证出字第 117 号)

民族印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 新华书店经售

*

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ · 印张 $21^{1/8}$ · 字数 553 千字

1980 年 8 月北京第一版 · 1980 年 8 月北京第一次印刷

印数 00,001—10,000 · 定价 2.60 元

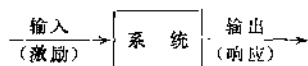
*

统一书号: 15033 · 4778

前 言

随着近几十年来工业和科学技术的飞速发展,产品愈加精巧、复杂,各种工程结构愈加巨型化,为了保证它们的可靠性和良好的性能,振动问题已成为工程技术领域里普遍需要认真研究和解决的重要课题。尤其是由于电子计算机的运用,先进的振动量测和分析技术的出现,使我们有可能解决远比以往复杂得多的实际振动问题,振动理论的研究相应有了许多重要发展,并得到了广泛的应用。可以这样说,今天振动理论已经成为工程技术人员正确进行产品和结构的动力特性设计所必需具备的基础知识。在高等理工科院校中,振动理论已是许多专业的一门必修课程。

振动问题所涉及的内容可以用下面的框图来作扼要的说明。关于所研究的振动问题的对象,无论是机械产品、工程结构或者零部件等,都可以理解为框图所示的系统,通常称为振动系统或机械系统,它表征系统本身的振动特性。外界对于系统的输入,包括初始干扰、外激振力等统称为激励,系统在输入下产生的输出,通常称为系统的动态响应,简称响应。在工程技术问题中最普遍的振动问题属于**振动设计**,即在已知输入情况下,设计系统的振动特性,使得它的动态响应能满足一定的要求。此外,还有通过已知的输入和输出来研究系统的特性,称为**系统识别**;已知系统的特性和输出来研究输入,称为**环境预测**。



振动的分类也可以用上面的框图加以说明。

I. 按对系统的输入类型可分为:

自由振动——系统受初始干扰或原有的外激振力取消后产生的振动。

强迫振动——系统在外激励力作用下产生的振动。

自激振动——系统在输入和输出之间具有反馈特性，并有能源补充而产生的振动。

Ⅱ. 按系统的输出（振动规律）可分为：

简谐振动——振动量为时间的正弦或余弦函数。

周期性振动——振动量为时间的周期函数，故可用谐波分析的方法展开为一系列简谐振动的叠加。

瞬态振动——振动量为时间的非周期函数，通常只在一定的时间内存在。

随机振动——振动量不是时间的确定性函数，因而不能预测而只能用概率统计的方法来研究。

Ⅲ. 按系统的自由度可分为：

单自由度系统振动——用一个独立座标就能确定的系统振动。

多自由度系统振动——用多个独立座标才能确定的系统振动。

弹性体振动——须用无限多个独立座标（位移函数）才能确定的系统振动，也称为无限自由度系统振动，以区别于上述单自由度和多自由度系统振动（有限自由度系统振动）。

Ⅳ. 按描述系统的微分方程可分为：

线性振动——用常系数线性微分方程来描述，它的惯性力、阻尼力及弹性力只分别与加速度、速度及位移成正比。

非线性振动——要用非线性微分方程来描述，即微分方程中出现非线性项。

本书着重介绍机械系统振动，全书分上下两册。上册主要内容是线性振动，包括单自由度、两自由度、多自由度和弹性体振动的基本理论，及其在工程实际中的应用。介绍了矩阵方法，有限单元法和电子计算机算法，并附有计算程序。它可以作为高等理工院校有关专业本科生和研究生的教学参考书，同时也可以作为从事机械振动和结构振动方面工作的技术人员的参考书。下

册主要包括瞬态振动、非线性振动、随机振动、机械阻抗和模态分析等一些专题内容的基础知识,作为需要在某方面作深入研究的入门。

第一章是从运动学的观点把各种振动量,其中包括位移、速度、加速度以及对系统的激振力等,都作为时间的函数加以讨论。介绍了振动用矢量及复数的两种基本表示法。讨论了简谐振动的基本性质;通过谐波分析把周期性振动分解成一系列简谐振动的叠加,说明以后各章着重讨论简谐振动仍不失其一般性。

第二至第四章系统地讨论了单自由度和两自由度线性系统的振动,包括无阻尼和有阻尼情况下的自由振动和强迫振动,从而建立振动的一系列基本概念,阐明振动的重要特性。这是振动理论最基本的部分,必需深入掌握,熟练运用。在这里没有引入矩阵运算,为的是使读者只需具有微积分、微分方程和理论力学基础就能学习和掌握这部分内容,并用以解决一些比较简单的实际振动问题。照顾到不同专业和不同工作岗位技术人员的需要,结合各个方面的实例,介绍了一些比较有实用价值的振动知识,包括扭转振动、梁振动、转子临界转速和动平衡问题、测振仪和隔振原理以及减振器等。

第五章是为没有学过分析力学的读者扼要介绍分析力学的基础知识,主要内容是推导了拉格朗日方程和哈密尔顿原理,其目的是为建立多自由度系统和弹性体振动微分方程提供另一种统一的方法,并为根据变分原理得出的近似计算方法奠定理论基础。

第六章讨论多自由度系统振动的一般理论和分析方法,它是两自由度系统振动理论的一般推广和总结。由于实际的连续系统可以通过有限单元法等手段离散化为有限自由度系统,而使本章不仅具有重要的理论意义,并且具有更为重要的应用价值。学好本章将起着承前启后的关键作用。它与第十章用电子计算机解振动问题配合,可以处理大量的机械产品和工程结构的振动计算问题。本章开始应用矩阵运算,在方法上着重介绍了振型叠加法,计算上主要介绍矩阵迭代法,它一方面适用于电子计算机的计算,

另一方面在自由度较少的情况，也便于较快地直接进行计算。同时也介绍了一些近似估算的简单方法，因为即使在运用电子计算机计算时，也需要用它来进行校核。最后还介绍了传递矩阵法，它是处理链状结构振动问题的一种有效方法，在计算曲轴扭转振动、轴系临界转速等工程问题中已广泛采用。

第七、八两章主要介绍杆、板、圆环等弹性体振动和管道内气柱振动等连续系统的振动问题。第七章通过杆的纵向、扭转、弯曲振动建立连续系统振动的基本概念和分析方法。第八章介绍了基于变分原理建立梁、圆环和板的微分方程和边界条件的方法，此外还介绍了瑞雷——李兹法和伽辽金法等近似计算方法，以便于处理那些得不到解析解的弹性体振动问题。

第九章介绍了有限单元法如何应用于振动问题，包括基本概念和求解的具体步骤。原则上任何弹性结构都可用有限单元法离散化为有限自由度系统，凡是用有限单元法进行过静力计算的弹性结构在需要进行振动设计时，都能很方便地加以扩充进行计算。因此有限单元法已日益成为处理振动问题的常用方法之一。

第十章介绍了如何应用电子计算机来解振动问题，包括特征值计算和响应计算两大部分。可以根据系统自由度的多少选择不同的计算方法。为了方便初学者，本章附录还给出了一些常用的计算程序，其中有适合于有限单元法计算的求解大型稀疏带状矩阵的反迭代法和子空间迭代法，以及用传递矩阵方法解扭转振动、轴系振动和叶片振动等。书中附有算例，可供读者练习，也可直接采用或经部分扩充修改后应用。

振动问题在我国科技界也日益受到重视，有关方面已开展了不少工作，但是目前我国自己编著的振动方面的书籍还很少，不能适应有关工程技术人员和工科院校教学的需要。本书就是根据这种要求编写的，但是由于我们理论水平不高，实际工作经验不多，本书肯定有很多需要改进之处，希望读者和有关方面同志提出宝贵意见。在工作过程中，我们得到许多兄弟院校和单位的同志们提出的珍贵建议。书中还引用了一些单位的科研成果。最后

蒙昆明工学院屈维德教授仔细审阅。对此均表示衷心的感谢。

参加本书上册编写的有：郑兆昌、庞家驹、王勖成、何积范、丁奎元、姚振汉、李德葆、吴建基同志。制图主要由王文莲同志完成。全书由郑兆昌和庞家驹同志作了校核。教研组其他同志也为本书做了不少工作。

编者 1978.12

常用符号表

A —— 自由振动振幅	cm
A — 面积	cm ²
B —— 强迫振动振幅	cm
D, d 点径	cm
E —— 弹性模量	kg/cm ²
e — 偏心距	cm
F —— 力	kg
f — 频率	Hz
G —— 剪切弹性模量	kg/cm ²
g — 重力加速度	cm/s ²
H, h 高度	cm
I —— 转动惯量	kg·cm·s ²
$i = \sqrt{-1}$	
J —— 截面惯性矩	cm ⁴
K, k — 弹簧刚度	kg/cm
L, l —— 长度	cm
M —— 力矩、弯矩	kg·cm
M_t —— 扭矩	kg·cm
M, m — 质量	kg·s ² /cm
n —— 转速	rpm
n —— 衰减系数	
P — 力	kg
p —— 固有圆频率	1/s
Q — 广义力	
q —— 广义坐标	
R, r —— 半径	cm
r, c —— 阻尼系数	kg·s/cm
T —— 周期	s
T —— 动能	kg·cm

常用符号表

X V

t — 时间	s
U — 势能	kg·cm
V — 体积	cm ³
W, w — 重量	kg
W — 功	kg·cm
u, v, w — 位移	cm
x, y, z — 坐标	
x, y, z — 位移	cm
β — 放大因子	
γ — 重度	kg/cm ³
δ — 柔度	cm/kg
δ — 对数减幅	
ε — 应变	
ζ — 相对阻尼系数	
η — 隔振系数	
η — 损耗因子	
θ — 转角, 角位移	rad
λ — 频率比	
ν — 振幅比	
ρ — 单位长度质量	kg·s ² /cm ²
单位体积质量	kg·s ² /cm ⁴
σ — 正应力	kg/cm ²
τ — 剪应力	kg/cm ²
τ — 时间	s
φ — 相位角	rad
ψ — 相位角	rad
ω — 激振圆频率	1/s
ω — 角速度	rad/s

常用矩阵符号表

[M] — 质量矩阵

[K] — 刚度矩阵

- $[\delta]$ ——柔度矩阵
 $\{A\}$ ——主振型列阵
 $[A_p]$ ——振型矩阵
 $[M_p]$ ——主质量矩阵
 $[K_p]$ ——主刚度矩阵
 $[M_N]$ ——正则质量矩阵
 $[K_N]$ ——正则刚度矩阵
 $\{A_N\}$ ——正则振型列阵
 $[A_N^*]$ ——正则振型矩阵
 $\{x_p\}$ ——主坐标列阵
 $\{x_N\}$ ——正则坐标列阵
 $[A_N^*]$ ——截断振型矩阵
 $[A_N^*]$ ——截断正则振型矩阵
 $[M_p^*]$ ——截断主质量矩阵
 $[K_p^*]$ ——截断主刚度矩阵
 $[M_N^*]$ ——截断正则质量矩阵
 $[K_N^*]$ ——截断正则刚度矩阵
 $[C]$ ——阻尼矩阵
 $[C_N]$ ——正则坐标中的阻尼矩阵
 $[C_N^*]$ ——正则振型的阻尼矩阵
 $[D]$ ——动力矩阵
 $\{P\}$ ——外力列阵
 $\{P_N\}$ ——正则坐标中的广义力列阵

常用单位符号

1. 长度

米	m
厘米	cm
毫米	mm
微米	μ

2. 时间

分	min
---	-----

秒	s
3. 平面角	
弧度	rad
度	°
4. 速度	
米每秒	m/s
厘米每秒	cm/s
5. 加速度	
米每秒每秒	m/s ²
厘米每秒每秒	cm/s ²
6. 角速度	
弧度每秒	rad/s
7. 角加速度	
弧度每秒每秒	rad/s ²
8. 转数	
每分钟转数	rpm
9. 质量	
力/加速度	kg·s ² /cm
10. 力	
公斤	kg
吨	T
11. 压力	
力/平方厘米	kg/cm ²
12. 功与能	
公斤·米	kg·m
公斤·厘米	kg·cm
13. 功率	
千瓦	kW

目 录

第一章 振动的运动学概念	1
1.1 引言	1
1.2 简谐振动	2
1.3 简谐振动的矢量表示法	5
1.4 简谐振动的复数表示法	7
1.5 谐波分析	9
第二章 单自由度系统的自由振动	14
2.1 引言	14
2.2 弹簧质量系统的自由振动	16
2.3 角振动	24
2.4 能量法	29
2.5 瑞雷法	34
2.6 等效刚度	38
2.7 有阻尼的自由振动	44
第三章 单自由度系统的强迫振动	52
3.1 引言	52
3.2 简谐激振力引起的强迫振动	53
3.3 偏心质量引起的强迫振动	66
3.4 支承运动引起的强迫振动	69
3.5 隔振原理	73
3.6 惯性式测振仪原理	76
3.7 单盘转子的临界转速	80
3.8 转子的平衡问题	84
3.9 简谐力的功	89
3.10 阻尼理论	92
3.11 周期激振的响应	98
3.12 任意激振的响应	104

第四章 两自由度系统的振动	112
4.1 引言	112
4.2 双质量弹簧系统的自由振动	113
4.3 扭转振动	120
4.4 刚体在平面内的振动	124
4.5 拍的现象	129
4.6 梁振动	133
4.7 回转效应	138
4.8 双质量弹簧系统的强迫振动	141
4.9 动力减振器	147
4.10 离心摆式减振器	150
4.11 阻尼对强迫振动的影响	152
第五章 分析力学基础	156
5.1 引言	156
5.2 自由度和广义坐标	157
5.3 虚位移原理	160
5.4 动能和势能	166
5.5 拉格朗日方程	175
5.6 哈密顿原理	182
第六章 多自由度系统的振动	188
6.1 引言	188
6.2 多自由度系统振动方程式	190
6.3 固有频率和主振型	199
6.4 主坐标和正则坐标	207
6.5 固有频率值相等或为零的情况	222
6.6 系统对初始条件的响应	232
6.7 矩阵迭代法	240
6.8 其他近似解法	263
6.9 多自由度系统的阻尼	279
6.10 系统对激振的响应	288
6.11 传递矩阵法	295
第七章 弹性体振动 (上)	311
7.1 引言	311

7.2 弦振动	312
7.3 杆的纵向振动	320
7.4 杆的扭转振动	325
7.5 梁的横向振动	329
7.6 轴向力、转动惯量和剪切变形的影响	341
7.7 近似解法	346
7.8 梁振动的响应	356
7.9 传递矩阵法	364
7.10 气柱振动	368
第八章 弹性体振动 (下)	378
8.1 引言	378
8.2 梁的横向振动	378
(1) 变分方法	378
(2) 近似解法	382
(3) 梁的双向横振动	385
(4) 有轴向力作用的杆件横向振动	389
8.3 圆环振动	392
(1) 圆环变形分析	392
(2) 圆环在环面内的振动	396
(3) 圆环的扭转振动和面外弯曲振动	400
(4) 与圆环有关的其他振动问题	402
8.4 薄板的横向振动	404
(1) 基本方程式	404
(2) 矩形板振动	410
(3) 近似解法	414
(4) 圆板振动	423
第九章 有限单元法	427
9.1 引言	427
9.2 平面刚架结构的振动	429
(1) 结构的离散化	429
(2) 单元特性分析	430
(3) 座标转换	444

(4) 结构的综合分析	448
9.3 平面内振动问题	453
9.4 薄板的横向振动	461
第十章 用电子计算机解振动问题	467
10.1 引言	467
10.2 用线性代数计算方法求解固有频率和主振型	468
(1) 概述	468
(2) 矩阵迭代法	469
(3) 古文斯-豪斯霍尔德法 (G-H法)	475
(4) 矩阵反迭代法	484
(5) 子空间迭代法	487
10.3 有阻尼系统对初始条件和简谐激励力的响应	494
(1) 概述	494
(2) 有阻尼多自由度系统的正则化	497
(3) 系统对初始条件和简谐激励力的响应	501
10.4 用传递矩阵法解链状结构的振动问题	511
(1) 概述	511
(2) 轴盘系统的扭转振动	516
(3) 轴系的横振动	522
10.5 用常微分方程数值积分法解弹性体振动的一维问题	531
(1) 概述	531
(2) 变截面杆的扭转振动	534
(3) 变截面杆的双向横振动	539
附录	544
I. 复数	544
II. 矩阵基础知识	548
III. 用电子计算机解振动问题常用过程	574
1. 矩阵迭代法求特征值过程 <i>MAIT</i>	574
2. 主元消去法解线性代数方程组过程 <i>ALG</i>	576
3. 广义特征值问题简化过程 <i>REDUC1</i>	578
4. 实对称矩阵豪斯霍尔德变换过程 <i>TRED2</i>	581
5. <i>QL</i> 法求完全特征系过程 <i>TQL2</i>	584

6. 特征矢量还原过程 <i>REBAKA</i>	588
7. 反迭代法求大型广义特征值过程 <i>MAIT1</i>	590
8. 子空间迭代法求大型广义特征值过程 <i>SMIT</i>	595
9. 有阻尼多自由度系统正则化过程 <i>NOM</i>	601
10. 矩阵乘法过程 <i>MATM</i>	603
11. 有阻尼系统对初始条件响应求解过程 <i>RESP1</i>	604
12. 有阻尼系统对简谐激励力响应求解过程 <i>RESP2</i>	606
13. 二分法试根过程 <i>FREQ</i>	608
14. 轴盘系统扭振试算递推过程 <i>HOLZ</i>	609
15. 轴系横振动试算递推过程 <i>PROL</i>	611
16. 定步长龙格库塔法数值积分过程 <i>RKA</i>	615
17. 变截面杆扭转振动试算积分过程 <i>TV</i>	616
18. 杆件扭振方程组右端函数过程 <i>FT</i>	617
19. 变截面杆双向横振动试算积分过程 <i>BBV</i>	617
20. 杆件双向横振动右端函数过程 <i>FBB</i>	619
习题	621
习题答案	650
主要参考书目	658

第一章 振动的运动学概念

1.1 引言

机械振动是一种特殊形式的运动。在这种运动过程中,机械系统将围绕平衡位置作往复运动。从运动学的观点看,机械振动是指机械系统的某些物理量(位移、速度、加速度),在某一数值附近随时间 t 的变化关系。这种关系如果是确定的,则可以用函数关系描述其运动

$$x = x(t) \quad (1.1)$$

(1.1)式可以 t 为横座标, x 为纵座标,作图表示。图1-1即表示了几种典型的机械振动。

图1-1 a)表示在相等的时间间隔内作往复运动,称为**周期振动**。往复一次所需的时间间隔 T 称为**周期**,单位一般以 s 计。每经过一个周期后,运动便重复前一周期中的全部过程。周期振动可用时间的周期性函数表达为

$$x(t) = x(t + nT) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

最简单的周期振动是简谐振动。以后就可以看到任何周期振动都可以认为是各阶简谐振动的叠加。在旋转机械工作过程中测量机座或基础的振动往往是这种周期性振动。

图1-1 b)表示机械系统受到冲击或爆炸后产生的振动。图1-1 c)表示在旋转机械起动过程产生的振动,它们没有一定的

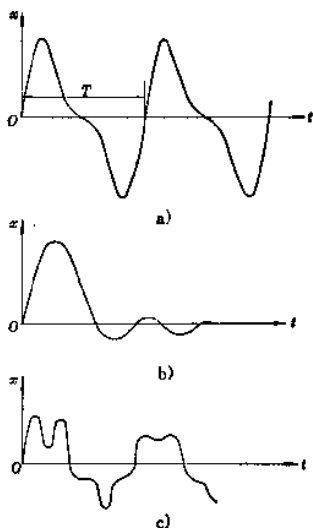


图 1-1

周期，不再能表达为 (1.2) 式的形式。这类振动称为**非周期性振动**。

周期振动是以一定的周期持续进行的等幅振动，因此也称为**稳态振动**。而非周期性振动往往是经过一定时间后便逐渐消失，因此称为**瞬态振动**。

上面所述的振动，无论是周期振动或非周期振动都可以表达成 (1.1) 式的函数形式。在任一给定瞬时 t ，都可以得到确定的物理量 x ，也就是说振动是确定的或可以预测的。还有另外一类振动，例如车辆行驶时或拖拉机工作时的振动，以及地震等等，并不能以确定的函数形式 (1.1) 表达出来，即在任一指定瞬时 t ，并不能预知振动的物理量 x 的大小。它们的一个共同特点是运动不是时间的确定函数。这种振动称为**随机振动**。图 1-2 表示某种随机振动的纪录曲线。随机振动只能用概率统计方法进行分析，这将在下册加以讨论。



图 1-2

1.2 简 谐 振 动

周期振动中最简单的是简谐振动。我们可以用一个简单的实验来表演简谐振动的特性。图 1-3 所示为弹簧上悬挂着一个质量块，在静止时给质量块以轻轻一击，质量块便在原来静平衡位置附近上下振动。如在质量块上放一个小光源，使一束光线照射在一条匀速水平移动的光敏纸带上，记录下质量块的运动过程，则这一运动过程可用下面正弦函数表达。

$$x = A \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (1.3)$$

式中 T 即为周期, A 为离开静平衡位置的最远距离, 称为**振幅**。这种按时间的正弦函数 (或余弦函数) 所作的振动, 就称为**简谐振动**。

上述简谐振动还可以看作一个作等速圆周运动的点在铅垂轴上投影的结果。如图 1-4, 一长度为 A 的直线

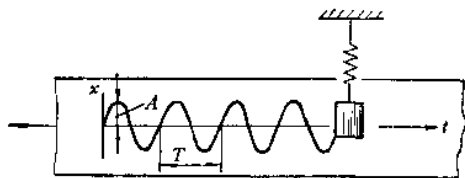


图 1-3

OP , 由水平位置开始, 以等角速度 ω 绕 O 点转动, 任一瞬时 t , OP 在铅垂轴上的投影为

$$x = A \sin \omega t \quad (1.4)$$

式中 ω 的单位是 rad/s 。 ωt 称为**相位**, 表示 OP 在时间 t 的转角。

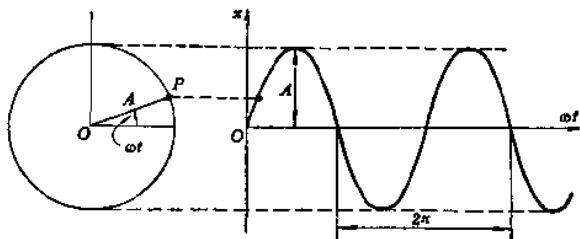


图 1-4

因为 OP 转过 $2\pi \text{ rad}$ 为一个周期, 上式应满足条件

$$A \sin \omega (t + T) = A \sin (\omega t + 2\pi)$$

即
$$\omega T = 2\pi$$

或
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

代入 (1.4) 式就得到和 (1.3) 式同样结果, 所以通常我们就以 (1.4) 式表示简谐振动。

在周期振动中, 周期的倒数定义为**频率**。

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.5)$$

单位用 $1/s$, 亦称赫芝, 写作 Hz, 即每秒钟振动的次数。它和 ω 的关系显然有

$$\omega = 2\pi f \quad (1.6)$$

在 $f = 1/s$ 时, $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$, 相当于直线 OP 每秒转一圈。因此振动理论中把 ω 称为圆频率。

如果图 1-3 所示的振动, 在开始时质量块不在静平衡位置, 则其位移表达式将具有一般形式

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.7)$$

式中 φ 称为初相位, 表示质量块的初始位置。

简谐振动的速度和加速度只要对位移表达式 (1.7) 求一阶和两阶导数即得

$$v = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = A\omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.8)$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \pi) \quad (1.9)$$

可见, 只要位移是简谐函数, 速度和加速度也是简谐函数, 而且与位移具有相同的频率。但是, 速度的相位比位移的相位超前 $\frac{\pi}{2}$, 加速度比位移超前 π , 如图 1-5 所示。

由 (1.9) 和 (1.7) 式可以看出

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (1.10)$$

这表明在简谐运动中, 加速度的大小和位移成正比, 而其方向和位移相反, 即始终

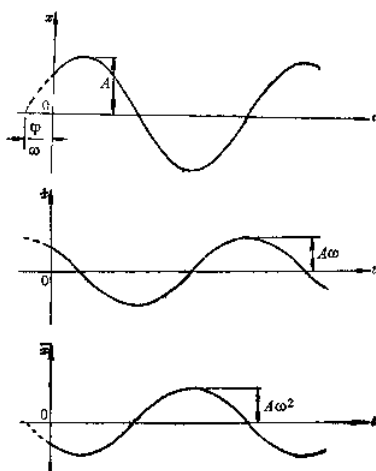


图 1-5

指向静平衡位置。这是简谐振动的一个重要特性。

1.3 简谐振动的矢量表示法

在振动问题中，有时用旋转矢量表示简谐振动。图 1-6 表示一模为 A 的矢量 OP ，以等角速度 ω ，从水平位置开始，逆时针旋转。 OP 即称为**旋转矢量**。它在任一瞬时铅垂轴上的投影为

$$x = A \sin \omega t$$

表示一简谐振动。显然，它在水平轴上的投影为一余弦函数，也表示一简谐振动。这说明任一简谐振动都可以用一个旋转矢量的投影来表示。这个旋转矢量的模就是简谐振动的振幅，它的旋转角速度就是简谐振动的圆频率。

当一个简谐振动是由两个同频率的简谐振动所合成，则这个简谐振动可以用两个代表原简谐振动的旋转矢量的合成矢量来表示。例如某一简谐振动的表达式为

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (1.11)$$

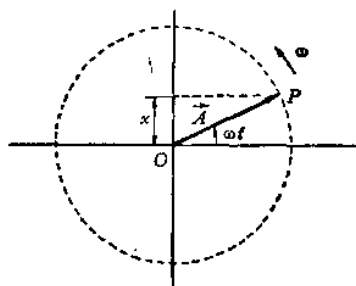


图 1-6

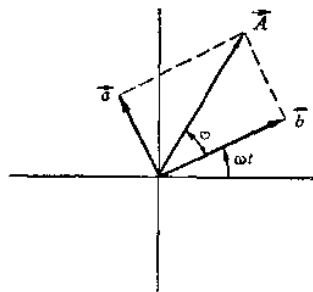


图 1-7

先将上式右边的两个简谐振动分别用旋转矢量 \vec{a} 和 \vec{b} 表示。为此将上式改写为

$$x = a \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + b \sin \omega t$$

这表示旋转矢量 \vec{a} 比 \vec{b} 超前 $\frac{\pi}{2}$ 相位，两个矢量是互相垂直的。图

1-7 画出了这两个旋转矢量。它们都以角速度 ω 同步旋转。根据矢

量相加的原理将 \vec{a} 和 \vec{b} 合成旋转矢量 \vec{A} , \vec{A} 与 \vec{b} 之间的夹角为 φ 。 \vec{A} 在铅垂轴上的投影为

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.12)$$

不难证明 (1.11) 式和 (1.12) 式所表示的是同一简谐振动。将 (1.12) 式按三角恒等关系展开为

$$x = A \sin \varphi \cos \omega t + A \cos \varphi \sin \omega t$$

由图 1-7 可知

$$a = A \sin \varphi, \quad b = A \cos \varphi$$

代入上式即得

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

因此, 在数学上 (1.11) 式和 (1.12) 式是可以互相转换的, 两式中常数之间关系由图 1-7 可知

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{a}{b} \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

从物理概念上说明两个同频率的简谐振动可以合成一个与原来频率相同的简谐振动。反之一个简谐振动也可以分解成两个相同频率的简谐振动之和。注意到 (1.12) 式和 (1.7) 式是完全相同的。这说明一个质点从偏离静平衡位置的任一位置开始作简谐振动, 便相当于两个频率相

同、相位差 $\frac{\pi}{2}$ 的简谐振动的合成。

两个旋转角速度不相同的旋转矢量显然是不能这样合成的。

前面已经讨论过, 如果位移是简谐函数, 速度和加速度也是简谐函数, 所以也可以用旋转矢量来表示。设

$$x = A \sin \omega t$$

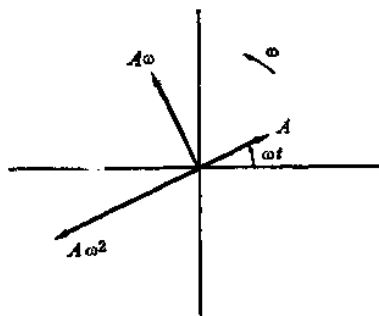


图 1-8

则

$$\dot{x} = A\omega \cos \omega t = A\omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t = A\omega^2 \sin (\omega t + \pi)$$

速度超前位移 $\frac{\pi}{2}$, 加速度又超前速度 $\frac{\pi}{2}$ 。图 1-8 画出了各个旋转矢量和它们相互之间的关系。

1.4 简谐振动的复数表示法

根据复数的矢量表示法[⊙], 在复平面上的一个复数 z 代表在该复平面上的一个矢量, 如图 1-9(a) 中 \vec{OP} 所示。这个矢量的模就是复数 z 的模 A , 它的位置由复角 θ 确定, 若用 i 表示虚轴上的单位长度, 则其表达式为

$$z = A(\cos \theta + i \sin \theta) = Ae^{i\theta}$$

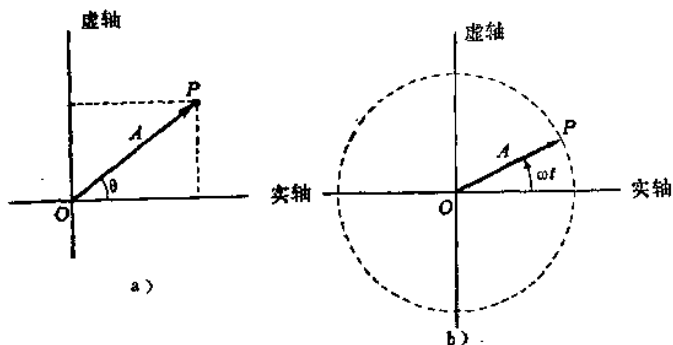


图 1-9

如果使矢量 \vec{OP} 绕 O 点以等角速度 ω 在复平面内逆时针旋转, 就成为一复数旋转矢量。它在任一瞬时的复角 $\theta = \omega t$, 表达式为

$$z = A(\cos \omega t + i \sin \omega t) = Ae^{i\omega t}$$

上一节已阐明, 任一简谐振动可以用一个旋转矢量在直角坐标轴上的投影来表示。因此, 我们同样可以用一个复数旋转矢量

⊙ 见附录 I。

在复平面的实轴或虚轴上的投影来表示一个简谐振动。由于本书采用旋转矢量在垂直轴上的投影，为了换算的方便，同样采用复数旋转矢量在虚轴上的投影。即

$$x = A \sin \omega t = I_m z = I_m [A e^{i\omega t}]$$

符号 $I_m z$ 即指取复数 z 的虚数部分的值。以后我们对复数的表达式

$$x = A e^{i\omega t} \quad (1.14)$$

不作特别说明时，即表示取虚数部分。

对于上节所述两个同频率简谐振动的合成，运用复数的运算法则可以方便地得出。将

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t = a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b \sin \omega t$$

用复数形式可表达为

$$x = a e^{i(\omega t + \pi/2)} + b e^{i\omega t}$$

根据复数相加，即得

$$\begin{aligned} x &= A e^{i(\omega t + \varphi)} \\ A &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{a}{b} \end{aligned}$$

以上关系用复数旋转矢量表示如图 1-10。

速度和加速度同样可用复数旋转矢量表示，并可用复数求导的方法得到位移、速度和加速度之间关系。设

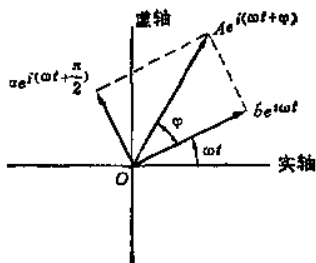


图 1-10

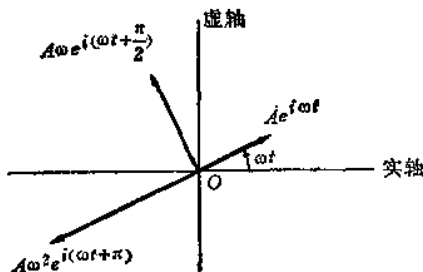


图 1-11

$$x = Ae^{i\omega t}$$

则

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}(Ae^{i\omega t}) = i\omega Ae^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} = -\frac{d}{dt}(\dot{x}) = -\frac{d}{dt}(i\omega Ae^{i\omega t}) = -\omega^2 Ae^{i\omega t}$$

因

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $e^{i\pi/2} = i$; $\theta = \pi$ 时, 有 $e^{i\pi} = -1$, 由此上两

式可写成

$$\dot{x} = A\omega e^{i(\omega t + \pi/2)} \quad (1.15)$$

$$\ddot{x} = A\omega^2 e^{i(\omega t + \pi)} \quad (1.16)$$

将以上位移、速度和加速度画在复平面上便如图 1-11 所示。从以上推导看到, 对复数 $Ae^{i\omega t}$ 每求导一次, 相当于在它的前面乘上一个 $i\omega$, 而每乘上一个 i , 相当于把这个复数旋转 矢量 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 。这给运算带来一定的方便。

1.5 谐波分析

前面所述的简谐振动是一种最简单的周期振动。实际问题中更多的是非简谐的周期振动。一般的周期振动可以通过谐波分析分解成简谐振动。

按照级数理论, 任何一个周期函数, 只要满足一定的条件, 都可以展开成富氏级数。这些条件是: 1. 函数在一个周期内连续或者只有有限个间断点, 而且间断点上函数左右极限都存在; 2. 在一个周期内只有有限个极大和极小值。把一个周期函数展开成一个富氏级数, 亦即展开成一系列简谐函数之和, 称为**谐波分析**。谐波分析是函数分析中一种常用的方法, 用于振动理论便可以把一个周期振动分解为一系列简谐振动的叠加。这对于分析位移、速度和加速度的波形, 以及分析周期激励力等都是很重要的。

现设有一个周期振动函数为 $F(t)$, 它的周期为 T , 可以展

开成富氏级数

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + \dots \\
 &\quad + b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \sin 2\omega_1 t + \dots \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

式中 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ 称为基频。 a_0 、 a_n 、 b_n 均为待定常数。只要函数 $F(t)$ 为已知，就可以用下述方法确定这些常数。求 a_0 时将 (1.17) 式的两边都乘以 dt ，求 a_n 时两边都乘以 $\cos n\omega_1 t dt$ ，求 b_n 时两边都乘以 $\sin n\omega_1 t dt$ ，然后依次在 $t = 0$ 到 $t = T$ 一个周期内逐项积分，利用三角函数族的正交性，就可得到 a_0 、 a_n 、 b_n 之值。

由三角函数正交性：

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \cos m\omega_1 t \cos n\omega_1 t dt &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases} \\
 \int_0^T \sin m\omega_1 t \sin n\omega_1 t dt &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases} \\
 \int_0^T \sin m\omega_1 t \cos n\omega_1 t dt &= \int_0^T \cos m\omega_1 t \sin n\omega_1 t dt = 0 \\
 \int_0^T \cos n\omega_1 t dt &= 0 \quad n \neq 0 \\
 \int_0^T \sin n\omega_1 t dt &= 0
 \end{aligned}$$

利用这些关系就使上述逐项积分的结果，在等式右边除了 $m = n$ 的一项外，其余各项都等于零，从而得到

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt \quad (1.18 a)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n\omega_1 t dt \quad (1.18 b)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (1.18c)$$

将 a_0 、 a_n 和 b_n 之值代入 (1.17) 式, 相应的富氏级数就完全确定。

由 1.3 节已知, 两频率相同的简谐振动可以合成一个简谐振动, 即

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = A_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

$$\text{式中 } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{tg } \varphi_n = -\frac{a_n}{b_n}$$

因此 (1.17) 式也可表达为

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (1.19)$$

为了把谐波分析的结果形象化, 可以把 A_n 和 φ_n 与 ω 之间的变化关系用图形来表示, 如图 1-12 所示。因为只是在 $n\omega_1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 各点 A_n 和 φ_n 才有一定的数值, 所以图形是一组离散的垂线。这种图形称为函数的频谱。

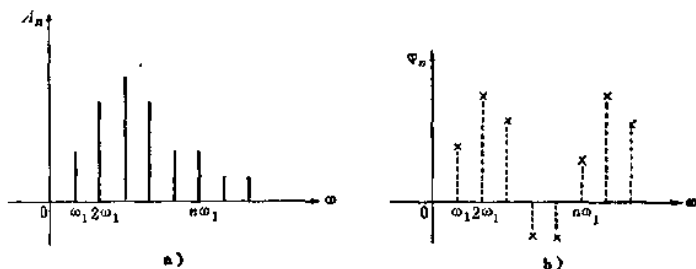


图 1-12

例1.1 一周期为 T 、振幅为 F_0 的矩形波, 如图 1-13 a) 所示。在一个周期内的函数表达式为

$$F = \begin{cases} F_0 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -F_0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

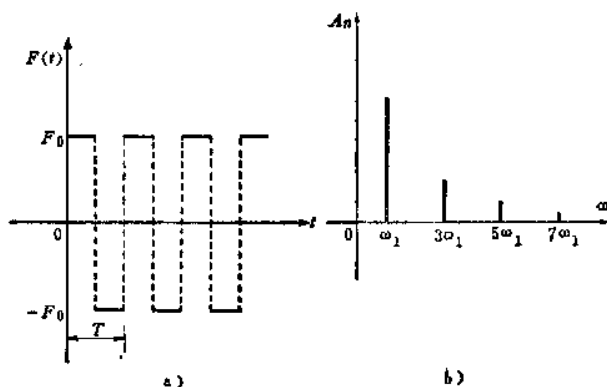


图 1-13

试展开为富氏级数。

解 将 $F(t)$ 按 (1.17) 式展开为富氏级数, 并用 (1.18) 式求各项常数。

由 (1.18 a)

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} F_0 dt - \int_{\frac{T}{2}}^T F_0 dt \right] = 0$$

由 (1.18 b), 因为函数 $F(t)$ 对 $t = \frac{T}{2}$ 是反对称的, 而 $\cos n\omega_1 t$ 对 $t = \frac{T}{2}$ 却是对称的, 所以两者乘积的积分必然等于零, 即 $a_n = 0$

由 (1.18 c),

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} F_0 \sin n\omega_1 t dt - \int_{\frac{T}{2}}^T F_0 \sin n\omega_1 t dt \right] \\ &= \frac{2F_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{4F_0}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

代入 (1.17) 式即得矩形波的富氏级数为

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \frac{4F_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_1 t \\
 &= \frac{4F_0}{\pi} \left[\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \dots \right]
 \end{aligned}$$

上式只包含正弦项，并且只有奇次项各次谐波。

我们知道一个函数 $F(t)$ ，如满足 $F(t) = F(-t)$ ，称为 t 的偶函数；如满足 $F(t) = -F(t)$ ，则称为 t 的奇函数。因为 $\cos n\omega_1 t$ 是 t 的偶函数， $\sin n\omega_1 t$ 是 t 的奇函数，所以如果 $F(t)$ 是偶函数，便不会有 $\sin n\omega_1 t$ 的各项，即 $b_n = 0$ ；反之，如果 $F(t)$ 是奇函数，就不会有 $\cos n\omega_1 t$ 的各项，即 $a_n = 0$ 。本题 $F(t)$ 为奇函数，所以展开后的富氏级数只有正弦项。

本题各次谐波的幅值为

$$A_1 = \frac{4F_0}{\pi}, \quad A_3 = \frac{4F_0}{3\pi}, \quad A_5 = \frac{4F_0}{5\pi}, \quad \dots$$

频谱图如图 1-13 b) 所示。

第二章 单自由度系统的自由振动

2.1 引言

在分析机械系统的振动问题时，往往需要把它简化为由若干“无质量”的弹簧和“无弹性”的质量所组成的模型，称为**弹簧质量系统**。如图 2-1 所示是一个最简单的振动系统，它只包含一个弹簧 K 和一个质量 m 。

一个振动系统的**自由度**是指在振动过程中任何瞬时都能完全确定系统在空间的几何位置所需要的独立坐标的数目。一个振动系统究竟有多少个自由度，常常是相当复杂的问题。这不仅取决于系统本身的结构特性，还要根据我们所研究的振动问题的性质、要求的精确度、以及振动的实际情况等等来确定。

简化的结果是否正确，最后还要经过实测来检验。本章不准备在这方面作过多的叙述，而只讨论单自由度系统。例如图 2-1 的弹簧质量系统，质量 m 作为一个质点在空间有三个自由度。但如果它只在垂直方向作上下振动，则在振动过程中任何瞬时，系统的几何位置便只需要用一个独立坐标 x 就可以完全确定，成为单自由度系统。

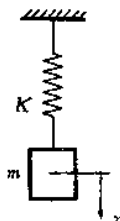


图 2-1

根据不同的振动形式，独立坐标可以选取线位移 $x(t)$ ，或者角位移 $\theta(t)$ 来表示。

例如图 2-2 a) 为一空气压缩机组，固定在混凝土基础上。我们现在只需研究压缩机组与基础的整体振动。由于压缩机组与基础本身的变形相对于地基土壤的变形是很小的，可以忽略不计，所以可把压缩机组和基础一起看成一刚性质量块。同时，参与振动的土壤的质量比之压缩机组与基础又可忽略，而可当作一个无

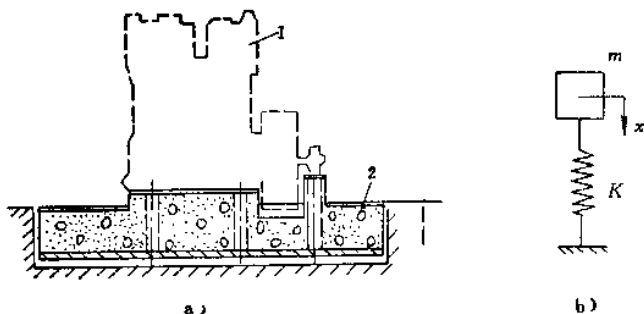


图 2-2

1—空气压缩机 2—基础

质量的弹簧。这样就简化成图 2-2 b) 所示的弹簧质量系统。严格地说, 压缩机组与基础作为一个刚体有六个自由度。但如抓住主要矛盾, 只研究其垂直方向的振动, 就可简化成一个单自由度系统。以质量块的垂直位移 $x(t)$ 为独立坐标便可完全描写出系统的振动状态。

图 2-3 是一个钟表摆轮游丝系统的结构简图。游丝的内端通过内桩装入摆轴, 外端通过外桩固定在夹板上。摆轮绕固定的摆轴往复摆动。这也是一个单自由度系统, 摆轮是质量, 游丝是弹簧。不过这里以摆轮自静平衡位置开始的角位移 $\theta(t)$ 作为独立坐标。

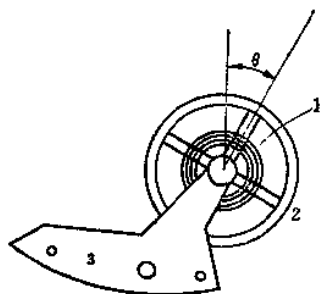


图 2-3

1—游丝 2—摆轮 3—夹板

图 2-4 是一种利用复摆法测定发动机连杆转动惯量的原理图。连杆在 O 点用一个摆动时摩擦力很小的刀口挂起来, 使连杆绕 O 轴往复摆动。利用测定连杆摆动的周期, 计算出连杆的转动惯量。这也是属于以角位移 $\theta(t)$ 为独立坐标的单自由度系统。

连杆的重力作用相当于弹簧作用。

上述以角位移 $\theta(t)$ 为独立坐标的系统振动称为**角振动**。

我们目前所要讨论的将局限于微幅振动问题（简称微振动）。所谓**微振动**是指系统受到外界干扰后，系统各个质点偏离静平衡位置，仅作微小的往复运动。系统在微振动过程中所受的各种力将认为只与位移、速度等成线性关系，而可以忽略可能出现的高阶微小量。反之，如果系统作较大幅度的振动时，往往导致非线性问题，这将在下册再详细讨论。

一个系统只在起始时受到外界干扰，例如用力将质量块偏离静平衡位置后突然释放，或者给质量块以突然一击使之得到一个初始速度，然后就靠系统本身的弹性恢复力维持的振动，称为**自由振动**。单自由度的自由振动是一种简谐振动。

单自由度系统是研究多自由度系统的基础。我们首先运用牛顿运动定律推导振动微分方程，这是解决振动问题的基本方法之一。

在系统作自由振动时，不论受到什么样的初始干扰，均将以一定的频率作振动。这种频率只决定于系统本身固有的物理性质，称为**固有频率**。固有频率是振动问题中的一个重要参数。为此本章介绍了静变形法、能量法、瑞雷法等多种计算固有频率的方法。

最后本章将讨论在振动过程中系统将遇到的阻力，称为**阻尼**。阻尼通常起消耗振动系统能量的作用，从而使自由振动振幅逐渐衰减而最后停止。但在某些情况中（如金属切削过程的振动中）阻尼并不总是消耗能量，而相反地对振动系统输入能量，称为负阻尼。

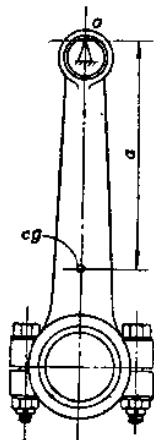


图 2-4

2.2 弹簧质量系统的自由振动

现在讨论一个如图 2-5 a) 所示的单自由度弹簧质量系统。质

量块的质量为 m ，单位为 $\text{kg} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$ 。它所受的重力为 W 。弹簧刚度为 K ，它是弹簧每伸长或缩短一个单位长度所需施加的力，常用单位为 kg / cm 。

当质量块没有加到弹簧上时，弹簧处于自由状态，不受压缩，它的位置如图 2-5 a) 中虚线所示。当质量块联结到弹簧之上而没有振动时，系统处于静平衡状态，弹簧受重力 W 的作用而产生压缩变形 λ_s ，称为系统的静变形。此时质量块的受力情况如图 2-5 b) 所示。由静平衡条件得

$$K \lambda_s = W \quad (2.1)$$

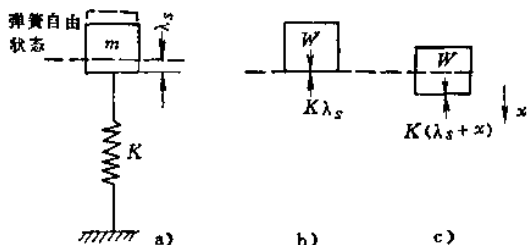


图 2-5

当这个系统受到外界某种初始干扰，使系统的静平衡状态遭到破坏，则弹簧力将不再与重力平衡，而产生不平衡的弹性恢复力，系统就依靠这种弹性恢复力维持自由振动。

现在考虑系统在垂直方向的振动。首先建立座标，为了简便，将座标原点放在静平衡位置，以 x 表示质量块由静平衡位置算起的垂直位移，向下为正。分析质量块在振动过程中任一瞬时位置的受力情况，如图 2-5 c)。此时质量块重力 W 不变，而弹簧力已增加到 $K(\lambda_s + x)$ 。这两个力不再平衡，使质量块产生加速度运动。根据牛顿运动定律：作用于一个质点上所有力的合力等于该质点的质量和沿合力方向的加速度的乘积。取所有与 x 方向一致的力、速度和加速度为正，便得到运动微分方程式

$$\Sigma F = W - K(\lambda_s + x) = m \ddot{x}$$

由 (2.1) 式, $K\lambda_s = W$, 上式可简化为

$$m\ddot{x} = -Kx$$

或

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \quad (2.2)$$

这就是单自由度系统自由振动的微分方程式。由方程 (2.2) 式可见, 质量块的重力只对弹簧的静变形 λ_s 有影响, 即只改变了质量块的静平衡位置, 而不影响质量块在静平衡位置附近作振动的规律。所以当取静平衡位置为坐标原点建立运动微分方程时, 在方程式中就可以不出现重力的项。

(2.2) 式中 $-Kx$ 称为**弹性恢复力**。它的大小和位移 x 的大小成正比, 但它的方向却始终和位移的方向相反, 即始终指向静平衡位置。这正是上一章讨论过的简谐振动的一个特点。

下面解微分方程 (2.2) 式。引进符号 p

$$p^2 = \frac{K}{m} \quad (2.3)$$

(2.2) 式可改写为

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad (2.4)$$

显然, $x = e^{st}$ 是方程式 (2.4) 的一个解。代入 (2.4) 式, 可得

$$(s^2 + p^2)e^{st} = 0$$

得特征方程

$$s^2 + p^2 = 0$$

解出

$$s = \pm ip$$

因此, 方程 (2.4) 式的通解为

$$x = c_1 e^{ipt} + c_2 e^{-ipt}$$

由欧拉方程 $e^{ipt} = \cos pt + i \sin pt$ 上式可化为

$$x = b_1 \cos pt + b_2 \sin pt \quad (2.5)$$

式中

$$b_1 = c_1 + c_2, \quad b_2 = i(c_1 - c_2)$$

它们是两个待定常数, 将由振动的初始条件决定。从 (2.5) 式可以看到, 一个弹簧质量系统的自由振动包含两个频率相同的简谐振动, 一个正比于 $\cos pt$, 另一个正比于 $\sin pt$ 。上一章已

经证明, 这样的两个同频率的简谐振动, 合成后仍然是一个简谐振动。可用下式表达

$$x = A \sin(pt + \varphi) \quad (2.6)$$

式中 $A = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_1}{b_2}$$

当然, (2.5) 式也可以用余弦函数来表达

$$x = A \cos(pt - \varphi')$$

此处

$$\varphi' = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_2}{b_1}$$

φ' 与 φ 角互为余角。可见一个单自由度系统的自由振动是简谐振动。

简谐振动的圆频率为 p , 称为**固有圆频率**。由 (2.3) 式

$$p = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad 1/s \quad (2.7)$$

固有频率为 f

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{Hz} \quad (2.8)$$

周期为

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad s \quad (2.9)$$

自由振动的固有频率和周期仅决定于系统本身的物理性质, 质量 m 和弹簧刚度 K , 与由初始条件决定的振幅无关。这种线性系统自由振动所具有的性质称为**等时性**。所以只要系统的质量 m 和弹簧刚度 K 一旦确定, 固有频率就是一定值。刚度相同的两个系统, 质量大的系统固有频率低, 质量小的系统固有频率高。质量相同的两个系统, 则弹簧刚度小的固有频率低, 弹簧刚度大的固有频率高。

从力学分析上可作这样的解释: 弹簧刚度大, 表示在同样的位移条件下, 振动系统有较大的弹性恢复力, 使质量块产生较大

的加速度。由于

$$a = \ddot{x} = -Ap^2 \sin(pt + \varphi)$$

即固有频率是和加速度的平方根成正比的, 所以导致固有频率高。如果质量大, 则惯性大, 在同样弹性恢复力作用下, 质量块的加速度小, 频率低。

(2.5) 式中的两个待定常数 b_1 和 b_2 必须根据振动的初始条件决定。设振动的初始条件为

$$t = 0 \text{ 时, } x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$$

不难解出

$$x = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt \quad (2.10)$$

(2.10) 式称为系统对于初始条件为 x_0 与 \dot{x}_0 的响应。同时, 根据 (2.6) 式可求出

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2} \\ \varphi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{x_0 p}{\dot{x}_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

A 是系统自由振动的振幅。它表示质量块离开静平衡位置的最大位移。 φ 称为初相位。如图 2-6 所示。

A 与 φ 都决定于初始条件是自由振动的共同特性。

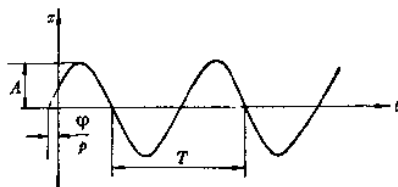


图 2-6

例 2.1 一台电动机重 47kg, 转速为 1430rpm, 固定在两根 5 号槽钢组成的简支梁上的中点, 如图 2-7 a)。每根槽钢长 1.2m, 重 6.528kg, $EJ = 16.6 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ 。试求此系统的固有频率。

解 将上述系统简化成一个弹簧质量系统, 如图 2-7 b)。槽钢重量与电动机重量相比不可忽略, 将槽钢质量的一半加在电动

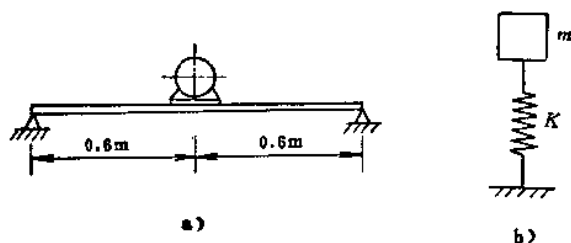


图 2-7

机质量上一起作为一个质量块。后面就要看到，这样的近似计算所得结果的误差是很小的。不然，我们就得把梁按无限多自由度的弹性梁来处理，这将在第七章再探讨。

现在质量块的质量为

$$m = \frac{W}{g} = \frac{47 + 6.528}{980} = 0.0546 \quad \text{kg} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$$

槽钢相当于一根弹簧。根据材料力学中简支梁的挠度公式，在梁中点作用一垂直力 p 时该点的挠度为

$$y = \frac{p l^3}{48 E J}$$

于是简支梁的弹簧刚度为

$$K_1 = \frac{p}{y} = \frac{48 E J}{l^3}$$

两根槽钢的总弹簧刚度为

$$K = 2 \times \frac{48 E J}{l^3} = \frac{2 \times 48 \times 16.6 \times 10^4}{(120)^3} = 922 \quad \text{kg/cm}$$

系统的固有圆频率为

$$p = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{922}{0.0546}} = 130 \quad 1/\text{s}$$

固有频率为

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{130}{2\pi} = 20.7 \quad \text{Hz}$$

或

$$f = 20.7 \times 60 = 1242 \quad \text{c/min}$$

这个数值和电动机转速 1430 r/min 是很接近的。下一章就要看到, 固有频率和电动机转速过于接近时, 将使系统发生剧烈的振动。为了避免这种现象, 可以设法降低系统的固有频率。比较方便的办法是降低系统的弹簧刚度。这里只要稍为增加梁的长度就可以达到目的, 因为梁的弹簧刚度是和梁的长度的三次方成反比的。若将梁的长度增加到 1.5 m , 系统的固有频率就下降到 874 c/min , 就可远离电动机的转速了。

例2.2 一卷扬机通过钢丝绳, 绕过固定滑轮吊起一重物 $W = 15 \text{ T}$, 如图 2-8 a)。钢丝绳的弹簧刚度为 $K = 5.9 \text{ T/cm}$, 以 $v = 15 \text{ m/min}$ 的速度下降。如果卷扬机突然刹车, 钢丝绳上端突然停止。求钢丝绳中所受的最大张力。

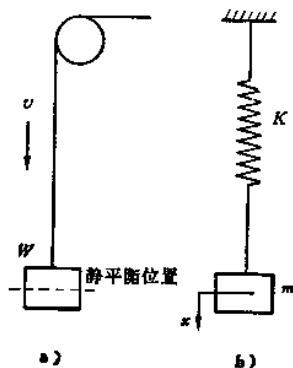


图 2-8

解 在重物等速下降时, 根据静平衡条件, 钢丝绳内张力为

$$T_1 = W = 15 \text{ T}$$

钢丝绳上端突然停止时, 重物由于惯性而继续往下运动, 开始对静平衡位置作上下自由振动。这种情况可简化如图 2-8 b)。因此它的振动微分方程就是 (2.2) 式。微分方程的解就是 (2.6) 式。其固有频率为:

$$p = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{5.9 \times 980}{15}} = 19.6 \text{ 1/s}$$

其振幅, 由 (2.11) 式为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2}$$

振动开始时, $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v$, 代入上式得

$$A = \frac{v}{p} = \frac{1500}{19.6 \times 60} = 1.27 \text{ cm}$$

由于振动而引起的钢丝绳中的动张力为

$$T_2 = K A = 5.9 \times 1.27 = 7.49 \quad \text{T}$$

钢丝绳中总的最大张力为

$$T = T_1 + T_2 = 15 + 7.49 = 22.49 \quad \text{T}$$

可见钢丝绳中由于振动而增加的动张力几乎是静张力的50%，是一个不小的数值，很可能导致钢丝绳的损坏，在运行中应避免这种情况。应该指出的是这部分增加的动张力是与弹簧刚度 K 的平方根成正比的，因为

$$T_2 = K A = K \frac{v}{p} = v \sqrt{K m}$$

这就是说，对于承受突然冲击载荷的零件，刚度较小的为有利。采用如图2-9的弹簧减振钩就是为了缓和冲击载荷。这种减振钩内加进了一个圆柱螺旋压缩弹簧，等于串联了一个刚度较小的弹簧，从而降低了系统的刚度，减小了钢丝绳所受的冲击载荷。

静变形法 由(2.8)式可以导出计算一个单自由度系统固有频率的另一种方法，称为静变形法。

由(2.1)式

$$K = \frac{W}{\lambda_s} = \frac{mg}{\lambda_s}$$

代入(2.8)式

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\lambda_s}} \quad (2.12)$$

由(2.12)式，只要知道在质量块处的静变形 λ_s ，就可以直接计算系统的固有频率。这在有些实际问题中，不能直接给出系统的弹簧刚度 K 时，利用它计算固有频率是比较方便的。

例2.3 设有一悬臂梁如图2-10，长度为 l ，抗弯刚度为 EJ ，自由端有一集中质量 m 。梁本身重量可以忽略不计。试求这个系统的固有频率。



图 2-9

解 由材料力学知道, 悬臂梁在自由端由集中力 mg 引起的静挠度为

$$\lambda_s = \frac{mg l^3}{3EJ}$$

代入 (2.12) 式即得

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{m l^3}}$$



图 2-10

如果上述悬臂梁是变截面的, 因而不易用计算方法得到静挠度时, 可用实测该梁在重量 mg 作用下的静挠度 λ_s , 代入 (2.12) 式计算。

2.3 角 振 动

现在讨论需要用角位移 θ 作为独立坐标来表达振动状态的角振动问题。在这种情况下, 我们运用牛顿运动定律得到转动方程式

$$I\ddot{\theta} = \Sigma M \quad (2.13)$$

式中 I 是转动物体对于转动轴的转动惯量, $\ddot{\theta}$ 是角加速度, M 为施加于转动物体上的力矩, 它的方向与 θ 角位移一致时为正。

以扭转振动和复摆两种情况为例。

(1) 扭转振动

如图 2-11 所示的一根垂直轴, 下端固定着一个水平圆盘。圆盘的转动惯量为 I 。轴的扭转刚度为 K_θ 。它的含义是使轴转动一单位转角所需施加的力矩, 单位是 $\text{kg} \cdot \text{cm}/\text{rad}$ 。对于一根长度为 l , 直径为 d 的圆轴, 根据材料力学, 它的扭转刚度为

$$K_\theta = \frac{\pi d^4 G}{32 l} \quad (2.14)$$

G 为材料的剪切弹性模量。轴本身质量忽略不计。

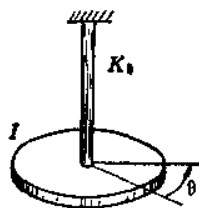


图 2-11

当系统受到某种干扰, 如在圆盘平面上

加一力偶，然后突然除去，系统便作扭转自由振动。如果没有阻尼，振动将永远继续下去。

设 θ 为圆盘上任一半径从它的静平衡位置量起的角位移，按图示方向为正。振动时圆盘上受到一个由圆轴作用的、与 θ 方向相反的弹性恢复力矩 $-K_\theta\theta$ 。根据 (2.13) 式，取 $\ddot{\theta}$ 正方向与 θ 的方向一致，得系统扭振的微分方程式

$$I\ddot{\theta} = -K_\theta\theta$$

$$\text{或} \quad \ddot{\theta} + p^2\theta = 0 \quad (2.15)$$

$$\text{式中} \quad p^2 = \frac{K_\theta}{I} \quad (2.16)$$

这是和 (2.4) 式完全相似的微分方程式，因此我们可以直接写出其通解

$$\theta = A \sin(pt + \varphi) \quad (2.17)$$

式中 A 与 φ 同样是两个待定常数，决定于扭转振动的初始条件：

$$t = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0.$$

$$A = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{p}\right)^2} \quad (2.18)$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\dot{\theta}_0 p}{\theta_0} \quad (2.19)$$

一个单自由度系统的扭振也是简谐振动。它的固有圆频率由 (2.16) 式得

$$p = \sqrt{\frac{K_\theta}{I}} \quad (2.20)$$

固有频率为

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_\theta}{I}} \quad (2.21)$$

周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K_\theta}} \quad (2.22)$$

例2.4 如图 2-12 a) 所示一根轴的两端各固定一圆盘。它们绕转动轴的转动惯量分别为 I_1 与 I_2 。轴的长度为 l ，扭转刚度

为 K_0 。求系统扭振的固有频率。

解 这个系统有两个自由度，但我们可以用下面的方法把它处理成单自由度系统。

根据动量矩守恒定律，如忽略轴承摩擦，在振动过程中轴两端的圆盘将永远作相反方向微摆动。因此在轴中间必有一个截面 mn 是始终不动的。这个截面称为**节截面**。它把系统分成如图2-12 b) 那样的两个单自由度扭振系统。这两个单自由度系统的固有频率显然相等，即

$$\sqrt{\frac{K_{01}}{I_1}} = \sqrt{\frac{K_{02}}{I_2}}$$

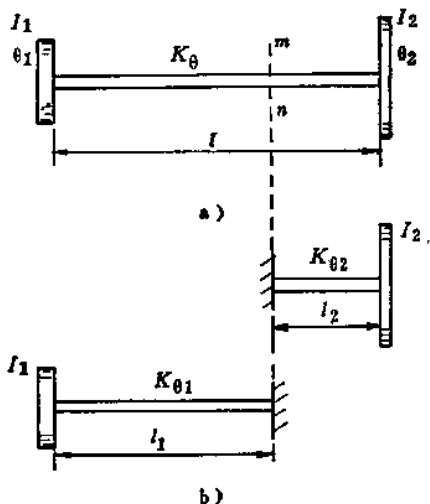


图 2-12

式中 K_{01} 与 K_{02} 分别为左右两部分轴的扭转刚度。由 (2.14) 式可知轴的扭转刚度 K_0 与轴的长度 l 成反比。故有

$$\frac{K_{01}}{K_{02}} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

因 $l = l_1 + l_2$ ，利用上式可得

$$l_1 = \frac{l I_2}{I_1 + I_2}, \quad l_2 = \frac{l I_1}{I_1 + I_2}$$

取轴左边部分，并注意到 $K_{01} = \frac{l}{l_1} K_0$ ，由 (2.21) 式得

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{01}}{I_1}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{l_1} \frac{K_0}{I_1}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_0(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$$

(2) 复摆

一个刚体由于本身重力作用而绕某一轴作微摆动，称为复摆（或称物理摆），如图 2-13。这时转动轴称为摆的悬挂轴（或称

悬点)。设刚体重量为 W ，对悬点 O 的转动惯量为 I_o ，重心 C 至悬点 O 距离为 a 。

以 θ 表示摆在任意瞬时偏离垂直平衡位置的角位移，此时重心 C 作圆弧运动，重力的切向分力 $W \sin \theta$ 将产生一个恢复力矩 $W a \sin \theta$ 。根据转动方程

(2.13) 式，可得复摆的微分方程

$$I_o \ddot{\theta} = -W a \sin \theta$$

上式是非线性微分方程式。在微摆动时， $\sin \theta \approx \theta$ ，上式可简化为

$$I_o \ddot{\theta} + W a \theta = 0$$

$$\text{或} \quad \ddot{\theta} + \frac{W a}{I_o} \theta = 0 \quad (2.23)$$

这是一个与扭摆同一形式的微分方程，它的通解是

$$\theta = A \sin \left(\sqrt{\frac{W a}{I_o}} t + \varphi \right) \quad (2.24)$$

固有圆频率为

$$p = \sqrt{\frac{W a}{I_o}} \quad (2.25)$$

固有频率为

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{W a}{I_o}} \quad (2.26)$$

利用 (2.26) 式，用实验方法测定 f 后，便可计算出刚体的转动惯量 I_o 。

$$I_o = \frac{W a}{(2\pi f)^2} \quad (2.27)$$

再根据转动惯量的移轴定理，可计算出刚体绕重心轴的转动惯量 I_c 。

$$I_c = I_o - \frac{W}{g} a^2$$

以上是一种测定形状比较复杂的构件 (如图 2-4 的发动机连

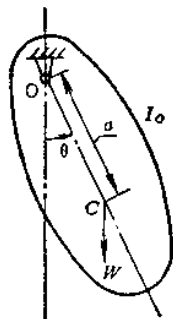


图 2-13

杆)的转动惯量常用的实验方法。

例2.5 图2-14是某汽车实验室内用复摆法同时测定汽车重心离地面的高度 h ，和汽车绕自身重心轴 C 的转动惯量 I_c 的实验装置。实验台本身是一个复摆，用摆动时摩擦力很小的刀口支承在悬点 O 上。实验台框架的高度 H 可以根据需要加以调节。对于不同的高度 H ，实验台本身的重心高度和绕 O 点的转动惯量都是已知的。设汽车本身重量已测定为 W_c ，试推导出利用实验台测定汽车重心高度 h 的公式。

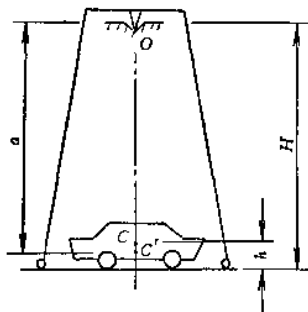


图 2-14

解 若以周期为实验中测定的参数，(2.27)式可改写为

$$I_o = \frac{T^2}{4\pi^2} W a \quad (a)$$

在测定摆动周期 T 后，只要知道重心至悬点距离 a ，便可计算出转动惯量 I_o 。反之，已知 I_o 时，可算出 a 。

现在汽车重心位置和转动惯量都是待定值，所以我们采用两次测定的办法。先把实验台调整在高度 H_1 ，将汽车放在台面上和实验台一起绕 O 轴作微摆动，测得摆动周期 T_1 。然后调节实验台高度至 H_2 ，再放上汽车作微摆动，测得摆动周期为 T_2 。根据两次测定的周期便可导出汽车重心高度 h 的计算公式。引入下列符号：

I_o 为实验台绕悬点 O 的转动惯量；

I_c 为汽车绕自身重心 C 的转动惯量；

W 为实验台的重量；

W_c 为汽车的重量；

H 为实验台的高度；

a 为实验台重心 C' 至悬点 O 的距离；

h 为汽车重心 C 至台面的高度。

以上符号分别用脚注 1 与 2 表示第一次与第二次实验的数值。

现在复摆由两个刚体组成：实验台与汽车。(a) 式中的 I_c 与 $W a$ 都将由两部分组成。根据两次测定的周期 T_1 与 T_2 ，可列出两个式子。

第一次测定

$$I_{s1} + I_c + \frac{W_c}{g} (H_1 - h)^2 = \frac{T_1^2}{4\pi^2} [W_s a_1 + W_c (H_1 - h)] \quad (b)$$

第二次测定

$$I_{s2} + I_c + \frac{W_c}{g} (H_2 - h)^2 = \frac{T_2^2}{4\pi^2} [W_s a_2 + W_c (H_2 - h)] \quad (c)$$

由 (b) (c) 两式可解出 I_c 与 h 两个未知数。将 (b) 式减去 (c) 式，消去 I_c ，经过整理后，得

$$h = \frac{B - A}{C} \quad (d)$$

(d) 式中

$$A = 4\pi^2 \left[I_{s1} - I_{s2} + \frac{W_c}{g} (H_1^2 - H_2^2) \right]$$

$$B = W_s (T_1^2 a_1 - T_2^2 a_2) + W_c (T_1^2 H_1 - T_2^2 H_2)$$

$$C = W_c \left[T_1^2 - T_2^2 - \frac{8\pi^2}{g} (H_1 - H_2) \right]$$

显然，用 (d) 式算出汽车重心高度 h 后，代入 (b) 或 (c) 的任一式子，即可算出 I_c 。读者可自行推导。

2.4 能 量 法

当弹簧质量系统作自由振动而忽略阻尼不计时，它就没有能量损失。根据机械能守恒定律，在整个振动过程中任一瞬时机械能应保持不变。即

$$T + U = \text{常数} \quad (2.28)$$

$$\text{或} \quad \frac{d}{dt}(T + U) = 0 \quad (2.29)$$

式中 T 为系统中运动质量所具有的动能, U 为系统由于弹性变形而储存的弹性势能, 或由于重力作功而产生的重力势能。

正是由于机械能守恒, 系统才能维持持久的等幅振动。

(2.28) 式也可写成下面形式:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

即任意选择两个瞬时位置 1 与 2, 其机械能的总和应该相等。利用这个关系, 适当选择两个瞬时位置, 就可用来直接计算系统的固有频率。这对于比较复杂的系统常常是一种计算系统固有频率的简便方法。

对于简谐振动, 我们通常选择质量块正经过静平衡位置时作为第一瞬时位置。此时速度最大, 动能也最大, $T_1 = T_{\max}$ 。取此时为势能 $U_1 = 0$ 的参考位置。再选择质量块达到最大位移时作为第二瞬时位置。此时速度为零, 动能 $T_2 = 0$, 而势能为最大 $U_2 = U_{\max}$ 。这样就有

$$T_1 = U_2$$

$$\text{或} \quad T_{\max} = U_{\max} \quad (2.30)$$

利用 (2.30) 式可直接得到系统的固有频率。

例如图 2-15 的弹簧质量系统, 作水平方向的自由振动。因为是简谐振动, 设

$$x = A \sin(pt + \varphi)$$

$$\text{由此得} \quad \dot{x} = Ap \cos(pt + \varphi)$$

$$x_{\max} = A$$

$$\dot{x}_{\max} = Ap$$

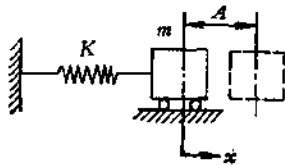


图 2-15

质量块经过静平衡位置时

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} m A^2 p^2$$

达到最大位移时

$$U_{\max} = \frac{1}{2} K x_{\max}^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

由 (2.30) 式

$$\frac{1}{2} m A^2 p^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

得

$$p = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

例2.6 图 2-16 所示为测量低频振幅用的传感器中的一个元件——无定向摆的示意图。无定向摆的摆轮上铰接一摇杆，摇杆另一端有一敏感质量 m 。在摇杆离转动轴 O 距离为 a 的某个位置左右各联结一刚度为 K 的平衡弹簧，以保持摆在垂直方向的稳定位置。

设已知整个系统对转动轴 O 的转动惯量为

$$I_o = 1.76 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2$$

$$a = 3.54 \text{ cm}$$

$$K = 0.03 \text{ kg/cm}$$

$$W = 0.0856 \text{ kg}$$

$$l = 4 \text{ cm}$$

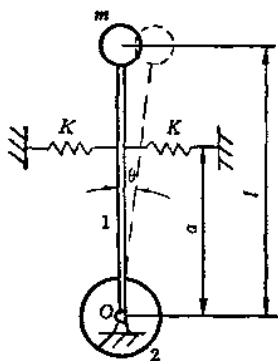


图 2-16

1—摇杆 2—摆轮

试求系统的固有频率。

解 以摇杆偏离静平衡位置的角位移 θ 为参数，并设

$$\theta = A \sin(pt + \varphi)$$

则

$$\dot{\theta} = Ap \cos(pt + \varphi)$$

$$\theta_{\max} = A$$

$$\dot{\theta}_{\max} = Ap$$

在摇杆摆过静平衡位置时，系统具有最大动能。

$$T_{\max} = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}_{\max}^2 = \frac{1}{2} I_o A^2 p^2$$

在摇杆摆到最大角位移 θ_{\max} 处时, 系统的最大势能包括两部分。弹簧变形后储存的弹性势能为

$$U_{1\max} = 2 \cdot \frac{1}{2} K a^2 \theta_{\max}^2 = K a^2 A^2$$

质量块 m 的重心下降后的重力势能为

$$\begin{aligned} U_{2\max} &= -mgl(1 - \cos \theta_{\max}) \\ &\approx -mgl\theta_{\max}^2/2 = -mglA^2/2 \end{aligned}$$

由 $T_{\max} = U_{\max}$

$$\frac{1}{2} I_o A^2 p^2 = K a^2 A^2 - \frac{1}{2} mgl A^2$$

得

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{2Ka^2 - mgl}{I_o}} \\ f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2Ka^2 - mgl}{I_o}} \end{aligned}$$

代入数据, 得

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \times 0.03 \times 3.54^2 - 0.0856 \times 4}{1.76 \times 10^{-2}}} = 0.77 \text{ Hz}$$

由此看到传感器的敏感系统的固有频率很低, 因而可以用来测量约在 $2 \sim 80\text{Hz}$ 频率范围的低频振动。

例2.7 图2-17表示一半径为 r , 重量为 W 的圆柱体在一个半径为 R 的圆柱面内作无滑动的滚动, 以圆柱面最低位置 O 为平衡位置作左右微摆动。这种情况在以后要讨论的离心摆式动力减振器中会遇到。现在先推导此圆柱体摆动的微分方程。

解 圆柱体在摆动时有两种运

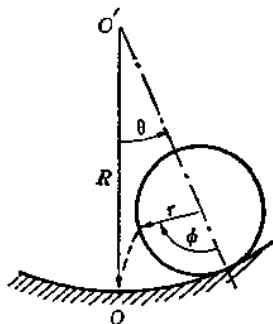


图 2-17

动，移动和滚动。设 θ 座标如图。

移动时圆柱体质心的线位移为 $(R - r)\theta$ ，其线速度为

$$v = (R - r) \dot{\theta}$$

滚动时圆柱体绕质心轴转动，由于无滑动，角速度为

$$\omega = \frac{v}{r} = \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \dot{\theta}$$

任一瞬时位置，圆柱体的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{W}{g} [(R - r) \dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2} \frac{W}{g} \frac{r^2}{2} \left[\left(\frac{R}{r} - 1 \right) \dot{\theta} \right]^2 \\ &= \frac{3}{4} \frac{W}{g} (R - r)^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

式中 $m = \frac{W}{g}$ 为圆柱体的质量， $I = \frac{W}{g} \frac{r^2}{2}$ 为圆柱体绕质心轴的转动惯量。

圆柱体的势能为相对于最低位置 O 的重力势能。在同一瞬时圆柱体质心升高了

$$(R - r)(1 - \cos \theta)$$

$$\text{故} \quad U = W(R - r)(1 - \cos \theta)$$

由 (2.29) 式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T + U) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{3}{4} \frac{W}{g} (R - r)^2 \dot{\theta}^2 \right. \\ &\quad \left. + W(R - r)(1 - \cos \theta) \right] \\ &= \left[\frac{3}{2} \frac{W}{g} (R - r)^2 \ddot{\theta} + W(R - r) \sin \theta \right] \dot{\theta} = 0 \end{aligned}$$

对于微摆动， $\sin \theta \approx \theta$ ，上式可简化为

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R - r)} \theta = 0$$

从式中可知系统固有圆频率为

$$p = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

2.5 瑞 雷 法

在以上讨论中，我们都假设系统中弹簧的质量是可以忽略不计的。这样的简化，在许多实际问题中可能已经足够准确。但在另一些工程问题中弹簧本身的质量可能占系统总质量的一定比例（如例 2.1 中梁本身重量）而不能被忽略。如果忽略这部分弹簧的质量，将会导致计算出来的固有频率偏高。

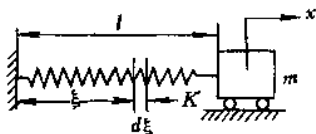


图 2-18

如果考虑弹簧本身的质量，我们就要面临解决一个分布质量系统的振动问题。这将在第七章中加以讨论。这里介绍一种近似计算的方法，称为**瑞雷 (Rayleigh) 法**。它运用能量原理，把一个分布质量系统简化为一个单自由度系统，从而把弹簧分布质量对系统振动频率的影响考虑进去，得到了相当准确的固有频率值。

现在以图 2-18 所示的弹簧质量系统为例。在应用瑞雷法时，必须先假定一个系统的振动形式。这里我们假设弹簧各截面在振动过程中任一瞬时的位移和一根等直杆在一端固定另一端受轴向静载荷作用下各截面的位移一样。根据材料力学，这时各截面的位移与它离固定端的距离成正比。设弹簧在联结质量块的一端位移为 x ，弹簧轴向长度为 l ，则距固定端 ξ 处的位移为 $\frac{\xi x}{l}$ 。因此，当质量块 m 在某一瞬时的速度为 \dot{x} 时，弹簧在 ξ 处的微段 $d\xi$ 的相应速度为 $\frac{\xi \dot{x}}{l}$ 。

设 ρ 为弹簧单位长度的质量，则弹簧微段 $d\xi$ 的动能为

$$\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\xi \dot{x}}{l} \right)^2 d\xi$$

整个弹簧的动能为

$$T_s = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left(\frac{\xi \dot{x}}{l} \right)^2 d\xi = \frac{1}{2} \frac{\rho l}{3} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{m'}{3} \dot{x}^2$$

式中 $m' = \rho l$ 是整个弹簧的质量。

于是整个系统的总动能为质量块 m 的动能和弹簧质量的动能之和。在质量块经过静平衡位置时, 系统最大动能为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{\max}^2 + \frac{1}{2} \frac{m'}{3} \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m'}{3} \right) \dot{x}_{\max}^2$$

系统的势能将仍和忽略弹簧质量时一样。

$$U_{\max} = \frac{1}{2} K x_{\max}^2$$

由 $T_{\max} = U_{\max}$,

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{m'}{3} \right) \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} K x_{\max}^2$$

对于简谐振动, $x = A \sin(pt + \varphi)$

$$x_{\max} = A$$

$$\dot{x}_{\max} = A p$$

代入得 $\left(m + \frac{m'}{3} \right) A^2 p^2 = K A^2$

$$p = \sqrt{\frac{K}{m + \frac{m'}{3}}} \quad (2.31)$$

这个结果说明, 只要把三分之一弹簧质量 (不是全部弹簧质量) 当作一个集中质量加到质量块上去, 就可以把弹簧质量对系统固有频率的影响考虑进去。这样的近似解在实用上是比较满意的。例如当 $m' = \frac{1}{2} m$ 时, 上述近似值与准确解相比误差约为 0.5%, $m' = m$ 时, 误差约为 0.75%, 而 $m' = 2m$ 时, 误差也仅为 3%。

(2.31) 式中的 $\frac{m'}{3}$ 通常称为**等效质量**。对于不同的振动系统, 等效质量是不同的, 需要根据具体情况作具体分析计算。从

上面运算过程可以看到, 由于系统的势能没有改变, 只要把弹簧分布质量的 T_1 等于以等效质量作为集中质量的动能, 就可以算出等效质量的值。以 m_e 表示等效质量, 可表达如下

$$T_1 = \frac{1}{2} m_e \dot{x}^2 \quad (2.32)$$

应用瑞雷法求解系统自由振动的固有频率时, 所假定的振动形式越接近实际的振动形式, 所得近似值就越接近准确解。实践证明, 以静变形作为假定的振动形式, 所得近似解与准确解比较, 一般说误差是很小的。

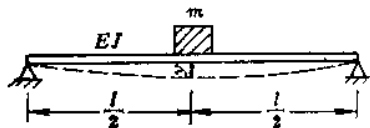


图 2-19

例2.8 设有一均质等截面简支梁, 如图 2-19。在中间有一集中质量 m 。如把梁本身质量考虑在内, 试计算此系统的固有频率和梁的等效质量。

解 假定梁在自由振动时的动挠度曲线和简支梁中间有集中静载荷 mg 作用下的静挠度曲线一样。由材料力学知道

$$y = \frac{mg}{48EJ} (3l^2 x - 4x^3) = f \cdot \frac{3l^2 x - 4x^3}{l^3}$$

式中 f 为中点挠度。

$$f = \frac{mgl^3}{48EJ}$$

把上式作为梁在自由振动过程中任一瞬时各截面的垂直位移, 亦即梁的振动形式。此时式中 y 与 f 都将随时间变化。

因为是简谐振动, 设

$$f = A \sin(pt + \varphi)$$

则

$$\dot{f} = A p \cos(pt + \varphi)$$

$$\dot{y} = \dot{f} \cdot \frac{3l^2 x - 4x^3}{l^3}$$

设 ρ 为梁单位长度的质量, 整个梁的动能为

$$\begin{aligned}
 T_s &= 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} \rho \left(\dot{x} \frac{3l^2 x - 4x^3}{l^3} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{17}{35} \rho l \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{35} m' \right) \dot{x}^2
 \end{aligned}$$

式中 $m' = \rho l$ 为整个梁的质量, 由 (3.32) 式, 显然梁的等效质量 m_s 为

$$m_s = \frac{17}{35} m'$$

即差不多是梁总质量的一半。在例 2.1 中将槽钢重量的一半加在电动机质量上, 就是根据等效质量的计算而来的。

现在系统的最大总动能为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{17}{35} m' \right) \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{17}{35} m' \right) A^2 p^2$$

而梁的最大弹性势能仍为

$$U_{\max} = \frac{1}{2} K x_{\max}^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

由 $T_{\max} = U_{\max}$,

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{17}{35} m' \right) A^2 p^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

得

$$p = \sqrt{\frac{K}{m + \frac{17}{35} m'}}$$

式中 K 为梁的弹簧刚度, 对于简支梁带有中间集中质量时,

$$K = \frac{48 E J}{l^3}$$

建议读者自己证明: 一个等截面悬臂梁在自由端的等效质量为 $m_s = \frac{33}{140} m'$ 。假定梁自由振动时的振动形式和悬臂梁在自由端加一集中静载荷时的静挠度曲线一样。

2.6 等效刚度

实际的机械系统常常简化成弹簧质量系统分析它的振动特性。这就要求确定实际机械系统在简化后的振动系统中的等效质量和相应的弹簧刚度，或简称刚度。等效质量的计算方法已在上一节讨论过。这里进一步讨论刚度的计算方法。

刚度 K 的定义是使系统（实际的机械系统或简化后的弹簧质量系统）的某点沿指定方向产生单位位移（或角位移）时，在该点同一方向所要施加的力（或力矩），称为系统在该点沿指定方向的刚度。

设指定方向的位移为 x ，在该方向所要施加的力为 F ，则刚度 K 为

$$K = \frac{F}{x} \quad (2.33)$$

以一端固定的等直圆杆为例，如图2-20。

设杆长为 l ，截面积为 A ，截面惯性矩为 J ，截面极惯性矩为 J_p ，材料弹性模量为 E ，剪切弹性模量为 G 。设置 xoy 坐标如图。试确定自由端 B 处在 x 方向， y 方向和绕 x 轴转动的方向的刚度。

确定沿 x 方向的刚度时，在 B 处沿 x 方向加一垂直 F 力。根据材料力学中等直杆简单拉伸的变形公式， B 点在 x 方向的位移为

$$x_B = \frac{Fl}{EA}$$

B 点在 x 方向的刚度为

$$K_x = \frac{F}{x_B} = \frac{EA}{l}$$

这时杆作拉伸或压缩变形，常称这种刚度为**拉压刚度**。

确定沿 y 方向的刚度时，在 B 点沿 y 方向加一横向 P 力。这

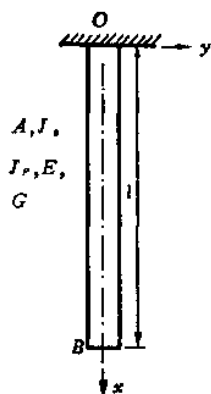


图 2-20

时杆作弯曲变形。根据悬臂等直杆弯曲变形的挠度公式， B 点沿 y 方向的位移为

$$y_B = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

B 点沿 y 方向的刚度为

$$K_y = \frac{P}{y_B} = \frac{3EJ}{l^3}$$

这种刚度称为**弯曲刚度**。

确定绕 x 轴的转动方向的刚度，需要在 B 端绕 x 轴转动方向加一扭矩 M_t 。这时杆件作扭转，产生扭转角 θ 。根据等直圆杆的扭转角公式

$$\theta_B = \frac{M_t l}{GJ_p}$$

于是 B 点绕 x 轴转动方向的刚度为

$$K_\theta = \frac{M_t}{\theta_B} = \frac{GJ_p}{l}$$

这称为**扭转刚度**。

从以上例子可以看出，即使是机械中的同一个元件，根据所要研究的不同方向的振动，是会具有不同刚度的。同时刚度定义中的单位位移可以是线位移或者是角位移。对应于线位移所要施加的载荷是力，刚度的单位是 kg/cm 。对应于角位移所要施加的载荷是力矩，刚度的单位是 $\text{kg}\cdot\text{cm/rad}$ 。

从上面的例子还可看到，确定刚度的方法仅仅是一个运用材料力学或结构力学计算静变形的办法。例如求简支梁在跨中点垂直方向的刚度，只要根据材料力学的方法，求出简支梁在跨中点有集中力作用下的中点挠度

$$y = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

则刚度即为

$$K = \frac{P}{y} = \frac{48EJ}{l^3}$$

又如图 2-21 所示的结构。斜杆 AC 和 BD 的截面积均为 A ，弹性模量为 E 。除斜杆外均刚性杆。如果要求 O 点水平方向的刚度，只要在 O 点加一水平力 P ，用结构力学的方法求出 P 力作用下 O 点的水平位移（就是 C 点的水平位移）。

$$\Delta_c = \frac{\sqrt{2} Ph}{2AE}$$

则刚度即为

$$K = \frac{P}{\Delta_c} = \frac{\sqrt{2} AE}{h}$$

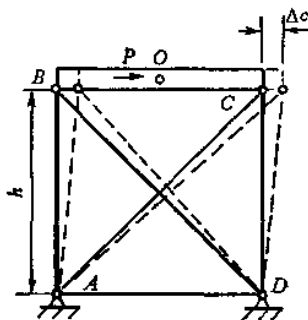


图 2-21

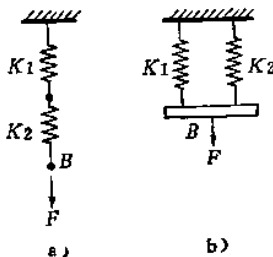


图 2-22

在机械系统中常常不是单独使用一个弹性元件，而是串联或并联几个弹性元件来使用。这时需要把组合的弹簧系统折算成一个“等效”的弹簧。这等效弹簧的刚度应和原来的组合弹簧系统的刚度相等，称为**等效刚度**。下面以两个串联和并联的弹簧为例说明组合弹簧系统的等效刚度的计算方法。

图 2-22 a) 是两个串联弹簧，刚度分别为 K_1 与 K_2 。求 B 端垂直方向的刚度时，在 B 端加一垂直力 F 。每个弹簧都被拉伸，伸长分别为 $\frac{F}{K_1}$ 和 $\frac{F}{K_2}$ 。 B 点的位移为两个弹簧的总伸长。

$$x_B = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2}$$

由此得 B 点的等效刚度为

$$K = \frac{F}{x_B} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

也可写成

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

从上式可以看到两个串联弹簧的等效刚度比原来的两个弹簧的刚度都要小，也就是说，串联弹簧的作用可以使系统中的弹簧刚度降低。如例题 2.2 中谈到的，在钢丝绳和重物之间采用弹簧减振钩，就是使钢丝绳和减振钩的弹簧组成一个串联弹簧系统，降低整个振动系统的刚度，以达到缓和冲击载荷的目的。

图 2-22 b) 是两个并联弹簧，联结两弹簧的刚性杆在弹簧受力变形过程中保持水平。求 B 端垂直方向的刚度时，在 B 端加垂直力 F 。这时两个弹簧均伸长 x_B 。但两个弹簧所受的力不相等，分别为 $K_1 x_B$ 和 $K_2 x_B$ 。根据静力平衡条件

$$F = K_1 x_B + K_2 x_B$$

于是 B 点的等效刚度为

$$K = \frac{F}{x_B} = K_1 + K_2$$

可见并联弹簧系统的刚度是原来的弹簧刚度的总和，比原来各个弹簧的刚度都要大。例如一台机器隔振时，用四个相同刚度 K 的弹簧在对称位置并联支承，那末机器上下振动时，系统的等效刚度就是 $4K$ 。

例 2.9 图 2-23 是利用电动力式激振器测某试件固有频率的示意图。被测试件简化为弹簧质量系统 $K_1 m_1$ 。试验时激振器的顶杆与试件刚性联接。激振器的可动部件质量为 m_2 ，支承弹簧的刚度为 K_2 。

(1) 试计算系统的等效刚度；(2) 设测得系统的固有频率为 f 。已知激振器的可动系统的固有频率 $f_s = 7\text{Hz}$ 。可动部件质量 m_2 与试件质量 m_1 之比为

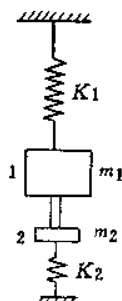


图 2-23

1—试件 2—激振器可动部件

0.01。求试件的固有频率。

解 由于刚性联接, m_1 与 m_2 可视为一个质量 $m_1 + m_2$ 。

(1) 求等效刚度时, 在质量上垂直方向加 F 力。此时两个弹簧均向下位移 x 。两个弹簧中所受的力分别为 $K_1 x$ 和 $K_2 x$ 。根据静力平衡条件

$$F = K_1 x + K_2 x$$

等效刚度

$$K = \frac{F}{x} = K_1 + K_2$$

这相当于两个并联弹簧。

(2) 由 (2.8) 式, 系统的固有频率为

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m_1 + m_2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1/m_1}{1 + m_2/m_1} + \frac{K_2/m_2}{1 + m_1/m_2}} \end{aligned} \quad (a)$$

因激振器可动系统的固有频率为

$$f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_2}{m_2}} = 7 \text{ Hz}$$

试件的固有频率为

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1}{m_1}}$$

已知质量比

$$\frac{m_2}{m_1} = 0.01$$

代入 (a) 式得

$$f_1 = \sqrt{1.01 f_s^2 - 0.49} \quad (b)$$

(b) 式为测得的固有频率 f 与试件固有频率 f_1 之间关系。由此可估算出测量误差。如测得 $f = 50 \text{ Hz}$, 则试件的固有频率为

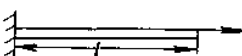

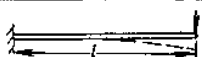
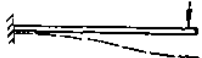
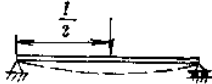
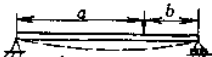
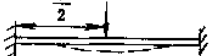
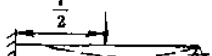



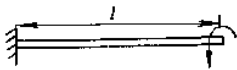
$$f_1 = \sqrt{1.01 \times 50^2 - 0.49} = 50.244 \text{ Hz}$$

误差为

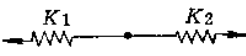
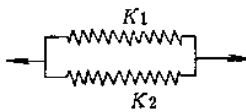
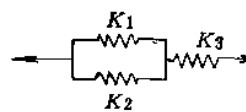
$$\Delta = \frac{f - f_1}{f_1} \times 100\% = 0.488\%$$

一些常用简单元件的刚度列于表 2.1 中

表 2.1 简单元件的刚度

	简 图	说 明	刚 度 K
拉 压 刚 度		等直杆	$\frac{EA}{l}$
		圆柱形密圈弹簧	$\frac{Gd^4}{64nR^3}$
弯 曲 刚 度		悬臂梁	$\frac{3EJ}{l^3}$
		悬臂梁, 自由端 无转角	$\frac{12EJ}{l^3}$
		简支梁	$\frac{48EJ}{l^3}$
		简支梁	$\frac{3EJl}{a^2b^2}$
		两端固定梁	$\frac{192EJ}{l^3}$
		一端固定一端简 支梁	$\frac{768EJ}{7l^3}$
扭 转 刚 度		弹簧	$\frac{EJ}{l}$
		圆柱形受扭转密 圈弹簧	$\frac{Ed^4}{128nR}$
		圆柱形受弯曲密 圈弹簧	$\frac{Ed^4}{64nR} \cdot \frac{1}{1 + \frac{F}{2G}}$
		等直杆	$\frac{GJ_t}{l}$

(续)

	简 图	说 明	刚 度 K
等 效 刚 度		串联弹簧	$\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$
		并联弹簧	$K_1 + K_2$
		混联弹簧	$\frac{(K_1 + K_2) K_3}{K_1 + K_2 + K_3}$

E —弹性模量 kg/cm^2 A —截面积 cm^2 R —弹簧柱半径 cm
 J —截面惯性矩 cm^4 G —剪切弹性模量 kg/cm^2 d —弹簧丝直径 cm
 n —弹簧有效圈数 J_t —截面扭转系数 cm^4 , 圆截面时即极惯性矩 J_p

2.7 有阻尼的自由振动

在前面所述的自由振动中, 我们略去了运动的阻力。因此振动过程中机械能守恒, 系统保持持久的等幅振动。但实际上系统振动时不可避免地有阻力存在, 因而在一定时间内振动逐渐衰减而停止。阻力有各种来源, 例如两物体之间的干摩擦力, 有润滑剂的两个面之间的摩擦力, 气体或液体等介质的阻力, 电磁阻力, 以及由于材料的粘弹性产生的内部阻力等等。在振动中这些阻力统称为**阻尼**。

不同的阻尼具有不同的性质。两个干燥的平滑接触面之间的摩擦力 F , 与两个面之间的垂直压力 N 成正比。即我们所熟知的

$$F = \mu N$$

式中 μ 是摩擦系数。但是如果两个接触面是粗糙的, 则摩擦系数 μ 就与速度有关, 速度越快 μ 越小。

两接触面之间有润滑剂的话, 摩擦力决定于润滑剂的“粘性”和运动的速度。两个相对滑动面之间有一层连续油膜存在时, 阻

力与润滑剂的粘性和速度成正比，与速度方向相反

$$F = rv$$

式中 r 称为**粘性阻尼系数**。它决定于运动物体的形状、尺寸、及润滑剂介质的粘性。

一个物体以低速在粘性液体中运动，或者如阻尼缓冲器那样，使液体从很狭的缝里通过的话，阻力也与速度成正比，属于粘性阻尼。

但是物体如以较大的速度，例如 3 m/s 以上，在空气或液体介质内运动时，阻力将与速度的平方成正比。

$$F = cv^2$$

式中 c ——常数。

结构材料本身的内摩擦引起的阻力，称为**结构阻尼**。在完全弹性材料内，应变与应力的相位相同，所以在反复受力过程中没有能量损失。而粘弹性材料内，应变滞后于应力，有相位差，在反复受力过程中形成滞后回线，因此要耗散能量，而成为振动的阻尼。

阻尼的存在将消耗振动系统中的能量。消耗的能量转变为热能和声能（噪声）传出去。在自由振动中能量的消耗导致系统振幅的逐渐减小而最后使振动停止，所以有阻尼的自由振动也称为**衰减振动**。

粘性阻尼由于它与速度成正比，又称**线性阻尼**。线性阻尼在分析振动问题时使求解大为简化，所以我们一开始以粘性阻尼

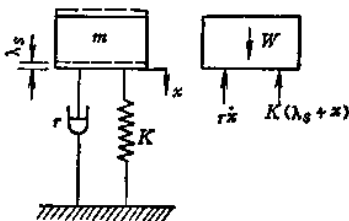


图 2-24

为基本模型来分析有阻尼的振动。如果遇到非粘性的阻尼，我们将在下一章引进一个**等效粘性阻尼**来作近似计算。

下面就讨论粘性阻尼的衰减振动。如图 2-24 的弹簧质量系统，以缓冲器符号代表阻尼，粘性阻尼系数以 r 表示，单位为 $\text{kg}\cdot\text{s}/\text{cm}$ 。

以静平衡位置为原点。设 x 坐标，向下为正。质量 m 的受力情形如图所示。由牛顿运动定律得

$$m\ddot{x} = W - K(x + \lambda_s) - r\dot{x}$$

在上式中阻尼力 $r\dot{x}$ 与速度方向相反，故取负号。因 $K\lambda_s = W$ ，上式可简化为

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = 0$$

$$\text{或} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = 0 \quad (2.34)$$

$$\text{式中} \quad 2n = \frac{r}{m}, \quad p^2 = \frac{K}{m}$$

这就是衰减振动的微分方程。它的解可取 $x = e^{st}$ ，代入 (2.34) 式得

$$(s^2 + 2ns + p^2)e^{st} = 0$$

要使所有时间内上式都能满足，必须

$$s^2 + 2ns + p^2 = 0$$

此即微分方程的特征方程，其解为

$$s_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2} \quad (2.35)$$

由此得微分方程的通解

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = c_1 e^{(-n + \sqrt{n^2 - p^2})t} + c_2 e^{(-n - \sqrt{n^2 - p^2})t} \\ &= e^{-nt} (c_1 e^{\sqrt{n^2 - p^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{n^2 - p^2}t}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

式中待定常数 c_1 与 c_2 决定于振动的初始条件。

(2.36) 式的性质决定于根式 $\sqrt{n^2 - p^2}$ 是实数、零、还是虚数。引进一个无量纲的量，称为**相对阻尼系数**，以 ζ 表示

$$\zeta = \frac{n}{p}$$

当 $n > p$ ，或 $\zeta > 1$ ，根式 $\sqrt{n^2 - p^2}$ 是实数，称为**强阻尼状态**。

当 $n < p$ ，或 $\zeta < 1$ ，根式 $\sqrt{n^2 - p^2}$ 是虚数，称为**弱阻尼状态**。

在两者之间有个过渡状态， $n = p$ ，或 $\zeta = 1$ ，称为**临界阻尼状态**。现分别讨论如下：

(1) 弱阻尼状态

此时 $n < p$ ，或 $\zeta < 1$ 。利用欧拉公式

$$e^{\pm i\sqrt{p^2-n^2}t} = e^{\pm i\sqrt{p^2-n^2}t} = \cos\sqrt{p^2-n^2}t \pm i\sin\sqrt{p^2-n^2}t$$

可将 (2.36) 式改写为

$$\begin{aligned} x &= e^{-nt}(c_1 e^{i\sqrt{p^2-n^2}t} + c_2 e^{-i\sqrt{p^2-n^2}t}) \\ &= e^{-nt}(b_1 \cos\sqrt{p^2-n^2}t + b_2 \sin\sqrt{p^2-n^2}t) \end{aligned}$$

经过三角函数变换可得

$$x = Ae^{-nt}\sin(\sqrt{p^2-n^2}t + \varphi) \quad (2.37)$$

式中 A 与 φ 为待定常数, 仍决定于初始条件。设 $t=0$ 时, $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, 代入 (2.37) 式得

$$\begin{aligned} x_0 &= A \sin \varphi \\ \dot{x}_0 &= A(\sqrt{p^2-n^2} \cos \varphi - n \sin \varphi) \end{aligned}$$

解上列联立方程得

$$A = \sqrt{\frac{\dot{x}_0^2 + 2n\dot{x}_0x_0 + p^2x_0^2}{p^2-n^2}} \quad (2.38)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_0\sqrt{p^2-n^2}}{\dot{x}_0 + nx_0} \quad (2.39)$$

将 A 与 φ 代入 (2.37) 式即为系统对于初始条件 x_0 与 \dot{x}_0 的响应。由 (2.37) 式可知系统振动已不再是等幅的简谐振动, 而是振幅被限制在曲线 $\pm Ae^{-nt}$ 之内, 随时间不断衰减的衰减振动。当 $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$, 振动最终将消失。图 2-25 表示这种衰减振动的响应曲线。

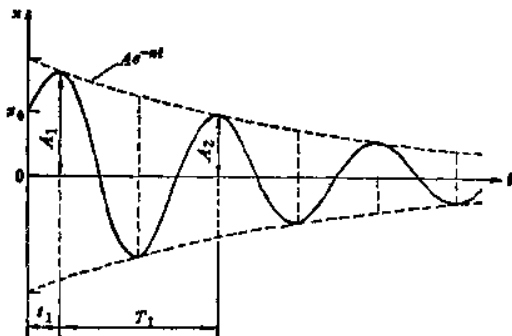


图 2-25

这种衰减振动的圆频率为

$$p' = \sqrt{p^2 - n^2} \quad (2.40)$$

比没有阻尼的固有圆频率 p 为小。

阻尼对自由振动的影响有两个方面：一方面它使系统振动的周期 T_1 略有增大。由 (2.40) 式

$$T_1 = \frac{2\pi}{p'} = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{p}\right)^2}} = T \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{p}\right)^2}}$$

式中 $T = \frac{2\pi}{p}$ 为无阻尼自由振动的周期。

当阻尼比较小时, $\frac{n}{p} \ll 1$,

$$T_1 \approx T \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{p} \right)^2 \right] \quad (2.41)$$

例如在 $\xi = \frac{n}{p} = 0.05$ 时, $T_1 = 1.00125 T$; 而在 $\xi = 0.20$ 时, $T_1 = 1.02 T$ 。所以在阻尼比较小时, 对周期的影响可以忽略不计。

另一方面, 阻尼使系统振动的振幅按几何级数衰减, 相邻两个振幅之比为

$$\eta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{Ae^{-n\tau_1}}{Ae^{-n(\tau_1 + \tau_1)}} = e^{n\tau_1} \quad (2.42)$$

式中 η 称为**减幅系数**, n 称为**衰减系数**。 n 越大表示阻尼越大, 振幅衰减也越快。当 $\xi = 0.05$ 时, $\eta = 1.37$, $A_2 = \frac{A_1}{1.37} = 0.73 A_1$, 即振动一周后振幅已减少 27%, 可见衰减是显著的。

实用上为了避免取指数值的不方便, 常用**对数减幅** δ 来代替减幅系数 η 。

$$\delta = \ln \frac{A_1}{A_2} = \ln e^{n\tau_1} = nT_1 \quad (2.43)$$

代入 $T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - n^2}}$, 得

$$\delta = \frac{2\pi n}{\sqrt{p^2 - n^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.44)$$

当 $\xi \ll 1$ 时, $\delta \approx 2\pi\xi$, 如 $\xi = 0.05$ 时, $\delta = 0.314$ 。

因为任意两个相邻的振幅之比是一个常数 $e^{n\tau_1}$, 即

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \frac{A_3}{A_4} = \dots = \frac{A_j}{A_{j+1}} = e^{n\tau_1} = e^{\delta}$$

故有
$$\frac{A_1}{A_{j+1}} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)\left(\frac{A_2}{A_3}\right)\left(\frac{A_3}{A_4}\right)\dots\left(\frac{A_j}{A_{j+1}}\right) = e^{j\delta}$$

因此对数减幅 δ 也可表达为

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \frac{A_1}{A_{j+1}} \quad (2.45)$$

利用 (2.45) 式可以计算使振幅衰减到一定程度所需要的时间, 称为衰减时间。

例2.10 龙门起重机设计中,

为了避免在连续起动和制动过程中引起颤动, 要求每一次由于起动或制动引起的振动的衰减时间不得过长。如有的动刚度标准规定: 起重重量不大于 50 吨的龙门起重机, 在

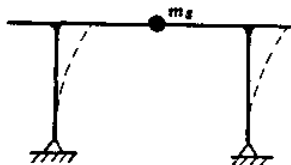


图 2-26

纵向水平振动时, 振幅衰减到最大振幅的 5% 所需的衰减时间应在 25~30 秒范围内。图 2-26 为一 15 吨龙门起重机的示意图。在作纵向水平振动时, 等效质量 $m_s = 27.9 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ 。水平方向刚度 $K = 2000 \text{ kg/cm}$ 。由实测得到对数减幅 $\delta = 0.10$ 。试计算衰减时间, 并问是否符合要求。

解 由 (2.45) 式,

$$j = \frac{1}{\delta} \ln \frac{A_1}{A_{j+1}}$$

设衰减时间 T_d 为经过 j 个周期所需的时间

$$T_d = jT_1 \approx \frac{j}{f} = -\frac{1}{f\delta} \ln \frac{A_1}{A_{j+1}} \quad (a)$$

现已知

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2000}{27.9}} = 1.33 \text{ Hz}$$

$$\delta = 0.10$$

$$\ln \frac{A_1}{A_{j+1}} = \ln \frac{100}{5} = 3$$

代入 (a) 式得

$$T_d = \frac{1}{1.33 \times 10} \times 3 = 22.5 \text{ s}$$

故符合要求。

(2) 强阻尼状态

此时 $n > p$, $\xi > 1$ 。根式 $\sqrt{n^2 - p^2}$ 是实根。但 $\sqrt{n^2 - p^2} < n$, 故 (2.36) 式

$$x = c_1 e^{(-n + \sqrt{n^2 - p^2})t} + c_2 e^{(-n - \sqrt{n^2 - p^2})t}$$

中两个指数函数的指数均为负数。它所表示的运动不再是前面所述的那种振动, 而是一种非周期性蠕动, 但仍按指数衰减。在 $c_1 > c_2$, $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ 时, 运动具有图 2-27 所示的响应曲线。

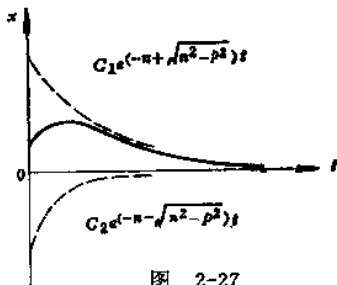


图 2-27

(3) 临界阻尼状态

临界阻尼以 r_c 表示。这种状态下

$$n = \frac{r_c}{2m} = p = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

由此得

$$r_c = 2\sqrt{Km} \quad (2.46)$$

由 (2.46) 式可知临界阻尼 r_c 之值只决定于系统本身的物理性质: 质量 m 与弹簧刚度 K 。

在临界阻尼状态下, $\xi = 1$, $n = p$, 特征方程 (2.35) 式的根是重根。

$$s_1 = s_2 = -n = -p$$

方程 (2.34) 式的另一个解将为 te^{-pt} 。它的通解为

$$x = e^{-pt}(c_1 + c_2 t)$$

显然, 这个方程表示的运动也是非周期性的。它在 $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ 的初始条件下为

$$x = e^{-pt}[x_0 + (\dot{x}_0 + px_0)t]$$

图 2-28 表示系统在初始位移 x_0 和几种不同的初速度 \dot{x}_0 条件下的响应曲线。它们仍然按指数规律衰减。

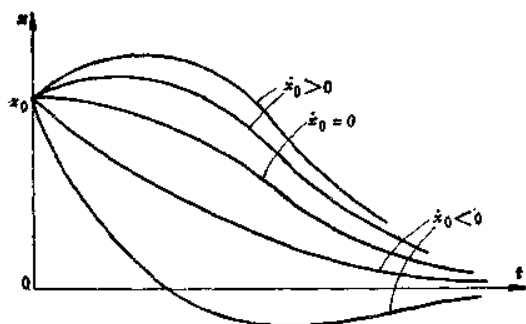


图 2-28

从上面讨论的情况可见,系统振动的性质决定于相对阻尼系数 ζ 的值。为了给出一个综合的直观的描述,将(2.35)式改写成

$$S_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})p$$

然后将上式以 ζ 为参量,在复平面上画出,如图 2-29。实轴表示 ζ 之值。从图上可见,当 $\zeta = 0$ 时, $S_{1,2} = \pm ip$, 是两个虚根,即虚轴上截距为 $\pm p$ 的对称的两个点,对应于 2.2 节所讨论的无阻尼自由振动。当 $0 < \zeta < 1$, S_1 和 S_2 是一对共轭复数根,是位于以 p 为半径的圆上。与实轴对称的两个点,对应于弱阻尼状态的衰减振动。当 ζ 趋向于 1, S_1 和 S_2 都趋近于实轴上 $-p$ 点,对应于临界阻尼状态。当 ζ 大于 1 时, S_1 和 S_2 是两个实数根,对应于强阻尼状态。随 ζ 的增大, S_1 与 S_2 沿实轴反向移动。 $\zeta \rightarrow \infty$ 时, $S_1 \rightarrow 0$, $S_2 \rightarrow -\infty$ 。

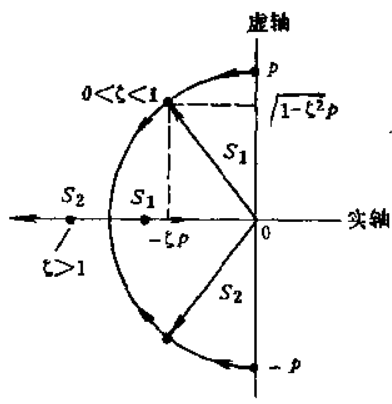


图 2-29

第三章 单自由度系统的强迫振动

3.1 引言

上一章讨论了在外界初始干扰下依靠系统本身的弹性恢复力维持的自由振动。本章将主要讨论系统由外界持续激振所引起的振动，称为**强迫振动**。强迫振动从外界不断地获得能量来补偿阻尼所消耗的能量，使系统得以维持持续的等幅振动。

外界激振所引起的系统的振动状态称为**响应**。对应于不同的外界激振，系统将具有不同的响应。系统的响应一般以位移形式表达，有时也以速度或加速度形式表达。

外界激振的来源有两类情况：一类是持续的激振力。激振力可能是直接作用在质量块上的；更多的可能是由于系统中运动部件的不平衡离心惯性力引起的。另一类是持续的支承运动。两类情况都可能是周期性的或非周期性的。

最简单的情况是简谐激振力或支承点的简谐运动引起的强迫振动。此时系统作与激振力或支承运动相同频率的简谐振动，具有与激振力或支承运动的幅值和频率都有关的一定的振幅。当频率接近于系统的固有频率时，便发生**共振**。系统的振幅变得很大，而易导致破坏。虽然在实际问题中简谐振动比之其他周期性或非周期性振动来说是较少的，但它揭示的一些规律和特性有普遍意义，是分析研究更一般、更复杂的振动问题的基础。所以，本章以主要篇幅叙述简谐激振所引起的系统的各种不同响应。最后在此基础上简单地介绍由一系列简谐函数叠加而成的周期激振以及任意激振的响应。

我们仍以牛顿运动定律为建立强迫振动微分方程的主要方法。求解方程时，除采用解析法外，还介绍了旋转矢量和复数矢量法。复数矢量法是振动理论中较常用的一种方法。

本章简单地介绍了对于非粘性阻尼的近似计算和复数阻尼理论。机械工程上比较容易遇到的临界转速、转子的平衡问题以及测振仪原理等基本内容也作了入门的介绍。

3.2 简谐激振力引起的强迫振动

(1) 振动微分方程及其解 先从一个有阻尼的弹簧质量系统，在质量块上直接作用着一个简谐激振力的情况开始，分析由此而引起的强迫振动的规律。

这种情况可用电磁式振动台为例说明。图 3-1 a) 是一种电磁式振动台的结构示意图。

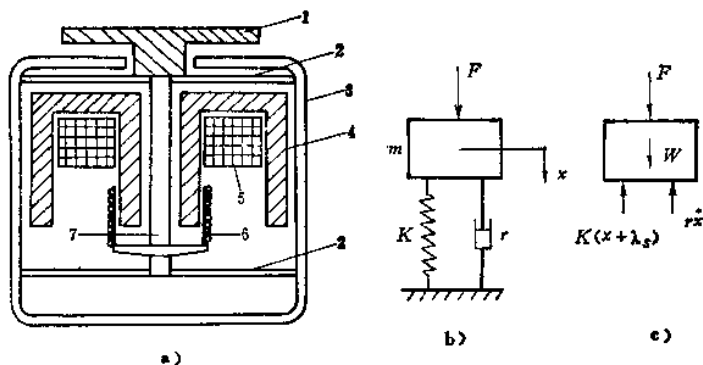


图 3-1

1—台面 2—平板弹簧 3—外壳 4—导磁体 5—励磁线圈
6—振动线圈 7—导杆

当励磁线圈通以直流电流时，导磁体就形成恒定磁场。当在这种磁场中的振动线圈有交流电通过时，便受到交变电磁力的作用，使支承在平板弹簧上的导杆以及和导杆联在一起的台面等在磁场中振动。由于振荡器供给的交流电是正弦波，产生的电磁力也是简谐力，可用 $F = F_0 \sin \omega t$ 表示。其频率 ω 和幅值 F_0 都可以调节，从而使台面能以不同的频率和振幅作上下振动。

将振动线圈、导杆、台面等简化为集中质量 m ，平板弹簧为

具有刚度 K 的弹性元件，并考虑各部分结构的阻尼作用，以 r 表示其相应的粘性阻尼系数，振动台就简化成如图 3-1 b) 所示，有简谐激振力 $F = F_0 \sin \omega t$ 作用的、单自由度有阻尼的弹簧质量系统。

建立这个系统振动微分方程的原理和方法和上一章自由振动时完全相同。以静平衡位置为坐标原点，作 x 轴，向下为正。质量块 m 在任一瞬时的受力情况如图 3-1 c)。它与有阻尼的自由振动相比，只多了一个激振力 F 。因此，可以按牛顿运动定律直接写出其振动微分方程

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + K(x + \lambda_s) = F_0 \sin \omega t + W$$

因 $K\lambda_s = W$ ，上式简化成

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = F_0 \sin \omega t \quad (3.1)$$

设

$$2n = \frac{r}{m}, \quad p^2 = \frac{K}{m}, \quad q = \frac{F_0}{m}$$

上式可写成

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = q \sin \omega t \quad (3.2)$$

这个单自由度强迫振动微分方程的全解包括两部分：一个通解 $x_1(t)$ 和一个特解 $x_2(t)$ 。

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

通解 $x_1(t)$ 是对应于有阻尼自由振动的齐次方程的解，上章已讨论过，在弱阻尼情况下为

$$x_1(t) = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{p^2 - n^2}t + \varphi)$$

这是个衰减振动，只在振动开始后的一段时间内才有意义，所以称为瞬态振动。一般情况下可以不考虑它。

特解 $x_2(t)$ 表示系统在简谐力激振下产生的强迫振动。它是一种持续等幅振动，称为稳态振动。从微分方程非齐次项是正弦函数这一性质，可知特解形式亦为简谐函数。它的频率与激振力频率一致。

设此特解为

$$x_2(t) = B \sin(\omega t - \psi) \quad (3.3)$$

式中 B 为强迫振动的振幅, ψ 为相位差。相位差说明强迫振动时位移的变化与激振力的变化虽是同频率, 但它们不是同时达到最大值和零值。例如 $t = 0$ 时, 激振力 $F = 0$, 但位移 $x_2(t) = -B \sin \psi$ 。

$$\begin{aligned} B \text{ 和 } \psi \text{ 是两个待定常数。将 (3.3) 式代入 (3.2) 得} \\ -B\omega^2 \sin(\omega t - \psi) + 2nB\omega \cos(\omega t - \psi) + p^2 B \sin(\omega t - \psi) \\ = q \sin \omega t \end{aligned} \quad (a)$$

将 (a) 式右边加以变换

$$\begin{aligned} q \sin \omega t &= q \sin[(\omega t - \psi) + \psi] = q \sin(\omega t - \psi) \cos \psi + \\ &+ q \cos(\omega t - \psi) \sin \psi \end{aligned} \quad (b)$$

将 (b) 式代回 (a) 式, 整理后得

$$\begin{aligned} [B(p^2 - \omega^2) - q \cos \psi] \sin(\omega t - \psi) + (2nB\omega - q \sin \psi) \\ \cos(\omega t - \psi) = 0 \end{aligned}$$

这个方程对于任意时间 t 都应恒等于零, 所以 $\sin(\omega t - \psi)$ 和 $\cos(\omega t - \psi)$ 前面括号内的量都必须分别等于零。

$$B(p^2 - \omega^2) - q \cos \psi = 0$$

$$2nB\omega - q \sin \psi = 0$$

这是以 B 与 ψ 为未知量的一组二元一次联立方程, 其解为

$$B = \frac{q}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \quad (3.4)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2} \quad (3.5)$$

代回 (3.3) 式得

$$x_2(t) = \frac{q}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t - \psi) \quad (3.6)$$

这就是在简谐激振力作用下系统的位移响应。分析 (3.4) (3.5) (3.6) 式, 可以得到强迫振动的一些带有普遍性质的特点。

1. 在简谐激振力作用下, 强迫振动是简谐振动。振动的频率

与激振力的频率 ω 相同。

2. 强迫振动的振幅 B 和相位差 ϕ 都只决定于系统本身的物理性质和激振力的大小与频率，与初始条件无关。初始条件只影响系统的瞬态振动。

3. 强迫振动振幅的大小，在工程实际问题中具有重要意义。如果振幅超过允许的限度，构件中会产生过大的交变应力，而招致疲劳破坏。或者会影响机器及仪表的精度。在振动利用中也需要控制一定的振幅。为此我们必须搞清楚影响振幅的各种因素。

引进符号

$$B_0 = \frac{q}{p^2}, \quad \lambda = \frac{\omega}{p}, \quad \xi = \frac{n}{p}$$

(3.4) 式可改写成下列形式

$$\begin{aligned} B &= \frac{q}{p^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2 + \left[2 \frac{n}{p} \frac{\omega}{p}\right]^2}} \\ &= \frac{B_0}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

从 (3.7) 式可以看到影响振幅的有三个因素： B_0 、 λ 和 ξ 。现分别加以讨论。

B_0 的影响 它反映了激振力的影响。因为

$$B_0 = \frac{q}{p^2} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{m}{K} = \frac{F_0}{K}$$

它相当于将激振力的最大幅值 F_0 静止地作用在弹簧上所引起的弹簧静变形。这说明强迫振动振幅 B 与激振力幅值 F_0 成正比。因此，改变振幅的方法之一就是按比例改变激振力的幅值。例如上述电磁式振动台就是通过改变电流大小来改变台面的振幅。

λ 的影响 $\lambda = \frac{\omega}{p}$ ，称为频率比。频率比对振幅影响很大，而且关系较复杂，可以用**振幅频率响应曲线**（简称幅频响应

曲线)来表示。为此将 (3.7) 式写成无量纲的形式

$$\beta = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad (3.8)$$

β 称为振幅的放大因子。以 λ 为横座标, β 为纵座标, 对于不同的 ζ 值, 可以得到如图 3-2 所示的一组曲线, 便称为幅频响应曲线。

从这些曲线中可以看到, 当频率比 $\lambda \ll 1$ 时, β 并不比 1 大多少, 即振幅 B 几乎与激振力幅值引起的静变形 B_0 差不多。当频率比 $\lambda \gg 1$ 时, β 趋于零, 振幅可以非常小。而当 $\lambda = 1$, 即 $\omega = p$, 激振力的频率等于系统的固有频率时, 在 ζ 较小的

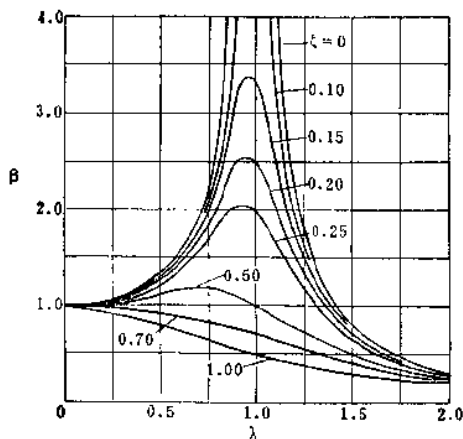


图 3-2

情况下, 振幅 B 可以很大, 比 B_0 大很多倍。在没有阻尼, 即 $\zeta = 0$ 的情况下, 振幅 B 为无穷大。通常我们把激振力频率 ω 与系统固有频率 p 相等时称为共振。

实际上当有阻尼作用时, 振幅最大并不在 $\omega = p$ 处, 而是在 ω 比 p 略小, $\omega = p\sqrt{1-2\zeta^2}$ 的时候。有时, 把振幅最大时的频率称为共振频率。但在实用上, 阻尼往往比较小 (例如 $\zeta = 0.05 \sim 0.20$), $\omega \approx p$, 所以一般仍以 $\omega = p$ 作为共振频率。

ζ 的影响 ζ 是上一章已定义过的相对阻尼系数。 $\zeta = \frac{n}{p} = \frac{r}{r_c}$, 是系统的实际粘性阻尼系数和临界阻尼系数的比值。从幅频响应曲线上可以看出阻尼在共振附近一定范围内, 对减小振幅有显著作用, 增加阻尼, 振幅可以明显下降。

在共振时, $\lambda = 1$, 振幅由 (3.7) 式可知为

$$B_{\max} = \frac{B_0}{2\zeta} = \frac{F_0}{r\rho} \quad (3.9)$$

在离开共振稍远的范围, 阻尼对减小振幅的作用是不大的, 尤其当 $\omega \gg \rho$ 时, 阻尼几乎没有什么作用。

4. 在共振时的放大因子有时称为品质因子以符号 Q 表示, 由 (3.8) 式可知

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \quad (3.10)$$

它的意义可进一步阐述如下。

在幅频响应曲线上, 频率比为 $\lambda = 1$ 的虚线的两侧, 曲线可以近似地认为是对称的。如图 3-3。在两侧取放大因子为

$Q/\sqrt{2} = 0.707/2\zeta$ 的两个点 q_1 与 q_2 , 称为半功率点。对应于 q_1 和 q_2 的激振频率分别为 ω_1 与 ω_2 。

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

称为这个系统的带宽。带宽可由 (3.8) 式计算。因

$$\beta = \frac{0.707}{2\zeta} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}}$$

解之得

$$\lambda^2 = (1 - 2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2}$$

当 $\zeta \ll 1$ 时, 可忽略 ζ^2 项, 得

$$\lambda^2 \approx 1 \pm 2\zeta$$

分别代入 ω_1 与 ω_2 之值, 并注意到

$$\omega_1 + \omega_2 \approx 2\rho$$

可得

$$4\zeta \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\rho^2} \approx \frac{2(\omega_2 - \omega_1)}{\rho}$$

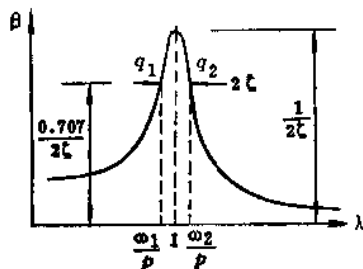


图 3-3

故

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{p}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{p}{\Delta\omega} \quad (3.10)'$$

由以上分析可见, 当阻尼大时, 带宽 $\Delta\omega$ 就宽, 过共振时振幅变化平缓, 振幅较小; 反之, 阻尼小时, 带宽就窄, 过共振时振幅变化较陡, 振幅就大。所以, 品质因子反映了系统阻尼的强弱性质和共振峰的陡峭程度。在机械系统中, 为了过共振时比较平稳, 希望 Q 值小些。利用 (3.10)' 式可由试验估算 Q 或 ζ 。

5. 强迫振动的位移和激振力同频率而有相位差。如图 3-4 所示。它们之间的相位差 ψ 可用 (3.5) 式计算

$$\begin{aligned} \tan \psi &= \frac{2\pi\omega}{p^2 - \omega^2} \\ &= \frac{2\zeta\lambda}{1 - \lambda^2} \quad (3.11) \end{aligned}$$

相位差 ψ 与频率比有很大关系, 也可以用

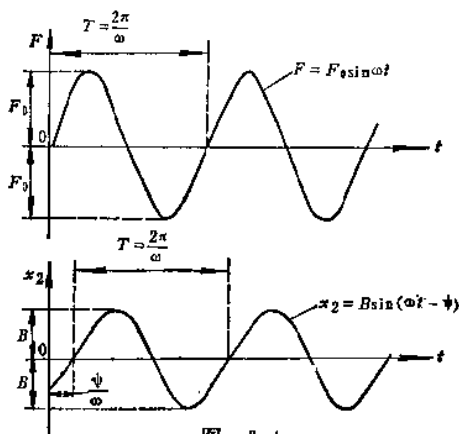


图 3-4

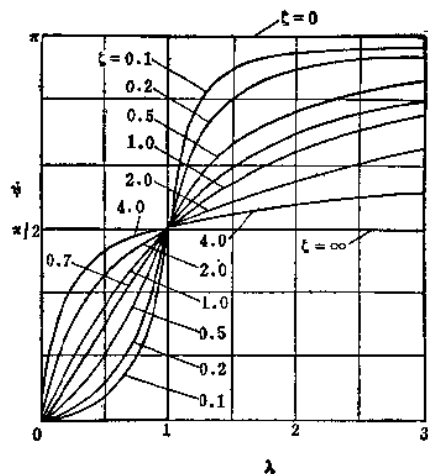


图 3-5

图 3-5 的一组曲线表示, 称为 **相位频率响应曲线**。当阻尼比较小,

在 $\lambda \ll 1$ 的低频范围内, 相位差 $\psi \approx 0$, 即位移与激振力接近于同相位。在 $\lambda \gg 1$ 时, 相位差 $\psi \approx \pi$, 即在高频范围内位移与激振力接近于反相位。在 $\lambda = 1$, 即共振时, 相位差 $\psi = \frac{\pi}{2}$ 。这时 ψ 与阻尼大小无关。这是共振时的一个重要特征。

(2) 矢量表示法

强迫振动微分方程的解还可利用旋转矢量来表示。由于

$$x = B \sin(\omega t - \psi)$$

则 $\dot{x} = B\omega \cos(\omega t - \psi) = B\omega \sin[90^\circ + (\omega t - \psi)]$

$$\ddot{x} = -B\omega^2 \sin(\omega t - \psi) = B\omega^2 \sin[180^\circ + (\omega t - \psi)]$$

即速度与加速度的相位分别超前位移 90° 和 180° , 因此在强迫振动中阻尼力与惯性力的相位也分别超前弹性恢复力 90° 和 180° 。

把 (3.1) 式微分方程中各项用旋转矢量表示如图 3-6 a) 或图 3-6 b)。从图 3-6 b) 中可以直接得到

$$(KB - m\omega^2 B)^2 + (r\omega B)^2 = F_0^2$$

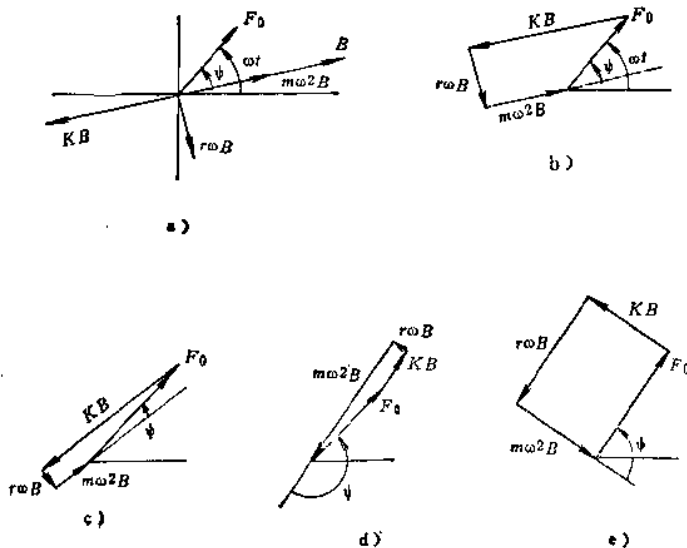


图 3-6

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r\omega}{K - m\omega^2}$$

把符号 $q = \frac{F_0}{m}$, $2n = \frac{r}{m}$, $p^2 = \frac{K}{m}$ 代入, 便得与 (3.4)

(3.5) 式同样的结果。

当激振力频率较小, 即在低频范围 $\omega \ll p$ 时, 因振动缓慢, 速度小, 加速度也小, 所以阻尼力与惯性力都很小。这时相位差 ψ 很小, 位移与激振力基本同相, 弹性恢复力和激振力几乎相等, 系统的静态特性是主要的。如图 3-6 c)。

在高频范围, 即 $\omega \gg p$ 时, 加速度很大, 惯性力充分显示作用, 而弹性恢复力和阻尼力的作用都不显著。这时位移与激振力接近反相, $\psi \approx 180^\circ$ 。惯性力和激振力几乎相等, 系统的动态特性突出。如图 3-6 d)。

在共振时, $\omega = p$, 系统产生强烈的振动, 振幅增大到最大值。这时弹性恢复力、阻尼力、惯性力都很大。一方面弹性恢复力和惯性力相平衡, 另一方面激振力全部用以克服阻尼力。如图 3-6 e)。

(3) 扭振

对于如上一章图 2-11 所示的扭转系统在持续的简谐力矩 $M_1 = M_0 \sin \omega t$ 的作用下, 将作扭转强迫振动。它的振动微分方程具有与 (3.1) 式类似的形式。

$$I\ddot{\theta} + r_0\dot{\theta} + K_0\theta = M_0\sin\omega t$$

式中 θ 为角坐标 (rad), K_0 为扭转刚度 ($\text{kg}\cdot\text{cm}/\text{rad}$), r_0 为扭转粘性阻尼系数 ($\text{kg}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}/\text{rad}$), I 为圆盘转动惯量 ($\text{kg}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^2/\text{rad}$)。它也具有上述简谐强迫振动的共同规律与特点。

例 3.1 图 3-7 是一种供记录各种讯号用的示波器中的振动子的结构示意图。它是将电流讯号变成光点的位移讯号的元件。讯号线圈和反射镜张在悬丝上, 封在一个密闭的外壳内。线圈置

于磁场中。当讯号电流通过线圈时，由于电磁感应产生作用在线圈的 AB 和 CD 段上的一对大小相等、方向相反的力，由此产生电磁力矩，使线圈作扭转强迫振动，带动反射镜作微摆动，从而将电流讯号变成光点的位移讯号，使感光纸将波形记录下来。试根据此原理写出振动子的振动微分方程，并求其解。

解 作用在线圈 AB 和 CD 段上的力的大小为

$$F = nBIL$$

式中 n 为线圈匝数， B 为磁场强度， I 为电流大小， L 为 AB 或 CD 线段长度。由此产生的电磁力矩为

$$M_e = Fb \cos \theta \approx nBILb$$

式中 b 为线圈宽度， θ 为线圈偏转角，如图 3.7 b) 所示。在 θ 较小时， $\cos \theta \approx 1$

由于交流电流 $I = I_0 \sin \omega t$ ，故

$$M_e = nBLbI_0 \sin \omega t = M_0 \sin \omega t$$

式中 $M_0 = nBLbI_0$ 为扭转力矩的幅值。对于给定的振动子， n 、 B 、 L 、 b 等都是定值。 M_0 随电流讯号 I_0 的大小变化。

线圈的转动使悬丝产生恢复力矩 $-K_0\theta$ ， K_0 为悬丝的扭转刚度。在外壳封闭腔内一般有油阻尼或电磁阻尼，产生阻尼力矩 $-r_0\dot{\theta}$ ， r_0 为扭转粘性阻尼系数。如线圈的转动惯量为 I ，则线圈的转动方程式为

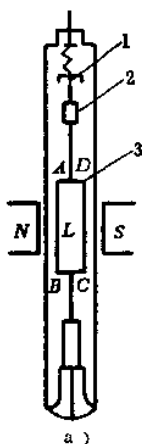
$$I\ddot{\theta} + r_0\dot{\theta} + K_0\theta = M_0 \sin \omega t$$

$$\text{设} \quad 2n = \frac{r_0}{I}, \quad p^2 = \frac{K_0}{I}, \quad q = \frac{M_0}{I}$$

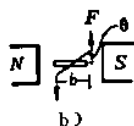
则上式成为

$$\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} + p^2\theta = q \sin \omega t$$

上式与(3.2)式具有完全相同的形式，只是独立坐标以 θ 代替了 x 。



a)



b)

图 3-7

1—悬丝 2—反射镜
3—讯号线圈

设 $\theta = \theta_0 \sin(\omega t - \psi)$, 则

$$\theta_0 = \frac{q}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}} = \frac{nBLbI_0}{K_c \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2} = \frac{2\xi\lambda}{1 - \lambda^2}$$

θ 即为光点摆动的角度, 如光点到记录纸距离为 l , 则记录纸上的位移为 $l\theta$ 。随着讯号电流 I 的变化, 在感光记录纸上便把振动波形记录下来。

每个振动子的固有频率是一定的。振动子的阻尼一般取在 0.7 左右, 这是为了使频率比 λ 在 0 到 0.5 范围内, 振幅可以基本上与所测振动物体的频率无关。用油阻尼的振动子能够测量的频率范围约为 0 到 0.4 的固有频率。如一个固有频率为 1200 Hz 的振动子, 使用范围为 0~480 Hz。

(4) 初始阶段的振动

在简谐激振力作用下系统振动初始阶段的响应为

$$x = x_1 + x_2 = Ae^{-n't} \sin(p't + \varphi) + B \sin(\omega t - \psi) \quad (3.12)$$

式中 $p' = \sqrt{p^2 - n^2}$ 。

这是由两种具有不同频率和振幅的简谐运动叠加而成的比较复杂的运动。图 3-8 中实线表示某种情况下两种运动叠加的结果。虚线表示等幅振动。经过一段时间后, 实线逐渐与虚线相重合而成为单纯的稳态振动。

在忽略阻尼的影响时 (3.12) 式可表达为

$$x = A \sin(pt + \varphi) + \frac{q}{p^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (3.13)$$

现在来研究初始条件为

$t = 0, x = 0, \dot{x} = 0$ 的

情况。由 (3.13) 式, 代入初始条件可解出

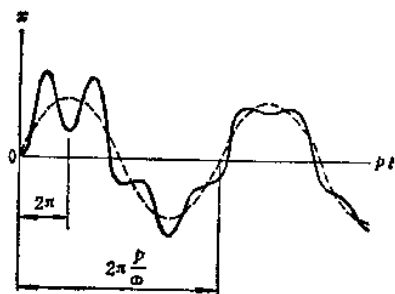


图 3-8

$$A = -\frac{q\omega}{p(p^2 - \omega^2)}$$

$$\varphi = 0$$

代回 (3.13) 式

$$x = \frac{q}{p^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right) \quad (3.14)$$

可见初始阶段系统的振幅包括两部分：瞬态振动振幅 $\frac{q\omega}{p(p^2 - \omega^2)}$ 和稳态振动振幅 $\frac{q}{p^2 - \omega^2}$ 。在有阻尼的情况下，前者在一段时间内逐渐衰减。当系统的固有频率比较低时，瞬态振动振幅就可能比较大，而且在较长时间内不易衰减下去。所以在实验中测定强迫振动振幅时，应该在起动后经过一段时间稳定以后再量测，不然就可能测到的是两部分振幅之和。

再研究一下，如果激振频率 ω 和系统固有频率 p 很接近时的情况。设

$$p - \omega = 2\varepsilon$$

则

$$\begin{aligned} x &= \frac{q}{p(p^2 - \omega^2)} \left[\frac{p + \omega}{2} (\sin \omega t - \sin pt) \right. \\ &\quad \left. + \frac{p - \omega}{2} (\sin \omega t + \sin pt) \right] \\ &= -\frac{q}{p(p^2 - \omega^2)} \left[(p + \omega) \cos \frac{(p + \omega)t}{2} \sin \varepsilon t \right. \\ &\quad \left. - 2\varepsilon \sin \frac{(p + \omega)t}{2} \cos \varepsilon t \right] \end{aligned}$$

当 ε 很小时，可略去括号中后面一项，并有 $\frac{p + \omega}{2} \approx p$ ，故

$$x \approx -\frac{q}{2\varepsilon p} \sin \varepsilon t \cos pt$$

这可看成是振幅按 $\frac{q}{2\varepsilon p} \sin \varepsilon t$ 变化，频率为 p 的振动。这种特殊的振动现象称为拍，如图 3-9 所示。拍的周期为 $\frac{\pi}{\varepsilon}$ 。由于 ε 是

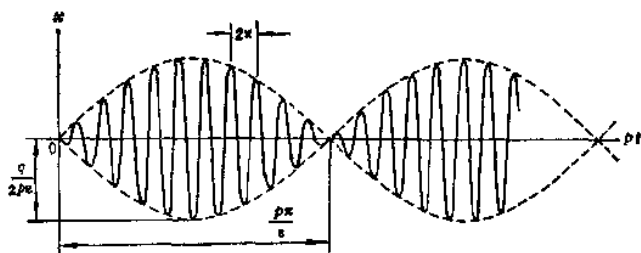


图 3-9

很小的，振幅按 $\sin \varepsilon t$ 变化得很慢，周期也较长。在实验过程慢慢地调频到接近共振时，系统的振幅有时出现周期性忽大忽小的变化，就是因为产生拍的现象。

若 $\omega \rightarrow p$ ，则 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，

$$x \approx -\frac{qt}{2p} - \cos pt$$

这说明在共振时，如无阻尼，振幅将随时间无限地增大振幅，如图 3-10 所示。但增大振幅也需要较长时间，所以如果机器（如汽轮机组）的运行速度设计在固有频率以上，在越过共振时，只要使它过渡得比较快一点即可。

如果起始条件为 $t = 0$ ， $x = x_0$ ， $\dot{x} = \dot{x}_0$ ，则由 (3.12) 式，在简谐激振力作用下系统初始阶段的响应为

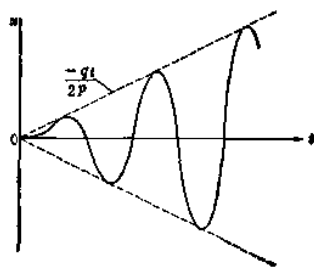


图 3-10

$$x = Ae^{-n't} \sin(p't + \varphi) + B \sin(\omega t - \psi)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{\left[\frac{\dot{x}_0 + nx_0 + Bn \sin \psi - B\omega \cos \psi}{p'} \right]^2 + (x_0 + B \sin \psi)^2} \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{p' (x_0 + B \sin \psi)}{\dot{x}_0 + nx_0 + Bn \sin \psi - B\omega \cos \psi} \\ B &= \frac{q}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

3.3 偏心质量引起的强迫振动

在旋转机械中,如通风机、电动机、水泵、离心压缩机、汽轮机等,由于偏心质量而引起强迫振动是很普遍的现象。如一台电动机安装在两根槽钢做成的简支梁上,如图 3-11 a),运转时由于转子的偏心引起电机和梁组成的系统的强迫振动。

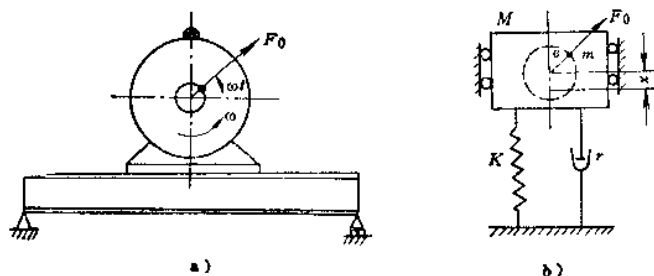


图 3-11

这个系统可简化成图 3-11 b) 所示的模型。电机质量为 M (忽略梁的质量), 转子有偏心质量 m , 偏心距 e 。当电机以一定转速 N (rpm) 旋转时, 偏心质量 m 就以 $\omega = \frac{2\pi N}{60}$ (1/s) 作等速圆周运动, 产生离心惯性力 $F_0 = me\omega^2$ 。它在垂直方向的分量即相当于垂直激振力

$$F = F_0 \sin \omega t = me\omega^2 \sin \omega t$$

以坐标 x 表示电机离开静平衡位置的垂直位移。梁的弹簧刚度为 K , 阻尼系数为 r 。则按 (3.1) 式系统振动的微分方程为

$$M\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = me\omega^2 \sin \omega t$$

$$\text{或} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = \frac{me}{M}\omega^2 \sin \omega t \quad (3.16)$$

显然这个方程的特解亦为

$$x = B \sin(\omega t - \psi)$$

式中振幅 B 为

$$B = \frac{\frac{me\omega^2}{M}}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{me}{M} \frac{\lambda^2}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \quad (3.17)$$

相位差 ψ 为

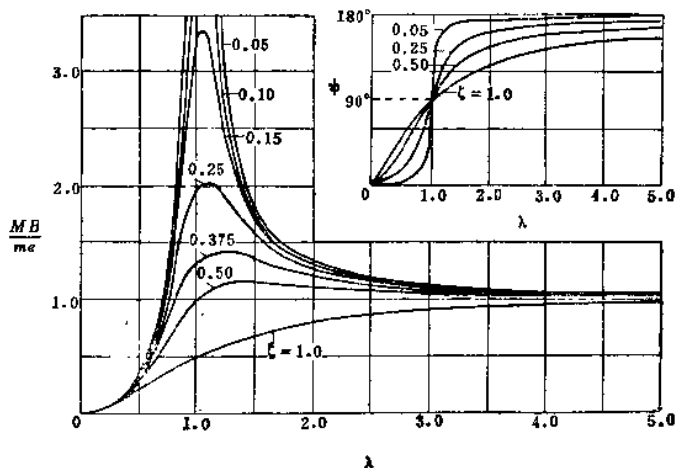
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2} = \frac{2\xi\lambda}{1 - \lambda^2} \quad (3.18)$$

由 (3.17) 式可见振幅 B 与偏心质量 m 和偏心距 e 成正比, 要减少振动就需要使质量分布尽可能均匀, 使与旋转轴对称而没有偏心距。这涉及转子的平衡问题, 将于第 3.8 节作简单介绍。

对比上一节在简谐激振力直接作用下引起的强迫振动, 由偏心质量引起的强迫振动有一些与之不同的振幅频率特性。前者激振力的幅值是不变的, 而后者激振力幅值与转速平方成正比。将 (3.17) 式改写成无量纲形式

$$\frac{MB}{me} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \quad (3.19)$$

用幅频响应曲线表示如图 3-12。它在低频 $\lambda \ll 1$ 时, $\frac{MB}{me}$



≈ 0 , 即振幅接近于零。在高频 $\lambda \gg 1$ 时, 则 $\frac{MB}{me}$ 趋近于 1, 即

$B \approx \frac{me}{M}$, 而不是趋向于零。

例3.2 离心式自动脱水洗衣机, 由于运转时不可避免的衣物偏心而常常引起剧烈振动。所以设计时要求采取严格的隔振措施, 把振幅控制在一定范围内。今有某洗衣机重 $W = 2\text{T}$, 由四个垂直的螺旋弹簧支承, 每个弹簧的刚度由实验测定为 $K = 83\text{kg/cm}$, 另有四个阻尼器, 总的相对阻尼系数为 $\zeta = 0.15$ 。简化如图 3-13 所示。洗衣机在初次脱水时以 $N = 300\text{rpm}$ 运行。此时衣物的偏心重为 13kg , 偏心距为 50cm 。由于结构的对称性, 在计算其垂直方向振幅时可作为单自由度系统来处理。试计算其垂直振幅。

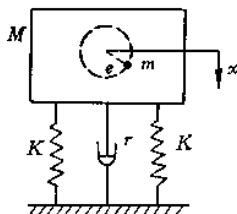


图 3-13

解 系统的固有频率

$$p = \sqrt{\frac{4Kg}{W}} = \sqrt{\frac{4 \times 83 \times 980}{2000}} = 12.8 \text{ 1/s}$$

激振力频率

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \times 300}{60} = 31.4 \text{ 1/s}$$

$$\text{故} \quad \lambda = \frac{\omega}{p} = \frac{31.4}{12.8} = 2.45$$

这说明此时不共振, 并超过共振较远。

已知 $\zeta = 0.15$, 由 (3.17) 式

$$\begin{aligned} B &= \frac{me}{M} \frac{\lambda^2}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \\ &= \frac{13 \times 50}{2000} \frac{2.45^2}{\sqrt{(1-2.45^2)^2 + (2 \times 0.15 \times 2.45)^2}} \\ &= 0.382 \text{ cm} \end{aligned}$$

例3.3 惯性式激振器的原理示意图如图 3-14 所示。由两个带有偏心质量块、反向等速旋转的齿轮所构成。当旋转时, 两偏

心质量的离心惯性力在水平方向的分力互相平衡, 在垂直方向的分力则合成激振力 $F = 2me\omega^2 \sin\omega t$ 。今用一台惯性式激振器安装在上述例题的洗衣机重心的正上方, 在垂直方向激振。当不断变动激振器转速的过程中, 测得在共振时的垂直振幅为 1.07 cm 。在超过共振很远时, 垂直振幅趋于一定值 0.32 cm 。试计算该洗衣机垂直方向的相对阻尼系数 ξ 。

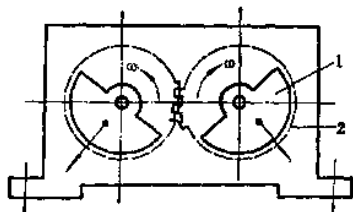


图 3-14

1—偏心质量块 2—齿轮

解 由 (3.19) 式, 当共振时, $\lambda = 1$

$$B = \frac{2me}{M} \cdot \frac{1}{2\xi} = 1.07 \text{ cm}$$

式中 m 为一个偏心质量块的质量, e 为偏心距。

当 $\lambda \gg 1$ 时

$$B = \frac{2me}{M} = 0.32 \text{ cm}$$

故
$$\xi = \frac{0.32}{2 \times 1.07} = 0.15$$

由于振动系统实际阻尼系数是不易计算的, 上述方法是一种简便的测定阻尼系数的方法。

3.4 支承运动引起的强迫振动

许多情况下, 系统产生强迫振动是由于支承点的运动, 如机器振动引起的仪表振动, 汽车驶过不平的路面产生的振动等等, 惯性式测振仪当固定在振动物体上测振时也是在支承运动下的强迫振动。

现在分析一种支承点作简谐运动的情况, 如图 3-15。设支承点运动为:

$$x_s = a \sin\omega t$$

分析质量 m 的受力情况。 x 仍为质量块的位移坐标。现在由于弹簧两端都在运动，任一瞬时弹簧的变形为 $x - x_s$ （弹簧在静止时由重量所产生的静变形不影响振动微分方程，可以不计入），弹性恢复力为 $K(x - x_s)$ 。阻尼器两端也都在运动，因此阻尼应与相对速度 $\dot{x} - \dot{x}_s$ 成正比，阻尼力为 $r(\dot{x} - \dot{x}_s)$ 。按牛顿运动定律可列出振动微分方程：

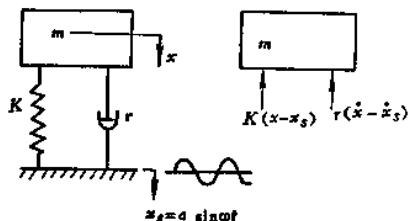


图 3-15

$$m\ddot{x} = -K(x - x_s) - r(\dot{x} - \dot{x}_s)$$

$$\text{或} \quad m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = Kx_s + r\dot{x}_s \quad (3.20)$$

可见支承运动时相当于系统上作用了两个激振力。一个是经过弹簧传递过来的 Kx_s ，另一个是经过阻尼器传递过来的 $r\dot{x}_s$ 。两者相位不同，前者与 x_s 同相，后者超前 x_s 90° ，与 \dot{x}_s 同相。

现在我们用复数法来解这个微分方程。设

$$x_s = ae^{i\omega t}, \quad x = Be^{i(\omega t - \psi)}$$

$$\text{则} \quad \dot{x}_s = ia\omega e^{i\omega t}, \quad \dot{x} = iB\omega e^{i(\omega t - \psi)}$$

$$\ddot{x} = -B\omega^2 e^{i(\omega t - \psi)}$$

代入 (3.20) 式得：

$$[(K - m\omega^2) + ir\omega]Be^{i(\omega t - \psi)} = a(K + ir\omega)e^{i\omega t}$$

或

$$Be^{-i\psi} = \frac{a(K + ir\omega)}{(K - m\omega^2) + ir\omega} \quad (a)$$

于是振幅 B 即为复数矢量的模：

$$B = a \sqrt{\frac{K^2 + r^2\omega^2}{(K - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2}} = a \sqrt{\frac{1 + (2\xi\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \quad (3.21)$$

计算相位差 ψ 时，可将 (a) 式改写为：

$$B(\cos \psi - i \sin \psi) = a \frac{[K(K - m\omega^2) + r^2\omega^2] - imr\omega^2}{(K - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2}$$

由此

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{mr\omega^2}{K(K - m\omega^2) + r^2\omega^2} = \frac{2\xi\lambda^3}{1 - \lambda^2 + (2\xi\lambda)^2}$$

式中符号仍为

$$\xi = \frac{n}{p} = \frac{r}{r_c}, \quad \lambda = \frac{\omega}{p}, \quad p^2 = \frac{K}{m}$$

由 (3.21) 式, 放大因子为

$$\beta = \frac{B}{a} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \quad (3.22)$$

以 λ 为横坐标, β 为纵坐标, 可以作出不同阻尼系数 ξ 情况下的幅频响应曲线, 如图 3-16 所示。它与简谐激振力 $F_0 \sin \omega t$ 作用下的响应曲线基本相同。只是在频率比 $\lambda = \sqrt{2}$ 处, 不论相对阻尼系数 ξ 等于多少, 振幅 B 都等于支承运动振幅 a 。而当 $\lambda > \sqrt{2}$ 时, 振幅 B 就小于支承运动振幅 a , 而且阻尼大的系统比阻尼小的振幅反而要稍大些。

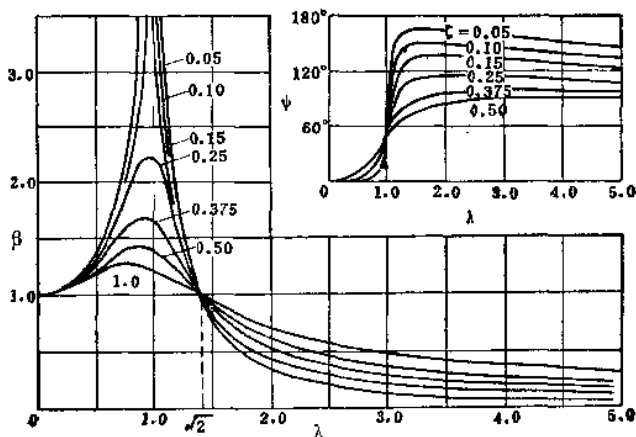


图 3-16

支承运动除上述以位移 $x_s = a \sin \omega t$ 来表达者外, 还有以速度或加速度来表达的。若以速度 $\dot{x}_s = b \sin \omega t$ 来表达, 用上面同样的推导方法可得:

$$B = \frac{b}{\omega} \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}}$$

若以加速度 $\ddot{x}_s = c \sin \omega t$ 来表达, 则

$$B = \frac{c}{\omega^2} \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}}$$

例3.4 某精密设备用橡胶隔振器隔振, 如图 3-17 所示。已知系统的固有频率为 3.8Hz。橡胶隔振器的相对阻尼系数 $\zeta = 0.125$ 。如地面振动的垂直分量是正弦振动, 振幅为 2μ , 最大振动速度为 0.1256 mm/s 。试求设备的振幅。

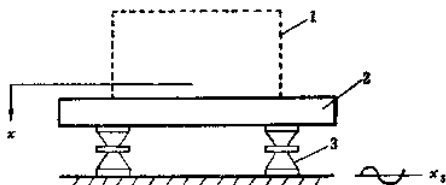


图 3-17

1—设备 2—基础 3—橡胶隔振器

解 已知 $\zeta = 0.125$

地面振动的频率为

$$\omega = \frac{v}{a} = \frac{0.1256}{2 \times 10^{-3}} = 62.8 \text{ 1/s}$$

$$p = 2\pi f = 2\pi \times 3.8 = 23.9 \text{ 1/s}$$

$$\lambda = \frac{\omega}{p} = \frac{62.8}{23.9} = 2.63$$

于是设备的振幅为

$$\begin{aligned} B &= a \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{1 + (2 \times 0.125 \times 2.63)^2}{(1 - 2.63^2)^2 + (2 \times 0.125 \times 2.63)^2}} = 0.4 \mu \end{aligned}$$

以上 3.2 节、3.4 节和本节分别讨论了在简谐激振力或支承简谐运动引起的强迫振动。不论上述何种情况, 单自由度系统强

迫振动的微分方程都具有下列形式

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = F(t) \quad (3.23)$$

$F(t)$ 称为**激振函数**。它可能是激振力,也可能是支承运动。下面就要看到 $F(t)$ 并不限于简谐函数。

当 $F(t)$ 为简谐函数时,微分方程的解都是

$$x = B \sin(\omega t - \psi)$$

即系统都作与激振函数 $F(t)$ 同频率的简谐振动,只是不同情况下振幅 B 有所不同。

系统的响应除了上述以位移形式表达者外,也有用速度或加速度形式表达的。它们与位移之间关系是

$$\dot{x} = B\omega \cos(\omega t - \psi) = \omega x$$

$$\ddot{x} = -B\omega^2 \sin(\omega t - \psi) = -\omega^2 x$$

3.5 隔振原理

机器设备运转时发生的剧烈振动,不但会引起机器本身结构或部件的破坏、缩短寿命、降低效率等不利影响,而且会影响周围的精密仪器设备不能正常工作或降低其灵敏度和精确度。由振动产生的噪音对人体健康也很有害。因此有效地隔离振动是现代化工业中的重要问题。

根据振源的不同,一般分为两种性质不同的隔振。一种称为主动隔振,一种称为被动隔振。

(1) 主动隔振

机器本身是振源,使它与地基隔离开来,以减少它对周围的影响,称为主动隔振。例如把机器安装在较大的基础上,在基础与地基之间设置若干橡胶隔振器就是常用的一种主动隔振措施。

主动隔振的效果用**主动隔振系数** η_0 表示。

$$\eta_0 = \frac{\text{隔振后传到地基上去的力}}{\text{没有隔振时传到地基上去的力}}$$

从图 3-18 a) 看,当机器未加隔振时,传到地基上去的力显然就是原来的激振力 $F_0 \sin \omega t$ 。加隔振后,如图 3-18 b),传

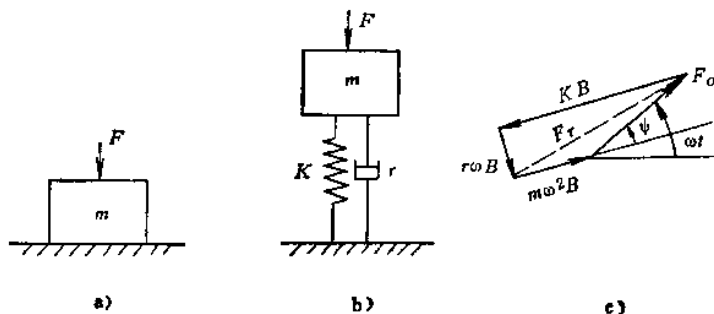


图 3-18

递到地基上去的力有两部分：一部分是通过弹簧传到地基上的

$$F_K = Kx = KB \sin(\omega t - \psi)$$

另一部分是通过阻尼器传到地基上的

$$F_r = r\dot{x} = rB\omega \cos(\omega t - \psi)$$

这两部分力频率相同，均为 ω 。用旋转矢量表示如图 3-18 c)。它们的合力的最大值为

$$F_r = \sqrt{F_{K\max}^2 + F_{r\max}^2} = B\sqrt{K^2 + r^2\omega^2} = KB\sqrt{1 + (2\xi\lambda)^2} \quad (a)$$

由 (3.7) 式可知，在激振力 $F_0 \sin \omega t$ 作用下，系统的振幅为

$$B = \frac{F_0}{K\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}}$$

代入 (a) 式得

$$F_r = \frac{F_0\sqrt{1 + (2\xi\lambda)^2}}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \quad (b)$$

由 (b) 式可知

$$\eta_a = \frac{F_r}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \quad (3.24)$$

将 (3.24) 式与 (3.22) 式比较，等式右边是一样的，所以将图 3-16 的幅频响应曲线的纵坐标 β 改为 η_a ，就成为主动隔振系数随频率变化的特性曲线。

(2) 被动隔振

振源来自地基运动,如前面讲过的支承运动引起的振动,为了使外界振动少传到系统中来,采取隔振措施,称为被动隔振。如例题 3.4 的精密设备用橡胶隔振器与地基隔开,就是被动隔振。

被动隔振的效果用**被动隔振系数** η_p 表示。

$$\eta_p = \frac{\text{隔振后机器设备的振幅}}{\text{地基运动的振幅}}$$

设地基运动是简谐运动 $x_s = a \sin \omega t$, 则机器设备在隔振后的振幅已由上一节讨论过。由 (3.22) 式

$$\eta_p = \frac{B}{a} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \quad (3.25)$$

η_p 也有以振动速度或振动加速度来衡量的。以振动速度衡量时 η_p 为隔振后机器设备的振动速度与地基运动的振动速度的比值。以振动加速度衡量时 η_p 为隔振后机器设备的振动加速度与地基运动的振动加速度的比值。显然,当地基运动是简谐运动时,上面三种情况的被动隔振系数是相等的。但如果地基运动是由几种简谐运动叠加而成的,则三种情况就不相等。

由 (3.24) 和 (3.25) 式可见无论是主动隔振还是被动隔振,含义虽然不同,系数 η 与频率比 λ 的变化规律是相同的,都可用图 3-16 的特性曲线来表示,并有下列一些共同特性。

1. 不论阻尼大小,只有当频率比 $\lambda > \sqrt{2}$ 时才有隔振效果。
2. $\lambda > \sqrt{2}$ 以后,随着频率比增加,隔振系数 η 值逐渐趋于零。但在 $\lambda > 5$ 以后, η 曲线几乎水平,即令使用更好的隔振装置,隔振效率提高有限。实用上选取 λ 值在 2.5~5 之间已足够。
3. 当 $\lambda > \sqrt{2}$ 时,隔振系数 η 随相对阻尼系数 ξ 的增大而提高,即在此情况下阻尼的增大是不利于隔振的,盲目增加阻尼并不一定能带来好的隔振效果。

为了更直接说明隔振效果,有时用隔振效率 ε 来表示。

$$\varepsilon = (1 - \eta) \times 100\% \quad (3.26)$$

它表示了隔振装置所隔离掉的振动的百分率。

例3.5 试计算例 3.2 中的洗衣机的隔振系数 η 和隔振效率 ε

解 由例 3.2 已知 $\zeta = 0.15$, $\lambda = 2.45$

故

$$\eta_s = \sqrt{\frac{1 + (2 \times 0.15 \times 2.45)^2}{(1 - 2.45^2)^2 + (2 \times 0.15 \times 2.45)^2}} = 0.246$$

$$\varepsilon = (1 - 0.246) \times 100\% = 75.4\%$$

例3.6 有一精密仪器用 8 个弹簧（每边四个并联）作隔振装置。弹簧放在对称位置。已知地板按 $x_s = 0.1 \sin 10\pi t$ 振动，仪器重 $W = 800\text{kg}$ ，每个弹簧的刚度为 $K = 13.7\text{kg/cm}$ ，忽略阻尼影响，求隔振系数。

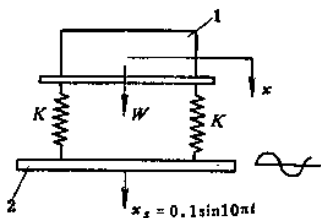


图 3-19

1—仪器 2—地板

解 系统的固有频率

$$p = \sqrt{\frac{8Kg}{W}} = \sqrt{\frac{8 \times 13.7 \times 980}{800}} = 11.6 \text{ 1/s}$$

地板振动频率

$$\omega = 10\pi = 31.4 \text{ 1/s}$$

$$\lambda = \frac{\omega}{p} = \frac{31.4}{11.6} = 2.71 > \sqrt{2}$$

因忽略阻尼, $\zeta = 0$

$$\eta_p = -\frac{1}{1 - \lambda^2} = \frac{1}{1 - 2.71^2} = 0.158$$

3.6 惯性式测振仪原理

惯性式测振仪是常用的测振仪器，有位移计、速度计、加速度计三种类型。下面仅从原理上简单地介绍位移计和加速度计。它们都是利用支承运动下强迫振动的振幅频率特性制成的。

图 3-20 表示惯性式测振仪的基本原理。测振仪内部包括一

个惯性质量 m ，弹簧 K 和阻尼器 r ，组成一个单自由度振动系统。弹簧与阻尼联接在外壳上。测振时直接把外壳与振动物体固接，外壳随振动物体一起作同样的振动。利用联接在质量上的指针，或通过电信号指示出所测的位移或加速度。

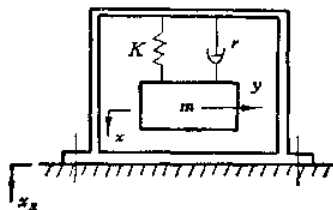


图 3-20

设振动物体的运动为

$$x_s = a \sin \omega t$$

惯性质量 m 的位移为 x 。指针所

指示的是质量 m 和外壳（即振动物体）之间的相对位移

$$y = x - x_s$$

分析质量 m 的运动，它和第 3.4 节所述的支承运动下的强迫振动是一样的，由方程 (3.20)

$$m\ddot{x} = -K(x - x_s) - r(\dot{x} - \dot{x}_s)$$

代入

$$y = x - x_s$$

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{x}_s$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}_s + \ddot{y}$$

得

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = -m\ddot{x}_s = ma\omega^2 \sin \omega t \quad (3.27)$$

(3.27) 式与 (3.16) 式相似，不过 y 代替了 x ， $ma\omega^2$ 代替了 $me\omega^2$ 。因此，方程 (3.27) 的特解，即稳态振动的解为

$$y = Y \sin(\omega t - \psi)$$

$$Y = \frac{ma\omega^2}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2}} = \frac{a\lambda^2}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad (3.28)$$

$$\tan \psi = -\frac{r\omega}{K - m\omega^2} = -\frac{2\zeta\lambda}{1 - \lambda^2} \quad (3.29)$$

如果以 λ 为横坐标， $\frac{Y}{a}$ 为纵坐标，作特性曲线，则可得到与

图 3-12 完全相同的图，只要将图 3-12 的纵坐标 $\frac{MB}{me}$ 代替以 $\frac{Y}{a}$ 。

(1) 位移计

由 (3.28) 式可以看到，当 $\lambda \rightarrow \infty$ ，则

$$Y = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\lambda}\right)^2}} \approx a$$

此时指针所指示的就是振动物体的位移。实用上只要振动物体的频率 ω 比测振仪的固有频率 p 有足够高,就可以使测得的 Y 值足够准确地接近于振动物体的实际振幅。

位移计要求本身的固有频率比较低,从而使 $\lambda = \frac{\omega}{p}$ 可以足够大,所以位移计是一种低固有频率的仪器。例如用以测量大型电机和汽轮机组的某种百分表位移计的固有频率约为10Hz左右,而频率使用范围为25~70Hz。

必须指出阻尼器对频率使用范围有很大影响。从图3-12特性曲线上可以看到,如取相对阻尼系数 $\xi = 0.6 \sim 0.7$, λ 在2.5以上, $\frac{Y}{a}$ 就已相当接近于1。所以合理选择阻尼,实际上扩大了频率使用范围的下限。

位移计的缺点是本身体积大而重,对重量不大的振动物体的测振结果影响较大,测量范围小。

(2) 加速度计

将(3.28)式加以改写

$$Y = \frac{a\omega^2}{p^2\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} = \frac{\ddot{Y}}{p^2\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \quad (3.30)$$

\ddot{Y} 是被测振动物体的加速度。当 $\lambda \rightarrow 0$ 时,

$$Y \approx \frac{\ddot{Y}}{p^2}$$

此时指针指示的值与振动物体的加速度幅值成正比。加速度计即利用此原理。

加速度计要求本身的固有频率 p 必须比振动物体的频率 ω 足够高,从而使 $\lambda = \frac{\omega}{p}$ 足够小。所以加速度计是一种高固有频率的仪器。工程上现在已广泛使用加速度计,尤其是各种压电晶体式

加速度计，它本身的固有频率可以达到 10000Hz 以上、具有使用频率范围广、体积小、灵敏度高优点。

加速度计的频率使用范围同样受阻尼影响较大。由 (3.30) 式，以 λ 为横坐标， $\frac{Y p^2}{\ddot{Y}}$ 为纵坐标，作特性曲线，可得图 3-2 完全相同的图，只要将 β 以 $\frac{Y p^2}{\ddot{Y}}$ 代替。如将其一部分放大如图 3-21，从图上可以看到在 $\zeta = 0.65 \sim 0.70$ 时， $\lambda = 0 \sim 0.4$ 的频率范围内， $\frac{Y p^2}{\ddot{Y}} \approx 1$ ，误差小于 0.1%。因此阻尼的合理选择可以增高加速度计的频率使用范围。

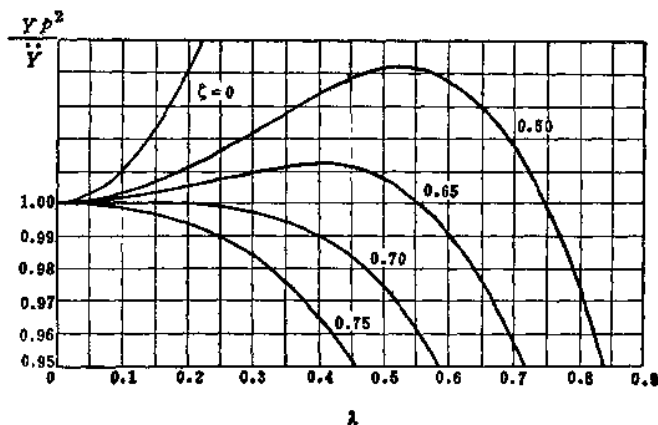


图 3-21

惯性式测振仪中的阻尼除了能扩大频率适用范围外，还能影响测振仪性能。在上一章中已指出，相对阻尼系数 ζ 增大时，能使弹簧质量系统自由振动迅速衰减。这一点对测振仪是很重要的，尤其在测量冲击和瞬态振动时更为重要。 ζ 过小的测振仪是很难使用的，这时测振仪初始的自由振动长时间不衰减，叠加到被测的量中，分析起来很困难。

阻尼还对测振仪的相位频率特性有较大影响。由 (3.29) 式可知, 测振仪指针所指示的值与振动物体运动之间有相位差 ψ 。 ψ 与 λ 的关系如图 3-5 的特性曲线所表示。一般说 ψ 与 λ 的变化规律是非线性的, 在测量由若干简谐函数叠加而成的非简谐周期振动时, 会造成波形畸变 (或相位畸变)。要避免这种畸变, 必须使相位差 ψ 与频率比 λ 的变化成正比, 即线性变化。如图 3-5 所示, 当 $\xi = 0.70$ 时, 在 $0 < \frac{\omega}{p} < 1$ 的范围内是接近于直线的。此时 $\psi = \frac{\pi}{2} \lambda$, 畸变可以实际上被消除。所以, 阻尼的选择在测振仪中是一个重要问题。

3.7 单盘转子的临界转速

在大型汽轮机、发电机及机组, 和其他一些旋转机械的开车停机过程中, 当经过某一种转速附近时, 会出现剧烈的振动。为了保证机器的安全运行, 必须迅速越过这个转速。这个转速在数值上一般非常接近于转子横向自由振动的固有频率, 称为**临界转速**。

什么是临界转速? 先分析如图 3-22 a) 所示的单盘转子。轴为两端简支, 圆盘固定在轴的中间。为了略去圆盘和轴自重的影响, 将轴竖放。当转子静止时, 圆盘的形心 O' 与轴线 AB 上 O 点相重合, 圆盘重心在 c , 偏心距 $e = O'c$ 。

当转子开始运转后, 由于离心惯性力的作用, 轴离开 AB 直线位置, 产生动挠度。转子现在有两种运动: 一种是轴线弯曲后的自身转动, 也是圆盘绕轴的转动; 另一种是弯曲了的轴 $AO'B$ 和轴承联线 AOB 所组成的平面的转动。这两种转动的角速度并不一定相同。这里仅讨论比较简单的情况: 两种转速相等, 均为 ω 。

设 xOy 坐标轴如图所示。以 (x, y) 表示圆盘几何中心 O' 的位置, OO' 即为轴旋转时圆盘几何中心的位移。在忽略阻尼的情况下, 圆盘重心 c 在 OO' 的延长线上。它的座标分别为

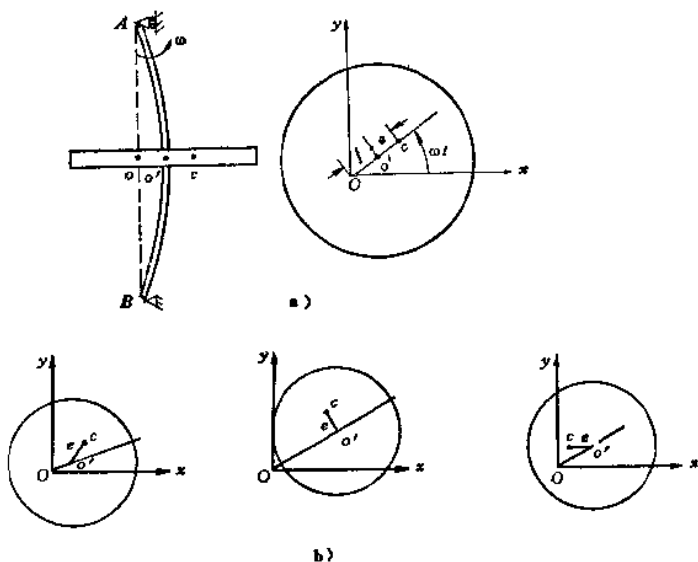


图 3-22

$(x + e \cos \omega t)$ 与 $(y + e \sin \omega t)$ 。

设轴的弹簧刚度为 K ，它在 x 和 y 方向是相等的。由上一章表 2.1 中可知简支梁中间受集中载荷时 $K = \frac{48EI}{l^3}$ 。

由此建立在 x 和 y 两方向的运动方程式

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + e \cos \omega t) = -Kx$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (y + e \sin \omega t) = -Ky$$

或

$$m\ddot{x} + Kx = me\omega^2 \cos \omega t \quad (3.31)$$

$$m\ddot{y} + Ky = me\omega^2 \sin \omega t$$

这两个方程式与偏心质量引起的无阻尼强迫振动的微分方程是相似的，其解为

$$x = \frac{e\lambda^2}{1 - \lambda^2} \cos \omega t$$

$$y = \frac{e\lambda^2}{1 - \lambda^2} \sin \omega t$$

式中 $\lambda = \frac{\omega}{p}$, $p = \sqrt{\frac{K}{m}}$ 。设以 f 表示轴中点的动挠度 OO' 的大小, 由上两式得

$$f = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{e\lambda^2}{1 - \lambda^2} \quad (3.32)$$

对于已制造好的转子, 转子质量 m 、偏心距 e 、轴的弹簧刚度 K 等都是有一定的。因此在转速 ω 一定时, f 的值也是一定的。圆盘的几何中心 O' 作半径为 f 的圆周运动, 而圆盘的重心 c 则作半径为 $(f + e)$ 的圆周运动。轴呈弓状变形, 但并没有发生任何如前面所述的那种振动。这种现象称为**弓形回旋**。

(3.32) 式可用图 3-23 表示, 动挠度 f 随频率比 λ 的变化而不同。当转速 ω 很低时, 即 $\lambda \approx 0$, 动挠度是很小的。但当 $\lambda = 1$, 即转速等于转子不转动而作横向自由振动时的固有频率时, 即使转子平衡得很好, e 很小, 动挠度 f 也会趋无限大。虽然在实际上由于轴承产生的阻尼将把挠度限制在一定的有限值, 较大变形产生的非线性弹性恢复力也会限制挠度, 但轴的动挠度仍将比较大而易导致破坏。这时的转速称为**临界转速**, 以 ω_k 表示

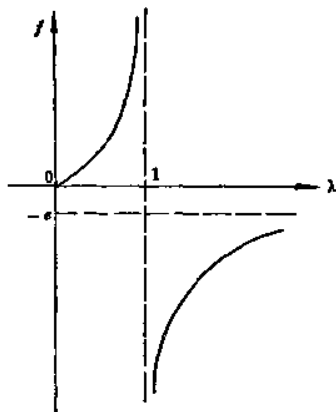


图 3-23

$$\omega_k = p = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

工程上通常用每分钟转数来表示, 可表达为

$$n_k = \frac{60\omega_k}{2\pi} \text{ rpm} \quad (3.33)$$

所以临界转速在数值上等于转子不转动而作横向自由振动时的固

有频率。顺便指出,如把其他一些因素(例如下一章要提到的回转效应)考虑进去时,临界转速的值并不等于固有频率而略有偏离。

当 $\lambda > 1$ 时,即超越临界转速运行时, f 为负值。这表明动挠度与偏心距反相,重心 c 落在 OO' 之间。当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $f \approx -e$ 。这时轴围绕圆盘重心旋转,重心 c 与 O 点重合,称为自动定心。

如果考虑阻尼的影响,则重心 c 将不落在 OO' 的延长线上。 $O'c$ 线超前 OO' 线一个相位角 ψ 。 ψ 的值决定于阻尼 r 和转速 ω 。图 3-22 b) 画出了三种不同转速情况下圆盘重心 c 和几何中心 O' 之间的相对位置。在 $\lambda < 1$ 时, $\psi < \frac{\pi}{2}$ 。 $\lambda = 1$ 时, $\psi = \frac{\pi}{2}$ 。

而在 $\lambda > 1$ 时, $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ 。

最后要注意一下。一根不转动的轴作横向弯曲强迫振动时,轴内产生交变应力。而在弓形回旋时,轴内并不产生交变应力。但转子的离心惯性力却对轴承产生一个交变力,并导致支承系统发生强迫振动。这是我们在临界转速时感到剧烈振动的原因。正因为这样,工程上常把临界转速时支承发生剧烈振动的现象和共振不加区分。实际上这是两种不同的物理现象。

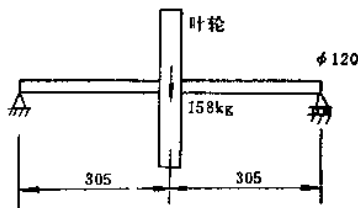


图 3-24

例3.7 图 3-24 为某厂叶片模拟试验台的示意图。叶轮重 158kg, 转轴的跨度为 610mm, 直径为 120mm, $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, 比重为 $7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 。试求其临界转速。

解 转轴自重为

$$W_f = \frac{\pi \times 12^3}{4} \times 61 \times 7.8 \times 10^{-3} = 53.8 \text{ kg}$$

与叶轮重量相比不应忽略不计, 取其等效质量为

$$m_f = \frac{17}{35} \times \frac{53.8}{980} = 0.0266 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$$

系统的总质量为

$$m = \frac{158}{980} + 0.0266 = 0.188 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$$

轴的弹簧刚度为

$$K = \frac{48EJ}{l^3} = \frac{48 \times 2.1 \times 10^6 \times \pi \times 12^4}{64 \times 61^3} = 4.51 \times 10^6 \text{ kg/cm}$$

故临界转速为

$$n_c = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{4.51 \times 10^6}{0.188}} = 14800 \text{ rpm}$$

3.8 转子的平衡问题

前面已经讨论过, 如果旋转机械的转动部分(常称转子)有偏心质量, 在运行时就要产生周期性离心惯性力。旋转机械的振动很多是由此产生的。对于现代大容量、高转速、高效率的旋转机械, 这种偏心造成的振动更为严重。这种偏心来源于材质的不均匀、加工误差、装配误差以及运行不当等等, 在实际上是很难完全消除的。所以, 机组在正式运行前要作平衡试验, 其目的就是尽量减小转子的偏心, 使机械运行时发生的振幅控制在非常小的允许值范围之内。

对于一个理想的完全平衡的转子, 力学上的必要和充分条件是: 转子上各部分质量在旋转时产生的离心惯性力的合力和合力偶都等于零, 使转子旋转时对支承只有自重引起的静力作用。反之, 只要离心惯性力的合力或合力偶不等于零, 或合力与合力偶都不等于零, 转子便处于不平衡状态。

按转子偏心质量分布状况, 在旋转时产生的离心惯性力可能引起转子的静不平衡或动不平衡。下面分别加以简单介绍。

(1) 静平衡问题

如图 3-25 a) 所示转子, 轴上固定一个薄圆盘, 套装没有歪

斜。如果薄圆盘离旋转轴 x 轴 e 处有一偏心质量 m ，则在旋转时将产生一个不平衡的离心惯性力 $F = me\omega^2$ 。 F 力作用在圆盘平面内，并通过 x 轴，所以它有一个合力就是 F 力本身，而无合力偶。这种不平衡只要把转子放在完全平行的两个水平轨道上，如图 3-25 b)，利用重力作用就可以检验出来，因为转子总是滚动到偏心质量垂直向下位置停下来。校正这种不平衡的方法只要在偏心质量相反方向加配重，或者就在相同方向用钻孔、切削等方法去掉一些重量就可以达到目的。所以转子静平衡就是指转子仅在重力作用下能随意地停留在任一角方位而不发生转动。

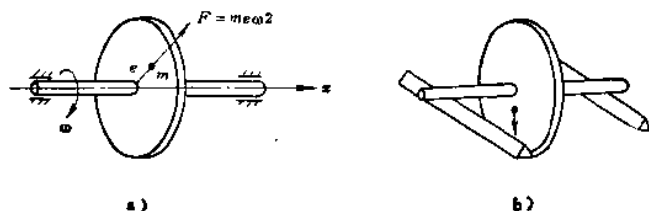


图 3-25

(2) 动平衡问题

如图 3-26 a) 所示转子，在轴上装有两个薄圆盘，盘上各有一同样大小的偏心质量 m ，和同样大小的偏心距 e ，但方向相反。显然这样的转子在静平衡试验时，是处于静平衡状态的。当转子转动起来后，便产生大小相等、方向相反、都通过旋转轴、而不在同一平面内的一对离心惯性力 $F = me\omega^2$ 。它们的合力为零，但合力偶不等于零。如两圆盘之间距离为 l ，合力偶大小为 Fl 。这个力偶施加到支承上，便引起振动。这种不平衡必须用动平衡机作转子在旋转情况下的动平衡试验才能检验。一个动平衡的转子应在旋转情况下，既没有惯性力合力，又没有惯性力偶作用到支承上去。

如图 3-26 b) 那样的长度与直径是同等量级的转子（如电机的转子），可以看作一系列薄圆盘的组合。如图 3-26 c) 的薄圆

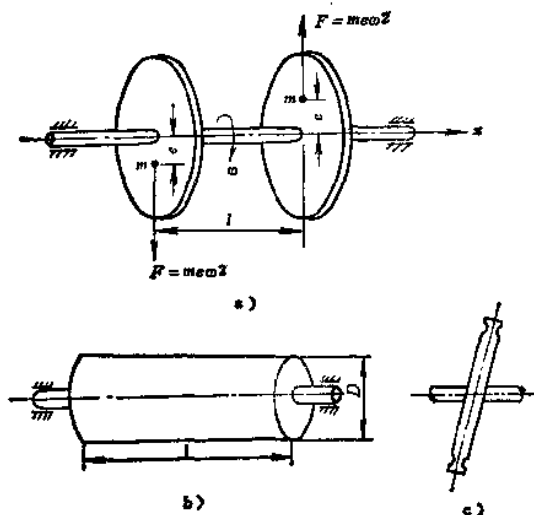


图 3-26

盘装歪斜了, 都可能产生动不平衡。

在最一般的情况下, 譬如图 3-26 a) 的两个薄圆盘的偏心质量不相等, 惯性力系将简化成一个合力和一个合力偶, 转子将既静不平衡, 又动不平衡。

显然转子在整个转速范围内达到动平衡, 必然满足静平衡, 但满足静平衡的, 却未必能达到动平衡。在实际生产中, 当转子长度 l 与其直径 D 之比 $\frac{l}{D}$ 小子 0.2 时, 一般只要作静平衡试验就能满足要求。

在以上讨论的转子平衡问题中, 我们都把转子当作刚体, 而忽略由于离心惯性力引起的动挠度的影响。当转速比较低, 动挠度很小时, 在动平衡过程中转子是可以按刚性考虑的, 这称为刚性动平衡。由于是在低转速下进行, 也常称为低速动平衡。

由于机器容量的加大, 效率、转速的提高, 以及转子尺寸的相应越加细长, 转子旋转时的动挠度就可能达到相当大的数值。

在上一节中已经看到,由离心惯性力引起的动挠度是和转速有关的。因此,在低转速时平衡的转子,到高转速时又会失去平衡而发生剧烈振动。校正这种动不平衡必须把离心惯性力引起的动挠度影响考虑进去。这称为**柔性动平衡**,也称为**高速动平衡**。

例 3.8 如图 3-27 所示转子,长度为 l ,半径为 R ,在离左端 $\frac{l}{3}$ 的平面内垂直方向有偏心量 $m_1 e_1$,在中间平面内水平方向有偏

心量 $m_2 e_2 = \frac{2}{3} m_1 e_1$ 。

试问应怎样加配重才能使转子达到刚性动平衡。

解 对于刚性转子,不论转子质量分布的原始不平衡情况如何,根据力的分解合成原理,偏心质量产生的离心惯性力总可以合成一个通过旋转轴并与之垂直的合力和一个合力偶。要平衡这个不平衡的力和力偶,只要在转子

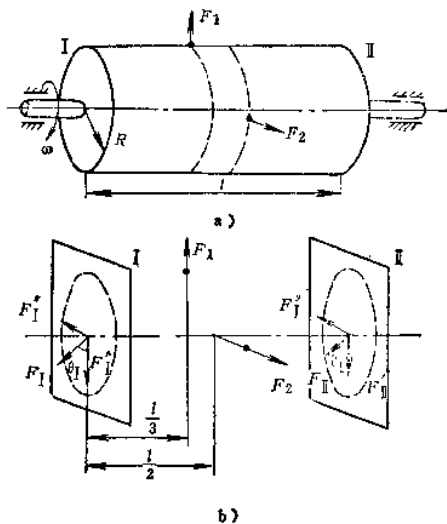


图 3-27

上任选的两个与旋转轴垂直的平面内的合适方位加上两块配重就可以达到目的,一般最方便地可以选转子的两个端面 I 和 II 加配重。配重的大小和方位可决定如下:

设转子以转速 ω 旋转,两个偏心质量分别产生离心惯性力 $F_I = m_1 e_1 \omega^2$ 和 $F_{II} = m_2 e_2 \omega^2 = \frac{2}{3} m_1 e_1 \omega^2$ 。今在 I 平面内垂直方向加 F_I' , 在 II 平面内垂直方向加 F_{II}' 。 F_I' 和 F_{II}' 应满足平衡条件:

$$F_I' + F_{II}' = F_I$$

$$F'_1 \cdot \frac{l}{3} = F'_1 \cdot \frac{2l}{3}$$

解之得
$$F'_1 = \frac{2}{3} F_1, \quad F''_1 = \frac{1}{3} F_1$$

再在 I 平面内水平方向加 F''_1 , 在 II 平面内水平方向加 F''_1 。
同样根据平衡条件得:

$$F''_1 = F''_1 = \frac{1}{2} F_2$$

按矢量合成原理得

$$\begin{aligned} F_I &= \sqrt{F_I'^2 + F_I''^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} F_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} F_2\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{3} m_1 e_1 \omega^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m_1 e_1 \omega^2\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} m_1 e_1 \omega^2 \\ F_{II} &= \sqrt{F_{II}'^2 + F_{II}''^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} F_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} F_2\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{3} m_1 e_1 \omega^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m_1 e_1 \omega^2\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} m_1 e_1 \omega^2 \end{aligned}$$

现在可在 I 平面内半径 R 处加配重, 其质量为

$$m_I = \frac{F_I}{R \omega^2} = \frac{\sqrt{5} m_1 e_1}{3 R}$$

方位为

$$\theta_I = \operatorname{tg}^{-1} \frac{F_I''}{F_I'} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2} = 26^\circ 35'$$

再在 II 平面内半径 R 处加配重, 其质量为

$$m_{II} = \frac{F_{II}}{R \omega^2} = \frac{\sqrt{2} m_1 e_1}{3 R}$$

方位为

$$\theta_{II} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{F_{II}''}{F_{II}'} = \operatorname{tg}^{-1} 1 = 45^\circ$$

这样转子就可以达到刚性动平衡。

3.9 简谐力的功

上一章已讨论过, 系统作无阻尼自由振动的过程中, 能量没有损失而是守恒的, 所以系统能维持等幅振动。有阻尼存在时, 阻尼力将消耗振动系统中的能量而导致振幅的逐渐衰减。因为实际上不存在没有阻尼的振动系统, 所以自由振动经过一段时间之后总是要停下来的。

只有在强迫振动时, 由于持续的激振力对系统不断做功, 即不断输入能量, 使阻尼所消耗的能量不断得到补偿, 系统才能保持稳定的等幅振动。下面将证明激振力所作的功正好等于阻尼力所消耗的能量。

1) 简谐激振力在一个周期内所作的功。以 3.2 节图 3-1 所示的弹簧质量系统为例, 作用在系统的质量块上的简谐激振力为

$$F = F_0 \sin \omega t$$

系统随之作简谐强迫振动, 其位移为

$$x = B \sin(\omega t - \psi)$$

位移 x 与激振力 F 是同频率的。由于激振力 F 在微小位移 dx 上所作之功为

$$dW_F = F dx = F \dot{x} dt$$

于是 F 在一个周期内, 即由 $t = 0$ 到 $t = \frac{2}{\omega} \pi$ 所作的功为:

$$\begin{aligned} W_F &= \int_0^T F \dot{x} dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_0 B \omega \sin \omega t \cos(\omega t - \psi) dt \\ &= F_0 B \int_0^{2\pi} \sin \omega t \cos(\omega t - \psi) d(\omega t) = \pi F_0 B \sin \psi \end{aligned} \quad (3.34)$$

可见, 简谐激振力每周作功的大小, 不仅决定于力与振幅的大小, 还决定于两者之间的相位差。如果我们将力和位移都用旋转矢量来表示, 如图 3-28, 并把 F_0 分解成 F_1 与 F_2 两个分力, F_1 与位移同相位, F_2 超前位移 90° 。显然 $F_2 = F_0 \sin \psi$ 。我们可

以看到：一个简谐力作用在一个作同频率简谐振动的系统上，只有与位移具有 90° 相位差的那个分力，才在一个周期内作功。与位移同相位的那个分力是不作功的。因为速度矢量也超前位移矢量 90° ，所以也可以作这样的叙述：只有当一个简谐力具有与速度同相位的分量时，这个力才会在一个周期内作功。

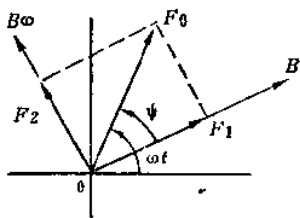


图 3-28

设想一下系统在一个周期内的振动过程，便很容易理解上述现象。对于与位移同相位的简谐激振力来说，在振动的头 $\frac{1}{4}$ 周期内，力与质量块的运动方向是相同的，做正功。在第二个 $\frac{1}{4}$ 周期内，力将与运动方向相反，做同样大小的负功，与头 $\frac{1}{4}$ 周期内所作之功恰好抵消。同理，第三个 $\frac{1}{4}$ 周期内激振力所作之功又和第四个 $\frac{1}{4}$ 周期内所作之功抵消。所以整个周期内简谐激振力所作的功总和为零。但对于与位移具有 90° 相位差的简谐激振力来说，力与质量块的运动方向将始终相同，恒作正功。每 $\frac{1}{4}$ 周期作功 $\frac{1}{4} \pi F_0 B \sin \psi$ ，一个周期内作功总和 $\pi F_0 B \sin \psi$ 。

下面讨论一下简谐力与简谐振动的频率不同时的作功情况。设简谐力与简谐振动分别为

$$F = F_0 \sin n\omega t$$

$$x = B \sin(m\omega t - \psi)$$

式中 m 与 n 都整数， ω 是两者圆频率的公约数。

在一个周期内，上述简谐力在简谐振动位移上所作的功为

$$W_F = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F \dot{x} dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_0 B m \omega \sin n\omega t \cos(m\omega t - \psi) dt$$

利用三角函数族的正交性可以证明, 当 $m \neq n$ 时, 上式右边的积分结果为零。这就是说, 一个简谐力作用在一个以不同频率作简谐振动的系统上, 在一个周期内所做的功总和为零。

当 $m = n$ 时, 问题又成为一个简谐力在与之作同频率简谐振动的系统上作功的问题。在一个周期内简谐力所作之功显然为

$$W_p = n\pi F_0 B \sin \psi \quad m = n$$

由此可以推论, 一个简谐力 $F = F_0 \sin n\omega t$ 作用在一个振动系统上, 如果系统的振动由一系列简谐振动叠加而成, 它的表达式为

$$x = \sum_{i=1}^m B_i \sin(i\omega t - \psi_i) \quad m \geq n$$

则在一个周期内简谐力在与它不同频率的各个简谐振动上 (即 $m \neq n$ 的各个简谐振动上) 所作的功都为零, 而只在与它同频率 (即 $m = n$) 的简谐振动上作功 $n\pi F_0 B_n \sin \psi_n$ 。

2) 阻尼力在一个周期内所消耗的能量, 即一个周期内所作的功。对于粘性阻尼力

$$F_r = r \dot{x}$$

同样, 系统作简谐强迫振动时

$$x = B \sin(\omega t - \psi)$$

$$\dot{x} = B\omega \cos(\omega t - \psi)$$

故

$$F_r = rB\omega \cos(\omega t - \psi)$$

所以阻尼力也是一种简谐力, 它与位移也具有超前 90° 的相位差。根据前面的分析, 这种简谐力在一个周期内是要做功的。

F_r 在一个周期中所作的功为:

$$\begin{aligned} W_r &= \int_0^T F_r \dot{x} dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} rB^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - \psi) dt \\ &= \pi r B^2 \omega \end{aligned} \quad (3.35)$$

可见粘性阻尼力所作的功是与振幅的平方成正比的, 并与振动频率也成正比。

不难从图 3-6 的旋转矢量图上看到,

$$rB\omega = F_0 \sin \psi$$

于是, $W_r = \pi r B^2 \omega = \pi F_0 B \sin \psi = W_r$

这就证明了阻尼力所作的功, 即所消耗的能量等于激振力所作的功, 即所输入的能量。

在共振时, 相位差 $\psi = \frac{\pi}{2}$, 激振力等于阻尼力,

$$F_0 = r\omega B$$

这时激振力每周所作的功最大, 阻尼力所消耗的能量也最大。

在强迫振动中阻尼起到限制系统共振时的振幅的作用。至于离共振较远的频率范围内, 阻尼对振幅的作用是很小的。

3.10 阻 尼 理 论

(1) 等效粘性阻尼

当振动系统中存在非粘性阻尼时, 我们通常用一个**等效粘性阻尼系数** r_e 来进行近似计算。等效粘性阻尼系数的值是 根据一个周期内非粘性阻尼所消耗的能量和等效粘性阻尼所消耗的能量相等这一原则计算出来的。

设 W_r 为非粘性阻尼力在一个周期内所作之功。并设系统以等效粘性阻尼代替后仍作简谐振动, 则根据式 (3.35) 在一个周期内等效阻尼力所作之功为

$$W_r = \pi r_e \omega B^2$$

使

$$W_e = W_r$$

得

$$r_e = \frac{W_r}{\pi \omega B^2} \quad (3.36)$$

下面分别举例说明。

干摩擦阻尼 干摩擦力 F 一般说是一个常力。它在整个强迫振动过程中大小不变, 但方向始终与运动方向相反。当质量从平衡位置移动到最大偏离位置时, 即在 $\frac{1}{4}$ 周期内, 摩擦力 做功 为 FB 。从最大偏离位置返回时运动方向相反, 摩擦力也随着反向,

在 $\frac{1}{4}$ 周期内仍作功 FB 。以后每 $\frac{1}{4}$ 周都如此, 所以一个整周期中作功总和为

$$W_s = 4 FB$$

代入 (3.36) 式得

$$r_s = \frac{4 FB}{\pi \omega B^2} = \frac{4 F}{\pi \omega B} \quad (3.37)$$

可见干摩擦的等效粘性阻尼系数 r_s 不仅与摩擦力 F 成正比, 还与系统的振幅 B 和频率 ω 成反比。

流体阻尼 当物体以较大的速度在粘性较小的流体 (包括空气和液体) 中运动时, 阻力与速度平方成正比

$$F_r = c \dot{x}^2$$

c 为一常数。 F_r 的方向与速度相反。

$$\text{由} \quad x = B \sin(\omega t - \psi)$$

$$\dot{x} = B \omega \cos(\omega t - \psi)$$

流体阻尼力在一个整周内所作之功为

$$\begin{aligned} W_s &= 4 \int_0^{T/4} F_r \dot{x} dt = 4 \int_0^{T/4} c \dot{x}^3 dt \\ &= 4 \int_{\frac{\psi}{\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega} + \frac{\psi}{\omega}} c B^3 \omega^3 \cos^3(\omega t - \psi) dt \\ &= 4 c B^3 \omega^2 \left[\frac{\cos^3(\omega t - \psi)}{3} + 2 \frac{\sin(\omega t - \psi)}{\omega} \right] \Bigg|_{\frac{\psi}{\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega} + \frac{\psi}{\omega}} \\ &= \frac{8}{3} c B^3 \omega^2 \end{aligned}$$

由 (3.36) 式

$$r_s = \frac{\frac{8}{3} c B^3 \omega^2}{\pi \omega B^2} = \frac{8}{3} \frac{c}{\pi} \omega B \quad (3.38)$$

所以流体等效阻尼是与系统的振幅和频率成正比的。

结构阻尼 由于材料本身内摩擦造成的阻尼, 称为结构阻尼。

在材料力学中已经知道,当我们对一种材料加载到超过弹性极限,然后卸载,并继续往反方向加载,再卸载。一个循环过程中,应力应变曲线会形成一个滞后回线,如图 3-29。滞后回线所包的阴影面积表示了材料在一个循环中单位体积释放的能量。这部分能量将变成热能散失掉。结构材料实际上不是完全弹性的,在振动过程中也就是处在加载卸载过程中。每一个振动周期引成一次滞后回线。结构阻尼即由此产生。大量实验指出,对于大多数结构金属(如钢和铝)。结构阻尼一个周期内所消耗的能量与振幅平方成正比,而且在很大一个频率范围内与频率无关。故 W_d 可表达为

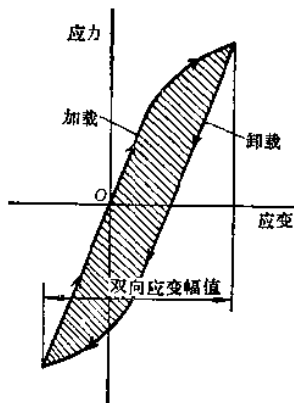


图 3-29

$$W_d = a B^2$$

式中 a 为一常数。于是结构阻尼的等效阻尼系数为

$$r_e = \frac{a B^2}{\pi \omega B^2} = \frac{a}{\pi \omega} \quad (3.39)$$

有了 r_e , 非粘性阻尼强迫振动的微分方程可按(3.1)式写成

$$m \ddot{x} + r_e \dot{x} + Kx = F_0 \sin \omega t \quad (3.40)$$

其特解仍为

$$x = B \sin(\omega t - \psi)$$

振幅为

$$B = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{r_e \omega}{K}\right)^2}} \quad (3.41)$$

(2) 阻尼比容和损耗因子

阻尼所消耗的能量常常以无量纲的相对比值来表达。常用的

一种称为**阻尼比容**。它是阻尼每周所消耗的能量 W_e 和系统最大弹性势能 $U = \frac{1}{2}KB^2$ 之比值，以 α 表示。

$$\alpha = \frac{W_e}{U} = \frac{2 W_e}{K B^2} \quad (3.42)$$

等效粘性阻尼和阻尼比容的关系为

$$r_e = \frac{W_e}{\pi \omega B^2} = \frac{\alpha K}{2 \pi \omega}$$

代入 (3.40) 和 (3.41) 式得

$$m\ddot{x} + \frac{\alpha K}{2 \pi \omega} \dot{x} + Kx = F_0 \sin \omega t \quad (3.43)$$

$$B = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\alpha}{2 \pi}\right)^2}} \quad (3.44)$$

另一种常用的相对比值称为**损耗因子**，以 η 表示。

$$\eta = \frac{W_e}{2 \pi U} = \frac{\alpha}{2 \pi} \quad (3.45)$$

损耗因子和阻尼比容是性质相同的两个量，可以用实验方法测定。

等效粘性阻尼和损耗因子的关系是

$$r_e = \eta \frac{K}{\omega}$$

代入 (3.40) 和 (3.41) 式得

$$m\ddot{x} + \frac{\eta K}{\omega} \dot{x} + Kx = F_0 \sin \omega t \quad (3.46)$$

$$B = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2 + \eta^2}} \quad (3.47)$$

值得指出的是，因为结构阻尼损耗的能量和最大弹性势能一样与振幅平方成正比，并在很大频率范围内与频率无关，所以结构阻尼的阻尼比容 α 和损耗因子 η 都是常量，仅决定于材料和振

动系统本身的物理性质。

(3) 复数阻尼理论

如果将 (3.40) 式用复数形式表示, 则为

$$m\ddot{x} + \frac{\eta K}{\omega} \dot{x} + Kx = F_0 e^{i\omega t}$$

因为简谐振动时 $\dot{x} = i\omega x$

上式即成为

$$m\ddot{x} + K(1 + i\eta)x = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.48)$$

式中 $K(1 + i\eta)$ 定义为**复数刚度**, 以 K_c 表示, 则 (3.48) 式简化为

$$m\ddot{x} + K_c x = F_0 e^{i\omega t}$$

这相当于把图 3-30 a) 的有阻尼弹簧质量系统简化为图 3-30 b)

的无阻尼弹簧质量系统。以此模型为基础来解振动微分方程显然是比较方便的。通常把这种方法称为**复数阻尼理论**, 而把以前立足于粘性阻尼的方法称为**粘性阻尼理论**。

现在来解方程 (3.48) 式。设系统作简谐振动, 方程的解以复数形式表达为

$$x = B e^{i(\omega t - \psi)}$$

代入 (3.48) 式

$$-m\omega^2 B e^{i(\omega t - \psi)} + K(1 + i\eta) B e^{i(\omega t - \psi)} = F_0 e^{i\omega t}$$

整理简化后得

$$B e^{-i\psi} = \frac{F_0}{(K - m\omega^2) + iK\eta}$$

经过复数运算得

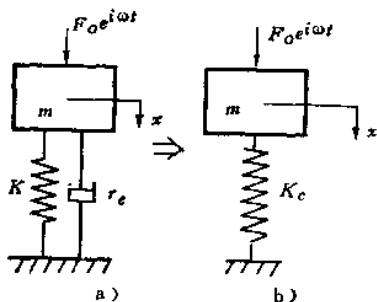


图 3-30

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (K\eta)^2}} = \frac{F_0}{K\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2 + \eta^2}} \\ \psi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{K\eta}{K - m\omega^2} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

可以看到 (3.49) 和前面用等效阻尼得到的 (3.47) 式是完全相同的。

由 (3.49) 式可得到在共振时系统的振幅

$$B = \frac{F_0}{K\eta} \quad (3.50)$$

对比第 3.2 节粘性阻尼系统的共振振幅

$$B' = \frac{F_0}{2\xi K}$$

可知对于相同的振幅, $\eta = 2\xi$, 即结构阻尼的损耗因子相当于两倍的粘性相对阻尼系数 ξ 。

由 (3.50) 式知道, 要使结构在共振时振幅减小, 只要增加系统的损耗因子 η 。不同材料的损耗因子 η 数值相差很大, 由实验加以测定。金属、木材、混凝土等 $\eta = 10^{-3} \sim 10^{-2}$, 橡胶、高分子聚合物 $\eta = 0.5 \sim 2.0$, 高的可达 5.0。这是现代结构上逐渐广泛使用橡胶、高聚合物作为阻尼层来消耗振动系统的能量, 以减低共振时振幅的原因。

测定损耗因子的实验方法之一是自由衰减振动法。先将结构系统激振到共振状态, 再突然切断激振讯号, 让系统作自由振动, 任其逐渐衰减, 将衰减过程的讯号经拾振后记录下来, 从衰减曲线上计算出对数减幅 δ 。因为在共振时, $\delta \approx 2\pi\xi$, 而 $2\xi = \eta$, 所以有

$$\eta = \frac{\delta}{\pi}$$

将测定的对数减幅 δ 除以 π , 即为损耗因子的值。

3.11 周期激振的响应

前面所讨论的问题都是在振动系统上仅作用有一个简谐激振力或支承只有一种简谐运动所引起的强迫振动。这种情况在实际问题中还是比较少的。许多情况下是系统上受到一种非简谐的周期性激振力或支承运动的作用。在第一章里已讨论过, 一般情况下一个周期性函数都可以展开为富氏级数, 因此一个周期激振函数(激振力或支承运动)便可分解为一系列不同频率的简谐函数来处理。设周期激振函数 $F(t)$ 。

$$F(t) = F(t \pm jT) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

即可表达为

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots \\ &\quad + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t) \quad (3.51) \end{aligned}$$

一个振动波所需要的时间仍称为周期, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。 $f_0 = \frac{1}{T}$ 称为基频。(3.51)式表明一个复杂的周期激振函数可以分解成一系列具有基频整倍数的许多简谐函数的叠加。

如果 $F(t)$ 可表达为一个已知函数式, (3.51)式的各项系数可以用第一章谐波分析中介绍的公式计算。读者可参考第一章例 1.1。

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt$$

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos j\omega t dt$$

$$b_j = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin j\omega t dt$$

如果 $F(t)$ 只是图形而不能以函数表达, 可以用近似数解法计算。

一个有阻尼的弹簧质量系统在周期激振力 $F(t)$ 作用下的微分方程为

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = F(t) \\ = -\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t) \quad (3.52)$$

式中第一项 $-\frac{a_0}{2}$ 表示一个常力, 它只影响系统的静平衡位置。只要座标原点取在静平衡位置, 此常数项就不出现在微分方程中。下面我们就不再记入这一项。

微分方程 (3.52) 式的全解同样分成两部分: 一部分是有阻尼的自由振动的齐次解, 这部分振动在阻尼作用下经过一段时间后就衰减掉。在考虑稳态振动时同样可以略去。另一部分是稳态振动的非齐次特解, 是周期性等幅振动。对于线性系统, 稳态振动的解可以按照叠加原理, 将 (3.52) 式右边的任何一项单独地按 (3.1) 式的微分方程一样地求其特解, 然后把所有特解叠加起来, 就得到系统在周期激振力作用下的稳态响应。

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j \cos(j\omega t - \psi_j) + b_j \sin(j\omega t - \psi_j)}{K \sqrt{(1 - \lambda_j^2)^2 + (2\xi\lambda_j)^2}} \quad (3.53)$$

ξ 值较小时可以忽略不计, 则 $\psi_j = 0$

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t}{K(1 - \lambda_j^2)} \quad (3.54)$$

式中 $\lambda_j = \frac{j\omega}{p}$ 。

设系统是在周期性支承运动

$$x_s(t) = \sum_{j=1}^n (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t)$$

作用下振动, 则在忽略阻尼时系统的响应为

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t}{1 - \lambda_j^2} \quad (3.55)$$

为了说明周期性激振力的来源，下面分析一个单缸活塞式发动机的振动问题。如图 3-31，设连杆 l 的质量可以足够准确地分成两部分：一部分集中在曲柄销上，另一部分集中在活塞上，其他不平衡的质量也都以等效质量集中在这两点上。于是整个运动部分的质量最后可用曲柄销上的质量 M_1 和活塞上的质量 M_2 来代表。

在发动机运转时，质量 M_1 作等速圆周运动，它产生惯性力 $M_1 R \omega^2$ 。按图 3-31 所取座标， x 以向下为正，力亦以向下为正。则 M_1 的惯性力的垂直分力为

$$F_1 = -M_1 R \omega^2 \cos \omega t \quad (a)$$

式中 R 为曲柄半径， ω 为曲柄角速度。

质量 M_2 作上下往复直线运动，在运动学曲柄连杆机构的分析中已经知道，以活塞上死点为起点，向下位移 x_p 的近似值（取头两项）为

$$x_p = R(1 - \cos \omega t) + \frac{R^2}{2l} \sin^2 \omega t \quad (b)$$

取两次导数得

$$\ddot{x}_p = R \omega^2 \cos \omega t + \frac{R^2 \omega^2}{l} \cos 2 \omega t$$

于是质量 M_2 的惯性力为

$$F_2 = -M_2 R \omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{R}{l} \cos 2 \omega t \right) \quad (c)$$

垂直方向的激振力为

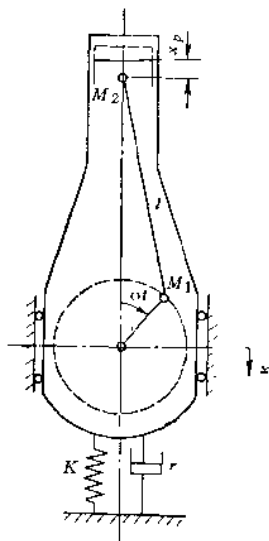


图 3-31

$$F = F_1 + F_2 = -(M_1 + M_2) R \omega^2 \cos \omega t - M_2 R \omega^2 \left(\frac{R}{l} \right) \cos 2 \omega t \quad (d)$$

从 (d) 式说明, 激振力 F 包括两部分: 一部分具有与曲柄轴转速相同的频率 ω , 而另一部分则具有两倍于曲柄轴转速的频率 2ω 。因此系统将有两次共振的可能性: 一次是当曲柄轴转速接近整个发动机系统的固有频率时, 另一次是当曲柄轴转速接近系统固有频率的一半时。记住在 (b) 式中, x_p 只取了头两项, 实际上它有许多高次项, 还有许多次共振的可能性。但在高频下激振力的幅值已经很小, 按 $\left(\frac{R}{l}\right)^3$ 、 $\left(\frac{R}{l}\right)^6$ 、……的比例迅速递减, 所以可忽略不计。

根据 (3.52) 式, 系统的振动微分方程是

$$m \ddot{x} + Kx = F(t) = -(M_1 + M_2) R \omega^2 \cos \omega t - M_2 R \omega^2 \left(\frac{R}{l} \right) \cos 2 \omega t \quad (3.56)$$

式中阻尼已忽略不计, 设

$$P_1 = -(M_1 + M_2) R \omega^2$$

$$P_2 = -M_2 R \omega^2 \left(\frac{R}{l} \right)$$

由 (3.54) 式, 微分方程的解为

$$x = -\frac{P_1}{K} \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \right) \cos \omega t + \frac{P_2}{K} \left(\frac{1}{1 - 4 \frac{\omega^2}{p^2}} \right) \cos 2 \omega t \quad (3.57)$$

例 3.9 设图 3-31 所示单缸活塞式发动机系统的数据如下:

曲柄销处集中重量	$W_1 = 0.907 \quad \text{kg}$
活塞处集中重量	$W_2 = 3.175 \quad \text{kg}$
发动机总重	$W = 226.8 \quad \text{kg}$
曲柄轴转速	$N = 600 \quad \text{rpm}$
曲柄半径	$R = 20.32 \quad \text{cm}$

连杆长度 $l = 60.96 \text{ cm}$

支承弹簧刚度 $K = 2050 \text{ kg/cm}$

忽略阻尼不计, 试计算发动机的最大位移。

解 系统的固有频率

$$p = \sqrt{\frac{Kg}{W}} = \sqrt{\frac{2050 \times 980}{226.8}} = 94.3 \text{ 1/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi \times 600}{60} = 62.83 \text{ 1/s}$$

$$\frac{\omega}{p} = \frac{62.83}{94.3} = \frac{2}{3}$$

$$2 \frac{\omega}{p} = \frac{4}{3}$$

可见 P_1 的频率在共振频率以下, 而 P_2 的频率则在共振频率以上。

$$\begin{aligned} P_1 &= -(M_1 + M_2) R \omega^2 \\ &= -\left(\frac{0.907 + 3.175}{980}\right) (20.32) (62.83)^2 = -334 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= -M_2 R \omega^2 \left(\frac{R}{l}\right) \\ &= -\left(\frac{3.175}{980}\right) (20.32) (62.83)^2 \left(\frac{20.32}{60.96}\right) = -86.6 \text{ kg} \end{aligned}$$

由 (3.57) 式得

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{P_1}{K} \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \right) \cos \omega t = \frac{-334}{2050} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \right) \cos \omega t \\ &= -0.292 \cos \omega t \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{P_2}{K} \left(\frac{1}{1 - 4 \frac{\omega^2}{p^2}} \right) \cos 2\omega t = \frac{-86.6}{2050} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} \right) \cos 2\omega t \\ &= 0.0543 \cos 2\omega t \text{ cm} \end{aligned}$$

故 $x = x_1 + x_2 = -0.292 \cos \omega t + 0.0543 \cos 2\omega t \text{ cm}$

当 $\omega t = \pi$ 时

$$x_{\max} = 0.292 + 0.0543 = 0.3463 \quad \text{cm}$$

例 3.10 有一台精密设备重 $W = 500 \text{ kg}$ ，用四个弹簧刚度各为 33 kg/cm 的弹簧隔振。若地基运动为两个垂直正弦波的合成，振幅均为 1 微米 ，振动频率分别为 $f_1 = 3 \text{ Hz}$ ， $f_2 = 15 \text{ Hz}$ 。设精密设备的允许振动速度为 $[v] = 0.05 \text{ mm/s}$ 。试求该设备振动时的最大速度，并问是否满足允许振动速度的要求。

解 系统的固有频率

$$p = \sqrt{\frac{Kg}{W}} = \sqrt{\frac{4 \times 33 \times 980}{500}} = 16.1 \quad 1/\text{s}$$

地面振动频率

$$\omega_1 = 2\pi \times 3 = 18.84 \quad 1/\text{s}$$

$$\omega_2 = 2\pi \times 15 = 94.2 \quad 1/\text{s}$$

于是

$$\lambda_1 = \frac{\omega_1}{p} = \frac{18.84}{16.1} = 1.17$$

$$\lambda_2 = \frac{\omega_2}{p} = \frac{94.2}{16.1} = 5.86$$

由 (3.55) 式

$$x = \frac{b_1}{1 - \lambda_1^2} \sin \omega_1 t + \frac{b_2}{1 - \lambda_2^2} \sin \omega_2 t$$

取一次导数，得设备的振动速度

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{b_1 \omega_1}{1 - \lambda_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{b_2 \omega_2}{1 - \lambda_2^2} \cos \omega_2 t \\ &= \frac{1 \times 18.84}{1 - 1.17^2} \cos 6\pi t + \frac{1 \times 94.2}{1 - 5.86^2} \cos 30\pi t \\ &= -50.92 \cos 6\pi t - 2.828 \cos 30\pi t \end{aligned}$$

最大速度为

$$\dot{x}_{\max} = 50.92 + 2.828 = 53.75 \quad \mu/\text{s}$$

$$= 0.054 \quad \text{mm/s}$$

$$> [v]$$

所以需要调整弹簧刚度，降低固有频率。

3.12 任意激振的响应

上一节我们讨论了周期激振下系统的响应。在不考虑初始阶段的瞬态振动时，它是周期性的稳态振动。但在许多实际问题中，对系统的激振并非周期性的，而是任意的时间函数，或者是在极短时间间隔内的冲击作用（如冲击力、地震波等）。在这种激振情况下，系统通常没有稳态振动，而只有瞬态振动。在激振作用停止后，系统按固有频率继续作自由振动。系统在任意激振下的振动状态，包括激振作用停止后的自由振动，称为任意激振的响应。周期激振是任意激振的一种特例。

求已知任意激振的响应的方法有好几种，本节只介绍杜哈美 (Duhamel) 积分法，而把其他方法放在下册瞬态振动中讨论。杜哈美积分亦称叠加积分或卷积。这个方法的基本思想是把任意激振分解为一系列微冲量的连续作用，分别求出系统对每个微冲量的响应，然后根据线性系统的叠加原理，将它们叠加起来，得到系统对任意激振的响应。

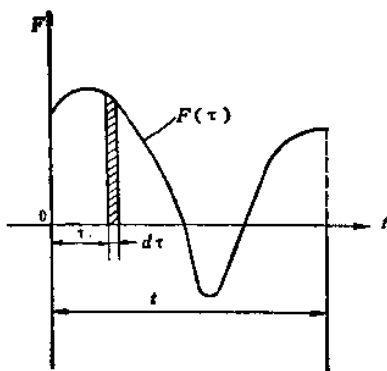


图 3-32

先考虑一任意激振力 $F(\tau)$ ， $0 \leq \tau \leq t$ ，如图 3-32，作用在一个有阻尼的弹簧质量系统上。系统的振动微分方程式为

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = F \quad (3.58)$$

假想把时间分成无数极短暂的间隔，每个间隔以微分 $d\tau$ 表示，则在 $t = \tau$ 时的 $d\tau$ 间隔内，系统的质量 m 上将受到一个微冲量 $F d\tau$ 的作用，它可以用图 3-32 所示的阴影面积来表示。根据动量定律， $F d\tau = m dv$ ，质量 m 在时间 $d\tau$ 内将有一速度增量

$dv = \frac{F}{m} d\tau$, 但还来不及发生位移。于是在 $t < \tau$ 时, 即在微冲量 $F d\tau$ 尚未作用以前, 系统不发生运动。而当 $t \geq \tau$ 时, 在微冲量 $F d\tau$ 作用下, 系统将相当于在 $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = dv$ 的初始条件下作自由振动。

回忆第二章 2.7 节中以 (2.37)、(2.38)、(2.39) 式表达的在初始位移 x_0 和初始速度 \dot{x}_0 条件下的响应, 如果初始位移 $x_0 = 0$, 则有

$$x = \frac{\dot{x}_0}{p'} e^{-n't} \sin p' t$$

式中 $p' = \sqrt{p^2 - n^2}$ 是有阻尼时系统自由振动的频率, $p = \sqrt{K/m}$ 是系统的固有频率, $n = \zeta p$ 为衰减系数。

利用上式, 如果在 $t = 0$ 时, 对系统作用一微冲量 $F d\tau$, 从而使系统得到一初速度 $\dot{x}_0 = dv = \frac{F d\tau}{m}$, 系统的响应为

$$dx = \frac{F d\tau}{m p'} e^{-\zeta p' t} \sin p' t$$

如果微冲量 $F d\tau$ 不是作用在 $t = 0$, 而是作用在 $t = \tau$, 则相当于把图 3-32 的座标原点向右移动 τ , 上式可改为

$$dx = \frac{F d\tau}{m p'} e^{-\zeta p' (t-\tau)} \sin p' (t - \tau)$$

这是系统对一个微冲量 $F d\tau$ 的响应。在激振力 $F(\tau)$ 由瞬时 $\tau = 0$ 到 $\tau = t$ 的连续作用下, 系统的响应等于一系列微冲量 $F d\tau$ 从 $\tau = 0$ 到 $\tau = t$ 分别连续作用下系统响应的叠加, 即

$$x = \frac{1}{m p'} \int_0^t F e^{-\zeta p' (t-\tau)} \sin p' (t - \tau) d\tau \quad (3.59 a)$$

上式积分即称为杜哈美积分。(3.59 a) 式即为 (3.58) 振动微分方程的全解, 包括稳态振动和瞬态振动。

在阻尼很小可以忽略不计时, $\zeta = 0$, $p' = p$ 。

$$x = \frac{1}{m p} \int_0^t F \sin p (t - \tau) d\tau \quad (3.60 a)$$

如果在 $\tau = 0$ 激振力开始作用时, 质量 m 已有初位移 x_0 和初速度 \dot{x}_0 , 则 (3.59 a) 和 (3.60 a) 应分别为

$$x = e^{-\zeta p' t} \left[\frac{\dot{x}_0 + \zeta p x_0}{p'} \sin p' t + x_0 \cos p' t + \frac{1}{m p'} \int_0^t F e^{\zeta p' \tau} \sin p' (t - \tau) d\tau \right] \quad (3.59 b)$$

$$x = \frac{\dot{x}_0}{p} \sin p t + x_0 \cos p t + \frac{1}{m p} \int_0^t F \sin p (t - \tau) d\tau \quad (3.60 b)$$

不过在通常情况下都假定 x_0 和 \dot{x}_0 等于零。

如果系统是在支承运动下振动, 而支承运动是可微的任意时间函数 $x_s(\tau)$, 同样可应用杜哈美积分。由 3.4 节 (3.20) 式

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = Kx_s + r\dot{x}_s,$$

可知支承运动相当于系统上作用了两个激振力 Kx_s 和 $r\dot{x}_s$, 应用线性系统的叠加原理, 根据 (3.59 a) 式, 即得系统响应为

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m p'} \int_0^t (Kx_s + r\dot{x}_s) e^{-\zeta p' (t-\tau)} \sin p' (t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{p'} \int_0^t (p^2 x_s + 2\zeta p \dot{x}_s) e^{-\zeta p' (t-\tau)} \sin p' (t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.61)$$

当支承运动是用加速度的任意函数 $\ddot{x}_s(\tau)$ 描述时, 先求系统的相对位移比较方便。以 $y = x - x_s$ 表示质量 m 的相对位移, 由 3.6 节 (3.27) 式可知系统振动微分方程为

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = -m\ddot{x}_s,$$

只要把 $-m\ddot{x}_s$ 作为激振力, 可由 (3.59 a) 式得

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{m p'} \int_0^t (-m\ddot{x}_s) e^{-\zeta p' (t-\tau)} \sin p' (t - \tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{p'} \int_0^t \ddot{x}_s e^{-\zeta p' (t-\tau)} \sin p' (t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.62)$$

再根据初始条件计算出支承运动的位移 x_s , 就得到系统的总响应 $x = y + x_s$ 。

例 3.11 求无阻尼弹簧质量系统对简谐激振力 $F(\tau) = F_0 \sin \omega \tau$ 的响应。

解 由 (3.60 a) 式有

$$x = \frac{F_0}{m p} \int_0^t \sin \omega \tau \sin p(t - \tau) d\tau$$

利用三角恒等关系

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sin \omega \tau \sin p(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \{ \cos [(\omega + p)\tau - pt] - \cos [(\omega - p)\tau + pt] \} d\tau \\ &= \frac{p}{p^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right) \end{aligned}$$

代回上式得

$$x = \frac{F_0}{m} \frac{1}{p^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right)$$

这和 3.2 节 (3.14) 式的结果相同。它包括了在初始条件为 $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ 时的稳态振动和瞬态振动, 由杜哈美积分同时得出。

例 3.12 求有阻尼弹簧质量系统在 $t = 0$ 时受到突加常力 F 作用下的响应。这种动载荷称为阶跃函数。

解 因 $F(\tau) = F_0$ 为常数, 代入 (3.59 a) 式得

$$x = \frac{F_0}{m p'} \int_0^t e^{-\xi p'(t-\tau)} \sin p'(t - \tau) d\tau \quad (\text{a})$$

令 $t' = t - \tau$, $d\tau = -dt'$, 运用部分积分, 上式的积分等于

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-\xi p' t'} \sin p' t' dt' \\ &= \frac{1}{\xi^2 p^2 + p'^2} [p' - p' e^{-\xi p' t} \cos p' t - \xi p e^{-\xi p' t} \sin p' t] \end{aligned}$$

代回 (a) 式, 并注意到 $\xi^2 p^2 + p'^2 = p^2$, $m p^2 = K$, 得

$$x = \frac{F_0}{K} \left[1 - e^{-\xi p' t} \left(\cos p' t + \frac{\xi p}{p'} \sin p' t \right) \right]$$

$$\text{或} \quad x = \frac{F_0}{K} \left[1 - \frac{e^{-\zeta p t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(p't - \psi) \right] \quad (\text{b})$$

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

这说明突加载荷 F_0 不仅使弹簧产生静变形 $\frac{F_0}{K}$ ，同时使系统发生振幅为 $\frac{F_0 e^{-\zeta p t}}{K \sqrt{1-\zeta^2}}$ 的衰减振动。如果忽略阻尼不计，则 $\zeta = 0$ ， $\psi = 0$ ， $p' = p$ ，(b) 式简化为

$$x = \frac{F_0}{K} (1 - \cos p t) \quad (\text{c})$$

当 $t = \frac{\pi}{p}$ 时，弹簧有最大变形 $\frac{2F_0}{K}$ ，它是静变形的两倍。没有阻尼时系统的响应如图 3-33 所示。

例 3.13 求无阻尼弹簧质量系统受到如图 3-34 a) 所示矩形脉冲作用时的响应。矩形脉冲可用 $F(\tau) = F_0$ ， $0 \leq \tau \leq t_1$ 表示。

解 显然在 $0 \leq t \leq t_1$ 阶段，系统响应和上例相同，即

$$x = \frac{F_0}{K} (1 - \cos p t) \quad (\text{c})$$

在 $t \geq t_1$ 阶段，由 (3.60 a) 式积分，因 $F(\tau) = 0$ ，故

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m p} \int_0^t F \sin p(t - \tau) d\tau = \frac{F_0}{m p} \int_0^{t_1} \sin p(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{K} [\cos p(t - t_1) - \cos p t] \end{aligned} \quad (\text{d})$$

这个阶段激振力已经去除，系统以 $t = t_1$ 时的位移 x_1 和速度 \dot{x}_1 为初始条件，按固有频率 p 进行自由振动。故 (d) 式也可用下法求得：

由 (c) 式
$$x_1 = \frac{F_0}{K} (1 - \cos p t_1)$$

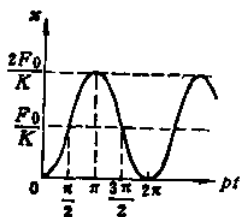


图 3-33

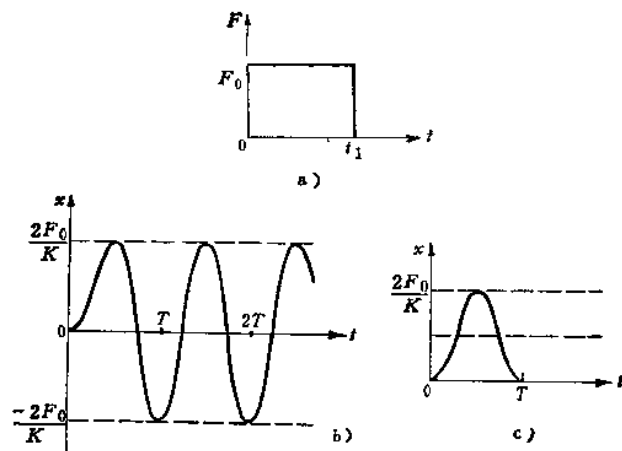


图 3-34

$$\dot{x}_1 = \frac{F_0}{K} p \sin p t_1$$

将此初始条件代入第二章 2.2 节 (2.10) 式

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos p(t - t_1) + \frac{\dot{x}_1}{p} \sin p(t - t_1) \\ &= \frac{F_0}{K} [\cos p(t - t_1) - \cos p t] \end{aligned}$$

其振幅为

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{\dot{x}_1}{p}\right)^2} = \frac{F_0}{K} \sqrt{2(1 - \cos p t_1)} \\ &= \frac{2F_0}{K} \sin \frac{p t_1}{2} = \frac{2F_0}{K} \sin \frac{\pi t_1}{T} \end{aligned}$$

式中 \$T\$ 为系统自由振动的周期。可见常力 \$F_0\$ 去除后的振幅随比值 \$\frac{t_1}{T}\$ 而改变。在 \$t_1 = \frac{T}{2}\$ 时, \$A = \frac{2F_0}{K}\$, 系统响应如图 3-34 b) 所示。在 \$t_1 = T\$ 时 \$A = 0\$, 即除去 \$F_0\$ 后, 系统就停止不动, 其响应如图 3-34 c) 所示。读者可自行分析其原因。

例 3.14 如第二章例 2.2 所述的卷扬机在 $t_1 = 3$ 秒内匀减速停机, 求钢丝绳中所受的最大张力。

解 由例 2.2, 已知重物 $W = 15$ T, 钢丝绳弹簧刚度 $K = 5.9$ T/cm, 系统固有频率 $p = 19.6$ 1/s, 等速下降时 $v_0 = 15$ m/min。

在 $t_1 = 3$ 秒内匀减速停机, 则负加速度 $a = \frac{v_0}{t_1}$ 。

先求钢丝绳由于振动而引起的最大伸长, 也就是系统振动时重物的相对最大位移, 可由 (3.62) 式进行计算。在忽略阻尼和 $\ddot{x}_s = a$ 为常数时, (3.62) 式成为

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{p} \int_0^t \sin p(t - \tau) d\tau = \frac{a}{p^2} (1 - \cos pt) \\ &= \frac{v_0}{p^2 t_1} (1 - \cos pt) \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ y &= \frac{v_0}{p^2 t_1} [\cos p(t - t_1) - \cos pt] \quad t \geq t_1 \end{aligned}$$

这个结果和上例中矩形脉冲的响应是相似的, 只是以 $\frac{v_0}{p^2 t_1}$ 代替了 $\frac{F_0}{K}$ 。故重物的最大相对位移, 即钢丝绳的最大伸长为

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{2 v_0}{p^2 t_1} \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ y_{\max} &= A = \frac{2 v_0}{p^2 t_1} \sin \frac{p t_1}{2} \quad t \geq t_1 \end{aligned}$$

可见钢丝绳的伸长与刹车时间 t_1 成反比。如果 t_1 很短, 则

$$y_{\max} \approx \frac{2 v_0}{p^2 t_1} \cdot \frac{p t_1}{2} = \frac{v_0}{p} = 1.27 \text{ cm}$$

这就是例 2.2 所述情况。除这种情况外, 钢丝绳的最大伸长发生在 $0 \leq t \leq t_1$ 阶段。以 $t_1 = 3$ 秒代入, 得

$$y_{\max} = \frac{2 v_0}{p^2 t_1} = \frac{2 \times 1500}{19.6^2 \times 3 \times 60} = 0.0434 \text{ cm}$$

这个值比之突然刹车的结果小得多, 相应引起的钢丝绳张力为

$$T' = 0.0434 \times 5.9 = 0.256 \quad \text{T}$$

钢丝绳中总张力为

$$T = 15 + 0.256 = 15.256 \quad \text{T}$$

T' 只占总张力的 1.7%。在实践上，我们也总是慢慢地刹车以减少振动的影响。

在 $t \geq t_1$ 阶段，如刹车时间 t_1 正好是系统自由振动周期 T 的一半的整倍数，即 $t_1 = \frac{nT}{2} = \frac{n\pi}{p}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)，钢丝绳也产生最大伸长 $y_{\max} = \frac{2v_0}{p^2 t_1}$ 。

第四章 两自由度系统的振动

4.1 引言

前两章我们讨论了单自由度系统的振动问题，但工程实际中大量的的是不能简化为单自由度系统的振动问题。它们往往需要简化成多自由度系统。两自由度系统是最简单的多自由度系统，无论是模型的简化、振动微分方程式的建立和求解的一般方法、以及系统响应表现出来的振动特性等等，两自由度系统和多自由度系统没有什么本质上区别，却有数学上求解比较简便的好处。因此研究两自由度系统是分析和掌握多自由度系统振动特性的基础。

本章简要介绍了一些比较复杂的振动系统简化成两自由度系统的过程。通过工程实例，了解振动问题的基本分析方法，加深和巩固两自由度系统振动的基本概念。

两自由度系统具有两个不同数值的固有频率（特殊情况下数值可能相等或有一个等于零）。当系统按其中任一固有频率作自由振动时，称为**主振动**。主振动是一种简谐振动。系统作主振动时，任何瞬时各点位移之间具有一定的相对比值，即整个系统具有确定的振动形态，称为**主振型**。主振型和固有频率一样只决定于系统本身的物理性质，而与初始条件无关。主振型是一切多自由度系统以及弹性体振动的重要特性。

两自由度系统在任意初始条件下的响应是两个主振动的叠加，只有在特殊的初始条件下系统才按某一个固有频率作主振动。

系统对于简谐激振的响应是频率与激振频率相同的简谐振动。振幅同样与系统固有频率和激振频率的比值有密切关系。当激振频率接近于系统的任一固有频率时，就发生共振。共振时的

振型就是与固有频率相对应的主振型。

两自由度系统的振动微分方程一般包括两个相互耦合的二阶常微分方程组。对于特殊选取的或经转换的座标,可使两个微分方程没有任何耦合,这种座标称为主座标。用主座标建立的两自由度系统振动微分方程成为两个独立的单自由度系统的微分方程。

在前两章已讨论过,阻尼的作用在自由振动时是使振幅逐渐衰减。在强迫振动时,除在共振附近范围内使系统振幅减小外,在离开共振附近范围以外是影响很小的。这些特性在多自由度系统中没有什么不同。因此,为了使数学上简化,并能突出振动特性,本章在分析两自由度系统的基本规律时没有把阻尼引入系统。

最后简要介绍了应用两自由度系统振动特性减小振动的减振器原理。

4.2 双质量弹簧系统的自由振动

现以双质量弹簧系统为例,讨论无阻尼两自由度系统自由振动的一般性质。图 4-1 a) 所示,质量 m_1 与 m_2 在水平方向分别用两个刚度为 K_1 与 K_3 的弹簧连接于支承点,中间再用刚度为 K_2 的弹簧相互联结,并只限于沿水平光滑平面作往复直线运动。 m_1 与 m_2 的任一瞬时位置只要用 x_1 和 x_2 两个独立座标就可以确

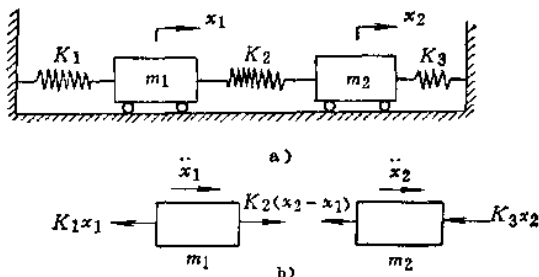


图 4-1

定, 因此, 系统具有两个自由度。

以 m_1 与 m_2 的静平衡位置为坐标原点。在振动过程中任一瞬时 t , m_1 与 m_2 的位置分别为 x_1 和 x_2 。在质量 m_1 的水平方向作用有弹性恢复力 $K_1 x_1$ 和 $K_2(x_2 - x_1)$, 质量 m_2 的水平方向则受到弹性恢复力 $K_2(x_2 - x_1)$ 和 $K_3 x_2$, 方向如图 4-1 b) 所示。取加速度和力的正方向与坐标正方向一致。根据牛顿运动定律可分别得到质量 m_1 与 m_2 的自由振动微分方程

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -K_1 x_1 + K_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -K_2(x_2 - x_1) - K_3 x_2 \\ \text{或} \quad m_1 \ddot{x}_1 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - K_2 x_1 + (K_2 + K_3)x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

为了书写简便, 引入符号:

$$\begin{aligned} a &= \frac{K_1 + K_2}{m_1}, & b &= \frac{K_2}{m_1} \\ c &= \frac{K_2}{m_2}, & d &= \frac{K_2 + K_3}{m_2} \end{aligned}$$

于是方程 (4.1) 可写成

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + a x_1 - b x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 - c x_1 + d x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

这是二阶常系数线性齐次联立微分方程组。第一个方程中包含 $-b x_2$ 项, 第二个方程中包含 $-c x_1$ 项, 称为耦合项。因为 $K_2 = 0$, 即耦合项 $-b x_2$ 和 $-c x_1$ 均为零时, 方程组便成为两个独立的单自由度系统自由振动的微分方程。

固有频率和主振型 设在振动时两个质量按同样频率和相位角作简谐振动。因此令 (4.2) 方程组的解为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(pt + \varphi) \\ x_2 &= A_2 \sin(pt + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

其中振幅 A_1 与 A_2 , 频率 p 和相位角 φ 都有待于确定。将 (4.3) 式代入 (4.2) 式, 得

$$[(a - p^2)A_1 - bA_2] \sin(pt + \varphi) = 0$$

$$[-cA_1 + (d - p^2)A_2]\sin(pt + \varphi) = 0 \quad (a)$$

如果(4.3)式是方程组(4.2)的解, 则(a)式在任何瞬时都应满足。由于 $\sin(pt + \varphi)$ 不恒等于零, 所以必须是

$$\left. \begin{aligned} (a - p^2)A_1 - bA_2 &= 0 \\ -cA_1 + (d - p^2)A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

这是 A_1 和 A_2 的线性齐次代数方程组。显然, $A_1 = A_2 = 0$ 是它的解, 但这只对应于系统处于静平衡的情况, 不是我们所需的解。对于 A_1 与 A_2 具有非零解的情况, 方程组(b)的系数行列式必须等于零, 即

$$\Delta(p^2) = \begin{vmatrix} a - p^2 & -b \\ -c & d - p^2 \end{vmatrix} = 0$$

展开后得

$$\Delta(p^2) = p^4 - (a + d)p^2 + (ad - bc) = 0 \quad (4.4)$$

方程(4.4)唯一确定了频率 p 所需满足的条件, 通常称为**频率方程式**或**特征方程式**。它是 p^2 的二次代数方程, 它的两个特征根为:

$$p_{1,2}^2 = \frac{a+d}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - (ad-bc)} \quad (4.5a)$$

$$= \frac{a+d}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc} \quad (4.5b)$$

由于弹簧刚度 K_1, K_2, K_3 , 和质量 m_1, m_2 恒为正数, a, b, c, d 的值都是正数。由(4.5b)式可知 p_1^2 与 p_2^2 都是实根。而且由于 $ad > bc$, 由(4.5a)式可知, 根式开方的值总小于 $\frac{1}{2}(a+d)$, p_1^2 与 p_2^2 都是正数。所以, p_1^2 与 p_2^2 是两个正实根。它们仅决定于系统本身的物理性质(质量和弹簧刚度), 因此称为振动系统的固有频率。较低的一个称为第一阶固有频率, 简称**基频**。较高的一个称为第二阶固有频率。

将特征值 p_1^2 与 p_2^2 分别代回方程组(b)中任一式, 可以得到一个有意义的结果: 对应于 p_1 与 p_2 , 振幅 A_1 与 A_2 之间有两个

确定的比值。这个比值称为振幅比，以 v_1 和 v_2 表示。

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{a - p_1^2}{b} = \frac{c}{d - p_1^2} \\ v_2 &= \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{a - p_2^2}{b} = \frac{c}{d - p_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

(4.6)式说明，虽然振幅的大小与振动的初始条件有关，但当系统按任一固有频率振动时，振幅比却和固有频率一样只决定于系统本身的物理性质。同时，联系到(4.3)式，不难看到两个质量任一瞬时的位移的比值 $\frac{x_2}{x_1}$ 也同样是确定的，并且等于振幅比。其他各点的位移则都可以由 x_1 和 x_2 所决定。这样在振动过程中系统各点位移的相对比值都可由振幅比确定，也就是说振幅比决定了整个系统的振动形态，因之称为**主振型**。与 p_1 对应的振幅比 v_1 称为第一阶主振型，与 p_2 对应的振幅比 v_2 称为第二阶主振型。将 p_1 与 p_2 之值代入(4.6)式，得：

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{b} \left[\frac{a-d}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc} \right] > 0 \\ v_2 &= \frac{1}{b} \left[\frac{a-d}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc} \right] < 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

(4.7)式说明系统以频率 p_1 振动时，质量 m_1 与 m_2 总是按同一个方向运动，而以频率 p_2 振动时，则按相反方向运动。

系统以某一阶固有频率按其相应的主振型作振动，称为系统的**主振动**。第一阶主振动为：

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(1)} &= A_1^{(1)} \sin(p_1 t + \varphi_1) \\ x_2^{(1)} &= A_2^{(1)} \sin(p_1 t + \varphi_1) = v_1 A_1^{(1)} \sin(p_1 t + \varphi_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.8a)$$

第二阶主振动为：

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= A_1^{(2)} \sin(p_2 t + \varphi_2) \\ x_2^{(2)} &= A_2^{(2)} \sin(p_2 t + \varphi_2) = v_2 A_1^{(2)} \sin(p_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.8b)$$

可见系统作主振动时，各点同时经过静平衡位置和到达最大偏离位置，以确定的频率和振型作简谐振动。

但是必须指出，并非任何情况下系统都可能作主振动。微分

方程组(4.2)的通解是(4.8)式两种主振动的叠加。即:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1^{(1)} + x_1^{(2)} = A_1^{(1)} \sin(p_1 t + \varphi_1) + A_1^{(2)} \sin(p_2 t + \varphi_2) \\ x_2 &= x_2^{(1)} + x_2^{(2)} = v_1 A_1^{(1)} \sin(p_1 t + \varphi_1) \\ &\quad + v_2 A_1^{(2)} \sin(p_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

所以,在一般情况下,系统的自由振动是两种不同频率的主振动的叠加,其结果不一定是简谐振动。

例4.1 试求图4-1a)所示的振动系统的固有频率和主振型。设已知 $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $K_1 = K_2 = K$, $K_3 = 2K$ 。

解 根据已知条件

$$a = \frac{2K}{m}, \quad b = \frac{K}{m}, \quad c = \frac{K}{2m}, \quad d = \frac{3K}{2m}$$

代入(4.5)式得

$$\begin{aligned} p_{1,2}^2 &= \left[\frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(2 - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}} \right] \frac{K}{m} \\ &= \left[\frac{7}{4} \mp \frac{3}{4} \right] \frac{K}{m} \end{aligned}$$

故
$$p_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad p_2 = 1.581 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

将 p_1 与 p_2 代入(4.6)式,得

$$v_1 = \frac{\frac{2K}{m} - \frac{K}{m}}{\frac{K}{m}} = 1$$

$$v_2 = \frac{\frac{2K}{m} - \frac{5K}{2m}}{\frac{K}{m}} = -\frac{1}{2}$$

以横坐标表示系统各点的静平衡位置,纵坐标表示各点振幅比,可作出主振型图如图4-2所示。a)为第一阶主振型,b)为第二阶主振型。第二主振型中在弹簧 K_3 上有一个始终保持不动的点,称为节点。

初始条件的响应 由于(4.2)式是两个二阶常微分方程组,应有四个待定常数,所以在(4.9)式中有振幅 $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$ 和相位角 φ_1 , φ_2 四个未知数,需要由振动的四个初始条件来决定。

设初始条件为: $t = 0$ 时,
 $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_{10}$, $\dot{x}_2 = \dot{x}_{20}$ 。代入(4.9)式,得:

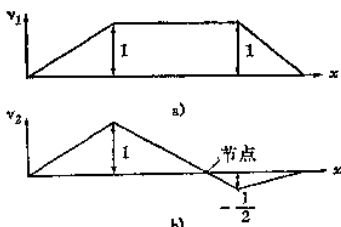


图 4-2

$$\begin{aligned}x_{10} &= A_1^{(1)} \sin \varphi_1 + A_1^{(2)} \sin \varphi_2, \\x_{20} &= v_1 A_1^{(1)} \sin \varphi_1 + v_2 A_1^{(2)} \sin \varphi_2, \\\dot{x}_{10} &= A_1^{(1)} p_1 \cos \varphi_1 + A_1^{(2)} p_2 \cos \varphi_2, \\\dot{x}_{20} &= v_1 A_1^{(1)} p_1 \cos \varphi_1 + v_2 A_1^{(2)} p_2 \cos \varphi_2.\end{aligned}$$

这是一组未知量为 $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, φ_1 和 φ_2 的四元一次代数方程组。解之可得

$$\left. \begin{aligned}A_1^{(1)} &= \frac{1}{v_2 - v_1} \sqrt{(v_2 x_{10} - x_{20})^2 + \frac{(v_2 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20})^2}{p_1^2}} \\A_1^{(2)} &= -\frac{1}{v_1 - v_2} \sqrt{(v_1 x_{10} - x_{20})^2 + \frac{(v_1 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20})^2}{p_2^2}} \\\varphi_1 &= \tan^{-1} \frac{p_1 (v_2 x_{10} - x_{20})}{v_2 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}} \\\varphi_2 &= \tan^{-1} \frac{p_2 (v_1 x_{10} - x_{20})}{v_1 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}}\end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

将(4.10)式代入(4.9)式就得到系统在上述初始条件下的响应。

在特殊的初始条件下,若 $A_1^{(2)} = 0$,系统便作第一阶主振动,若 $A_1^{(1)} = 0$,系统便作第二阶主振动。由(4.10)式不难看出,如果初始位移和初始速度的比值都等于振幅比 v_1 (或 v_2),就可得到 $A_1^{(2)} = 0$ (或 $A_1^{(1)} = 0$) 的条件。读者还可以自己找到其他能使 $A_1^{(2)} = 0$ (或 $A_1^{(1)} = 0$) 的初始条件。

例4.2 在例4.1中,已知初始条件为 $x_{10} = 1.2$, $x_{20} = \dot{x}_{10} =$

$\dot{x}_{20} = 0$, 试求系统的响应。设初始条件变成 $x_{10} = x_{20} = 1$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$, 则系统的响应有何变化?

解 在例 4.1 中已知 $p_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, $p_2 = 1.581 \sqrt{\frac{K}{m}}$, $v_1 = 1$, $v_2 = -\frac{1}{2}$ 。

根据给定初始条件: $x_{10} = 1.2$, $x_{20} = \dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$, 代入 (4.10) 式, 得

$$A_1^{(1)} = \frac{1}{-\frac{1}{2} - 1} \left(-\frac{1}{2} \times 1.2 \right) = 0.4$$

$$A_1^{(2)} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} (1 \times 1.2) = 0.8$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

代入 (4.9) 式, 系统的响应为

$$x_1 = 0.4 \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t + 0.8 \cos 1.581 \sqrt{\frac{K}{m}} t$$

$$x_2 = 0.4 \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t - 0.4 \cos 1.581 \sqrt{\frac{K}{m}} t$$

设给定初始条件变为 $x_{10} = x_{20} = 1$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$ 则

$$A_1^{(1)} = \frac{1}{-\frac{1}{2} - 1} \left(-\frac{1}{2} \times 1 - 1 \right) = 1$$

$$A_1^{(2)} = 0$$

φ_1 不变。系统的响应成为:

$$x_1 = \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t$$

$$x_2 = \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t$$

系统作第一阶主振动。

4.3 扭转振动

扭转振动是旋转机械中普遍存在的问题。在车辆、船舶和发电设备中随着高速、大功率活塞式发动机的采用，曲轴和齿轮轴等传动系统由于扭转振动引起的事故随着增加，由于扭振引起的最大附加应力可以超过发动机驱动力矩所产生的工作应力的几倍。离心压缩机、汽轮机等高速旋转机械中扭振也同样是重要问题。因此扭振系统的固有频率、主振型以及动应力的计算和测量往往是旋转机械的设计和试验工作中不可缺少的一部分。

实际旋转机械（尤其是活塞式发动机）的转动部分往往是比较复杂的，需要简化成简单的力学模型来进行计算。通常是把质量部分按重心不变的原则集中为若干具有等效转动惯量的圆盘，圆盘之间由具有等效扭转刚度的弹性轴段连接。等效转动惯量和等效扭转刚度可由计算及试验确定。这样就构成一个弹性轴上带有若干圆盘的扭振系统。圆盘数即为自由度数。实际问题常常属于多自由度系统。

例如如图 4-3 a) 为汽车发动机和传动系统的结构简图。由于汽车车体和前后桥的振动对传动系统的扭振影响很小，可以忽略不计。这样，在进行扭振计算时，可将曲轴和传动轴简化为只有

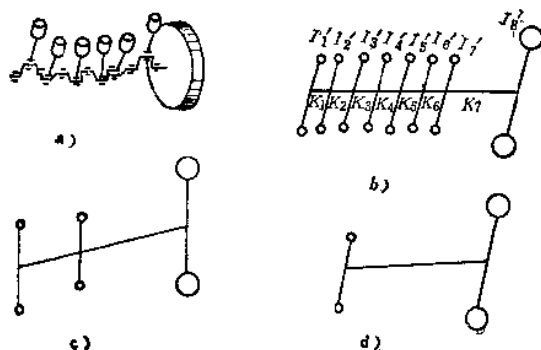


图 4-3

等效扭转刚度为 K_1, K_2, \dots, K_7 的七个轴段, 而把轴和连接在轴上的连杆活塞等运动部件的质量简化为等效转动惯量为 I'_1, I'_2, \dots, I'_8 的八个圆盘, 构成如图 4-3 b) 所示的扭转系统计算模型。

这是一个八自由度系统的扭转问题。但在估算基频时, 可把模型进一步简化为如图 4-3 c) 的三自由度系统或如图 4-3 d) 的两自由度系统。

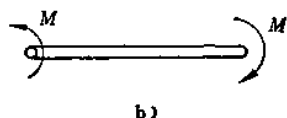
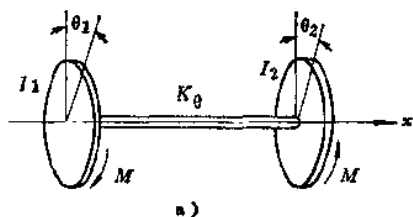


图 4-4

现在讨论图 4-3 d) 的情况。将其改画成图 4-4 a)。设 I_1 与 I_2 分别为两圆盘绕 x 轴的转动惯量, 角座标 θ_1 与 θ_2 分别表示圆盘 I_1 与 I_2 的角位移, K_θ 为轴段

的扭转刚度, 则轴的相对扭转角为 $\theta_2 - \theta_1$, 作用在轴两端的扭矩为 $M = K_\theta(\theta_2 - \theta_1)$, 方向如图 4-4 b) 所示。轴对圆盘的反作用扭矩与之大小相等, 方向相反。根据动量矩定理, 分别列出两圆盘的转动方程, 即得系统扭振的微分方程组

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 &= K_\theta(\theta_2 - \theta_1) \\ I_2 \ddot{\theta}_2 &= -K_\theta(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

或

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + K_\theta \theta_1 - K_\theta \theta_2 &= 0 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - K_\theta \theta_1 + K_\theta \theta_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

同样引入符号

$$a = \frac{K_\theta}{I_1}, \quad c = \frac{K_\theta}{I_2}$$

得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + a\theta_1 - a\theta_2 &= 0 \\ \ddot{\theta}_2 - c\theta_1 + c\theta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

显然(4.12)式同(4.2)式在数学形式上是相同的, 只是(4.2)式中的 b 和 d , 现在也等于 a 和 c , 所以可直接写出此微分方程

组的解

$$\theta_1 = A_1 \sin(pt + \varphi)$$

$$\theta_2 = A_2 \sin(pt + \varphi)$$

代入(4.12)式后得到频率方程

$$\Delta(p^2) = p^4 - (a + c)p^2 = 0$$

解之得

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \sqrt{a + c} = \sqrt{\frac{K_\theta(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}} \quad (4.13)$$

相应的振幅比由(4.6)式得

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{a - p_1^2}{b} = \frac{a}{a} = 1 \\ v_2 &= \frac{a - p_2^2}{b} = -\frac{c}{a} = -\frac{I_1}{I_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

这里出现一个根为零根。相应的振幅比为1，即 $\theta_1 = \theta_2$ 。这表明两圆盘以同样的转角转动，轴段相对无变形，整个系统象刚体一样绕定轴转动，所以不是扭振。

扭振的实际基频为 p_2 ，相应的主振型如图4-5所示。在轴段上的一个始终不动的面，称为节面，节面的位置正好把轴段按两圆盘转动惯量的反比例值分成两段。即

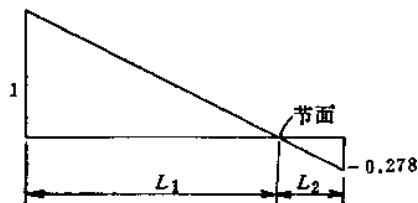


图 4-5

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

如果设想把轴系在节面处截断，并加以固定，就可以把系统看成两个以同一频率，按相反方向扭振的单自由度系统。我们已经在第二章例2.4中用这种方法进行了计算。

例4.3 已知图4-3所示汽车发动机传动系统简化后八个圆

盘的等效转动惯量 ($\text{kg}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^2$) 和七个轴段的等效扭转刚度 ($\text{kg}\cdot\text{cm}/\text{rad}$) 的数值如下

$$\begin{aligned} I'_1 &= 1.14 & I'_2 &= I'_4 = I'_6 = I'_7 = 2.48 \\ I'_3 &= I'_5 = 1.72 & I'_8 &= 48 \\ K_1 &= 5.64 \times 10^8 & K_2 &= K_3 = K_5 = K_6 = 4.48 \times 10^7 \\ K_4 &= 4.1 \times 10^7 & K_7 &= 5.93 \times 10^7 \end{aligned}$$

试估算该系统的基频和相应的主振型。

解 先将该系统再简化为两自由度系统。略去较小的 I'_1 , 将 I'_2, \dots, I'_7 6 个圆盘的转动惯量合成为一个等效转动惯量 I_1 , 位于 I'_4 与 I'_5 之间。 I'_8 不动, 作为 I_2 。

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 \times 2.48 + 2 \times 1.72 = 13.36 \quad \text{kg}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^2 \\ I_2 &= 48 \quad \text{kg}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^2 \end{aligned}$$

在 I_1 与 I_2 之间的轴段的等效刚度 K_9 可按 K_7 、 K_6 、 K_5 和 $2K_4$ 串联计算而得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_9} &= \frac{1}{K_7} + \frac{2}{K_6} + \frac{1}{2K_4} = \frac{1}{5.93 \times 10^7} + \frac{2}{4.48 \times 10^7} \\ &\quad + \frac{1}{2 \times 4.1 \times 10^7} \\ K_9 &= 1.356 \times 10^7 \quad \text{kg}\cdot\text{cm}/\text{rad} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{1.356 \times 10^7 \times (13.36 + 48)}{48 \times 13.36}} = 1140 \quad 1/\text{s} \\ v &= -\frac{13.36}{48} = -0.278 \end{aligned}$$

主振型如图 4-5 所示, 节面位置在

$$L_1 = \frac{48}{48 + 13.36} L = 0.782L$$

按八个自由度系统计算所得的基频为 $p = 1125 \quad 1/\text{s}$, 可见上述近似计算和它是比较接近的。

4.4 刚体在平面内的振动

前面所讨论的两个自由系统,就动力学性质而言,是属于质点作直线运动或刚体绕定轴转动的问题。在工程实际问题中,例如具有对称平面的机器和基础的隔振系统以及车体等的振动,往往可简化为弹性支承的刚体在平面内的振动,一般具有上下移动及转动两个自由度。选择不同的广义坐标,将会得到不同形式耦合的振动微分方程。本节将以车体振动为例来说明这一类型振动的基本性质,并由此讨论两自由度系统在一般情况下的静力耦合和动力耦合问题。

车辆结构一般是一个复杂的空间多自由度系统。在进行研究计算时,可以根据研究的目的,结构的特点,要求计算的精确程度等等,从实际情况出发进行简化。例如汽车是由许多部件组成的复杂结构,即使忽略零部件的局部振动,单研究车体和前后桥的振动,把车体和前后桥作为刚体,联结和支承在弹性元件悬挂弹簧和轮胎上,如图 4-6 a) 所示,仍然包括车体和前后桥的上下垂直振动,左右摇摆振动以及车体的前后俯仰振动等。如略去次要的左右摇摆振动,可简化为在汽车对称平面内的振动,如图 4-6 b) 所示。再考虑到前后桥的质量比车体质量小得多,在计算

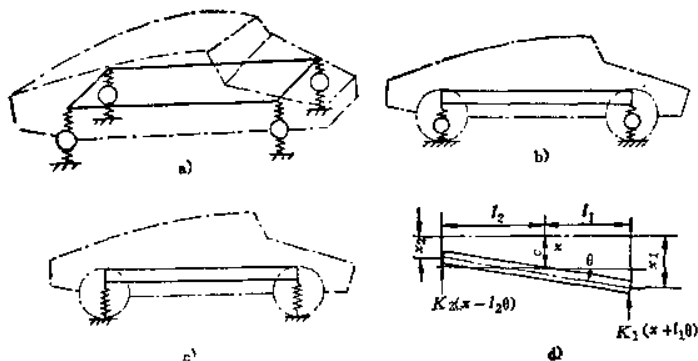


图 4-6

精度要求不太高時，可以略去不計，就可進一步簡化成圖4-6 c) 所示的兩自由度系統：一根剛性杆(車體)支承在彈簧(懸掛彈簧和輪胎)上，作上下垂直振動和繞剛性杆質心軸的前後俯仰振動。

設剛性杆質量為 m ，兩端彈簧的剛度為 K_1 與 K_2 ，杆質心 c 與彈簧 K_1 、 K_2 的距離為 l_1 與 l_2 ，杆繞質心軸的轉動慣量為 I_c 。以質心垂直位移 x 及杆繞質心軸的角位移 θ 為兩個獨立座標，其正方向如圖4-6 d) 所示。 x 的座標原点仍取在靜平衡位置，從而使杆重 $W = mg$ 和與之相平衡的彈簧靜壓力都不出現在運動方程式中。在任一瞬時杆發生微小位移 x 與 θ ，兩端便受到彈性恢復力 $K_1(x + l_1\theta)$ 和 $K_2(x - l_2\theta)$ 的作用。根據牛頓運動定律和轉動方程式，可寫出 x 與 θ 兩個方向的振動微分方程式

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -K_1(x + l_1\theta) - K_2(x - l_2\theta) \\ I_c\ddot{\theta} &= -K_1l_1(x + l_1\theta) + K_2l_2(x - l_2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

或

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + (K_1 + K_2)x - (K_2l_2 - K_1l_1)\theta &= 0 \\ I_c\ddot{\theta} - (K_2l_2 - K_1l_1)x + (K_1l_1^2 + K_2l_2^2)\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

引進符號

$$\begin{aligned} a &= \frac{K_1 + K_2}{m}, & b &= -\frac{K_2l_2 - K_1l_1}{m} \\ c &= -\frac{K_2l_2 - K_1l_1}{I_c}, & d &= \frac{K_1l_1^2 + K_2l_2^2}{I_c} \end{aligned}$$

得到與(4.2)式同樣形式的微分方程組

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + ax - b\theta &= 0 \\ \ddot{\theta} - cx + d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

所以系統的固有頻率和主振型仍可用(4.5)(4.6)式進行計算。不過振幅比將是垂直位移 x 與角位移 θ 的比值。

分析 $K_2l_2 > K_1l_1$ 的情況。因 $b > 0$ ， $c > 0$ ，由(4.7)式可知 $v_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} > 0$ ， $v_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} < 0$ ，即第一階主振動時 x 與 θ 是同方向，而第二階主振動時 x 與 θ 是反方向。同時在實際情況中，振幅比絕對值 $\left| \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} \right| \ll \left| \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} \right|$ ，表明兩種主振動如以相同的角位

移 θ 作比较, 第一阶主振动的质心位移远大于第二阶主振动的质心位移, 也就是第一阶主振动以上下垂直振动为主, 其主振型如图 4-7 a) 所示, 第二阶主振动以杆绕质心轴的俯仰振动为主, 其主振型如图 4-7 b) 所示。前者也可以看作绕杆外一节点摆动, 而后者是以质心附近一点为节点作摆动。

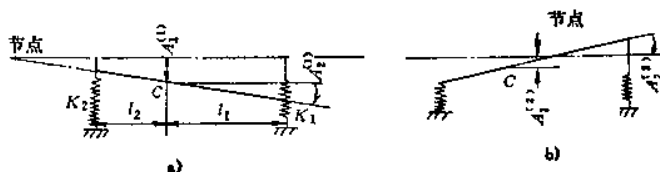


图 4-7

如 $K_1 l_1 = K_2 l_2$ 时, $b = c = 0$, 则 (4.17) 式中耦合项均为零, 简化成

$$\ddot{x} + ax = 0$$

$$\ddot{\theta} + d\theta = 0$$

相当于两个单自由度系统各自独立地作不同固有频率的主振动。

$$p_1 = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}}$$

$$p_2 = \sqrt{d} = \sqrt{\frac{K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2}{I_c}}$$

这时所选择的坐标 x 与 θ 称为主座标。

例 4.4 已知某汽车空载时的主要参数为

前轮悬挂重量 (单轮)	365 kg
后轮悬挂重量 (单轮)	305 kg
前轮悬挂刚度 (单轮)	2.05 kg/mm
后轮悬挂刚度 (单轮)	2.25 kg/mm
前后轮距离 l	2.83 m

$$l_1 = 0.52 \quad l = 147 \text{ cm}, \quad l_2 = 0.48 \quad l = 136 \text{ cm}$$

绕质心的回转半径 $\rho_c^2 = 0.90 l_1 l_2$

试计算其固有频率。

解 根据已知条件,

$$m = \frac{W}{g} = \frac{(365 + 305) \times 2}{980} = 1.367 \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$$

$$I_c = m\rho_c^2 = 1.367 \times 0.90 \times 147 \times 136 = 24590 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2$$

$$K_1 = 2 \times 20.5 = 41 \text{ kg/cm}$$

$$K_2 = 2 \times 22.5 = 45 \text{ kg/cm}$$

于是
$$a = \frac{K_1 + K_2}{m} = \frac{41 + 45}{1.367} = 62.91 \text{ 1/s}^2$$

$$b = \frac{K_2 I_2 - K_1 I_1}{m} = \frac{45 \times 136 - 41 \times 147}{1.367} = 68.03 \text{ cm/s}^2$$

$$c = \frac{K_2 I_2^2 - K_1 I_1^2}{I_c} = \frac{45 \times 136^2 - 41 \times 147^2}{24590} = 0.00378 \frac{1}{\text{cm} \cdot \text{s}^2}$$

$$d = \frac{K_1 I_1^2 + K_2 I_2^2}{I_c} = \frac{41 \times 147^2 + 45 \times 136^2}{24590} = 69.86 \text{ 1/s}^2$$

此处 $K_1 I_1 \approx K_2 I_2$, bc 乘积数值很小, 可以忽略不计。

$$p_1 \approx \sqrt{a} = \sqrt{62.91} = 7.93 \text{ 1/s}$$

$$p_2 \approx \sqrt{d} = \sqrt{69.86} = 8.36 \text{ 1/s}$$

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = 1.263 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{p_2}{2\pi} = 1.331 \text{ Hz}$$

静力耦合和动力耦合 一般情况下两自由度系统振动微分方程组, 如(4.17)式, 每个方程式中往往都有耦合项。这种坐标之间有耦合的情况称为**静力耦合**或**弹性耦合**。

现在我们以弹簧支承处的位移 x_1 与 x_2 为独立坐标来建立振动微分方程。见图 4-6d)。因为 x_1 与 x_2 同 x 与 θ 之间有如下关系:

$$x_1 = x + l_1 \theta, \quad x_2 = x - l_2 \theta$$

转换后得

$$x = \frac{l_2 x_1 + l_1 x_2}{l_1 + l_2}, \quad \theta = \frac{x_1 - x_2}{l_1 + l_2} \quad (\text{a})$$

将(a)式代入(4.15)式可得

$$m \left(\frac{l_2 \ddot{x}_1 + l_1 \ddot{x}_2}{l_1 + l_2} \right) = -K_1 x_1 - K_2 x_2$$

$$I_c \left(\frac{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2}{l_1 + l_2} \right) = -K_1 l_1 x_1 + K_2 l_2 x_2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{或} \quad m l_2 \ddot{x}_1 + m l_1 \ddot{x}_2 + K_1 (l_1 + l_2) x_1 + K_2 (l_1 + l_2) x_2 &= 0 \\ I_c \ddot{x}_1 - I_c \ddot{x}_2 + K_1 l_1 (l_1 + l_2) x_1 - K_2 l_2 (l_1 + l_2) x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (4.18)$$

方程组(4.18)中不仅坐标 x_1 和 x_2 有耦合, 而且包含加速度 \ddot{x}_1 和 \ddot{x}_2 的项也有耦合, 这种加速度之间有耦合的情况, 称为**动力耦合**或**惯性耦合**。方程组(4.18)同时具有静力耦合和动力耦合, 属于耦合的一般情况。当选取另一组特殊的独立坐标时, 微分方程组可能只有动力耦合。如果选取的坐标恰好可使微分方程组的耦合项全等于零, 既无静力耦合, 又无动力耦合, 就相当于两个单自由度系统, 这时的坐标就称为**主坐标**。显然如果一开始就用主坐标建立微分方程, 对于计算系统的固有频率是比较方便的, 因为坐标的转换并不影响固有频率的计算值。但实际问题往往并不容易直接找到主坐标, 这在第六章还要进一步讨论。

在特殊情况下, 由于结构上的安排, 可以找到明显的主坐标。例如在汽车设计中希望一个轮子在行车时受到跳动不传到另一个轮子上去, 可使车体质量分布和前后轮的位置之间满足条件: $\rho_c^2 = l_1 l_2$ 。这时弹簧支承处的位移 x_1 、 x_2 便是主坐标。将(4.18)第一式乘以 ρ_c^2 , 分别与第二式乘以 l_1 相加, 以及与第二式乘以 l_2 相减, 可得

$$\left. \begin{aligned} m \rho_c^2 \ddot{x}_1 + K_1 (l_1^2 + \rho_c^2) x_1 + K_2 (\rho_c^2 - l_1 l_2) x_2 &= 0 \\ m \rho_c^2 \ddot{x}_2 + K_1 (\rho_c^2 - l_1 l_2) x_1 + K_2 (l_2^2 + \rho_c^2) x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (4.19)$$

在 $\rho_c^2 = l_1 l_2$ 的条件下, (4.19)式中将无耦合项, 成为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{K_1 (l_1^2 + \rho_c^2)}{m \rho_c^2} x_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{K_2 (l_2^2 + \rho_c^2)}{m \rho_c^2} x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (4.20)$$

这说明 x_1 与 x_2 即为主坐标。两个独立的主振动的固有频率为

$$p_1 = \sqrt{\frac{K_1(l_1^2 + \rho_c^2)}{m\rho_c^2}} = \sqrt{\frac{K_1(l_1 + l_2)}{ml_2}}$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{K_2(l_2^2 + \rho_c^2)}{m\rho_c^2}} = \sqrt{\frac{K_2(l_1 + l_2)}{ml_1}}$$

这两个频率称为偏频，作为汽车出厂检验测试项目。对应于这两个频率的主振型如图 4-8 所示。当前轮按 p_1 上下振动时，后轮不动；后轮以 p_2 上下振动时，前轮可不动。

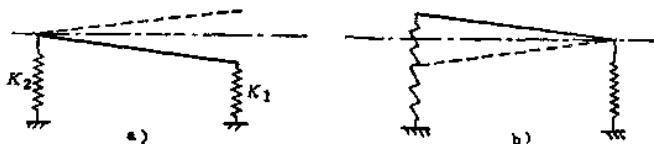


图 4-8

如果 $K_1 l_1 = K_2 l_2$ 和 $\rho_c^2 = l_1 l_2$ 两个条件同时得到满足，由 (4-20) 式得

$$p_1 = p_2 = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}}$$

出现两个等根，即两个固有频率相等的情况。这时对应的主振型将不是唯一的。这种现象将在第六章中进一步从理论上加以阐明。

4.5 拍的现象

在第三章曾介绍过，当单自由度系统的固有频率与激振力频率非常接近时，在强迫振动的初始阶段会出现拍的现象。本节以双摆为例说明当两自由度系统的两个固有频率很接近时，自由振动也同样会出现拍的现象。

图 4-9 a) 所示双摆，由两个摆长均为 l ，质量均为 m 的单摆组成。上端用铰悬挂，中间距悬挂点为 a 处，用刚度为 K 的弹簧相

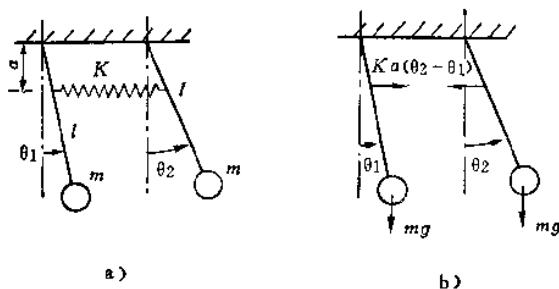


图 4-9

联。取两摆离开铅垂平衡位置的角位移 θ_1 与 θ_2 为独立坐标,以逆时针方向为正。任一瞬时位置,两个摆上所受的力如图4-9 b)所示。由转动方程式分别列出两个摆的微分方程:

$$\left. \begin{aligned} m l^2 \ddot{\theta}_1 &= -m g l \theta_1 + K a^2 (\theta_2 - \theta_1) \\ m l^2 \ddot{\theta}_2 &= -m g l \theta_2 - K a^2 (\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

读者可以用前面介绍过的方法求得系统的固有频率和主振型。现用主座标的方法来解决。将上述(4.21)式的两个方程相加和相减后可得一组新的方程式

$$\begin{aligned} m l^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) &= -m g l (\theta_1 + \theta_2) \\ m l^2 (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) &= -m g l (\theta_1 - \theta_2) - 2 K a^2 (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

取 $\psi_1 = \theta_1 + \theta_2$, $\psi_2 = \theta_1 - \theta_2$, 上列方程可转换成

$$\begin{aligned} m l^2 \ddot{\psi}_1 &= -m g l \psi_1 \\ m l^2 \ddot{\psi}_2 &= -m g l \psi_2 - 2 K a^2 \psi_2 \end{aligned}$$

或

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi}_1 + \frac{g}{l} \psi_1 &= 0 \\ \ddot{\psi}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{2 K a^2}{m l^2} \right) \psi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

(4.22)式是没有耦合项的,相当于两个单自由度系统振动方程。显然, ψ_1 与 ψ_2 即为主座标。由此,很容易求出固有频率为

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\ p_2 &= \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K a^2}{m l^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

方程(4.22)的解为

$$\psi_1 = A_1 \sin(p_1 t + \varphi_1)$$

$$\psi_2 = A_2 \sin(p_2 t + \varphi_2)$$

仍以座标 θ_1 、 θ_2 表示则为

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{1}{2}[A_1 \sin(p_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(p_2 t + \varphi_2)] \\ \theta_2 &= \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2) = \frac{1}{2}[A_1 \sin(p_1 t + \varphi_1) - A_2 \sin(p_2 t + \varphi_2)] \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

这就是双摆的通解。(4.24)式中 A_1 、 A_2 、 φ_1 及 φ_2 四个待定常数决定于初始条件。不难计算,当初始条件为: $t = 0$ 、 $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ 、 $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ 时, $A_1 = 2\theta_0$ 、 $A_2 = 0$ 、 $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, 系统的响应为

$$\theta_1 = \theta_0 \cos p_1 t$$

$$\theta_2 = \theta_0 \cos p_1 t$$

即系统按第一阶固有频率作主振动,其振幅比为 $\nu_1 = 1$, 整个振动过程 $\theta_1 = \theta_2$, 主振型如图 4-10 a) 所示。中间弹簧不变形。两个摆象单摆一样作同方向摆动, 所以其固有频率也和单摆一样。

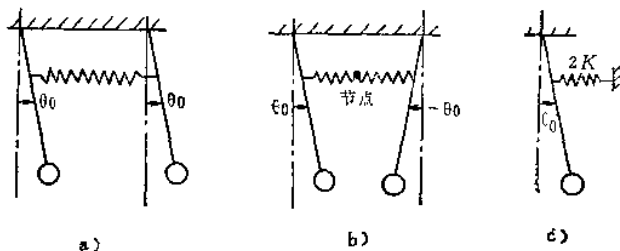


图 4-10

当初始条件为: $t = 0$ 、 $\theta_1(0) = -\theta_2(0) = \theta_0$ 、 $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ 时, $A_1 = 0$ 、 $A_2 = 2\theta_0$ 、 $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, 系统的响应为

$$\theta_1 = \theta_0 \cos p_2 t$$

$$\theta_2 = -\theta_0 \cos p_2 t$$

系统按第二阶固有频率作主振动, 振幅比 $v_2 = -1$, 整个振动过程 $\theta_1 = -\theta_2$, 主振型如图 4-10 b)。两个摆作同频率反方向摆动。中间弹簧有一个节点不动, 因而可以把双摆看作两个彼此独立的单摆, 在距悬挂点 a 处连接一刚度为 $2K$ 的弹簧, 如图 4-10 c) 所示。

在任意初始条件下, 系统的响应为两个主振动的叠加, 不再是简谐运动。例如当初 始 条 件 为: $t = 0$, $\theta_1(0) = \theta_0$ 、 $\theta_2(0) = \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ 时, $A_1 = A_2 = \frac{\theta_0}{2}$ 、 $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, 故

$$\theta_1 = \frac{\theta_0}{2} (\cos p_1 t + \cos p_2 t)$$

$$\theta_2 = \frac{\theta_0}{2} (\cos p_1 t - \cos p_2 t)$$

或写成

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta_0 \cos \frac{p_2 - p_1}{2} t \cos \frac{p_1 + p_2}{2} t \\ \theta_2 &= \theta_0 \sin \frac{p_2 - p_1}{2} t \sin \frac{p_1 + p_2}{2} t \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

当弹簧刚度 K 很小, 因而 $\frac{2Ka^2}{ml^2}$ 比之 $\frac{g}{l}$ 较小时, p_2 便接近于 p_1 。令 $\Delta p = p_2 - p_1$, 并有 $p_0 = \frac{p_1 + p_2}{2}$, 则 (a) 式成为

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta_0 \cos \frac{\Delta p}{2} t \cos p_0 t \\ \theta_2 &= \theta_0 \sin \frac{\Delta p}{2} t \sin p_0 t \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

(4.25) 式表明两个摆的运动可以看作频率为 p_0 的简谐振动。

其振幅不是常值,而是缓慢变化的简谐函数 $\theta_0 \cos \frac{\Delta p}{2} t$ 与 $\theta_0 \sin \frac{\Delta p}{2} t$ 。如图4-11两个摆都发生了拍的现象。有趣的是两个拍

之间差 $\frac{\pi}{2}$ 相位角。当

$t = 0$ 时, 左边的摆以 θ_0 开始摆动, 右边的摆不动; 随后左边摆的振幅逐渐减小, 右边的摆开始摆动并增大振幅, 直到

$t = \frac{\pi}{\Delta p}$ 时, 左边摆停止, 右边摆达到 θ_0 。

再经过 $t = \frac{\pi}{\Delta p}$, 右边摆又停止, 左边摆又达到 θ_0 。以后每隔

$\frac{2\pi}{\Delta p}$ 重复一次。同时

能量也从一个摆传到另一个摆, 交替转换, 使两个摆持续地交替振动。此处 $\Delta p = p_2 - p_1 \approx \frac{K a^2}{m \sqrt{g l^3}}$ 即为拍频, 拍的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\Delta p} = \frac{2\pi m \sqrt{g l^3}}{K a^2} \quad (4.26)$$

可见中间弹簧的刚度 K 越小, 周期越长。

拍是一种比较普遍的现象。凡是由两个频率相近的简谐振动合成的振动, 都可能产生拍的现象。汽车振动中两个固有频率相近时也可以观察到拍的现象。演奏乐器常利用拍的现象使音调优美。

4.6 梁 振 动

梁振动是工程问题中经常遇到的。例如旋转机械的转子、叶

片、飞行器、高层建筑等等，往往以梁振动为主要的振动形式。其简化的方法之一是把梁划分成若干段，将各段的质量按质心不变的原理聚缩到段的两端，从而简化成由无质量的弹性梁上联结 n 个集中质量的多自由度系统。

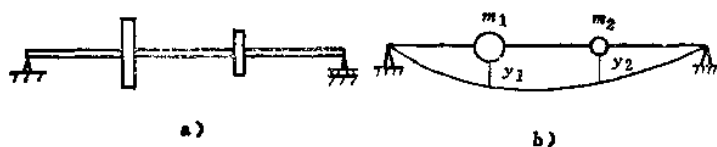


图 4-12

图4-12 a) 为一双盘转子。把轴段的质量聚缩到圆盘处，只考虑梁的弹性，质量 m_1 与 m_2 分别为圆盘质量和左右轴段部分质量之和。如图4-12 b)。考虑梁的横向振动，系统简化为两自由度系统。

本节拟采用影响系数的方法建立振动微分方程式，这一方法同样可以应用于其他振动系统。为此先介绍有关影响系数的基本概念。

柔度影响系数：如图4-13 a) 所示，若仅在梁上某点 i 作用一单位载荷时，在 j 点产生的位移 δ_{ij} 称为柔度影响系数。如 δ_{11} ， δ_{21} 分别表示在①点作用单位力时在①点和②点产生的位移。梁

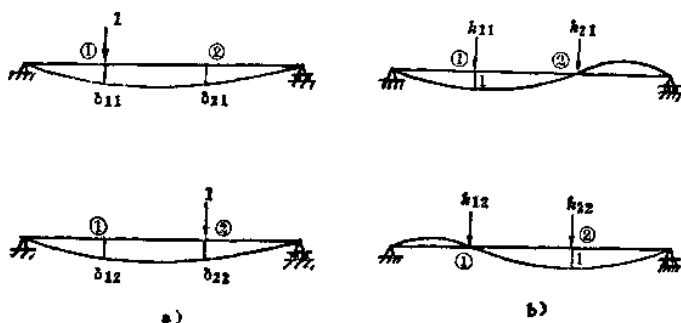


图 4-13

越柔软, 则产生的位移越大, 因此称为柔度影响系数。

根据结构力学的互换原理可以证明 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ 。

刚度影响系数: 假定梁已简化成具有 n 个集中质量的多自由度系统。仅仅使其中一个集中质量所在的点 j 产生单位位移, 而其余 $(n - 1)$ 个点均无位移, 为了实现梁的这种状态, 那么在梁的集中质量所在的 n 个点 (用 i 表示) 上所必需加的 载荷 k_{ij} 称为刚度影响系数。例如图4-13 b) 所示的两个自由度系统, 在①点产生单位位移, ②点位移为零时, 在①点和②点分别需加的 载荷即为 k_{11} , k_{21} 。梁越刚硬则所需要作用的 载荷越大, 因此便把 k_{ij} 称为刚度影响系数。同理, $k_{ij} = k_{ji}$ 。

先从静力观点上建立力和位移之间的关系。设一梁上受到载荷 P_1 与 P_2 作用时, 在①点和②点处的 位移为 y_1 与 y_2 , 如图4-14 a)。根据力作用的叠加原理, 将 P_1 与 P_2 单独作用下①、②两点的位移, 用柔度影响系数的形式表示如图4-14 b), 叠加以后可得方程式

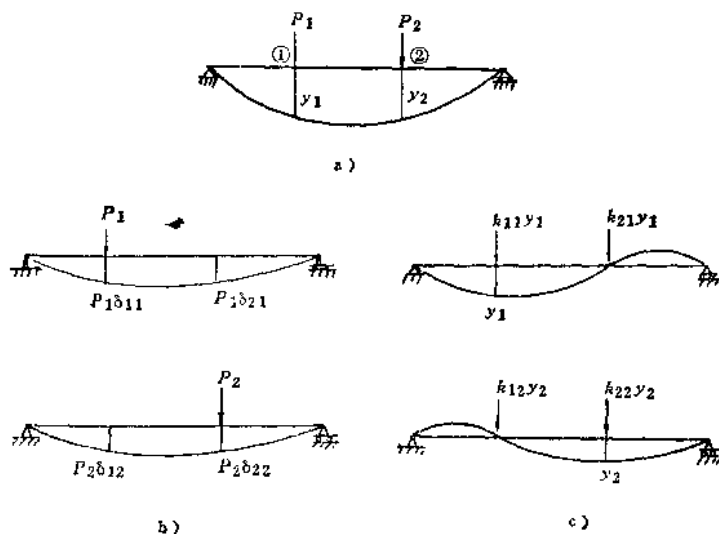


图 4-14

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= P_1 \delta_{11} + P_2 \delta_{12} \\ y_2 &= P_1 \delta_{21} + P_2 \delta_{22} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

反之，将产生位移 y_1 或 y_2 分别在①②两点所需加的载荷用刚度影响系数的形式表示如图4-14 c)，叠加以后可得方程式

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= k_{11} y_1 + k_{12} y_2 \\ P_2 &= k_{21} y_1 + k_{22} y_2 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

现在将以上方法用到梁振动问题上来。取 y_1 , y_2 为质量 m_1 与 m_2 的坐标。振动时的惯性力 $m_1 \ddot{y}_1$ 与 $m_2 \ddot{y}_2$ 的方向和坐标正方向相反，如图4-15所示。利用(a)(b)两式，并用 $-m_1 \ddot{y}_1$ 与 $-m_2 \ddot{y}_2$ 代替 P_1 与 P_2 ，即得：

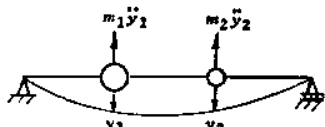


图 4-15

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -\delta_{11} m_1 \ddot{y}_1 - \delta_{12} m_2 \ddot{y}_2 \\ y_2 &= -\delta_{21} m_1 \ddot{y}_1 - \delta_{22} m_2 \ddot{y}_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

或

$$\left. \begin{aligned} -m_1 \ddot{y}_1 &= k_{11} y_1 + k_{12} y_2 \\ -m_2 \ddot{y}_2 &= k_{21} y_1 + k_{22} y_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

(4.27)式是用柔度影响系数建立的振动微分方程组，是动力耦合的。(4.28)式是用刚度影响系数建立的振动微分方程组，是静力耦合的。这两种方程所表达的是同一问题，可以互相转换。以上方法完全适用于其他振动系统。读者不难用这种方法去建立弹簧质量系统的振动微分方程。但要注意，对于某些未被完全固定而可作一定刚体运动的系统，如图4-4所示的双盘扭振系统，显然不存在柔度影响系数。

对于梁振动来说，因为柔度影响系数比较容易计算，用柔度影响系数建立振动微分方程式比较方便。

设(4.27)式的解为

$$y_1 = A_1 \sin(pt + \varphi)$$

$$y_2 = A_2 \sin(pt + \varphi)$$

代入(4.27)式，得

$$\left. \begin{aligned} (1 - \delta_{11}m_1p^2)A_1 - \delta_{12}m_2p^2A_2 &= 0 \\ -\delta_{21}m_1p^2A_1 + (1 - \delta_{22}m_2p^2)A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

由此得到的频率方程式为

$$\Delta(p^2) = \begin{vmatrix} 1 - \delta_{11}m_1p^2 & -\delta_{12}m_2p^2 \\ -\delta_{21}m_1p^2 & 1 - \delta_{22}m_2p^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.29)$$

解(4.29)式即可求得两个固有频率。相应的主振型为

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{1 - \delta_{11}m_1p_1^2}{\delta_{12}m_2p_1^2} = \frac{\delta_{21}m_1p_1^2}{1 - \delta_{22}m_2p_1^2} \\ v_2 &= \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{1 - \delta_{11}m_1p_2^2}{\delta_{12}m_2p_2^2} = \frac{\delta_{21}m_1p_2^2}{1 - \delta_{22}m_2p_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

例4.5 设图4-12的双盘转子, 简化后的集中质量 $m_1 = m$, $m_2 = \frac{m}{2}$, 它们距两端距离均为 $\frac{l}{3}$, 如图4-16。梁的抗弯刚度为 EJ 。试计算梁振动的固有频率和相应的主振型。

解 利用材料力学计算梁

挠度的方法可知

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{8l^3}{486EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{486EJ}$$

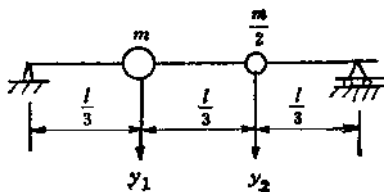


图 4-16

代入(4.29)频率方程, 展开后得

$$\left(1 - \frac{8ml^3}{486EJ}p^2\right)\left(1 - \frac{4ml^3}{486EJ}p^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7ml^3}{486EJ}\right)^2p^4 = 0$$

设符号 $d = \frac{ml^3}{486EJ}$, 上式整理后成为

$$p^4 - \frac{24}{15d}p^2 + \frac{2}{15d^2} = 0$$

解之

$$p_{1,2}^2 = \frac{12 \mp \sqrt{114}}{15d}$$

故

$$p_1 = 6.48 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

$$p_2 = 27.2 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

代入(4.30)式, 得

$$v_1 = \frac{1 - 8d \frac{12 - \sqrt{114}}{15d}}{\frac{7}{2} d \cdot \frac{12 - \sqrt{114}}{15d}} = 0.982$$

$$v_2 = - \frac{1 - 8d \frac{12 + \sqrt{114}}{15d}}{\frac{7}{2} d \cdot \frac{12 + \sqrt{114}}{15d}} = -1.964$$

4.7 回转效应

在转子临界转速的计算模型中, 通常把圆盘简化为集中质量, 如上一章 3.7 节中讨论的单盘转子, 圆盘安装在两轴承的中央, 转子旋转时, 圆盘保持在一个平面内运动, 这样只需考虑其惯性力的作用。但是对于圆盘的对称轴在空间不断改变方位而描绘出锥面的情况, 仅考虑其惯性力的作用会带来一定误差。由于圆盘作空间运动时动量矩矢量方向的改变, 它必然受到转轴作用于它的一个力矩, 因此转轴就受到一个反作用力矩, 这也就是圆盘的惯性力矩, 通常称为回转力矩。

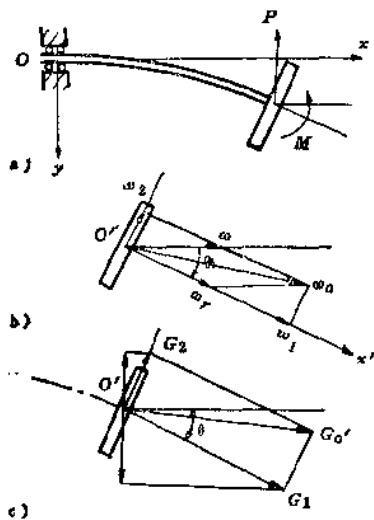


图 4-17

图4-17 a) 所示一单盘悬臂转子, 除了惯性力 P 以外, 还有

回转力矩 M 的作用而使挠度 y 和转角 θ 耦合而成两自由度系统。

设转轴的挠曲平面 xoy 以角速度 ω 绕水平轴 ox 轴转动, 圆盘除了随 xoy 平面一起转动外, 它相对于挠曲平面还以相对角速度 ω_r 绕对称轴 $o'x'$ 转动。图 4-17 b) 表示圆盘的绝对角速度 ω_1 和各分量之间的关系。为了计算圆盘对质心 o' 的动量矩 $\vec{G}_{o'}$, 把 ω_1 分解为沿对称轴 $o'x'$ 方向和垂直对称轴沿直径方向的分量为

$$\omega_1 = \omega \cos \theta + \omega_r \approx \omega + \omega_r$$

$$\omega_2 = \omega \sin \theta \approx \omega \theta$$

再求出对质心动量矩 $\vec{G}_{o'}$ 沿这两个方向的分量, 它们分别等于对 $o'x'$ 轴和对过质心的直径的转动惯量 I_p 和 I_d 乘以相应的角速度分量 ω_1 和 ω_2 , 即

$$G_1 = I_p (\omega + \omega_r)$$

$$G_2 = I_d (\omega \theta)$$

图 4-17 c) 表示动量矩 $\vec{G}_{o'}$ 和各分量之间的关系。根据相对质心动量矩定理: 动量矩矢量端的速度等于所作用的外力矩。当轴旋转时, $\vec{G}_{o'}$ 的水平分量不改变方向, 而它的垂直分量却由于随同 xoy 平面以角速度 ω 旋转而改变方向, 因此动量矩 $\vec{G}_{o'}$ 的端点速度也就等于它的垂直分量以角速度 ω 转动的速度, 为此先求出 $\vec{G}_{o'}$ 的垂直分量

$$V = I_p (\omega + \omega_r) \theta - I_d \omega \theta = [I_p (\omega + \omega_r) - I_d \omega] \theta$$

因此可得圆盘受到转轴的作用力矩

$$M = V \omega = [I_p (\omega + \omega_r) - I_d \omega] \omega \theta$$

图 4-17 a) 上表示的转轴所受的反作用力矩 M , 亦即回转力矩, 显然所表示的方向与上述的相反。

通常有可能发生以下两种运动情况:

1. **同步正进动** 当圆盘的绝对角速度的垂直分量 ω_1 和挠曲平面的转动角速度 ω 相等且方向相同时, 称为同步正进动运动, 即

$$\omega_1 = \omega + \omega_r = \omega$$

显然同步正进动时相对角速度 $\omega_r = 0$ ，圆盘和挠曲平面以相同的角速度 ω 一起旋转，回转力矩 $M = (I_p - I_d)\omega^2\theta$ 。

2. 同步反进动 当 ω_1 和 ω 相等但作反方向运动时，称为同步反进动，即

$$\omega_1 = (\omega + \omega_r) = -\omega$$

显然同步反进动时 $\omega_r = -2\omega$ ，即圆盘与挠曲平面以相等的角速度 ω 作相反方向的旋转运动，回转力矩 $M = -(I_p + I_d)\omega^2\theta$ 。

同步反进动的情况很少发生，下面只讨论工程上一般发生的同步正进动的情况。

由图4-17 a)，梁上一端受惯性力 P 和惯性力矩 M 的作用，根据悬臂梁的柔度影响系数关系，可建立如下方程

$$\left. \begin{aligned} y &= -P \frac{l^3}{3EI} - M \frac{l^2}{2EI} \\ \theta &= -P \frac{l^2}{2EI} - M \frac{l}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

将 $P = m\ddot{y} = -m\omega^2 y$

$$M = (I_p - I_d)\omega^2\theta$$

代入上式经整理后得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{ml^3}{3EI} \right) y + (I_p - I_d) \frac{l^2}{2EI} \theta &= 0 \\ -\frac{ml^2}{2EI} y + \left[\frac{1}{\omega^2} + (I_p - I_d) \frac{l}{EI} \right] \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

于是得频率方程

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{\omega^2} - \frac{ml^3}{3EI} \right) \left[-\frac{1}{\omega^2} + (I_p - I_d) \frac{l}{EI} \right] \\ + (I_p - I_d) \frac{l^2}{2EI} \cdot \frac{ml^2}{2EI} = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

对于薄圆盘 $I_p \approx 2I_d$ ，上式可化简为

$$\omega^4 + \frac{12EI}{mI_d l^3} \left(-\frac{ml^2}{3} - I_d \right) \omega^2 - \frac{12}{mI_d} \left(\frac{EI}{l^2} \right)^2 = 0 \quad (4.34)$$

以前忽略回转力矩时，系统的临界转速值 ω_c 也就等于固有圆频

率值, 即

$$\omega_k^4 = -\frac{3EJ}{mI^3}$$

引入系数 $\alpha = \frac{3I_d}{mI^2}$, (4.34) 式可整理成

$$\omega^4 + 4\omega_k^4 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \omega^2 - \frac{4}{\alpha} \omega_k^4 = 0$$

当圆盘直径增大时, α 随之增大, ω 则相应地增高, 作 $\left(\frac{\omega}{\omega_k} \right)^2$ 与 α 的关系曲线如图 4-18 所示。对于较大的 α , 由 (4.34) 式可知:

$\left(\frac{\omega}{\omega_k} \right)^2$ 趋近于 4, 故

ω 趋近于 $2\omega_k$, 由此可

见, 同步正进动的临界转速最大可能达到忽略回转力矩时的两倍。

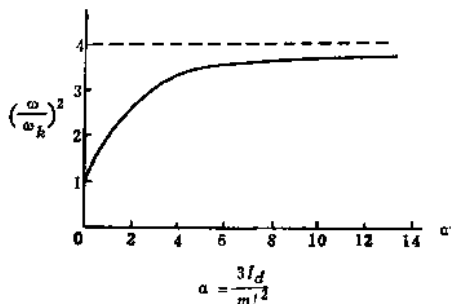


图 4-18

4.8 双质量弹簧系统的强迫振动

现仍以 4.2 节图 4-1 a) 的双质量弹簧系统为例, 讨论无阻尼两自由度系统强迫振动的一般性质。设在质量 m_1 与 m_2 上分别作用简谐激振力 $F_1 \sin \omega t$ 和 $F_2 \sin \omega t$, 如图 4-19。根据牛顿运动定律, 可直接写出系统强迫振动的微分方程。

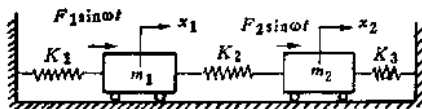


图 4-19

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2 x_2 &= F_1 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - K_2 x_1 + (K_2 + K_3)x_2 &= F_2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} (4.35)$$

引进符号

$$a = \frac{K_1 + K_2}{m_1}, \quad b = -\frac{K_2}{m_1}, \quad c = \frac{K_2}{m_2}$$

$$d = -\frac{K_2 + K_3}{m_2}, \quad f_1 = -\frac{F_1}{m_1}, \quad f_2 = -\frac{F_2}{m_2}$$

则(4.35)式可写成

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + ax_1 - bx_2 &= f_1 \sin \omega t \\ \ddot{x}_2 - cx_1 + dx_2 &= f_2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

这是二阶线性常系数非齐次微分方程组。其齐次方程解即为4.2节所讨论过的自由振动,由于阻尼的存在,在一段时间后就逐渐衰减掉。非齐次的特解则为稳定阶段等幅振动,系统按与激振力相同的频率 ω 作强迫振动。设其解为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= B_1 \sin \omega t \\ x_2 &= B_2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

式中振幅 B_1 、 B_2 为待定常数。代入(4.36)式,得

$$\begin{aligned} (a - \omega^2) B_1 - b B_2 &= f_1 \\ -c B_1 + (d - \omega^2) B_2 &= f_2 \end{aligned}$$

解此代数联立方程组,

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{(d - \omega^2) f_1 + b f_2}{\Delta(\omega^2)} \\ B_2 &= \frac{c f_1 + (a - \omega^2) f_2}{\Delta(\omega^2)} \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta(\omega^2) &= (a - \omega^2)(d - \omega^2) - bc \\ &= (p_1^2 - \omega^2)(p_2^2 - \omega^2) \end{aligned}$$

式中 p_1 与 p_2 为系统的两个固有频率,其数值由(4.5)式计算。

将(4.38)式代回(4.37)式即为系统在激振力作用下的响应。上述结果表明系统作与激振力同频率的简谐振动。其振幅不仅决定于激振力的幅值 F_1 与 F_2 ,更重要的是与系统的固有频率和激振频率之比有很大关系。由(4.38)式可见,当激振频率 ω 等于 p_1 或 p_2 时,系统振幅无限增大,即为共振。两自由度系统的强

迫振动有两个共振频率。

同时由(4.38)式可知, 两个质量的振幅之比为

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{cf_1 + (a - \omega^2)f_2}{(d - \omega^2)f_1 + bf_2} \quad (4.39)$$

这说明在一定的激振力的幅值和频率下, 振幅比同样是确定值, 也就是说系统有一定的振型。当激振频率 ω 等于第一阶固有频率 p_1 时, 振幅比为

$$\left(\frac{B_2}{B_1}\right)_{p_1} = \frac{cf_1 + (a - p_1^2)f_2}{(d - p_1^2)f_1 + bf_2}$$

若将4.2节(4.6a)式中 $\frac{a - p_1^2}{b}$ 的分子分母均乘以 f_2 , $\frac{c}{d - p_1^2}$ 的分子分母均乘以 f_1 , 然后按比例式相加法则可得

$$v_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{cf_1 + (a - p_1^2)f_2}{(d - p_1^2)f_1 + bf_2} = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)_{p_1}$$

同理

$$v_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)_{p_2}$$

这表明系统在任何一个共振频率下的振型就是相应的主振型。在实践中经常用共振法测定系统的固有频率, 并根据测出的振型来判定固有频率的阶次, 就是利用这个规律。

同单自由度强迫振动一样, 用频率比作横座标, 振幅作纵座标, 可画出两个质量的振幅频率响应曲线。

例4.6 设例4.1的双质量弹簧系统, 在质量 m_1 上作用一激振力 $F_1 \sin \omega t$, 而 $F_2 = 0$ 。(1) 试求系统的响应; (2) 计算共振时振幅比; (3) 作振幅频率响应曲线。

解 (1) 已知

$$a = \frac{2K}{m}, \quad b = \frac{K}{m}, \quad c = \frac{K}{2m}, \quad d = \frac{3K}{2m}$$

$$p_1^2 = \frac{K}{m}, \quad p_2^2 = \frac{5K}{2m}$$

代入(4.38)式

$$B_1 = \frac{\left(\frac{3K}{2m} - \omega^2\right) \frac{F_1}{m}}{\left(\frac{K}{m} - \omega^2\right) \left(\frac{5K}{2m} - \omega^2\right)} = \frac{(3K - 2m\omega^2) F_1}{(K - m\omega^2) (5K - 2m\omega^2)}$$

$$B_2 = \frac{\frac{K}{2m} \cdot \frac{F_1}{m}}{\left(\frac{K}{m} - \omega^2\right) \left(\frac{5K}{2m} - \omega^2\right)} = \frac{KF_1}{(K - m\omega^2) (5K - 2m\omega^2)}$$

故系统响应为

$$x_1 = \frac{(3K - 2m\omega^2) F_1}{(K - m\omega^2) (5K - 2m\omega^2)} \sin \omega t$$

$$x_2 = \frac{KF_1}{(K - m\omega^2) (5K - 2m\omega^2)} \sin \omega t$$

$$(2) \quad \frac{B_2}{B_1} = \frac{K}{3K - 2m\omega^2}$$

当

$$\omega^2 = p_1^2 = \frac{K}{m} \text{ 时, } \frac{B_2}{B_1} = 1 = v_1$$

$$\omega^2 = p_2^2 = \frac{5K}{2m} \text{ 时, } \frac{B_2}{B_1} = -\frac{1}{2} = v_2$$

(3) 将振幅改写成

$$B_1 = \frac{2F_1}{5K} \frac{\frac{3}{2} - \left(\frac{\omega}{p_1}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{p_2}\right)^2\right]}$$

$$B_2 = \frac{F_1}{5K} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{p_2}\right)^2\right]}$$

以 $\frac{\omega}{p_1}$ 为横坐标, B_1 与 B_2 为纵坐标, 画出如图 4-20a)b) 的振幅频率响应曲线。

由图 4-20 可见, 和单自由度一样, 两自由度系统每个质量块

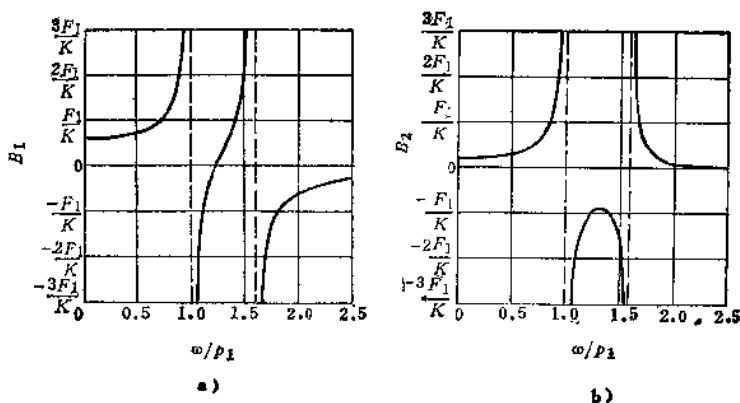


图 4-20

的振幅和频率比有类似的复杂关系。有两次共振。每次共振时，两个质量块的振幅同时达到最大值。在激振频率 $\omega = \sqrt{\frac{3K}{2m}}$ 时， m_1 的振幅为零，这种现象通常称为反共振，当 $\omega < \sqrt{\frac{3K}{2m}}$ 时两个质量块运动方向是相同的，而在 $\omega > \sqrt{\frac{3K}{2m}}$ 时两个质量块运动方向是相反的。当 $\omega \gg p_1$ 时两个质量块的振幅都非常小而趋于零。

例4.7 图4-21 a) 为一种双质量不平衡式振动输送机的结构简图。它由电机 8 带动偏心轴 5，通过激振弹簧 4 激起上槽体 1 沿着与水平线成 β 角的方向振动，从而把槽体上输送的物料抛掷起来向前传送。在分析振动输送机运动时，结构用图4-21 b) 所示双质量弹簧系统来表达。上槽体 1 简化为质量 m_2 ，减振弹簧 2、蓄能弹簧 3 及激振弹簧 4 按并联弹簧简化为等效刚度为 K_2 的弹簧，下槽体（减振架）6 为质量 m_1 ，减振弹簧 7 刚度为 K_1 。在两个质量上分别作用有两个大小相等方向相反的激振为 $F_0 \sin \omega t$ 。已知 $W_1 = m_1 g = 1421 \text{ kg}$ ， $W_2 = m_2 g = 407 \text{ kg}$ ， $K_1 = 1760 \text{ kg/cm}$ ， $K_2 = 3280 \text{ kg/cm}$ ， $F_0 = 1680 \text{ kg}$ ，激振频率为 11.2 Hz 。试计算上下槽体的振幅。

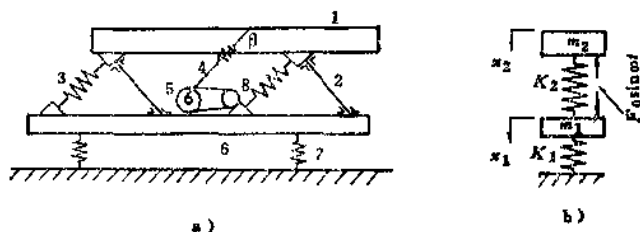


图 4-21

1—上槽体 2—板簧 3—蓄能弹簧 4—激振弹簧 5—偏心轴 6—下槽体
7—减振弹簧 8—电机

解 图4-21 b) 所示的双质量弹簧系统的振动微分方程为

$$m_1 \ddot{x}_1 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2 x_2 = F_0 \sin \omega t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - K_2 x_1 + K_2 x_2 = -F_0 \sin \omega t$$

设符号

$$a = -\frac{K_1 + K_2}{m_1}, \quad b = \frac{K_2}{m_1}, \quad c = d = -\frac{K_2}{m_2}$$

$$f_1 = \frac{F_0}{m_1}, \quad f_2 = -\frac{F_0}{m_2}$$

便得与(4.36)同样的微分方程组，所以同样可用(4.38)式计算振幅。根据已知条件

$$a = \frac{(1760 + 3280) \times 980}{1421} = 3.48 \times 10^3 \quad 1/s^2$$

$$b = \frac{3280 \times 980}{1421} = 2.26 \times 10^3 \quad 1/s^2$$

$$c = d = \frac{3280 \times 980}{407} = 7.9 \times 10^3 \quad 1/s^2$$

$$f_1 = \frac{1680 \times 980}{1421} = 1.16 \times 10^3 \quad \text{cm/s}^2$$

$$f_2 = -\frac{1680 \times 980}{407} = -4.04 \times 10^3 \quad \text{cm/s}^2$$

$$\omega^2 = (2\pi \times 11.2)^2 = 4.95 \times 10^3 \quad 1/s^2$$

代入(4.38)式得

$$B_1 = -0.259 \text{ cm}$$

$$B_2 = 0.681 \text{ cm}$$

4.9 动力减振器

在上节讨论图 4-20 的振幅频率响应曲线时,注意到当激振频率 $\omega = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}}$ 时,质量 m_1 的振幅 $B_1 = 0$ 。这意味着适当地选择参数(K_2 和 m_2)可使两自由度系统的强迫振动只反应在一部分物体上,另一部分物体可维持不动。无阻尼动力减振器就是根据这个原理设计的。

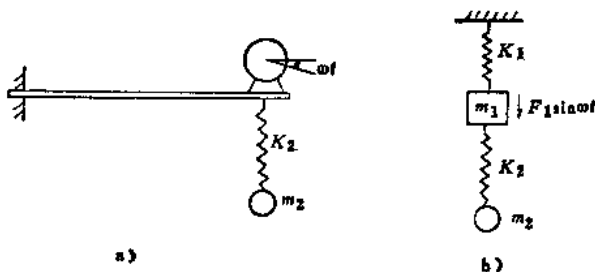


图 4-22

图4-22 a) 所示梁上有一固定转速的电动机,运转时由于偏心而产生强迫振动。这可简化为质量 m_1 弹簧刚度 K_1 的单自由度系统,受到激振力 $F_1 \sin \omega t$ 而引起强迫振动。当 ω 接近系统固有频率 $\sqrt{\frac{K_1}{m_1}}$ 时,将产生强烈振动。现在在梁上附加一质量为 m_2 刚度为 K_2 的弹簧质量系统,就成为两自由度系统。若使选择的附加质量 m_2 和刚度 K_2 满足条件 $\sqrt{\frac{K_2}{m_2}} = \omega$,则主系统(梁和电动机)的振动急剧减小,而附加系统则振动不止,犹如把主系统的振动吸收过来由它代替一样。这一现象是很容易通过试验观察到的。在生产实践中消除频率范围变化较小的机器(如电机)的过大振动,可以采用这一方法。特别在原系统的参数不便改变的情况

下, 这种方法是既简便而又是行之有效的。这种附加的弹簧质量系统就是动力减振器。

根据上节的讨论可直接列出图4-22 b) 的振动微分方程:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (K_1 + K_2) x_1 - K_2 x_2 = F_1 \sin \omega t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - K_2 x_1 + K_2 x_2 = 0$$

其强迫振动的振幅为

$$B_1 = \frac{(d - \omega^2) f_1}{\Delta(\omega^2)}$$

$$B_2 = -\frac{c f_1}{\Delta(\omega^2)}$$

其中

$$\Delta(\omega^2) = (a - \omega^2)(d - \omega^2) - bc$$

符号

$$a = \frac{K_1 + K_2}{m_1}, \quad b = \frac{K_2}{m_1}, \quad c = \frac{K_2}{m_2} = d$$

$$f_1 = \frac{F_1}{m_1}$$

当 $\omega^2 = d = \frac{K_2}{m_2}$ 时, 得

$$B_1 = 0$$

$$B_2 = -\frac{f_1}{b} = -\frac{F_1}{K_2} \quad (4.40)$$

可见选择减振器的固有频率 $\sqrt{\frac{K_2}{m_2}} = \omega$ 时, 主系统即保持不动, 而减振器则以频率 ω 作

$$x_2 = B_2 \sin \omega t = -\frac{F_1}{K_2} \sin \omega t$$

的强迫振动。减振器弹簧在下端受到作用力

$$K_2 x_2 = -F_1 \sin \omega t$$

在任何瞬时恰好与上端的激振力 $F_1 \sin \omega t$ 相平衡, 因此使主系统的振动转移到减振器上来。

图 4-23 作出了主系统的振幅频率响应曲线。曲线是在比值

$\alpha = \frac{K_2/m_2}{K_1/m_1} = 1.0$ 质量比 $\mu = \frac{m_2}{m_1} = 0.2$ 的条件下作出的。由曲

线可以看到, 当 $\frac{\omega}{\sqrt{K_2/m_2}} = 1$ 时, $\frac{B_1 K_1}{F_1} = 0$ 。这是在无阻尼条件下的结论, 在有阻尼的情况下, 主系统不是完全不动, 而是以较小的振幅振动。随着阻尼的增加振幅将会增大, 因之采用动力减振器时应注意减小阻尼, 这和以往增加阻尼可以减小共振区附近的振幅情况不同。

由图 4-23 还可以看到在 $\omega = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}}$ 附近有两个共振峰, 如果选择 m_2 和 K_2 不当, 或激

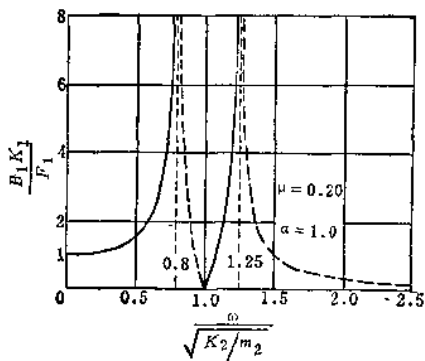


图 4-23

振频率有较大变化时, 就可能引起新的共振。为此必须控制附加动力减振器后的两自由度系统的固有频率。对于 $\alpha = 1 \left(\frac{K_1}{m_1} = \frac{K_2}{m_2} \right)$, 质量比为 μ 的系统, 两个固有频率为

$$p_{1,2}^2 = \frac{K_1}{m_1} \left[1 + \frac{\mu}{2} \mp \sqrt{\mu + \frac{\mu^2}{4}} \right] \quad (4.41)$$

由 (4.41) 式作出 $\lambda = \frac{p}{\sqrt{K_1/m_1}}$ 与 μ 的关系曲线, 如图 4-24。由图可以看出, 对于一定的 μ 值, 有两个对应的 λ 值 λ_1 和 λ_2 。它们表示系统的两个固有频率 p_1 和 p_2 相隔的范围。以前我们对减振器的质量 m_2 没有提出限制条件, 但从图上看, μ 很小时, p_1 和 p_2 将很接近, 动力减振器的使用频带将很窄, 因此必须要求有一定的质量比, 即减振器的质量不能过小, 才不致发生新的共振。此外为了使减振器能安全工作, 除了满足以上条件外, 还应根据 (4.40) 式的振幅 B_2 , 进行强度校核。

图 4-25 表示某电机定子壳体上的动力减振器, 用以消除频率

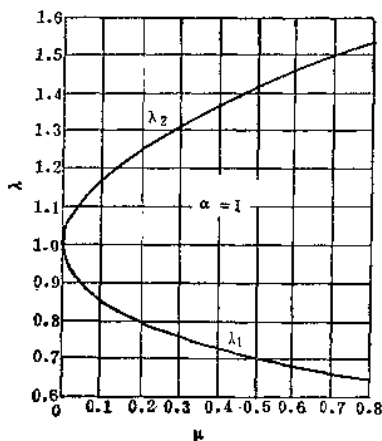


图 4-24

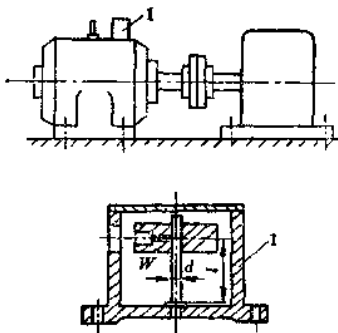


图 4-25

1—减振器

为33Hz左右的强烈振动。电机转速为 $490\text{rpm} = 8.2\text{Hz}$ ，机壳的振动频率正好是它的四倍。安装六个动力减振器后，最小振幅由 0.046mm 下降到 0.009mm ，满足了运行要求。减振器重量 W 为 30kg ，安装在长度为 $l = 40\text{cm}$ 的 M30 螺杆上，便于调节。

4.10 离心摆式减振器

对于激振频率变化范围较大的系统，上述那种减振器不再适用。例如变转速运行的发动机，其激振频率随转速在很大范围内变动，因此必须设计减振器的固有频率能跟随转速自动调节，才能有效地达到减振目的。离心摆式减振器就是能自动调节固有频率用于扭振系统的一种比较理想的减振器。

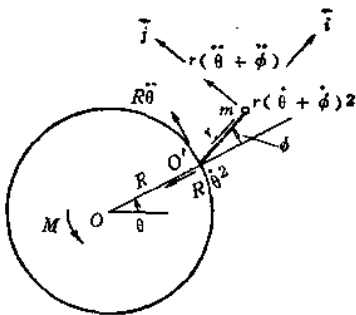


图 4-26

图 4-26 表示离心摆式减振器的原理图。圆盘绕定轴 O 转动, 受到激振扭矩 M 的作用。在 O' 点连接一单摆, 其质量为 m , 摆长为 r 。在 O' 处设一移动座标随 O' 作圆周运动, 因此移动座标上任一点的速度加速度都和 O' 点的相等。单摆相对于移动座标的转动角速度为 $(\dot{\theta} + \dot{\phi})$ 。质量 m 的绝对加速度 \vec{a} 等于 O' 点的加速度和相对于 O' 的相对加速度的矢量和

$$\begin{aligned}\vec{a} = & [R\ddot{\theta}\sin\phi - R\dot{\theta}^2\cos\phi - r(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2]\vec{i} \\ & + [R\ddot{\theta}\cos\phi + R\dot{\theta}^2\sin\phi + r(\ddot{\theta} + \ddot{\phi})]\vec{j}\end{aligned}$$

式中 \vec{i} , \vec{j} 为两个沿 r 和与 r 垂直方向的单位矢量。摆只有在 O' 点有约束反力, 因此摆的惯性力对 O' 点之矩等于零, 沿 r 方向, 并通过 O' 点。故得:

$$mr[R\ddot{\theta}\cos\phi + R\dot{\theta}^2\sin\phi + r(\ddot{\theta} + \ddot{\phi})] = 0$$

摆只作微摆动, ϕ 为微小量, 上式可简化为

$$\ddot{\phi} + \frac{R}{r}\dot{\theta}^2\phi + \frac{R+r}{r}\ddot{\theta} = 0 \quad (4.42)$$

上式是包含 ϕ , θ 两个未知函数的非线性方程。可以将整个系统的惯性力和外力对 O 点取矩而得到另一个方程式。

$$\begin{aligned}J\ddot{\theta} + K_\theta\dot{\theta} + m[R\ddot{\theta}\sin\phi - R\dot{\theta}^2\cos\phi \\ - r(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2]R\sin\phi = M\end{aligned} \quad (4.43)$$

其中 J, K_θ 为圆盘的等效转动惯量和轴的等效刚度。即使将上式简化, 要对这组非线性方程求解是困难的。因而我们不用 (4.43) 式, 而假设 θ 的运动规律是

$$\theta = \Omega t + \theta_0 \sin \omega t$$

即认为 θ 是以等角速 Ω 旋转和附加以频率 ω 的扭振的结果。求得

$$\dot{\theta} = \Omega + \theta_0 \omega \cos \omega t \approx \Omega$$

$$\ddot{\theta} = -\theta_0 \omega^2 \sin \omega t$$

代入 (4.42) 式得

$$\ddot{\phi} + \frac{R}{r}\Omega^2\phi = \left(\frac{R+r}{r}\right)\omega^2\theta_0\sin\omega t \quad (4.44)$$

(4.44)式是 ϕ 的一个强迫振动微分方程式,可得离心摆的固有频率随转速 Ω 变化的关系。

$$p = \Omega \sqrt{\frac{R}{r}} \quad (4.45)$$

设(4.44)式的解为 $\phi = \phi_0 \sin \omega t$, 代入可解得振幅比

$$\frac{\theta_0}{\phi_0} = \frac{\Omega^2 \frac{R}{r} - \omega^2}{\left(\frac{R+r}{r}\right) \omega^2} \quad (4.46)$$

由(4.46)式可见,当激振频率 $\omega = \Omega \sqrt{\frac{R}{r}}$ 时, $\theta_0 = 0$, 圆盘不发生扭振。因此离心摆达到了减振的目的。通常激振频率 ω 为转速 Ω 的 n 倍, n 为谐波次数。因此为了消除 n 次激振扭矩,设计时选择 $n = \sqrt{\frac{R}{r}}$,使离心摆式减振器在整个机器的转速范围内对 n 次激振都能起减振作用。

图4-26所示是最简单的摆式减振器的原理,在结构上不易实现。工程实际中常根据以上原理设计成其他各种形式的摆式减振器。图4-27为其中一种挂摆式减振器。

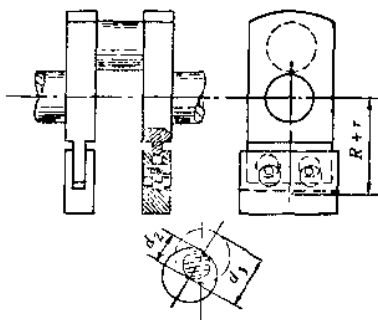


图 4-27

4.11 阻尼对强迫振动的影响

前面为了把问题简化,并突出两自由度系统振动的基本特性,在讨论过程中我们没有把阻尼考虑在系统之内。实际上系统总是有阻尼的。有阻尼的两自由度系统的振动微分方程一般表达式只要在4.8节(4.35)式两式的左边都加上一项阻尼力就可以了。但

是它的解却要复杂得多。为了简单而又易于说明问题,下面我们
以图 4-28 所示的两自由度系统为例说明阻尼对强迫振动的影响。
这个系统是在 4.9 节的动力减振器的两个质
量之间加上一个阻尼器而成,称为**阻尼减振器**。
粘性阻尼系数仍以 r 表示。阻尼力与两
个质量的相对速度成正比,为 $r(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$ 。

于是系统的振动微分方程为

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + r(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (K_1 + K_2)x_1 \\ - K_2 x_2 = F_1 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - r(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - K_2 x_1 + K_2 x_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

仍只考虑稳态振动。用复数矢量表示
法,以 $F_1 e^{i\omega t}$ 表示(4.47)第一式右边的激
振力,并设

$$x_1 = B_1 e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$x_2 = B_2 e^{i(\omega t - \psi)}$$

代入(4.47)式有

$$\left. \begin{aligned} (K_1 + K_2 - m_1 \omega^2 + ir\omega) B_1 e^{i(\omega t - \phi)} \\ - (K_2 + ir\omega) B_2 e^{i(\omega t - \psi)} = F_1 e^{i\omega t} \\ - (K_2 + ir\omega) B_1 + (K_2 - m_2 \omega^2 + ir\omega) B_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

从以上两式可解出 B_1 与 B_2 。下面只以主质量 m_1 的振幅 B_1
为例。由(4.48)第二式

$$B_2 = \frac{K_2 + ir\omega}{K_2 - m_2 \omega^2 + ir\omega} B_1$$

代入(4.48)第一式即得

$$B_1 e^{-i\phi} = F_1 \frac{K_2 - m_2 \omega^2 + ir\omega}{[(K_1 - m_1 \omega^2)(K_2 - m_2 \omega^2) - K_1 m \omega^2] + ir\omega[K_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2]}$$

根据复数运算规则可得

$$B_1 = F_1 \sqrt{\frac{(K_2 - m_2 \omega^2)^2 + r^2 \omega^2}{[(K_1 - m_1 \omega^2)(K_2 - m_2 \omega^2) - K_1 m \omega^2]^2 + r^2 \omega^2 [K_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2]^2}} \quad (4.49)$$

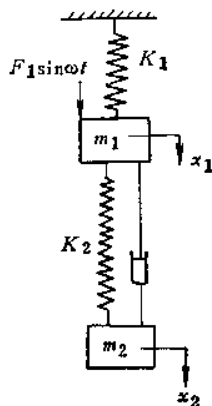


图 4-28

引入符号

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{m_2}{m_1}, & p_{01}^2 &= \frac{K_1}{m_1}, & p_{02}^2 &= -\frac{K_2}{m_2} \\ \alpha &= \frac{p_{02}}{p_{01}}, & \lambda &= \frac{\omega}{p_{01}}, & \delta_{st} &= \frac{F_1}{K_1} \\ r_c &= 2m_2 p_{02}, & \zeta &= \frac{r}{r_c}\end{aligned}$$

(4.49)式可改写成无量纲形式:

$$\frac{B_1}{\delta_{st}} = \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \alpha^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}{[\mu\lambda^2\alpha^2 - (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - \alpha^2)]^2 + (2\zeta\lambda)^2(\lambda^2 - 1 + \mu\lambda^2)^2}} \quad (4.50)$$

可以看到 B_1 是四个参数 α 、 λ 、 μ 和 ζ 的函数。 μ 和 α 是已知的， $\frac{B_1}{\delta_{st}}$ 即为 ζ 和 λ 的函数，这和单自由度系统强迫振动情况一样。

图 4-29 为对应于 $\mu = \frac{1}{20}$ ， $\alpha = 1$ 的振幅频率响应曲线。图中曲线 (1) 为 $\zeta = 0$ ，即相当于无阻尼强迫振动的情况，所以和图 4-20 的振幅频率响应曲线是形式相同的。当 $\lambda = 0.895$ 和 $\lambda = 1.12$ 时为两个共振频率。曲线 (2) 为 $\zeta = \infty$ ，即相当于

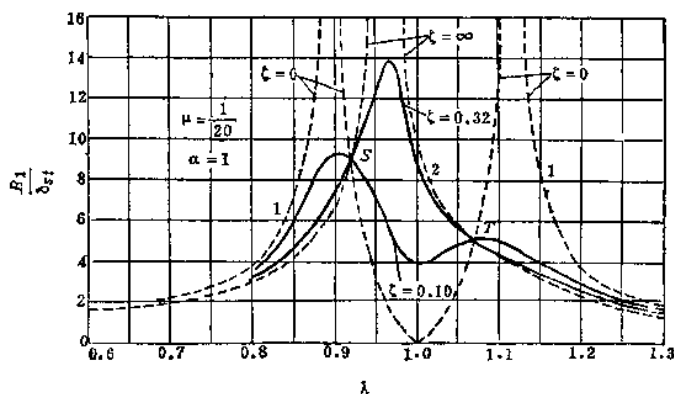


图 4-29

m_1 和 m_2 刚性连接, 系统成为以质量 $m_1 + m_2$ 和刚度 K_1 构成的单自由度系统的情况, 所以和第三章图 3-2 的幅频响应曲线是形式相同的。当 $\lambda = 0.976$ 时为共振频率。

对于任何其他阻尼所得的响应曲线应在曲线 (1) (2) 之间。图中画出了 $\zeta = 0.10$ 和 $\zeta = 0.32$ 两条曲线。表明阻尼使共振附近的振幅有显著的减小, 而在激振频率 $\omega \ll p_1$ 或 $\omega \gg p_2$ 的范围内, 阻尼的影响是很小的。

有趣的是 (4.50) 式所表达的所有响应曲线, 无论 ζ 的值如何, 都通过 S 与 T 两点。这表明对于 S 和 T 两点的频率, 主质量的振幅 B_1 与阻尼值无关。这对于设计阻尼减振器时选择最佳阻尼比 ζ 和最佳频率比 α 是必要的。

第五章 分析力学基础

5.1 引言

研究机械系统动力学问题时,当简化的力学模型被确定之后,正确地建立系统的动力学方程就成为首要任务。在前几章里将实际系统简化成单自由度或两自由度系统之后,我们主要应用牛顿运动定律及其推论来建立振动微分方程。这种我们所熟知的动力学中所提供的方法,仍将是今后建立多自由度系统和弹性体振动的基本方法。但这一方法是按照各质点或刚体的运动来建立方程的,为此常常要引入那些未知的约束反力。对于某些复杂的系统,采用这样的方法来建立力或力矩同速度、加速度等运动量之间的矢量关系不仅显得复杂,而且引入了那些我们不必知道的未知约束反力。因此本章将专门介绍分析力学的方法。它是从能量观点上统一建立起来的系统的动能 T 、势能 U 和功 W 之间的标量关系。它是研究静动力学问题的一个普遍的、简单而又统一的方法。尽管在建立有关概念和推证方面要花费一点力气,但在应用上会带来不少方便。

本章里我们首先引用了**广义坐标**的概念,把它们作为描述系统运动状态的独立参数,从而可以正确地建立起系统自由度的概念。这样,自然地把系统的动能 T 、势能 U 和功 W 等标量形式的物理量表达为广义坐标及其导数的函数。另一方面我们先在静力平衡的基础上建立**虚位移原理**,并应用**达伦贝尔 (D'Alembert) 原理**将它推广到动力学问题,从而建立了**动力学普遍方程式**。由此出发推证了有广泛应用的**拉格朗日 (Lagrange) 方程**和**哈密尔顿 (Hamilton) 原理**。这为建立多自由度系统和弹性体振动微分方程提供了一种较为简便的统一方法。关于分析力学的内容在不少著作中已有更详细的论述,本章只作扼要的介绍。

5.2 自由度和广义坐标

前面已讨论过, 如果一个系统只需用一个或两个独立坐标就能完全确定系统的运动, 那么我们就称它为单自由度或两自由度系统。下面把有关独立坐标和自由度的概念作一般性讨论。

若系统用某一组独立的坐标 (参数) 就能完全确定系统的运动, 则这组坐标称为**广义坐标**。完全确定系统运动所需的独立坐标数目称为**自由度**。通常广义坐标的数目和自由度相等。

图 5-1 所示的悬挂质点, 如果能忽略悬丝的质量而不能忽略其弹性变形, 那么质点作为空间的弹簧摆可以自由运动。用直角坐标 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 或球坐标 $r(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$ 都可独立地描述它在空间的一般运动。由于弹性连接只起动力作用而对它的几何位置没有加以限制, 这两组坐标中三个坐标都是互相独立的, 任何一个不能由其他两个来决定。这两组坐标分别都是广义坐标, 因此系统具有三个自由度。

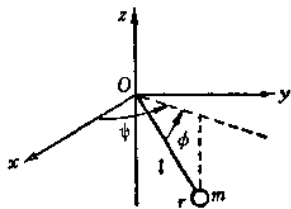


图 5-1

如果悬丝长度 l 的变形可以忽略, 图 5-1 的悬挂质点成为一个球摆。这和上述弹簧摆的情况不同, 它的运动被限制在球面上。球摆的运动只需用两个独立的坐标 ψ 和 ϕ 就能完全确定。 ψ 和 ϕ 是球摆的一组广义坐标, 它具有两个自由度。

这时坐标 r 必须满足条件

$$r = l \quad (a)$$

若用直角坐标 x, y, z 来描述它的运动, 坐标数目已超过系统的自由度, 这三个坐标就不再是互相独立的了, 它们之间要满足条件

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \quad (a)'$$

如果再限制球摆只能在铅垂平面内运动, 即满足条件

$$\psi = \text{常数} \quad (b)$$

系统就成为单自由度的单摆运动。

图 5-2 表示由两质点铰接而成的双摆， O 为悬挂点，刚性杆的长度为 l_1 与 l_2 。双摆在铅垂平面 xy 内左右摆动，若要完全确定系统的运动可取广义座标 θ_1 、 θ_2 。如用直角座标时，则在平面内表示一质点运动需要两个座标，因此要取 x_A, y_A, x_B, y_B 四个座标。但这些座标不再是独立的座标，它们必须满足下列几何条件

$$x_A^2 + y_A^2 = l_1^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l_2^2 \quad (c)$$

所以双摆具有两个自由度

以上例子中，对系统的运动在几何位置上的限制称为**约束**，

这种限制可以通过方程式 (a) (b) (c) 等来表示，这类方程式称为**约束方程式**。

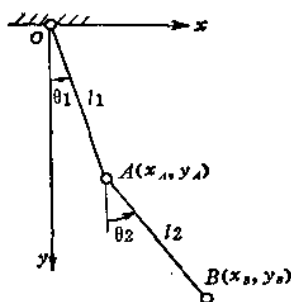


图 5-2

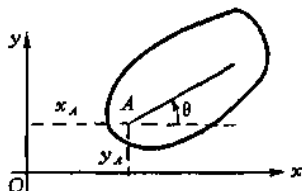


图 5-3

约束使系统的自由度减少。如由 N 个质点组成的质点系，有 S 个约束方程式，则它的自由度为 $3N - S$ 。这表示如果每个质点用三个座标来表示它，其中有 S 个是不独立的，所以可选择 $3N - S$ 个广义座标来描述系统的运动。若系统被限制在某一平面内运动，则自由度为 $2N - S$ 。此时显然大家默认各点的 $z_i = 0$ ，这些约束方程式无疑是有 N 个。

在实际情况下，系统受到的约束是多种多样的。例如要确定自由刚体的空间运动需要用六个独立的参数，即刚体上任意一点位置的三个独立座标，和刚体绕该点转动的三个独立座标，因此自由刚体在空间的一般运动具有六个自由度。假若刚体作平面平行运动，如图 5-3 所示，那么用一点的座标 x_A, y_A 和转角 θ 三个广义座标来描述它的运动就够了。因此平面平行运动的刚体具

有三个自由度。如刚体作绕固定轴转动，那么只需用一个角坐标就能决定它的运动，因此就成为单自由度系统。

以上我们讨论了最常见的一些约束情况，在约束方程式中只包含一些坐标及常数项，这种约束称为**定常约束**。此外还有与时间有关的约束，即约束方程式中显含时间 t 的约束，通常称为**不定常约束**。例如图 5-1 中的球摆，如果摆长 l 是时间 t 的已知函数 $l = l_0 + ct$ (c 为一常数)，即摆长的变化与时间成正比，则约束方程式为

$$x^2 + y^2 + z^2 = (l_0 + ct)^2 \quad (d)$$

就属于不定常约束。

上面讨论的约束仅限于在几何上对系统起限制作用的约束。有时系统受到的约束，不仅与坐标有关，同时还包含有速度，即在运动学上受到限制。例如图 5-4 所示半径为 a 的圆盘在它本身所在的 xy 平面内沿直线轨道 ox 运动时，如果圆盘和轨道之间可以任意滑动，那么仅有的约束方程式将为

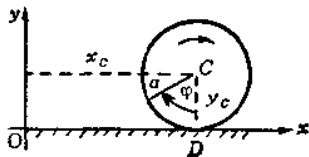


图 5-4

$$y_c = a$$

可取 x_c 和 φ 作为广义坐标，系统具有两个自由度。如果接触点 D 处有足够大的摩擦力，使圆盘只能沿直线 ox 作无滑动的滚动，那么圆盘在 D 点的速度等于零。因此就增加了一个约束方程式

$$\dot{x}_c - a\dot{\varphi} = 0$$

上式中含有坐标对时间的一次导数，在这一特殊情况下，可以求出上式的积分

$$x_c - a\varphi + c = 0$$

此式和以前的约束方程式一样，仍只含坐标本身和常数 C 。这类只包含坐标本身和常数项或显含时间 t 的约束方程式，通常称为**完整约束**。以后我们即限于讨论这种完整约束。但并非包含有速度项的约束方程都能积分，包含有不能积分的速度项的约束称为

不完整约束。具有不完整约束的系统，系统的自由度不等于广义坐标数，而是小于广义坐标数。

5.3 虚位移原理

虚位移原理是把静力平衡条件通过功的原理来表达。大家熟知利用杠杆可以省力但不能省功，下面先讨论最简单的杠杆平衡问题，以便对虚位移原理有个初步了解。

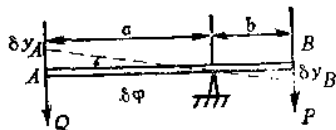


图 5-5

写出图 5-5 所示杠杆绕光滑支点转动的平衡条件为

$$Pb - Qa = 0 \quad (a)$$

这一关系也可以通过功的形式来表示。假如当杠杆绕支点转动一微小角度 $\delta\varphi$ 时，A、B 两点的微小位移分别为

$$\begin{aligned} \delta y_A &= a\delta\varphi \\ \delta y_B &= b\delta\varphi \end{aligned} \quad (b)$$

P、Q 在各自位移上所作元功之和记作 δW ，

$$\delta W = P\delta y_B - Q\delta y_A = (Pb - Qa)\delta\varphi \quad (c)$$

因为杠杆平衡时，它满足条件 (a)，因此也必然满足条件

$$\delta W = (Pb - Qa)\delta\varphi = 0 \quad (d)$$

即元功之和等于零的条件。

由此可见，力的平衡条件 (a) 等价于元功之和等于零的条件 (d)。

虚位移原理涉及以下两方面的基本概念：

(1) **虚位移**是指约束所许可的坐标的微小改变量。它只是指约束所许可而并不一定是实际运动的真实位移，因此它和时间 t 的变化无关，为了强调虚位移是假想的坐标的瞬时改变量，它只要求符合约束，用符号 δ 表示，以区别于用增量 d 表示的在 dt 时间间隔内真正发生的真实位移。为了研究问题方便起见，通常假设虚位移是无限小的，力在虚位移上的元功称为**虚功**。虚位移

原理有时也称**虚功原理**。

(2) 为了便于虚功的计算, 我们把作用于系统的力分为两大类: 把约束作用于系统的力称为**约束反力**。例如限制系统运动的约束面的反作用力, 刚体内部保持不变形的相互作用力和铰接的约束力都属于约束反力。除此而外的另一类力称为**主动力**。它在系统运动或平衡中处于主导地位。例如重力、气动力等是外作用力, 电磁力、弹性力等可能是系统的内力, 但它们都是主动力。在分析力学中把力分成主动力和约束反力, 以区别于内力和外力的分类方法, 下面将会看到这种分类方法的优点。在约束反力中除摩擦力外都不做功。例如光滑面的约束, 光滑铰联接, 或者像刚体的内力那样由于没有相对变形, 这些约束反力都不做功。这种约束反力在虚位移上不做功的约束, 称为**理想约束**。

虚位移原理: 在理想约束下, 质点系平衡的必要而充分的条件是所有主动力在虚位移上元功之和等于零。

首先证明必要条件。质点系在若干力的作用下, 若处于平衡状态, 则作用在系统的任一质点 k 上的合力 $\vec{R}_k = 0$, 因此它在该点的虚位移 $\delta \vec{r}_k$ 上所作功也等于零, 即

$$\vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \quad (e)$$

用 \sum_k 号表示对系统的全部质点求和, 得虚功为

$$\delta W = \sum_k \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \quad (f)$$

把合力 \vec{R}_k 分为主动力 \vec{F}_k 和约束反力 \vec{f}_k , 显然两者构成平衡力系, 即

$$\vec{F}_k + \vec{f}_k = 0 \quad (g)$$

因此 (f) 式可以写成

$$\delta W = \sum_k \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_k \vec{f}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \quad (h)$$

我们讨论理想约束情况, 即约束反力不做功的情况, 故上式中第二部分约束反力的功应等于零, 因此可得

$$\delta W = \sum_k \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \quad (5.1)$$

式(5.1)称为**虚功方程式**。这样,我们证明了系统平衡的必要条件是:若系统处于平衡状态,则主动力在虚位移上元功之和等于零。

下面再用反证法来证明虚位移原理的充分条件。也就是要证明:若条件(5.1)成立,则系统处于平衡状态。

假如(5.1)成立而系统不平衡,那么原来是静止状态的系统,在主动力和约束反力的作用下将进入运动,在很短时间内产生的位移是沿着各点的合力方向的,我们把这些位移取作虚位移,因此各点的合力在这组虚位移上做正功(由静止进入运动,动能为正,故力作正功)。于是

$$\sum_k \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_k \vec{f}_k \cdot \delta \vec{r}_k > 0$$

因为约束为理想约束,故约束反力的虚功 $\sum_k \vec{f}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$, 所以由上式得到主动力在虚位移上元功之和

$$\sum_k \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k > 0$$

这与假设条件(5.1)相矛盾。因此我们就证明了原理的充分条件。

下面把虚功方程(5.1)通过广义座标和广义力来表达。若系统有 n 个自由度,则任意一点 k 的座标矢量 \vec{r}_k 可以用 n 个广义座标 q_1, q_2, \dots, q_n 和时间 t 来表示,即

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (5.2)$$

由于虚位移和时间 t 无关,它只是座标的微小改变量,因此各点的虚位移 $\delta \vec{r}_k$ 可表达为广义座标的虚位移 δq_i 的线性组合,即

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad (5.3)$$

将(5.3)代入虚功方程(5.1)得

$$\delta W = \sum_k \sum_{i=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

对换求和次序, 得

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \left(\sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (5.4)$$

其中
$$Q_i = \sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.5)$$

称为对应于广义坐标 q_i 的**广义力**, 它的量纲和 q_i 的量纲有关, 因为 $Q_i \delta q_i$ 的量纲总是功的量纲。例如选取广义坐标之一为角度时, 那么对应的广义力便是力矩。

现在可将虚功方程 (5.1) 表达为

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \approx 0 \quad (5.6)$$

由于 δq_i 为广义坐标 q_i 的独立的虚位移, 因此可任意选择, 当上式成立时可得

$$Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.7)$$

虚位移原理可表述为: 理想约束情况下, n 个自由度系统平衡的必要和充分条件是 n 个广义力 Q_i 等于零。

例5.1 图 5-6 所示一
地秤, 由杠杆 AB 与平台 BD
在 B 处铰接, E 为支点, 杆
 CD 两端均为铰接, $CD = BE$
 $= b$, $AE = a$ 。试由虚位移
原理求重物 P 与砝码 Q 之
间的关系。

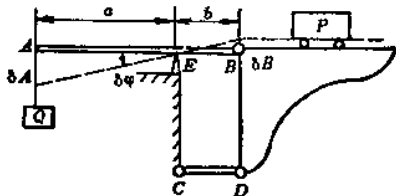


图 5-6

解 系统具有一个自由度, 给杠杆绕 E 点微小转角 $\delta \varphi$, 则系统各点虚位移都可求出, 由于理想约束情况下约束反力不做功, 因之只需计算主动力 P 、 Q 作用处虚位移。 A 点虚位移 $\delta_A = a \delta \varphi$,

平台为平移, 故各点虚位移相等, 等于 B 点的虚位移 $\delta s = b\delta\varphi$, 代入虚功方程式 (5.6)

$$\begin{aligned}\delta W &= Q \cdot \delta_A - P \cdot \delta_B \\ &= (Qa - Pb)\delta\varphi = Q_q \delta\varphi = 0\end{aligned}$$

因虚位移 $\delta\varphi$ 是任意的, 因此它的系数, 即广义力 $Q_q = (Qa - Pb) = 0$, 这样就得了平衡时重物 P 和砝码 Q 之间关系

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{b}$$

例5.2 图 5-7 所示长度为 $2l$ 的刚性均质杆, 置于光滑半圆槽内, 槽半径为 R , 试求平衡位置 θ 角和 l 、 R 的关系。

解 杆的平衡位置完全由 θ 角决定, 取 θ 为广义坐标, 若给虚位移 $\delta\theta$, 则杆上各点的虚位移即可求出, A 、 O 处约束反力垂直虚位移方向, 故都不做功。现只需求重心 G 的虚位移, 为此先写出用 θ 表示的 G 点的坐标矢量 \vec{r}_G , 取 \vec{i} 、 \vec{j} 为 x 、 y 方向的单位矢量, 得

$$\begin{aligned}\vec{r}_G &= x_G \vec{i} + y_G \vec{j} \\ &= (2R \cos\theta - l) \sin\theta \vec{i} + (2R \cos\theta - l) \cos\theta \vec{j}\end{aligned}$$

求出

$$\delta \vec{r}_G = \frac{\partial \vec{r}_G}{\partial \theta} \delta \theta$$

$$\frac{\partial \vec{r}_G}{\partial \theta} = (2R \cos 2\theta - l \cos\theta) \vec{i} + (l \sin\theta - 2R \sin 2\theta) \vec{j}$$

因为重力 W 是垂直方向的, 因此它在虚位移 $\delta \vec{r}_G$ 上的虚功为

$$\begin{aligned}\delta W &= W \vec{i} \cdot \delta \vec{r}_G = W \vec{i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_G}{\partial \theta} \delta \theta \\ &= (2R \cos 2\theta - l \cos\theta) W \delta \theta = Q_\theta \delta \theta\end{aligned}$$

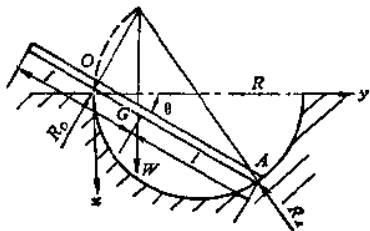


图 5-7

由 (5.6) 或 (5.7) 式得

$$Q_0 = (2R\cos 2\theta - l\cos\theta)W = 0$$

故得平衡条件

$$2R\cos 2\theta - l\cos\theta = 0$$

即

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} = \frac{l}{2R}$$

这就是平衡时角 θ 应满足的条件。

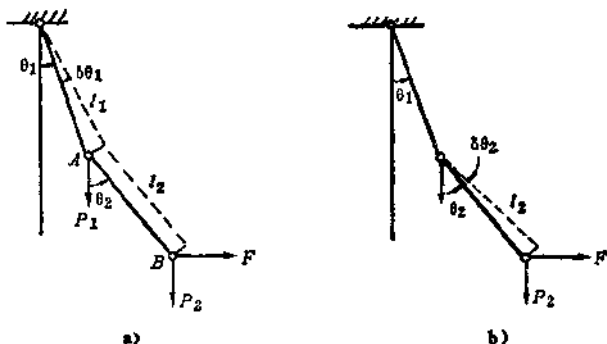


图 5-8

例5.3 图 5-8 所示双摆在 A , B 处各悬挂重为 P_1 , P_2 的重物, 在 B 处作用一水平力 F , 试求平衡时 θ_1 , θ_2 和 P_1 , P_2 和 F 的关系。

解 系统具有两个自由度, 取 θ_1 和 θ_2 为广义坐标, 当给 θ_1 一微小改变量, 即虚位移 $\delta\theta_1$, 而 θ_2 保持不变, 可求得各力在虚位移上的功为

$$Q_1\delta\theta_1 = [F\cos\theta_1 - (P_1 + P_2)\sin\theta_1]l_1\delta\theta_1$$

$$\therefore Q_1 = [F\cos\theta_1 - (P_1 + P_2)\sin\theta_1]l_1$$

同样给 θ_2 一微小改变量 $\delta\theta_2$, 而 θ_1 保持不变, 可求得虚功为:

$$Q_2\delta\theta_2 = (F\cos\theta_2 - P_2\sin\theta_2)l_2\delta\theta_2$$

$$\therefore Q_2 = (F\cos\theta_2 - P_2\sin\theta_2)l_2$$

平衡时广义力 $Q_1 = Q_2 = 0$, 故得平衡条件

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{F}{P_1 + P_2} \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{F}{P_2}$$

5.4 动能和势能

分析力学是从能量观点上建立起来的, 它利用广义坐标来描述系统的运动。系统的动能 T 、势能 U 、和功 W 之间存在的本质上关系将是下节中要重点讨论的, 本节里我们首先建立动能和势能的概念以及它们和广义坐标及其导数之间的关系。

上节中已经指出对于 n 个自由度系统可以用 n 个广义坐标和时间 t 来描述它的运动, 即系统中任意一点 k 的位置用坐标矢量 \vec{r}_k 表达为

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (5.8a)$$

显然将上式对时间 t 求一阶导数, 可得该点的速度

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \dot{\vec{r}}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \quad (5.9)$$

其中广义坐标对时间的导数 \dot{q}_i 称为广义速度, (5.9) 式表明速度 $\dot{\vec{r}}_k$ 是广义速度的线性函数。

质量为 m_k 的质点 k , 它的动能

$$T_k = \frac{1}{2} m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k$$

系统的总动能应为各质点动能的和, 即

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k \quad (5.10)$$

其中 Σ 表示对所有质点求和。若将速度公式 (5.9) 代入 (5.10) 式, 即可求得动能 T 将是广义速度的零次、一次和二次函数。

下面我们讨论约束和时间 t 无关的定常约束情况, 各点的坐标 \vec{r}_k 只是广义坐标 q_i 的函数而不显含 t , (5.8a) 式成为

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (5.8b)$$

相应的 (5.9) 式中最后一项 $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = 0$, 因此可计算速度 \dot{r}_k 的乘积

$$\dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

将上式代入动能表达式 (5.10) 得

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

改变求和的次序, 上式成为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_k m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (5.11)$$

上式中, 圆括号内是与质量有关的系数, 称为广义质量系数, 一般情况下是广义座标 q_i 的函数。引入符号

$$m_{ij} = \sum_k m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \quad (5.12 a)$$

显然 $m_{ij} = m_{ji}$, 将 (5.11) 式写成

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (5.13)$$

由于系数 m_{ij} 仅是广义座标的函数, 因此由上式可见, 在定常约束的情况下, 动能 T 是广义速度的二次齐次函数。

在微振动理论中, 若广义座标一律按平衡位置取作原点, 则振动过程中 q_i 是偏离平衡位置的小量, 将系数 m_{ij} 在平衡位置附近按台劳级数展开得

$$m_{ij} = (m_{ij})_0 + \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_s} \right)_0 q_s + \cdots \quad (5.12 b)$$

由于广义速度也是小量, 在动能表达式中只需保留二阶小量各项, 因此在展开式 (5.12 b) 中只需第一项 $(m_{ij})_0$, 这样系数 m_{ij} 本来是座标的函数, 现在可以在平衡位置 ($q_i = 0$) 取值而成为常数,

即

$$m_{ij} \approx (m_{ij})_0 \quad (5.14)$$

引入广义质量矩阵

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$[M]$ 简称质量矩阵，因为 $m_{ij} = m_{ji}$ ，所以它是一个对称矩阵。引入广义速度的列阵 $\{\dot{q}\}$ 及它的转置矩阵 $\{\dot{q}\}^T$

$$\{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} \quad \{\dot{q}\}^T = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n] \quad (5.16)$$

故动能 T 可表达为

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} \quad (5.17)$$

如前所述，在定常约束情况下，动能 T 是广义速度 \dot{q}_i 的二次齐次函数（或称二次型）。此外，系统的动能 T 除了广义速度 \dot{q}_i 全等于零外，它总是大于零，因此动能 T 具有恒正的性质。在线性代数里称 T 这样的函数为**正定二次型**，相应地称它的系数矩阵 $[M]$ 是正定的。对于正定的矩阵，它的全部主子行列式的值都大于零。

在 2.4 节中已涉及势能的概念及计算方法，下面将讨论一般情况。

若系统在空间受到力的作用仅由系统所在的位置唯一地决定，这种力称为**势力**，这种力场称为**势力场**。

在选定的参考（基准）位置经任意路径到达另一位置时，势力所作功的负值即为该位置所具有的势能。势能是位置的单值函数，故可以用 n 个独立的广义坐标 q_i 表达如下：

$$U = -W = U(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (5.18)$$

由于势能是坐标的单值函数，它由系统的相对位置唯一地决定，

因此在闭合路径上势力所作功等于零。系统在势力场内运动经过一个闭合回路，能量既不增加也不消耗，因此能量具有守恒的性质，通常称这样的系统为**保守系统**。

当 q_i 有微小改变时，势能具有全微分的性质，即

$$dU = -dW = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i \quad (5.19)$$

这里顺便要指出的是以前讨论虚功 δW 时，它丝毫没有函数 W 的增量的意思，仅表示为在虚位移上的元功。只有在势力场中才存在 $U (= -W)$ 这样的函数，元功才可能表达为函数 U 的全微分，为此我们用符号 d 表示，以便和 δ 相区别。若 (5.19) 中 dq_i 代表系统的虚位移，则该式也就代表势力的虚功，从另一方面，虚功的表达式 (5.6)

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

比较 (5.19) 和 (5.6) 式，可得以下关系

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (5.20)$$

上式表示对应于势力的广义力等于势能对广义座标的偏导数的负值。

用广义力表示的平衡条件为

$$Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

若系统在势力场中仅有势力作为主动力，则由 (5.20) 式得系统的平衡条件为

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.21)$$

因此系统在平衡位置时，势能 U 取极值。

下面以重力场和弹簧力场为例说明以上概念。

(1) 重力场的势能 当质量为 m 的质点在重力场中运动时，在任一位置都受到大小和方向都确定的重力 P 的作用，可见重

力场是势力场的一种。质点在重力场中运动,重力将会做功。图5-9表示质点从任一点 $A(x, y, z)$ 经任一路径 AO 到达坐标原点 O 时,重力所作功为

$$W_{AO} = \int_z^0 -Pdz = Pz \quad (a)$$

相反由 O 经任一路径 OA 到达 A 时所做功为

$$W_{OA} = \int_0^z -Pdz = -Pz \quad (b)$$

由 (a)(b) 两式可见重力场内沿任意闭路重力所作功之和等于零。

我们把质点由基准点 O 到达 A 点时,重力所作功的负值定义为 A 点的势能,即

$$U = -W_{OA} = Pz \quad (5.22)$$

这里势能 U 是坐标 z 的函数,因此广义力

$$Q_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -P$$

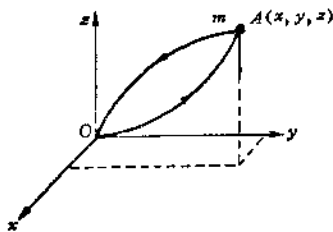


图 5-9

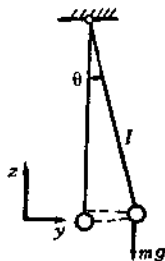


图 5-10

若讨论图 5-10 所示的单摆,以 θ 为广义坐标,求得势能

$$U = mgz = mgl(1 - \cos\theta)$$

可得广义力

$$Q_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -mgl \sin\theta$$

上式表明广义力 Q_θ 代表重力对 O 点的力矩。

(2) 弹簧力场的势能 弹簧是最简单的弹性力的势力场。只要弹簧的变形(伸长或缩短)一定, 弹簧内受力就一定, 弹簧具有的弹性势能就一定。图 5-11 所示弹簧在原长 l 处作用一缓慢地变化的外力 $F = Kx$, 到达 A 时它的伸长为 $x = OA$ 。假设这一过程中弹簧始终保持平衡状态, 那么外力 F 所作功

$$W = \int_0^x Kx dx = \frac{1}{2} Kx^2$$

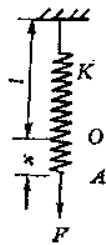


图 5-11

由于系统始终保持平衡状态, 因此外力所作功 W 和弹簧内力所作功 W_{OA} 之和应等于零, 即

$$W_{OA} + W = 0$$

因此得弹簧内力的功等于外力功取负值, 故

$$W_{OA} = -W = -\frac{1}{2} Kx^2 \quad (5.23)$$

弹簧内力的功也只决定于初始和终止的位置, 若以弹簧原长处取作基准, 当弹簧由原长伸长或缩短 x 时, 弹簧内力所作功取负值即为弹性势能

$$U = -W_{OA} = \frac{1}{2} Kx^2 \quad (5.24)$$

可见弹簧达到一定的变形状态, 弹簧内部储藏的弹性势能也就一定了。弹簧力和弹性势能的关系:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -Kx \quad (5.25)$$

这也就是弹簧力场的广义力。

以上已经讨论了系统势能 U 是广义坐标 q_i 的函数, 通常在微振动理论中, 取平衡位置为 q_i 的原点 ($q_i = 0$), 故 q_i 是小量, 因此为了计算上的方便, 可将势能在平衡位置附近按台劳级数展开

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \dots \quad (5.26)$$

在展开式 (5.26) 中, 第一项 U_0 表示势能在平衡位置取值, 它是一个任意常数, 可取作零。第二部分是 q_i 的一阶项, 由于偏导数 $\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0$ 表示广义力 Q_i 在平衡位置取值, 因此它恒等于零。因此 (5.26) 中只有 q_i 的二阶和二阶以上的高阶项。在研究平衡位置附近的微振动理论中, 只保留能量中的二阶项, 高于二阶的项可全部略去, 因此 (5.26) 式就成为

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j \quad (5.27)$$

其中
$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \quad (5.28)$$

称为刚度系数, 是势能 U 对广义坐标 q_i 的二阶偏导数在平衡位置取值, 因此它们都是常数, 并且和系数 m_{ij} 一样具有对称性, 即 $k_{ij} = k_{ji}$ 。

由 (5.27) 式可见, 在线性系统中势能 U 是广义坐标的二次齐次函数。并可用矩阵形式表达为

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (5.29)$$

其中 $\{q\}$ 和 $\{q\}^T$ 表示广义坐标 q_i 的列阵及其转置矩阵, 和 (5.16) 有类似形式。 $[K]$ 为广义刚度矩阵, 它的形式为

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

系统由于弹性变形而储藏的弹性势能 U 总是大于零的, 因此 U 具有恒正的性质。 U 是正定二次型, 它的系数矩阵 $[K]$ 也是正定的。

但是当系统中 q_i 包含有刚体位移时, 势能 U 在除了 q_i 全等于零的情况之外, 它还可能等于零, 即存在某些不等于零的 q_i 而使 U 等于零。这种情况在线性代数里称为半正定二次型, 因此刚度

矩阵 $[K]$ 可以是半正定的。对于半正定矩阵，它的全部主子行列式的值除了大于零的外，有的等于零。在第四章4.3节中所讨论的双盘扭转振动的势能 $U = \frac{1}{2}K_\theta(\theta_2 - \theta_1)^2$ ，除了 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 而使 $U = 0$ 之外，当 $\theta_1 = \theta_2 \neq 0$ 时 U 也等于零，因此它是半正定的。其原因是当 $\theta_1 = \theta_2$ 时没有弹性变形，它代表系统产生刚体转动。相应求得的固有频率也有一个等于零。写出刚度矩阵

$$[K] = \begin{bmatrix} K_\theta & -K_\theta \\ -K_\theta & K_\theta \end{bmatrix}$$

不难看出它的一阶主子行列式的值 $K_\theta > 0$ ，而二阶主子行列式的值

$$\begin{vmatrix} K_\theta & -K_\theta \\ -K_\theta & K_\theta \end{vmatrix} = 0$$

在振动问题中，主要讨论 U 是正定的或半正定的系统。我们曾在(5.21)式中指出过：平衡位置的势能取极值。对于 U 是正定的系统，由于偏离平衡位置的 U 恒大于零，因此 U 在平衡位置具有极小值。通常称势能具有极小值的平衡位置为稳定平衡位置。对于 U 是半正定的系统，势能在某些区域内具有相同的值，可取作零，而在这些区域范围附近的势能就恒大于零。因此系统具有一系列的平衡位置，通常称为中性平衡，在弹性系统里半正定系统中必然包含有刚体运动的自由度。尽管如此，在扣除刚体自由度后，仍然按振动问题来讨论，详细讨论见6.5节。对于势能在平衡位置是极大值的情况，称为势能是负定的，它对应于不稳定平衡位置，例如单摆只可能围绕最低的平衡位置附近振动，而不可能在最高的平衡位置附近振动，深入讨论这些问题属于运动稳定性问题，本节仅对这些概念作一个初步的介绍。

例5.4 试求图5-12所示质量为 m_1 和 m_2 组成的双摆的势能和动能，并求在微振动时的刚度矩阵和质量矩阵。

解 取 θ_1 、 θ_2 为广义坐标，以平衡位置 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 作为势能的基准点，在任意位置 θ_1 、 θ_2 ，根据 A 、 B 两点的垂直位置，即

可由 (5.22) 式计算势能

$$U = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2)]$$

可见 U 是广义坐标 θ_1 、 θ_2 的函数。由图 5-12 可得 A 、 B 两点速度大小为

$$v_A = l_1 \dot{\theta}_1$$

$$v_B = \sqrt{(l_1 \dot{\theta}_1)^2 + (l_2 \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

故得动能

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [(l_1 \dot{\theta}_1)^2 \\ &\quad + (l_2 \dot{\theta}_2)^2 \\ &\quad + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)] \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

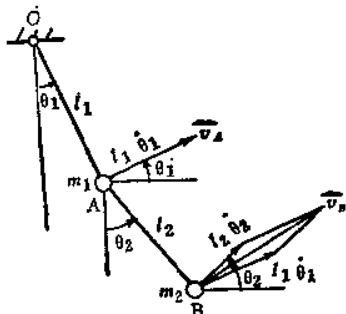


图 5-12

通常系数 m_{ij} 不是常数，上式中 $m_{12} = m_{21} = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$ 是广义坐标的函数。

根据 (5.14) 式， m_{ij} 按平衡位置取值，即 $m_{ij} \approx (m_{ij})_{\theta_1=\theta_2=0}$ 得

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

在微振动情况下， θ_1 、 θ_2 是微量，可将势能 U 在平衡位置附近展开，保留到 θ 的二阶项 $\left(\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \right)$ ，得

$$U = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2^2$$

因此，由动能及势能的系数，即可写出质量矩阵 $[M]$ 及刚度矩阵 $[K]$ 如下：

$$[M] = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_2 l_1 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{bmatrix}$$

在下节例 5.6 可以看到, 当动能势能写出以后, 或者质量矩阵和刚度矩阵建立之后, 系统振动微分方程就可以很快地建立起来, 系统的质量矩阵和刚度矩阵表征系统振动的最基本性质。

5.5 拉格朗日方程

虚位移原理是在静力平衡的基础上建立起来的。达伦培尔推证了质量为 m_k 的质点, 在合力 \vec{R}_k 的作用下和惯性力 $-m_k \ddot{\vec{r}}_k$ 构成平衡的达伦培尔原理。对于质点 k 的动力学方程可以用平衡方程式表达如下

$$\vec{R}_k - m_k \ddot{\vec{r}}_k = 0 \quad (\text{a})$$

其中 \vec{R}_k 为主动力 \vec{F}_k 和约束反力 \vec{f}_k 之和。应用达伦培尔原理可以把虚位移原理推广到动力学问题。将 (a) 式左端看成新的合力, 计算全部质点的虚功得

$$\sum_k (\vec{F}_k + \vec{f}_k - m_k \ddot{\vec{r}}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \quad (\text{b})$$

在理想约束下, 约束反力虚功之和 $\sum_k \vec{f}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$, 因此得虚功方程

$$\delta W = \sum_k (\vec{F}_k - m_k \ddot{\vec{r}}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \quad (5.31)$$

方程 (5.31) 称为动力学普遍方程, 它与 (5.1) 相比较, 只增加了惯性力的虚功 $\sum_k (-m_k \ddot{\vec{r}}_k) \cdot \delta \vec{r}_k$ 。这样 (5.31) 就可以应用到动力学问题。动力学普遍方程表明: 作用在理想约束的系统上所有的主动力和惯性力在任意瞬时在虚位移上的虚功之和等于零。

方程 (5.31) 是以下推证拉格朗日方程和哈密顿原理的基础。

例 5.5 图 5-13 所示离心调速器在一定的角速度 ω 转动时, 飞球将张开一定角度 θ 。若每一飞球重 W_1 , 重锤 B 重 W_2 , 联杆长 l , 试求张角 θ 与角速度 ω 的关系。

解 系统受到主动力只有重力 W_1 、 W_2 , 由于小球作等速圆周运动, 故离心惯性力为 $F_c = \frac{W_1}{g} l \omega^2 \sin \theta$ 。选 θ 为广义坐标,

A 、 B 点的座标为

$$x_A = l \sin \theta, \quad x_B = 0$$

$$y_A = l \cos \theta, \quad y_B = 2y_A$$

求得

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} = l \sin \theta \vec{i} + l \cos \theta \vec{j}$$

当 θ 有某一虚位移 $\delta \theta$ 时, A 、 B 两点的虚位移

$$\delta \vec{r}_A = \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \theta} \delta \theta = l (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \delta \theta$$

$$\delta y_B = -2l \sin \theta \delta \theta$$

求得飞球重力和惯性力的虚功为

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{W_1}{g} l \omega^2 \sin \theta \vec{i} + W_1 \vec{j} \right) \cdot \delta \vec{r}_A \\ &= 2l \left(\frac{W_1}{g} l \omega^2 \sin \theta \cos \theta - W_1 \sin \theta \right) \delta \theta \end{aligned}$$

重锤重力的虚功为

$$-W_2 \cdot 2l \sin \theta \delta \theta$$

代入动力学普遍方程 (5.31) 可得

$$\delta W = 2l \left[\sin \theta \left(\frac{W_1}{g} l \omega^2 \cos \theta - W_1 - W_2 \right) \right] \delta \theta = 0$$

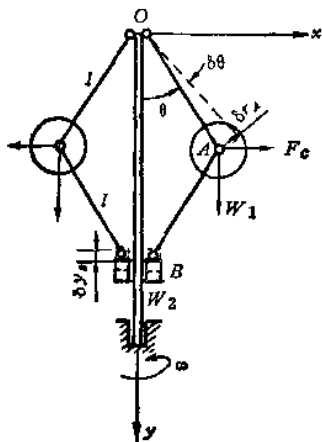


图 5-13

因 $2l\delta\theta \neq 0$, 故得

$$\sin \theta \left(\frac{W_1}{g} l \omega^2 \cos \theta - W_1 - W_2 \right) = 0$$

这个问题有两个解: 1. $\theta = 0$ 没有实际意义, 因为调速器不可能保持在这一位置。2. 调速器保持在位置

$$\cos \theta = \frac{g (W_1 + W_2)}{l \omega^2 W_1}$$

通过这一例题可以看到, 在计算中不涉及未知约束反力, 再次显示虚位移原理的优点。但是对于多自由度系统应用动力学普遍方程也是不方便的, 下面我们将证明应用更为广泛的拉格朗日方程。根据动力学普遍方程

$$\sum_k (\vec{F}_k - m_k \ddot{\vec{r}}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \quad (5.31)$$

其中第一部分是主动力的虚功, 由 (5.4) 记作

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

下面将证明第二部分惯性力的虚功与动能 T 有关, 且等于

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i \quad (5.32)$$

其中动能 T 和速度 $\dot{\vec{r}}_k$ 在 5.4 节中已讨论过,

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k \quad (5.10)$$

$$\dot{\vec{r}}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \quad (5.9)$$

证明过程中需要用到以下两个重要关系:

(1) 等式 (5.9) 左右都是广义速度 \dot{q}_i 的函数, 因为 $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$

和 $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$ 仅是广义坐标 q_i 及时间 t 的函数, 因此将等式 (5.9) 左

右对广义速度 \dot{q}_i 求偏导数, 可得

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \quad (5.33)$$

(2) 虚位移

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad (5.3)$$

由 (5.3) 可计算 (5.31) 中虚功

$$\ddot{m}_k \vec{r}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^n \ddot{m}_k \vec{r}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad (c)$$

将上式右端中取一项改写成

$$\ddot{m}_k \vec{r}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) - m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \quad (d)$$

利用 (5.33) 式, 上式第一项中 $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$ 可用 $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i}$ 代换, 第二项中微分的次序是可以对换的, 即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d \vec{r}_k}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_i}$$

因此可将 (d) 式改写成

$$\begin{aligned} \ddot{m}_k \vec{r}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \left(m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_i} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \right] \left(\frac{1}{2} m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k \right) \quad (e) \end{aligned}$$

上式表示 k 点的动能 $T_k = \frac{1}{2} m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k$ 作算子 $\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \right]$

的微分运算。

将 (e) 式对全部质点求和, 得

$$\begin{aligned}\sum_k \ddot{m}_k \vec{r}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \right] \left(\sum_k \frac{1}{2} m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k \right) \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right]\end{aligned}\quad (f)$$

其中 $T = \sum_k \frac{1}{2} m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k$ 为系统动能。

现在计算全部惯性力的虚功，即将 (a) 式对 k 求和并取负值，再利用 (f) 式就可得到 (5.32)

$$\begin{aligned}-\sum_k \ddot{m}_k \vec{r}_k \cdot \delta \vec{r}_k &= -\sum_k \sum_{i=1}^n \ddot{m}_k \vec{r}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \left(\sum_k \ddot{m}_k \vec{r}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i\end{aligned}\quad (5.32)$$

将主动力的虚功 (5.4) 和惯性力的虚功 (5.32) 代入动力学普遍方程式 (5.31) 可得

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0 \quad (5.34)$$

虚位移 δq_i 都是独立的，因此可以任意选取，例如选其中某个 δq_i 为不等于零的任意值，而其余的 $\delta q_j (j \neq i)$ 都等于零，于是可得 n 个二阶微分方程组，称为拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.35)$$

当系统为保守系统时，即主动力为势力时，根据 (5.20) 广义力

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

代入 (5.35) 得保守系统的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.36)$$

$$\text{引入动势} \quad L = T - U \quad (5.37)$$

它代表动能和势能之差, 因为 U 与广义速度无关, (5.36) 可简写成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.38)$$

当系统除了有势力的作用外, 还存在有其他非势力的作用, 把这部分力的虚功记作

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (5.39)$$

其中 Q_i 为对应于势力以外的其他非势力的广义力, 现在可将拉格朗日方程推广到非保守系统

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.40)$$

$$\text{或} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.41)$$

利用拉格朗日方程建立系统运动微分方程, 其主要优点是可以避免未知约束反力的出现, 其求解步骤可归纳如下:

1) 首先判断系统的自由度, 并适当选取广义座标来表示系统的运动状态。

2) 建立系统的动能 T , 最后应得到用广义座标和广义速度表达的动能表达式。

3) 当主动力是势力时, 建立用广义座标表示的势能 U 的表达式。对于非势力则计算对应于各广义座标 q_i 的广义力 Q_i , 具体地可以令 $\delta q_i \neq 0$, 其它的 $\delta q_j (j \neq i)$ 全部取作零, 计算非势力的虚功 δW , 则 δq_i 的系数即是 Q_i 。显然不计算势力的势能而直接计算广义力也是可以的。

4) 最后将求得的 T 、 U 和 Q_i 代入拉格朗日方程中进行运算即可得到系统的运动微分方程。

例5.5 试用拉格朗日方程推导例5.4双摆运动微分方程,并写出微振动方程。

解 在例5.4中已求得双摆的势能和动能如下:

$$U = (m_1 + m_2)gl_1(1 - \cos\theta_1) + m_2gl_2(1 - \cos\theta_2)$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2l_1l_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2$$

计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \theta_1} &= (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_2} &= m_2gl_2\sin\theta_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\sin(\theta_2 - \theta_1)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\dot{\theta}_2 \\ &\quad + m_2l_1l_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\ddot{\theta}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} &= m_2l_1l_2\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2l_1l_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1 + m_2l_2^2\dot{\theta}_2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) &= -m_2l_1l_2\sin(\theta_2 - \theta_1)(\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1)\dot{\theta}_1 \\ &\quad + m_2l_1l_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= -m_2l_1l_2\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\end{aligned}$$

将以上各式分组代入拉格朗日方程,经整理后可得如下运动方程

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\ddot{\theta}_2 - m_2l_1l_2\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 \\ + (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 &= 0 \\ m_2l_1l_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 \\ + m_2gl_2\sin\theta_2 &= 0\end{aligned}$$

由上列方程可见,一般情况下双摆运动方程是非线性方程,只有当双摆作微振动时,将 $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ 代入,只保留 θ 或其导

数 θ 的线性项, 或将例 5.4 中动能和势能表达式中保留到 θ 或 $\dot{\theta}$ 的二阶项代入拉格朗日方程中, 可得振动微分方程

$$(m_1 + m_1)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)gl_1\theta_1 = 0$$

$$m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2gl_2\theta_2 = 0$$

写成矩阵形式

$$[M]\{\ddot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = 0$$

其中列阵
$$\{\ddot{\theta}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}, \quad \{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

质量矩阵 $[M]$ 和刚度矩阵 $[K]$, 即为例 5.4 所得到的。因此对于线性振动, 只需计算动能和势能准确到二阶项, 就可以得到质量矩阵和刚度矩阵, 从而就得到系统自由振动的微分方程。在计算过程中, 不出现未知约束反力, 按照统一的步骤建立方程, 这就是应用拉格朗日方程的优点。

5.6 哈密尔顿原理

哈密尔顿原理是分析力学中一个基本的变分原理, 它提供了一条从一切可能发生的(约束所许可的)运动中判断真正的(实际发生的)运动的准则。本节先介绍变分的概念, 而后应用上节的动力学普遍方程来证明这一原理。

假设某一变量 q 随自变量 t 而变化, 那么这一函数关系为:

$$q = q(t) \quad (a)$$

由于自变量 t 的微小变化而引起函数 q 的微小改变量 dq 称微分。且

$$dq = \dot{q}dt \quad (b)$$

即微分 dq 等于 q 的导数 \dot{q} 和 dt 的乘积。

如果 q 代表单自由度系统的广义坐标, t 代表时间, 那么微分 dq 代表 dt 时间内发生的位移。

以前我们已引进了虚位移这一重要概念, 实际上虚位移 δq 就代表一种变分, 它和上述微分概念有着本质区别。

图 5-14 中 $q(t)$ 表示了某一函数的几何曲线, 假如我们在固定自变量 t 的值后, 给 $q(t)$ 作微小的改变而得到另一条和它无限接近的新的光滑曲线 $q_1(t)$, 这种由于函数本身无限小的变化而引起的改变量 δq 称为变分

$$\delta q = q_1 - q \quad (c)$$

变分是基于自变量不变而函数本身的改变而得到的函数的任意改变量。图 5-14 直观地表示了变分 δq 和微分 dq 的根本区别。

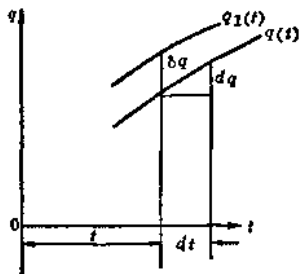


图 5-14

下面我们要证明变分和微分运算是互不相关的, 因此它们的次序可以互换, 即存在以下关系:

$$(1) \quad d\delta q = \delta dq \quad (d)$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \delta q = \delta \frac{dq}{dt} = \delta \dot{q} \quad (e)$$

将 (c) 式两边求导数得

$$\frac{d}{dt} \delta q = \frac{d}{dt} (q_1 - q) = \frac{dq_1}{dt} - \frac{dq}{dt} = \dot{q}_1 - \dot{q} \quad (f)$$

根据变分的定义 (c), 得 \dot{q} 的变分

$$\delta \dot{q} = \dot{q}_1 - \dot{q} \quad (g)$$

由 (f)(g) 我们证明了

$$\frac{d}{dt} \delta q = \delta \dot{q} \quad (e)$$

完全类似地可证明 (d)。在不改变积分上下限的条件下, 积分运算和变分运算也是可以互换的, 即

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} q dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta q dt \quad (h)$$

建议读者自己证明。下面我们再阐明变分概念在力学上的实际意义。我们以力学上熟悉的动能为例, 在一般情况下动能 T 是自变

量时间 t 和随时间 t 变化的广义坐标 q_i 和广义速度 \dot{q}_i 的函数, 即

$$T = T(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

当系统在若干力作用下, 给定了初始条件, 即给定 $t = t_1$ 的运动状态 A (即各点的坐标及速度为已知), 那么系统将发生唯一的完全确定的运动, 而在 $t = t_2$ 到达运动状态 B , 图 5-15 表示了由运动状态 A 到达运动状态 B 的真实运动的唯一路径 AB 曲线, 称为正路。但是从运动学上许可的路径

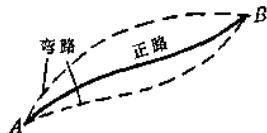


图 5-15

而言还存在着各种可能的路径, 我们称与正路无限接近的但又是约束所许可的任意路径为弯路。我们比较在指定瞬时 t 系统在正路和弯路上动能之差

$$\delta T = T_{\text{弯}} - T_{\text{正}}$$

这种由于运动状态的微小改变, 即坐标 q_i 和速度 \dot{q}_i 的微小改变 δq_i 、 $\delta \dot{q}_i$ 而引起的动能的改变量, 称为动能 T 的变分, 可计算如下

$$\delta T = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \quad (5.42)$$

读者可以根据微分的概念来计算动能的微分 dT , 显然由于它和变分 δT 在概念上完全不同而得到不同的结果。

完全类似地可以计算动势 L 的变分

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \quad (5.43)$$

有以上预备知识, 就可以根据动力学普遍方程 (5.31) 来推证哈密顿原理。下面重复一下以前的讲述, 写出动力学普遍方程

$$\sum_k (\vec{F}_k - m_k \ddot{\vec{r}}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

其中主动力的虚功, 由 (5.4) 记作

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

惯性力的虚功由 (5.32) 记作

$$-\sum_k m_k \ddot{\vec{r}}_k \cdot \delta \vec{r}_k = -\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i$$

代入 (5.31) 得

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0 \quad (5.34)$$

若系统为保守系统, 则由 (5.20) 得广义力

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

再引入动势 $L = T - U$, 因此 (5.34) 可写成

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0 \quad (5.44)$$

根据复合函数求导数的关系, 并注意到微分和变分运算的次序可以互换, 求得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

利用上式可得 (5.44) 中的第 i 项

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) \end{aligned}$$

代入 (5.44) 得

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) = 0$$

根据 (5.43) 式, 上式第二项即为动势 L 的变分, 故得

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \delta L$$

将上式改写成

$$d \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \delta L dt$$

因为研究系统在给定两个运动状态 A ($t = t_1$) 和 B ($t = t_2$) 之间的运动, 故对上式自 t_1 到 t_2 进行积分, 得

$$\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt$$

由于在 A 、 B 两个运动状态已被给定, 所以 $[\delta q_i]_{t_1} = 0$ 和 $[\delta q_i]_{t_2} = 0$, 因此上式左端为零。故得 A 、 B 之间真实运动满足

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (5.45)$$

或

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (5.46)$$

上面两式都是**哈密尔顿原理**的数学表达式。此原理可叙述如下:

系统在给定初始和终了的运动状态之间的真正运动, 它和运动学上许可的运动的区别在于: 对真正运动而言, 哈密尔顿作用量 $\left(\int_{t_1}^{t_2} L dt \right)$ 的变分等于零。换言之, 对真正运动而言, 哈密尔顿作用量具有极值。

若系统除势力作用外，还有非势力的作用，那么我们把这部分力的虚功记作

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

则不难证明哈密顿原理可表达为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (5.47)$$

哈密顿原理经常应用于建立连续弹性体的运动微分方程，拉格朗日方程主要应用于建立有限自由度系统的运动微分方程。由于它们都是从动力学普遍方程推证出来的，显然它们之间是可以互相推证的，我们留给读者来证明。

第六章 多自由度系统的振动

6.1 引言

本章在前面各章的基础上, 进一步介绍多自由度系统的振动分析与计算的方法。

工程上的机械振动问题, 有一些可以简化成一个或两个自由度系统的振动问题, 因此可用前面各章中叙述的方法进行分析计算。但也有很多问题, 不能这样采用过分简化的力学模型进行分析。一般地说, 工程上各种常见的机械零件、部件乃至整个机器, 总是由杆、梁、板、壳或其他各种元件组成的复杂的弹性结构, 由于它们的质量与刚度都具有分布的性质, 理论上都是一些具有无限多自由度的系统。以一根简单的梁为例, 研究其横向振动时, 就要用梁上无限多个横截面在每个瞬时的运动情况来描述梁的运动规律, 因此一根梁就是一个无限多自由度的系统。对于这种无限多自由度系统的振动问题, 或简称为弹性体振动问题, 它们一些精确的分析方法, 将在第七、八章中详细讨论。

然而, 在大多数情况下, 往往可以对弹性体振动问题, 从无限多自由度系统简化为有限多个自由度系统进行分析, 以得到它主要的、即较低频率的一些振动特性与规律, 这样就往往可以满足机器设计与使用上的要求。这种简化分析的方法很早就被采用。以梁的横振动与轴的扭振为例, 过去常常采取直观的方法, 将梁或轴的分布质量按一定规则聚缩成若干集中质量或具有转动惯量的圆盘, 其间以不计质量的弹性梁段或轴段相连接, 并把作用在物体上的分布外力也都折算成集中力或力矩, 作用在上述集中质量或圆盘上。分析这样有限个集中质量或圆盘在外力及弹性恢复力作用下的横向振动或扭转振动问题, 就可以得到原来的梁或轴振动的一些低频特性。第四章 4.3 节中将发动机曲轴扭振系

统简化为轴盘扭振系统，就是一例，另外，过去计算中小型汽轮机发电机机组转子的临界转速时，也往往不考虑回转效应的影响，把转子简化成具有若干集中质量的分段等截面梁，计算出这简化系统的前几阶横向振动频率，就是转子相应各阶临界转速很好的近似值。这也是一个常见的例子。

除了这种将分布质量聚缩成集中质量的离散化方法以外，还可以采用其他一些近似方法（如瑞雷-李兹法、伽辽金法），将无限多自由度的弹性体简化为多自由度系统。近几十年来，随着电子计算机的广泛应用，又发展了一种更有效的离散化的处理方法，那就是有限单元法。运用有限单元法，使任何复杂的弹性结构的振动问题，都可以离散化成为近似的多自由度系统的振动问题。这些具体的离散化方法都将在后面各章中陆续介绍。

多自由度系统与两自由度系统并没有本质的差别，只是由于自由度数目的增加，在分析与计算时需要更有效的处理。多自由度系统的振动方程式一般是一组相互耦合的常微分方程组。在系统微幅振动的情况下，这组微分方程式都是线性常系数的。为简便起见，以后我们将振动方程式都写成矩阵的形式。对于这组相互耦合的二阶常微分方程组，可以采用直接求其分析解或数值解的方法进行研究，也可以采用另一种便于分析的解法，那就是**振型叠加法**。从数学的观点看，振型叠加法的要点在于用振型矩阵进行一组座标变换，将描写系统的原有的座标用一组特定的新的座标来替代，这组新的座标就是**主座标**或**正则座标**。采用了主座标或正则座标，就使系统的振动方程式变成一组相互独立的二阶常微分方程组，其中每一个方程式都可以独立求解，就像一个单自由度系统的振动方程式一样，这就使我们对多自由度系统的运动分析化简成对若干单自由度系统的运动分析。这样，不仅在系统受有复杂载荷情况下，可以简化运动分析的求解过程，而且使我们可以加深对系统运动组成状况的理解。振型叠加法在本书今后各章中被广泛使用。

本章从建立多自由度系统的运动方程式开始（6.2节），随即

讨论了无阻尼情况下系统自由振动的运动规律,叙述了主振动的一般理论与主坐标、正则坐标的概念,引出了振型叠加法的理论基础(6.3—6.5节),并在6.6节中用振型叠加法计算了在给定初始条件下系统的自由振动。为了计算系统固有频率及主振型,在6.7节中我们较详细地叙述了矩阵迭代法,并在6.8节中介绍了三种常用的近似计算方法,即瑞雷法、邓可莱法与李兹法。6.9及6.10两节中考虑了阻尼的影响,着重介绍了振型阻尼的应用,使振型叠加法在有阻尼存在的情况仍然便于使用,依次求解了系统的自由振动及强迫振动。6.11节中简单介绍了链状结构的系统振动分析的另一有效方法,即传递矩阵法。

熟练掌握本章的内容,将使读者在今后各章学习时获得便利。

6.2 多自由度系统振动方程式

建立一般由若干质点或物体组成的多自由度系统的振动方程式,可以采用下面两种主要的方法。

一种方法是用动力学的基本定律或定理,直接对系统中各质点或物体建立其各自的运动方程式,这些运动方程式的总和就是系统的运动方程式。对于一些简单的问题,采用这种方法比较直观简便,前面第一至四章就采用了这种方法。

另一种方法是第五章中介绍的分析力学的方法。对一些自由度数目较多的系统,合理地选取系统的广义坐标,然后根据拉格朗日方程式,建立系统的运动方程式。用这种方法虽然不如用动力学方法来得直观,但对于复杂的系统来说,采用这种方法,只要我们求得动能与势能用广义坐标表示的表达式,在存在非势力时再用计算虚功的方法求得广义力,就可以用简单的微分运算得到系统的运动微分方程式。与动力学方法相比,采用拉格朗日方程式建立运动方程式比较规格化,也不易出错,这是它的优点。

下面通过几个具体问题说明之。

1) 弹簧质量系统:

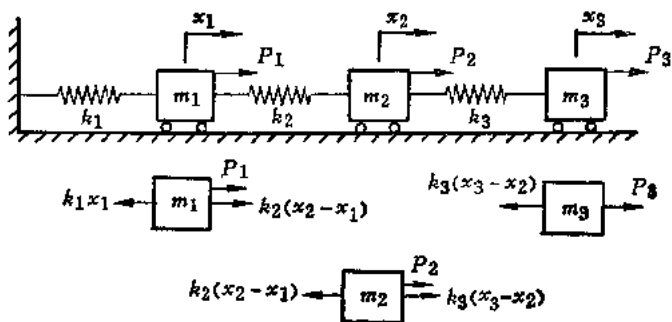


图 6-1

对图 6-1 所示弹簧质量系统，我们用上述两种方法分别建立其运动方程式。

先用动力学的方法。根据牛顿运动定律，由图 6-1 中各质量 m_1 、 m_2 、 m_3 的受力情况，可以分别列出它们的运动方程式为

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= P_1 - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= P_2 - k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_3 - x_2) \\ m_3 \ddot{x}_3 &= P_3 - k_3 (x_3 - x_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

其中 x_1 、 x_2 、 x_3 分别为质量 m_1 、 m_2 、 m_3 偏离其各自平衡位置的位移， \ddot{x}_1 、 \ddot{x}_2 、 \ddot{x}_3 为各质量的加速度， P_1 、 P_2 、 P_3 为分别作用于各质量上的外力， $k_1 x_1$ 、 $k_2 (x_2 - x_1)$ 、 $k_3 (x_3 - x_2)$ 项分别为弹簧 k_1 、 k_2 、 k_3 作用于各质点的恢复力，其符号由恢复力方向是否与各质量位移正方向一致或相反所决定。将 (a) 式移项化简后

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= P_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_3 &= P_2 \\ m_3 \ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 &= P_3 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

此式可用矩阵形式表达为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\} \quad (6.2)$$

其中各矩阵分别为列阵

$$\{x\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \{\ddot{x}\} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (b)$$

及系数矩阵

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_1 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (c)$$

$[M]$ 、 $[K]$ 分别称为**质量矩阵**及**刚度矩阵**。

外力 P_1 、 P_2 、 P_3 可以是随时间变化的任意函数，(6.1) 式或 (6.2) 式是系统在激振外力作用下的强迫振动方程式。当外力不存在时，(6.1) 或 (6.2) 式变成系统的自由振动方程式，即

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

$$\text{或} \quad [M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (6.4)$$

其中零列阵为

$$\{0\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (d)$$

下面再用拉格朗日方程式建立系统的运动方程式。

仍取 x_1 、 x_2 、 x_3 为系统的广义坐标，则系统的动能 T 及势能 U 分别为

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2) \quad (e)$$

$$U = \frac{1}{2}[k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 (x_3 - x_2)^2] \quad (f)$$

当系统具有虚位移 δx_1 、 δx_2 、 δx_3 时，外力 P_1 、 P_2 、 P_3 所作的虚功之和为：

$$\delta W = P_1 \delta x_1 + P_2 \delta x_2 + P_3 \delta x_3 \quad (g)$$

但按第五章 (5.4) 式，由于这里的广义坐标为 x_1 、 x_2 、 x_3 ，故应有

$$\delta W = \sum_{i=1}^3 Q_i \delta q_i = \sum_{i=1}^3 Q_i \delta x_i = Q_1 \delta x_1 + Q_2 \delta x_2 + Q_3 \delta x_3 \quad (h)$$

比较 (g) 式与 (h) 式可知: $P_1 = Q_1$, $P_2 = Q_2$, $P_3 = Q_3$, 因此根据拉格朗日方程式 (5.40), 可得系统运动微分方程式为

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= P_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_3 &= P_2 \\ m_3 \ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 &= P_3 \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

$$\text{即} \quad [M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\} \quad (6.6)$$

不存在外力时, $\{P\} = \{0\}$, 上式变成

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (6.7)$$

这里用分析力学方法得到的结果与前面用动力学方法得到的结果完全相同。

2) 梁上具有集中质量的横向振动系统

前面第四章中已讨论过梁上具有两个集中质量的横向振动问题, 这里将其推广到梁上具有任意 n 个 ($n > 2$) 集中质量的情形。

如图 6-2 所示, 一根质量可以忽略的梁上具有 n 个集中质量 m_1, m_2, \dots, m_n , 取它们各自微小的偏

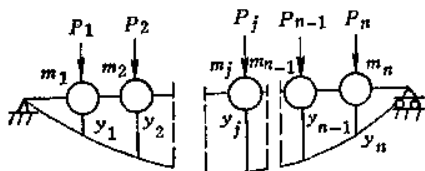


图 6-2

离平衡位置的横向位移 y_1, y_2, \dots, y_n 为系统的广义坐标, 则系统的动能 T 为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i^2 \quad (i)$$

用结构力学方法可求得系统的刚度矩阵 $[K]$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (m)$$

当外力不存在时, (6.9) 或 (6.10) 式变为系统的自由振动方程式, 其矩阵形式为

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{0\} \quad (6.11)$$

6.1 节中已经指出, 计算转子的临界转速时, 可将转子简化成梁上带有集中质量的系统, 这系统的横向振动固有频率, 就是转子临界转速的近似值。

3) 轴上带有若干圆盘的扭转振动系统

发动机及齿轮传动系统的扭转振动问题, 常可以简化为轴上带有若干圆盘的扭转振动系统来进行研究。

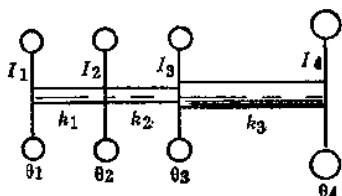


图 6-3

如图 6-3 所示, 设有一根自身转动惯量可忽略不计的轴上带有四圆盘, 它们各自绕轴线的转动惯量分别为 I_1 、 I_2 、 I_3 、 I_4 , 取四圆盘的转角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 为广义坐标, 如系统没有外力作用, 研究其自由振动时, 可利用拉格朗日方程式, 先求出系统的动能 T 为

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \dot{\theta}_1^2 + I_2 \dot{\theta}_2^2 + I_3 \dot{\theta}_3^2 + I_4 \dot{\theta}_4^2) \quad (n)$$

系统的弹性势能 U 为

$$U = \frac{1}{2} [k_1 (\theta_1 - \theta_2)^2 + k_2 (\theta_2 - \theta_3)^2 + k_3 (\theta_3 - \theta_4)^2] \quad (o)$$

其中 k_1 、 k_2 、 k_3 为各圆盘间轴段的抗扭刚度。根据拉格朗日方程式, 即得系统的自由振动方程式为

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) &= 0 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - k_1(\theta_1 - \theta_2) + k_2(\theta_2 - \theta_3) &= 0 \\ I_3 \ddot{\theta}_3 - k_2(\theta_2 - \theta_3) + k_3(\theta_3 - \theta_4) &= 0 \\ I_4 \ddot{\theta}_4 - k_3(\theta_3 - \theta_4) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

并项化简后, 可写成下述矩阵形式

$$[I]\{\ddot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = 0 \quad (6.13)$$

其中

$$\{\theta\} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}, \quad \{\ddot{\theta}\} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

这个盘轴扭振系统的平衡位置 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$ 只是一个中性平衡位置, 任何 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 \neq 0$ 的位置、即整个系统作一刚体转动后的位置也都是平衡位置, 弹性势能 U 在上述两种平衡位置都取零值, 故 U 只是一个半正定的二次型, 这种系统称为**半正定系统**。

上面用两种方法建立了各种不同类型的系统的运动方程式, 这是工程上常用的方法。此外, 在一些结构动力学的著作中, 还常常采用另一种方法, 就是

在研究某些结构的运动时, 根据动力学中的达伦培尔原理, 将惯性力假想地作用在结构上, 由柔度影响系数求得系统在外力与惯性力共同作用下的变形, 从而建立运动方程式。

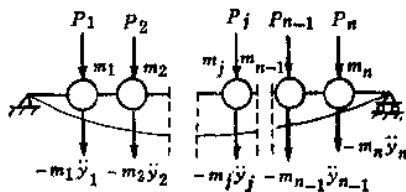


图 6-4

$$\{\dot{y}\} = -[\delta][M]\{\ddot{y}\} \quad (6.20)$$

$$\text{或} \quad \{y\} + [\delta][M]\{\ddot{y}\} = \{0\} \quad (6.21)$$

这里用柔度影响系数法建立系统运动方程式，其本质上与前面各例子中用动力学定律或拉格朗日方程式建立运动方程式自然是相同的。实际上，利用 (6.18) 式，对 (6.16) 式两边前乘以矩阵 $[K]$ ，即得

$$\begin{aligned} [K]\{y\} &= [K][\delta]\{P\} - [K][\delta][M]\{\ddot{y}\} \\ &= \{P\} - [M]\{\ddot{y}\} \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad [M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{P\} \quad (6.22)$$

此式与前面 (6.10) 式完全相同。

通过上面各例可以看出：当不考虑阻尼存在时，任何一个多自由度系统的振动方程式，总可以写成像 (6.22) 式那样的一般形式。若系统的自由度数 n ，则位移矩阵 $\{x\}$ 、加速度矩阵 $\{\ddot{x}\}$ 及外力矩阵 $\{P\}$ 分别为 n 阶列阵，而质量矩阵 $[M]$ 及刚度矩阵 $[K]$ 分别为 n 阶对称的方阵。应该指出：虽然在上面各例中质量矩阵 $[M]$ 都是对角矩阵，但一般说来，如果我们将弹性结构用各种方法离散化成有限自由度系统时，得到的质量矩阵 $[M]$ 往往未必是对角矩阵，因此以后我们按 $[M]$ 为一般非对角矩阵进行讨论。质量矩阵 $[M]$ 的各元素是系统动能 T 的二次型表达式中的系数，动能 T 总是正定的，因此质量矩阵 $[M]$ 也总是正定对称矩阵。刚度矩阵 $[K]$ 是势能 U 的二次型的系数所组成的，对应于势能 U 为正定或半正定的二次型， $[K]$ 也就是正定对称的或半正定对称的矩阵。

实际物体在振动时，总存在各种外界或内部的阻尼，如果假定阻尼与速度成正比（即所谓粘性阻尼），总可以引进一个 n 阶正定的阻尼方阵 $[C]$ （见 6.9 节），使具有阻尼的多自由度系统的振动方程式具有下述一般形式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\} \quad (6.23)$$

其中 $\{\dot{x}\}$ 是速度的 n 阶列阵。

下节我们先研究无阻尼系统的自由振动。

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_{11}p^2 & k_{12} - m_{12}p^2 & \cdots & k_{1n} - m_{1n}p^2 \\ k_{21} - m_{21}p^2 & k_{22} - m_{22}p^2 & \cdots & k_{2n} - m_{2n}p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} - m_{n1}p^2 & k_{n2} - m_{n2}p^2 & \cdots & k_{nn} - m_{nn}p^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.30)$$

上式称为特征方程式，将其展开后可得到 p^2 的 n 次代数方程式

$$p^{2n} + a_1 p^{2(n-1)} + a_2 p^{2(n-2)} + \cdots + a_{n-1} p^2 + a_n = 0 \quad (6.31)$$

对于正定系统来说，系统只可能在稳定平衡位置附近作微小振动，不能远逸。因此我们可以期望（数学上也可以证明），从 (6.31) 式能得到 p^2 的 n 个大于零的正实根。本节及下节我们先讨论这种正定系统的自由振动。我们称 p^2 的 n 个根为特征值，也就是多自由度系统的各阶固有频率 p 的平方值。在大多数情况下，这 n 个固有频率值互不相等，可将其由小到大按次序排列如下

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{n-1} < p_n \quad (6.32)$$

方程式 (6.31) 也可改写为

$$(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2) \cdots (p^2 - p_n^2) = 0 \quad (6.33)$$

或

$$p^{2n} - (p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2)p^{2(n-1)} + (p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + \cdots + p_{n-1}^2 p_n^2)p^{2(n-2)} + \cdots + (-1)^n p_1^2 p_2^2 p_3^2 \cdots p_{n-1}^2 p_n^2 = 0 \quad (6.34)$$

求得各阶固有频率 p_i 后，将方程组 (6.27) 中划去其中不独立的某一式（如最后一式），并将剩下独立的 $n-1$ 个方程式中某一相同的 A_i 项（如 A_n 项）移到等式右边，把某一 p_j^2 ($j = 1, 2, \cdots, n$) 值代入 p^2 后，可得下述代数方程组

$$\begin{aligned} (k_{11} - m_{11}p_j^2)A_1 + (k_{12} - m_{12}p_j^2)A_2 + \cdots + (k_{1,n-1} - m_{1,n-1}p_j^2)A_{n-1} \\ = - (k_{1n} - m_{1n}p_j^2)A_n \\ (k_{21} - m_{21}p_j^2)A_1 + (k_{22} - m_{22}p_j^2)A_2 + \cdots + (k_{2,n-1} - m_{2,n-1}p_j^2)A_{n-1} \\ = - (k_{2n} - m_{2n}p_j^2)A_n \\ \vdots \\ (k_{n-1,1} - m_{n-1,1}p_j^2)A_1 + (k_{n-1,2} - m_{n-1,2}p_j^2)A_2 + \cdots + (k_{n-1,n-1} - m_{n-1,n-1}p_j^2)A_{n-1} \\ = - (k_{n-1,n} - m_{n-1,n}p_j^2)A_n \end{aligned}$$

(6.35)

这样就可以对 A_1, A_2, \dots, A_{n-1} 求解(假定 (6.35) 式左边系数行列式值不为零, 否则要另选其他 A_i 项移置右端)。显然, 求得各 A_i 值 ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 都是与 A_n 值成正比的, 这样我们可得到对应于固有频率 p_j 的 n 个振幅值 $A_1^{(j)}, A_2^{(j)}, \dots, A_n^{(j)}$ 间的比例关系, 称为振幅比。这说明当系统按第 j 阶固有频率 p_j 作简谐振动时, 各振幅值 $A_1^{(j)}, A_2^{(j)}, \dots, A_n^{(j)}$ 间具有确定的相对比值, 或者说系统有一定的振动形态。在数学上把这种性质称为对应于每一个特征值 p_j^2 , 有某一特征向量, 其各分量就是各幅值 $A_1^{(j)}, A_2^{(j)}, \dots, A_n^{(j)}$ 的相对大小。

将各 p_j 及 $A_i^{(j)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 代回 (6.26) 式, 我们得到 n 组特解, 将这 n 组特解相加, 可得到系统自由振动的一般解, 即

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1^{(1)} \sin(p_1 t + \varphi_1) \\ &\quad + A_1^{(2)} \sin(p_2 t + \varphi_2) + \dots + A_1^{(n)} \sin(p_n t + \varphi_n) \\ x_2 &= A_2^{(1)} \sin(p_1 t + \varphi_1) \\ &\quad + A_2^{(2)} \sin(p_2 t + \varphi_2) + \dots + A_2^{(n)} \sin(p_n t + \varphi_n) \\ &\dots \\ x_n &= A_n^{(1)} \sin(p_1 t + \varphi_1) \\ &\quad + A_n^{(2)} \sin(p_2 t + \varphi_2) + \dots + A_n^{(n)} \sin(p_n t + \varphi_n) \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

由于对同一阶固有频率 p_j , 各 $A_1^{(j)}, A_2^{(j)}, \dots, A_n^{(j)}$ 间具有确定的相对比值, 因此上述一般解中, 除 n 个待定常数 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 外, 还有 n 个确定振幅值的待定常数, 例如可取为 $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \dots, A_n^{(n)}$, 这样一共有 $2n$ 个待定常数。(6.24) 式是 n 个二阶常微分方程组, 其一般解理应包含 $2n$ 个待定常数, 故说明 (6.36) 式确实可作为 (6.24) 式的一般解。这 $2n$ 个待定常数的数值, 须由系统的初始条件所确定。理论上说, 如给出 $t = 0$ 时, 各座标 x_i 及速度 \dot{x}_i 的初始值 x_{i0}, \dot{x}_{i0} ($i = 1, 2, \dots, n$), 这样 $2n$ 个初始条件就可唯一地确定一般解中 $2n$ 个待定常数值。具体求法将留到 6.6 节中讨论。

(2) 主振动

如果系统在某一个特殊的初始条件下,使得待定常数中只有 $A_1^{(1)} \neq 0$, 而其他 $A_n^{(2)} = A_n^{(3)} = \cdots = A_n^{(n)} = 0$, 因而与后面各 $A_i^{(i)}$ ($i = 2, 3, \cdots, n$) 成正比的 $A_i^{(2)} = A_i^{(3)} = \cdots = A_i^{(n)} = 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n-1$), 则 (6.36) 式所表示的系统一般自由振动将仅保留第一项, 成为下述的特殊形式

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1^{(1)} \sin(p_1 t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2^{(1)} \sin(p_1 t + \varphi_1) \\ &\cdots \cdots \cdots \\ x_n &= A_n^{(1)} \sin(p_1 t + \varphi_1) \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

这时每一座标均以同一圆频率 p_1 及同一相位角 φ_1 作简谐振动, 在振动过程中各座标同时经过平衡位置 (即各 $x_i = 0$), 也同时 (当 $\sin(p_1 t + \varphi_1) = \pm 1$) 达到最大的偏离值, 各座标值在任何瞬时都保持固定不变的比值, 即恒有

$$\frac{x_1}{A_1^{(1)}} = \frac{x_2}{A_2^{(1)}} = \cdots = \frac{x_n}{A_n^{(1)}} \quad (6.38)$$

因此 $\{A^{(1)}\}$ 各元素比值完全确定了系统振动的形态, 我们称它为 **第一阶主振型**。由 (6.37) 式描述的系统的运动, 称为 **系统第一阶主振动**。

类似地, 当系统在某些特殊的初始条件下, 还可以产生系统的 **第二阶、第三阶、…一直到第 n 阶主振动**。它们各自具有与 **第一阶主振动** 完全类似的性质。

当系统作第一阶主振动时, 各座标幅值的绝对大小取决于系统的初始条件, 但由于各座标间振幅相对比值只决定于系统的物理性质, 即由系统的质量矩阵 $[M]$ 及刚度矩阵 $[K]$ 中各元素值所完全决定, 因此我们可以不必局限于求出具体的初始条件下系统作第一阶主振动时, 各座标幅值组成的主振型的具体绝对数值, 而可以一般地描述系统第一阶主振型的形式, 任意规定其中某一座标的幅值。例如, 如 $A_1^{(1)} \neq 0$, 可规定 $A_1^{(1)} = 1$, 这样其他各 $A_i^{(1)}$ 、 $A_2^{(1)}$ 、 \cdots 、 $A_{n-1}^{(1)}$ 的值也就由前面 (6.35) 式确定了 (也可以规定

每一阶主振型中最大的一个座标幅值为 1，以此确定其他各座标幅值)。将这 n 个幅值 $A_1^{(1)}$ 、 $A_2^{(1)}$ 、 \dots 、 $A_n^{(1)}$ 作为元素组成一个列阵 $\{A^{(1)}\}$ ，称它为第一阶主振型列阵

$$\{A^{(1)}\} = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ \vdots \\ A_n^{(1)} \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

类似地可定义其他第二阶、第三阶、 \dots 、第 n 阶主振型列阵 $\{A^{(2)}\}$ 、 $\{A^{(3)}\}$ 、 \dots 、 $\{A^{(n)}\}$ 为

$$\{A^{(2)}\} = \begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ \vdots \\ A_n^{(2)} \end{bmatrix} \quad \{A^{(3)}\} = \begin{bmatrix} A_1^{(3)} \\ A_2^{(3)} \\ \vdots \\ A_n^{(3)} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \{A^{(n)}\} = \begin{bmatrix} A_1^{(n)} \\ A_2^{(n)} \\ \vdots \\ A_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

上面我们从 (6.24) 式出发，讨论了无阻尼系统的自由振动。如果我们利用柔度影响系数建立系统的运动方程式，则与 6.2 节 (6.21) 式相似，一般系统的自由振动微分方程式具有下述形式：

$$\{\ddot{x}\} + [\delta][M]\{\ddot{x}\} = \{0\} \quad (6.41)$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

仍设上式的解具有 (6.26) 式的形式，将其代入 (6.41) 式，并将全式除以 p^2 ($p^2 \neq 0$)，可得

$$-\frac{1}{p^2}\{A\} - [\delta][M]\{A\} = \{0\} \quad (6.43)$$

其特征方程式为

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{p^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{p^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.44)$$

展开后可得到 $\frac{1}{p^2}$ 的 n 次代数方程式, 由此可求得 $\frac{1}{p^2}$ 的 n 个根,

取其倒数即得 p^2 的 n 个特征值。将 $\frac{1}{p^2}$ 的 n 个根代回 (6.43)

式, 同样可求得 n 个特征矢量。由于振动方程式 (6.41) 与 (6.24) 式可以互相转换, 因此对于同样的广义座标, 不管采用那一种形式的振动方程, 求得的系统的固有频率以及主振型总是相同的。

进一步说, 如果对一个多自由度系统, 选择了两种不同的广义座标, 它们对应的质量矩阵 $[M]$ 、刚度矩阵 $[K]$ 或柔度矩阵 $[\delta]$ 互不相同, 因而特征方程式的形式也各不相同。粗看起来, 似乎对应这两组不同的广义座标, 有可能求得两组不同的固有频率值。其实不然, 一个多自由度系统的固有频率完全反映了系统在平衡位置附近作微小振动时固有的物理性质 (惯性、弹性), 它决不会随广义座标的选择而改变, 不同的广义座标得到的特征方程式 (6.30) 或 (6.44) 式的形式可以有所不同, 但将其展开后得到的代数方程式都是相同的, 因而求得的固有频率值也总是相同的。与各阶固有频率对应的主振型值, 对不同的广义座标是不同的, 但这种差别恰恰使得采用不同的广义座标, 描绘出了系统中各质点在同一阶主振动时具有相同的运动形态。因此, 一个系统的固有频率与主振型完全决定于系统本身客观的固有的物理性质 (惯性、弹性), 与任何主观的人为因素无关。

例6.1 图 6-5 表示一个弹簧质量系统, $k_1 = 3k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = k$; $m_1 = 2m$, $m_2 = 1.5m$, $m_3 = m$, 求系统的固有频率及主振型。

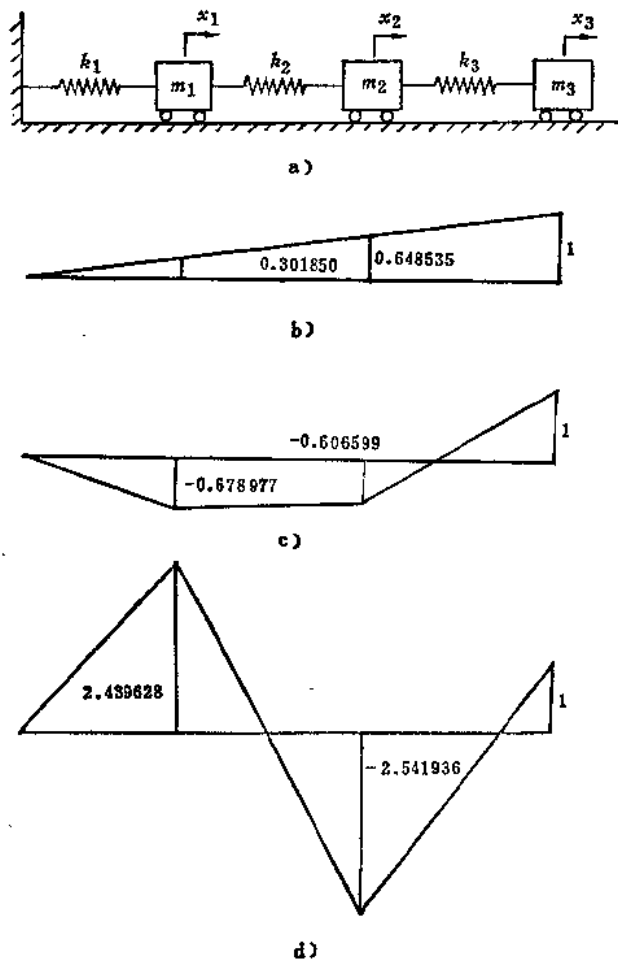


图 6-5

解 取三质量各自偏离平衡位置的位移 x_1 、 x_2 、 x_3 为广义坐标，则系统的质量矩阵 $[M]$ 及刚度矩阵 $[K]$ 可由 6.2 节 (c) 式求出

$$[M] = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 3k+2k & -2k & 0 \\ -2k & 2k+k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

自由振动微分方程式为

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{令 } x_i = A_i \sin(pt + \varphi) \quad (i = 1, 2, 3)$$

代入微分方程式得

$$\left. \begin{aligned} (5k - 2mp^2)A_1 - 2kA_2 &= 0 \\ -2kA_1 + (3k - 1.5mp^2)A_2 - kA_3 &= 0 \\ -kA_2 + (k - mp^2)A_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

因此特征方程式为

$$\begin{vmatrix} 5k - 2mp^2 & -2k & 0 \\ -2k & 3k - 1.5mp^2 & -k \\ 0 & -k & k - mp^2 \end{vmatrix} = 0$$

展开并化简后可得

$$(p^2)^3 - 5.5 \frac{k}{m} (p^2)^2 + 7.5 \left(\frac{k}{m} \right)^2 p^2 - 2 \left(\frac{k}{m} \right)^3 = 0$$

p^2 的三个根可用数值解法求出

$$p_1^2 = 0.351465 \frac{k}{m}, \quad p_2^2 = 1.606599 \frac{k}{m}, \quad p_3^2 = 3.541936 \frac{k}{m}$$

$$p_1 = 0.592845\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad p_2 = 1.267517\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad p_3 = 1.882003\sqrt{\frac{k}{m}}$$

由 (a) 式前二个式子

$$\begin{aligned} (5k - 2mp^2)A_1 - 2kA_2 &= 0 \\ -2kA_1 + (3k - 1.5mp^2)A_2 &= kA_3 \end{aligned} \quad (b)$$

将 $p_1^2 = 0.351465\frac{k}{m}$ 代入, 并令 $A_3^{(1)} = 1$, 得

$$\begin{aligned} 4.297071A_1^{(1)} - 2A_2^{(1)} &= 0 \\ -2A_1^{(1)} + 2.472803A_2^{(1)} &= 1 \end{aligned}$$

解得 $A_1^{(1)} = 0.301850$, $A_2^{(1)} = 0.648535$

类似地将 p_2^2 、 p_3^2 值代入 (a) 式, 并令 $A_3^{(2)} = 1$, $A_3^{(3)} = 1$, 分别可解得

$$\begin{aligned} A_1^{(2)} &= -0.678977 & A_2^{(2)} &= -0.606599 \\ A_1^{(3)} &= 2.439628 & A_2^{(3)} &= -2.541936 \end{aligned}$$

因此对应于三个固有频率 p_1 、 p_2 、 p_3 , 主振型列阵为

$$\begin{aligned} \{A^{(1)}\} &= \begin{bmatrix} 0.301850 \\ 0.648535 \\ 1 \end{bmatrix} & \{A^{(2)}\} &= \begin{bmatrix} -0.678977 \\ -0.606599 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \{A^{(3)}\} &= \begin{bmatrix} 2.439628 \\ -2.541936 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

图 6-5 中已将各阶主振型值用折线图表示出来。

6.4 主座标和正则座标

(1) 主振型的正交性

上节中我们分析了无阻尼系统自由振动的一般性质, 指出一个 n 自由度的系统具有 n 个固有频率 p_j 及 n 组主振型 $\{A^{(j)}\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$)。现在我们来研究两组主振型之间的关系。已知对应于固有频率 p_i 及 p_j 的主振型 $\{A^{(i)}\}$ 及 $\{A^{(j)}\}$ 分别满足下述

两个方程式 (见前 (6.28) 式)

$$[K]\{A^{(i)}\} = p_i^2[M]\{A^{(i)}\} \quad (6.45)$$

$$[K]\{A^{(i)}\} = p_j^2[M]\{A^{(i)}\} \quad (6.46)$$

将 (6.45) 式两边前乘列阵 $\{A^{(i)}\}$ 的转置矩阵 $\{A^{(i)}\}^T$ 、即行阵 $\{A^{(i)}\}^T$ ，得

$$\{A^{(i)}\}^T[K]\{A^{(i)}\} = p_i^2\{A^{(i)}\}^T[M]\{A^{(i)}\} \quad (6.47)$$

将 (6.46) 式两边前乘行阵 $\{A^{(i)}\}^T$ ，得

$$\{A^{(i)}\}^T[K]\{A^{(i)}\} = p_j^2\{A^{(i)}\}^T[M]\{A^{(i)}\} \quad (6.48)$$

由于 $[K]$ 、 $[M]$ 都是对称矩阵，不难证明

$$\{A^{(i)}\}^T[K]\{A^{(i)}\} = \{A^{(i)}\}^T[K]\{A^{(i)}\} \quad (6.49)$$

$$\{A^{(i)}\}^T[M]\{A^{(i)}\} = \{A^{(i)}\}^T[M]\{A^{(i)}\} \quad (6.50)$$

因此将 (6.47)、(6.48) 两式相减后可得

$$(p_i^2 - p_j^2)\{A^{(i)}\}^T[M]\{A^{(i)}\} = 0 \quad (a)$$

在 $p_i^2 \neq p_j^2$ 的条件下，必然有

$$\{A^{(i)}\}^T[M]\{A^{(i)}\} = 0 \quad (6.51)$$

代回 (6.48) 式，得

$$\{A^{(i)}\}^T[K]\{A^{(i)}\} = 0 \quad (6.52)$$

(6.51)、(6.52) 二式表示不相等的固有频率的两个主振型之间，既存在着对质量矩阵 $[M]$ 的正交性，又存在着对刚度矩阵 $[K]$ 的正交性，统称为**主振型的正交性**。

对 (6.45) 式两边前乘行阵 $\{A^{(i)}\}^T$ ，得

$$\{A^{(i)}\}^T[K]\{A^{(i)}\} = p_i^2\{A^{(i)}\}^T[M]\{A^{(i)}\} \quad (6.53)$$

因质量矩阵 $[M]$ 是正定的，令

$$\{A^{(i)}\}^T[M]\{A^{(i)}\} = M_i \quad (6.54)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

M_i 总是一个正实数，称它为第 i 阶**主质量**。对正定系统来说，刚度矩阵 $[K]$ 是正定的，令

$$\{A^{(i)}\}^T[K]\{A^{(i)}\} = K_i \quad (6.55)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

K_i 也就是一个正实数，称它为第 i 阶**主刚度**。把 (6.53) 式两边

除以 $\{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\}$ 后, 可得

$$p_i^2 = \frac{\{A^{(i)}\}^T [K] \{A^{(i)}\}}{\{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\}} = \frac{K_i}{M_i} \quad (6.56)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

即第 i 阶固有频率平方的值 p_i^2 等于第 i 阶主刚度 K_i 与第 i 阶主质量 M_i 的比值。

由 (6.54)、(6.55) 式可知, K_i 与 M_i 各对应于一个二次型的值, 前者的二次型与刚度有关, 后者的二次型与质量有关。因此从 (6.56) 式可以看出系统的固有频率随刚度与质量变化的趋势: 当系统的刚度增加, 即刚度矩阵 $[K]$ 中元素值增大时, K_i 值随之增加, 则 p_i^2 值也随之增加, 即固有频率值提高; 反之, 则固有频率值要降低。当系统的质量增加, 即质量矩阵 $[M]$ 中元素值增大时, M_i 值随之增加, 则 p_i^2 值将减小, 即固有频率值降低; 反之, 则固有频率值要提高。上述这种固有频率随系统刚度与质量变化的趋势, 不管系统的自由度数是多少, 都是存在的。

正交性 (6.51)、(6.52) 式的物理意义可以从能量观点来说明。第五章中指出, 多自由度系统的动能 T 与势能 U 的一般表达式分别为:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\} \quad (6.57)$$

$$U = \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\} \quad (6.58)$$

假如系统同时存在两种主振动, 即

$$\{x\} = c_1 \{A^{(1)}\} \sin(p_1 t + \varphi_1) + c_2 \{A^{(2)}\} \sin(p_2 t + \varphi_2) \quad (b)$$

则速度

$$\{\dot{x}\} = c_1 p_1 \{A^{(1)}\} \cos(p_1 t + \varphi_1) + c_2 p_2 \{A^{(2)}\} \cos(p_2 t + \varphi_2) \quad (c)$$

其中 c_1 、 c_2 各为常数。这时系统的动能 T 及势能 U 分别为

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} (\{A^{(i)}\}^T c_i p_i \cos(p_i t + \varphi_i) + \{A^{(j)}\}^T c_j p_j \cos(p_j t + \varphi_j)) [\dot{M}] \\
&\quad \cdot (\{A^{(i)}\} c_i p_i \cos(p_i t + \varphi_i) + \{A^{(j)}\} c_j p_j \cos(p_j t + \varphi_j)) \\
&= \frac{1}{2} \{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} c_i^2 p_i^2 \cos^2(p_i t + \varphi_i) \\
&\quad + \frac{1}{2} \{A^{(j)}\}^T [M] \{A^{(j)}\} c_j^2 p_j^2 \cos^2(p_j t + \varphi_j) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(j)}\} \\
&\quad + \{A^{(j)}\}^T [M] \{A^{(i)}\}) c_i c_j p_i p_j \cos(p_i t + \varphi_i) \cos(p_j t + \varphi_j)
\end{aligned} \tag{d}$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} (\{A^{(i)}\}^T c_i \sin(p_i t + \varphi_i) + \{A^{(j)}\}^T c_j \sin(p_j t + \varphi_j)) [K] \\
&\quad \cdot (\{A^{(i)}\} c_i \sin(p_i t + \varphi_i) + \{A^{(j)}\} c_j \sin(p_j t + \varphi_j)) \\
&= \frac{1}{2} \{A^{(i)}\}^T [K] \{A^{(i)}\} c_i^2 \sin^2(p_i t + \varphi_i) \\
&\quad + \frac{1}{2} \{A^{(j)}\}^T [K] \{A^{(j)}\} c_j^2 \sin^2(p_j t + \varphi_j) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\{A^{(i)}\}^T [K] \{A^{(j)}\} + \{A^{(j)}\}^T [K] \{A^{(i)}\}) \\
&\quad \cdot c_i c_j \sin(p_i t + \varphi_i) \sin(p_j t + \varphi_j)
\end{aligned} \tag{e}$$

由正交性 (6.51)、(6.52) 式, 可知 T 、 U 上述表达式中最后项为零, 故得

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} c_i^2 p_i^2 \cos^2(p_i t + \varphi_i) \\
&\quad + \frac{1}{2} \{A^{(j)}\}^T [M] \{A^{(j)}\} c_j^2 p_j^2 \cos^2(p_j t + \varphi_j) \\
&= \frac{1}{2} M_i c_i^2 p_i^2 \cos^2(p_i t + \varphi_i) + \frac{1}{2} M_j c_j^2 p_j^2 \cos^2(p_j t + \varphi_j) \\
&= T_i + T_j
\end{aligned} \tag{f}$$

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \{A^{(i)}\}^T [K] \{A^{(i)}\} c_i^2 \sin^2(p_i t + \varphi_i) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \{A^{(j)}\}^T [K] \{A^{(j)}\} c_j^2 \sin^2(p_j t + \varphi_j) \\
 &= \frac{1}{2} K_i c_i^2 \sin^2(p_i t + \varphi_i) + \frac{1}{2} K_j c_j^2 \sin^2(p_j t + \varphi_j) \\
 &= U_i + U_j \quad (g)
 \end{aligned}$$

其中 T_i 、 U_i 分别代表仅有第 i 阶主振动存在时系统的动能与势能， T_j 与 U_j 的意义也类似。这样，由于主振型之间存在正交性，就使得系统在同时存在两种主振动时，系统的动能或势能分别是这两种主振动单独存在时，系统的动能之和或势能之和。在计算系统的动能或势能时，可先独立地计算每种主振动产生的动能或势能，然后叠加起来，就得到总的动能或势能。

不仅如此，由 (f)、(g) 式还可得

$$\begin{aligned}
 T_i + U_i &= \frac{1}{2} M_i c_i^2 p_i^2 \cos^2(p_i t + \varphi_i) + \frac{1}{2} K_i c_i^2 \sin^2(p_i t + \varphi_i) \\
 &= \frac{1}{2} M_i c_i^2 p_i^2 \cos^2(p_i t + \varphi_i) + \frac{1}{2} M_i c_i^2 p_i^2 \sin^2(p_i t + \varphi_i) \\
 &= \frac{1}{2} M_i c_i^2 p_i^2 \quad (h)
 \end{aligned}$$

类似地有

$$T_j + U_j = \frac{1}{2} M_j c_j^2 p_j^2 \quad (i)$$

这就说明，对每一个主振动来说，它的动能与势能之和永远是常数。就是说，在系统运动过程中，每一个主振动内部的动能与势能可以互相转化，就像一个独立的单自由度系统振动时的情况一样，各阶主振动之间不会发生能量的传递，因此从能量观点可以看出，各阶主振动之间相互是独立的。这就是主振型正交性的物理意义。

(2) 振型矩阵及正则振型矩阵

为了今后方便起见，我们可以把相互间存在正交性的各阶主

振型列阵,依序排成各列,构成一个 $n \times n$ 阶的振型矩阵 $[A]$,即

$$[A_p] = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \cdots A_1^{(n)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \cdots A_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots \\ A_n^{(1)} & A_n^{(2)} \cdots A_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

$[A_p]$ 的每一列是一个主振型列阵 $\{A^{(i)}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。这样,我们就可以把 (6.51)、(6.54) 式合并成一个式子,即

$$[A_p]^T [M] [A_p] = [M_p] \quad (6.60)$$

其中 $[M_p]$ 是一个对角矩阵,称为主质量矩阵

$$[M_p] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_n \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

类似地,可将 (6.52)、(6.55) 式合并为

$$[A_p]^T [K] [A_p] = [K_p] \quad (6.62)$$

$[K_p]$ 也是对角矩阵,称为主刚度矩阵。

$$[K_p] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_n \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

由于主振型列阵只表示系统作主振动时各座标间幅值的相对大小,上节中我们为方便起见,曾建议如 $A_n^{(i)} \neq 0$ 时,可令 $A_n^{(i)} = 1$

($i = 1, 2, \dots, n$), 这才确定了主振型列阵各元素的具体数值。因此,由这样的主振型列阵构成振型矩阵 $[A_p]$,再将其按 (6.60) 式运算求得主质量矩阵 $[M_p]$,通常它的对角线元素 M_i 值各不相同。为方便起见,我们可将各主振型正则化,对于每一阶主振动,定义一组特定的主振型为**正则振型**,用列阵 $\{A_n^{(i)}\}$ 表示,它满足条件

$$\{A_n^{(i)}\}^T [M] \{A_n^{(i)}\} = 1 \quad (6.64)$$

正则振型 $\{A_n^{(i)}\}$ 可以用任意的主振型 $\{A^{(i)}\}$ 求出, 令

$$\{A_n^{(i)}\} = \frac{1}{c_i} \{A^{(i)}\} \quad (j)$$

c_i 是待定常数, 将 (j) 式代入 (6.64) 式, 得

$$\frac{1}{c_i^2} \{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} = \frac{1}{c_i^2} M = 1$$

$$\therefore c_i = \pm \sqrt{M}, \quad (k)$$

代回 (j) 式, 就可求得正则振型 $\{A_n^{(i)}\}$ 。对各阶主振型依次进行上述运算, 我们就可求得对应 n 阶主振动的 n 个正则振型 $\{A_n^{(i)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。

将所有 n 个正则振型列阵 $\{A_n^{(1)}\}$ 、 $\{A_n^{(2)}\}$ 、 \dots 、 $\{A_n^{(n)}\}$ 依序合并在一起, 就构成了一个 $n \times n$ 阶的正则振型矩阵 $[A_n]$

$$[A_n] = \begin{bmatrix} A_{n1}^{(1)} & A_{n1}^{(2)} & \dots & A_{n1}^{(n)} \\ A_{n2}^{(1)} & A_{n2}^{(2)} & \dots & A_{n2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{nn}^{(1)} & A_{nn}^{(2)} & \dots & A_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

由于正则振型只是主振型中特定的一组, 因此, 对一般主振型所满足的正交性关系 (6.51)、(6.52) 式, 正则振型当然也满足。只是由于条件 (6.64) 式, 使得用正则振型矩阵 $[A_n]$ 按照 (6.60) 式计算得到的正则质量矩阵 $[M_n]$ 是一个单位矩阵 $[I]$, 即

$$[A_n]^T [M] [A_n] = [M_n] = [I] \quad (6.66)$$

$$\text{或} \quad [M_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

用正则振型列阵 $\{A_n^{(i)}\}$ 代入前面 (6.56) 式, 再根据 (6.64) 式, 可得

$$p_i^2 = \frac{\{A_n^{(i)}\}^T [K] \{A_n^{(i)}\}}{\{A_n^{(i)}\}^T [M] \{A_n^{(i)}\}} = \frac{K_{n_i}}{1} = K_{n_i} \quad (6.68)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

正则刚度 K_{n_i} 等于固有频率平方值 p_i^2 。因此, 用正则振型矩阵 $[A_n]$ 按 (6.62) 式算出的正则刚度矩阵 $[K_n]$, 它的对角线元素分别是各阶固有频率平方值, 即

$$[A_n]^T [K] [A_n] = [K_n] \quad (6.69)$$

$$[K_n] = \begin{bmatrix} K_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{n_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n^2 \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

例6.2 用例6.1的结果, 求振型矩阵 $[A_p]$ 及与它对应的主质量矩阵 $[M_p]$ 、主刚度矩阵 $[K_p]$, 再进而求正则振型矩阵 $[A_n]$ 及正则刚度矩阵 $[K_n]$ 。

解 利用例6.1中求得的 $\{A^{(1)}\}$ 、 $\{A^{(2)}\}$ 、 $\{A^{(3)}\}$, 按定义可得振型矩阵 $[A_p]$ 为

$$[A_p] = \begin{bmatrix} 0.301850 & -0.678977 & 2.439268 \\ 0.648535 & -0.606599 & -2.541936 \\ 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

主质量矩阵 $[M_p] = [A_p]^T [M] [A_p]$

$$= \begin{bmatrix} 0.301850 & 0.648535 & 1.000000 \\ -0.678977 & -0.606599 & 1.000000 \\ 2.439268 & -2.541936 & 1.000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.301850 & -0.678977 & 2.439268 \\ 0.648535 & -0.606599 & -2.541936 \\ 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.813124m & 0 & 0 \\ 0 & 2.473965m & 0 \\ 0 & 0 & 22.59572m \end{bmatrix}$$

主刚度矩阵 $[K_N] = [A_p]^T [K] [A_p]$

$$= \begin{bmatrix} 0.301850 & 0.648535 & 1.000000 \\ -0.678977 & -0.606599 & 1.000000 \\ 2.439268 & -2.541936 & 1.000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.637249k & 0 & 0 \\ 0 & 3.974669k & 0 \\ 0 & 0 & 80.03261k \end{bmatrix}$$

由 (j) 式, 可求出正则振型。按 (k) 式可得

$$c_1 = \sqrt{\bar{M}_1} = \sqrt{1.813124m} = 1.346523\sqrt{m}$$

$$c_2 = \sqrt{\bar{M}_2} = \sqrt{2.473965m} = 1.572884\sqrt{m}$$

$$c_3 = \sqrt{\bar{M}_3} = \sqrt{22.59572m} = 4.753496\sqrt{m}$$

(这里在根号前取了正值, 如取负号也可) 将求得的各 c_i 值代入 (j) 式即可求出各阶正则振型列阵, 将它们依序排列可得正则振型矩阵 $[A_N]$ 为

$$[A_N] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & -0.431677 & 0.513228 \\ 0.481637 & -0.385660 & -0.534751 \\ 0.742654 & 0.635775 & 0.210371 \end{bmatrix}$$

正则刚度矩阵 $[K_n] = [A_n]^T [K] [A_n]$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & 0.481637 & 0.742654 \\ -0.431677 & -0.385660 & 0.635775 \\ 0.513228 & -0.534751 & 0.210371 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & -0.431677 & 0.513228 \\ 0.481637 & -0.385660 & -0.534751 \\ 0.742654 & 0.635775 & 0.210371 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.351465 \frac{k}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 1.606599 \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 3.541936 \frac{k}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & p_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(3) 主座标及正则座标

上面我们看到, 利用振型矩阵 $[A_r]$, 通过 (6.60) 式与 (6.62) 式的运算, 可使系统的质量矩阵 $[M]$ 及刚度矩阵 $[K]$ 都变换成对角矩阵形式的主质量矩阵 $[M_n]$ 及主刚度矩阵 $[K_n]$ 。与此类似, 我们也可利用主振型与振型矩阵, 简化系统运动方程式的形式。

已知系统自由振动微分方程式的一般形式为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (6.71)$$

由于 $[M]$ 及 $[K]$ 一般不是对角矩阵, 因此上式是一组相互耦合的微分方程组。

如事先求出此系统的固有频率及主振型, 利用振型矩阵 $[A_r]$, 就可将系统原有的座标 $\{x\}$ 变换成一组新的座标 $\{x_r\}$, 即定义

$$\{x\} = [A_r]\{x_r\} \quad (6.72)$$

$$\text{相应地} \quad \{\ddot{x}\} = [A_r]\{\ddot{x}_r\} \quad (6.73)$$

为了理解这个座标变换的意义, 可将 (6.72) 式写成下述展开的形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \cdots A_1^{(n)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \cdots A_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots \\ A_n^{(1)} & A_n^{(2)} \cdots A_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ \vdots \\ x_{pn} \end{bmatrix}$$

$$= x_{p1} \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ \vdots \\ A_n^{(1)} \end{bmatrix} + x_{p2} \begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ \vdots \\ A_n^{(2)} \end{bmatrix} + \cdots + x_{pn} \begin{bmatrix} A_1^{(n)} \\ A_2^{(n)} \\ \vdots \\ A_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

$$\text{即} \quad \{x\} = x_{p1}\{A^{(1)}\} + x_{p2}\{A^{(2)}\} + \cdots + x_{pn}\{A^{(n)}\} \quad (6.75)$$

可以看出: 原先各座标 x_1, x_2, \dots, x_n 任意一组位移值, 都可以看成是由 n 组主振型按一定的比例组合而成的, 这 n 个比例因子就是 n 个新座标 $x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn}$ 的值。以后我们称这组新的座标 $\{x_p\}$ 为主座标。如果 $x_{p1} = 1$, 而其他各 x_{pi} 值都为零, 则由 (6.75) 式, 得

$$\{x\} = 1 \cdot \{A^{(1)}\} + 0 \cdot \{A^{(2)}\} + \cdots + 0 \cdot \{A^{(n)}\} = \{A^{(1)}\} \quad (6.76)$$

即这时系统各座标值 $\{x\}$ 正好与第一阶主振型值 $\{A^{(1)}\}$ 相等, 这就是第一个主座标 x_{p1} 取单位值的几何意义。其他各主座标值的意义也类似。总之, 每一个主座标的值等于各阶主振型分量在系统原先座标值中占有成分的大小。

将 (6.72)、(6.73) 式引入 (6.71) 式得

$$[M][A_p]\{\ddot{x}_p\} + [K][A_p]\{x_p\} = \{0\} \quad (1)$$

将此式前乘以矩阵 $[A_p]^T$, 得

$$[A_p]^T[M][A_p]\{\ddot{x}_p\} + [A_p]^T[K][A_p]\{x_p\} = \{0\}$$

$$\text{即} \quad [M_p]\{\ddot{x}_p\} + [K_p]\{x_p\} = \{0\} \quad (6.77)$$

由于主质量矩阵 $[M_p]$ 及主刚度矩阵 $[K_p]$ 都是对角矩阵, 因此用主座标描述的系统运动方程式 (6.77) 式中, 各方程式之间互不耦合, 其展开后的形式为

$$\text{即} \quad \{\ddot{x}_n\} + [K_n]\{x_n\} = \{0\} \quad (6.89)$$

这样, 采用正则座标来描写系统的自由振动, 可以得到最简单的运动方程式的形式。另外, 由于与正则振型对应的正则质量矩阵 $[M_n] = [I]$, 故 $[M_n]^{-1} = [I]^{-1} = [I]$, 利用前面 (6.79) 式, 可以得到由原来座标 $\{x\}$ 求得正则座标 $\{x_n\}$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \{x_n\} &= [M_n]^{-1}[A_n]^T[M]\{x\} = [I][A_n]^T[M]\{x\} \\ &= [A_n]^T[M]\{x\} \end{aligned} \quad (6.90)$$

此式也可看成是 (6.85) 式的求逆, 故有

$$[A_n]^{-1} = [A_n]^T[M] \quad (6.91)$$

(4) 振型截断法

有时对 n 自由度的系统, 我们往往只求出它的较低的 n_1 ($n_1 < n$) 个固有频率及主振型, 用它们来近似地分析系统的自由振动与强迫振动的运动规律。对于一些外力随时间变化较慢及系统初始条件中包含高阶主振动分量较少的情况, 特别是对于自由度数 n 值很大的大型系统, 这是经常被采用的方法, 通常称为**振型截断法**。在这种情况下, 我们仍可以把求得的 n_1 个主振型列阵 $\{A^{(i)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n_1$) 依序排列, 构成一个 $n \times n_1$ 阶的**截断振型矩阵** $[A_p^*]$

$$[A_p^*] = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \dots & A_1^{(n_1)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \dots & A_2^{(n_1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^{(1)} & A_n^{(2)} & \dots & A_n^{(n_1)} \end{bmatrix} \quad (6.92)$$

类似前面那样, 也可将主振型正则化, 把 n_1 个正则振型列阵 $\{A_n^{(i)}\}$ 依序排列, 构成 $n \times n_1$ 阶的**截断正则振型矩阵** $[A_p^*]$ 。

由截断振型矩阵 $[A_p^*]$ 可求出**截断主质量矩阵** $[M_p^*]$ 及**截断主刚度矩阵** $[K_p^*]$

$$[M_p^*] = [A_p^*]^T[M][A_p^*] \quad (6.93)$$

$$[K_p^*] = [A_p^*]^T[K][A_p^*] \quad (6.94)$$

$[M_p^*]$ 及 $[K_p^*]$ 都是 $n_1 \times n_1$ 阶的对角矩阵, 它们分别是前面的

$[M_n]$ 及 $[K_n]$ 的左上角的 n_1 阶主子矩阵, 即

$$[M_n^*] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & M_{n_1} \end{bmatrix} \quad (6.95)$$

$$[K_n^*] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & K_{n_1} \end{bmatrix} \quad (6.96)$$

由截断正则振型矩阵 $[A_n^*]$ 求得的截断正则质量矩阵 $[M_n^*]$ 是 $n_1 \times n_1$ 阶的单位矩阵 $[I]$, 截断正则刚度矩阵 $[K_n^*]$ 为

$$[K_n^*] = \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & p_{n_1}^2 \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

利用截断振型矩阵 $[A_n^*]$ 或截断正则振型矩阵 $[A_n^*]$, 可将 n 自由度系统原有的 n 个座标 $\{x\}$ 变换成较少的 n_1 个座标 $\{x_p^*\}$ 或 $\{x_n^*\}$, 即

$$\{x\} = [A_p^*]\{x_p^*\} \quad (6.98)$$

$$\{x_p^*\} = [M_p^*]^{-1}[A_p^*]^T[M]\{x\} \quad (6.99)$$

或
$$\{x\} = [A_n^*]\{x_n^*\} \quad (6.100)$$

$$\{x_n^*\} = [A_n^*]^T[M]\{x\} \quad (6.101)$$

这里的 $\{x_p^*\}$ 及 $\{x_n^*\}$ 都只是 n_1 阶列阵, 它们分别是前面 n_1 阶的主座标列阵 $\{x_p\}$ 与正则座标列阵 $\{x_n\}$ 的前 n_1 个元素组成的。由于主座标及正则座标的个数由 n 个截断、减少成为 n_1 个, 相应地, 经过这样截断了的座标变换后, 系统的自由振动微分方程式的个数也被截断成 n_1 个, 即变成前面(6.78)式或(6.88)式中的前 n_1 式

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{x}_{p1} + K_1 x_{p1} &= 0 \\ M_2 \ddot{x}_{p2} + K_2 x_{p2} &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ M_{n1} \ddot{x}_{pn1} + K_{n1} x_{pn1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.102)$$

$$\text{或} \quad \left. \begin{aligned} \ddot{x}_{n1} + p_1^2 x_{n1} &= 0 \\ \ddot{x}_{n2} + p_2^2 x_{n2} &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \ddot{x}_{nn1} + p_{n1}^2 x_{nn1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.103)$$

振型截断法略去了系统运动过程中次要的、有时也不很可靠的高频振动分量，仅仅保留由较低频率的振动成分组成的运动特性，这样既可以对系统运动进行满足工程精度要求的分析，又节省了分析计算的工作量，这是振型截断法的优点。

6.5 固有频率值相等或为零的情况

在 6.3、6.4 节中，我们指出：正定系统的各固有频率值均不为零，并且已经讨论了各固有频率值互不相等的情况。有些正定系统的固有频率值中会发生其中两个或几个彼此相等的情况，即系统的特征方程式 (6.30) 具有 p^2 的重根；另外，半正定系统各固有频率值中一定会出现零值，即特征方程式具有零根。本节对上述两种情况分别加以讨论。

先讨论正定系统中固有频率值出现相等的情况。

如果一个正定系统的特征方程式 (6.30) 求得的 n 个 p^2 的根中，有两个或几个彼此相等，则对应这两个或几个固有频率，它们的主振型就不是唯一的。例如，假如系统的固有频率 p_1 与 p_2 相等，其他各固有频率则与它们不同，则将 p_1^2 值代入 6.3 节 (6.27) 式以求主振型时，方程组的 n 个式子中，只有 $n-2$ 个是独立的，这正是由于 p_1^2 是一个特征方程式的二重根，因而与 6.3 节中讨论过的各 p^2 根均为单根的情况不同。在代数学中可以严格证明这一点。这样，假定 (6.27) 式中前 $n-2$ 个式子是独立的，

则将这 $n-2$ 个式子最后两项移到等式右端, 可得

$$\left. \begin{aligned}
 & (k_{11} - m_{11}p_1^2)A_1 + (k_{12} - m_{12}p_1^2)A_2 + \cdots \\
 & \quad + (k_{1\ n-2} - m_{1\ n-2}p_1^2)A_{n-2} \\
 & = - (k_{1\ n-1} - m_{1\ n-1}p_1^2)A_{n-1} - (k_{1n} - m_{1n}p_1^2)A_n \\
 & (k_{21} - m_{21}p_1^2)A_1 + (k_{22} - m_{22}p_1^2)A_2 + \cdots \\
 & \quad + (k_{2\ n-2} - m_{2\ n-2}p_1^2)A_{n-2} \\
 & = - (k_{2\ n-1} - m_{2\ n-1}p_1^2)A_{n-1} - (k_{2n} - m_{2n}p_1^2)A_n \\
 & \dots\dots\dots \\
 & (k_{n-2\ 1} - m_{n-2\ 1}p_1^2)A_1 + (k_{n-2\ 2} - m_{n-2\ 2}p_1^2)A_2 + \cdots \\
 & \quad + (k_{n-2\ n-2} - m_{n-2\ n-2}p_1^2)A_{n-2} \\
 & = - (k_{n-2\ n-1} - m_{n-2\ n-1}p_1^2)A_{n-1} \\
 & \quad - (k_{n-2\ n} - m_{n-2\ n}p_1^2)A_n
 \end{aligned} \right\} \quad (6.104)$$

此式可对 A_1, A_2, \dots, A_{n-2} 求解(假定左边系数行列式值不为零, 否则要另选其他 A_i 项移置等式右边)。任意选取两组独立的 A_{n-1}, A_n 值, 例如选 $A_{n-1} = 0, A_n = 1$ 作为第一组, 选 $A_{n-1} = 1, A_n = 0$ 作为第二组, 分别代入(6.104)式右边, 均可解出相应的 A_1, A_2, \dots, A_{n-2} 的值, 这样我们就得到了两组主振型, 它们可以分别认为是各自对应于 p_1^2 及 $p_2^2 (= p_1^2)$ 两个固有频率的两个主振型 $\{A^{(1)}\}$ 及 $\{A^{(2)}\}$, 即

$$\{A^{(1)}\} = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ \vdots \\ A_{n-2}^{(1)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{A^{(2)}\} = \begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ \vdots \\ A_{n-2}^{(2)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.105)$$

显然, 这样求出的两个主振型 $\{A^{(1)}\}$ 及 $\{A^{(2)}\}$, 具有一定的任意性。事实上, 我们可以把任意的 $C_1\{A^{(1)}\} + C_2\{A^{(2)}\}$ 看成是对应此固有频率 $p_1 = p_2$ 的一个主振型(其中 C_1, C_2 为任意常数), 因为由(6.28)式, 将 $p_1^2, p_2^2 = p_1^2$ 及 $\{A^{(1)}\}, \{A^{(2)}\}$ 分别代入后, 有

$$[K]\{A^{(1)}\} - p_1^2[M]\{A^{(1)}\} = \{0\} \quad (6.106)$$

$$[K]\{A^{(2)}\} - p_1^2[M]\{A^{(2)}\} = \{0\} \quad (6.107)$$

因此,有

$$\begin{aligned} & [K](C_1\{A^{(1)}\} + C_2\{A^{(2)}\}) - p_1^2[M](C_1\{A^{(1)}\} + C_2\{A^{(2)}\}) \\ &= C_1([K]\{A^{(1)}\} - p_1^2[M]\{A^{(1)}\}) + C_2([K]\{A^{(2)}\} \\ & \quad - p_1^2[M]\{A^{(2)}\}) = \{0\} \end{aligned} \quad (6.108)$$

故 $C_1\{A^{(1)}\} + C_2\{A^{(2)}\}$ 也可以看成是对应于 p_1^2 或 p_2^2 的主振型。

由于 C_1 、 C_2 是任意常数,故可认为有无穷多个主振型的解,但是其中只能任意选取两个相互独立的,其他的解则均可由这两个解线性组合得到。这样任意的两个独立的主振型 $\{A^{(1)}\}$ 及 $\{A^{(2)}\}$, 它们一般不满足正交性,即

$$\{A^{(1)}\}^T[M]\{A^{(2)}\} \neq 0 \quad (a)$$

$$\{A^{(1)}\}^T[K]\{A^{(2)}\} \neq 0 \quad (b)$$

但我们可作列矩阵 $\{A^{(2)}\} + C\{A^{(1)}\}$, 其中 C 为待定常数,要求这个列矩阵对质量矩阵 $[M]$ 与 $\{A^{(1)}\}$ 正交,即

$$\{A^{(1)}\}^T[M](\{A^{(2)}\} + C\{A^{(1)}\}) = 0$$

由此可解出待定常数 C 为

$$C = - \frac{\{A^{(1)}\}^T[M]\{A^{(2)}\}}{\{A^{(1)}\}^T[M]\{A^{(1)}\}} = - \frac{\{A^{(1)}\}^T[M]\{A^{(2)}\}}{M_1} \quad (c)$$

由这个 C 值而组合的列矩阵 $\{A^{(2)}\} + C\{A^{(1)}\}$, 就是与 $\{A^{(1)}\}$ 对质量矩阵 $[M]$ 是正交的, 不难进一步证明它们对刚度矩阵 $[K]$ 也是正交的, 而且 $\{A^{(1)}\}$ 与这个 $\{A^{(2)}\} + C\{A^{(1)}\}$ 之间彼此仍是独立的, 今后我们就只选取这样两个既独立又正交的主振型作为对应于 p_1 及 $p_2 (= p_1)$ 的两个主振型。当然, 这种相互独立又正交的主振型组仍可以有无穷多组, 正好像在平面几何中, 一个圆有无穷多组相互垂直的两个半径一样。我们只是任选了其中的一组。

例6.3 图 6-6 所示的两个相同的弹簧质量系统, 如两质量之间联接一根质量可以忽略不计的刚杆, 则

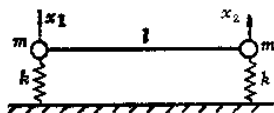


图 6-6

构成一个两自由度的系统。求它的固有频率及主振型。

解 取两质量分别偏离其平衡位置的位移 x_1 、 x_2 为广义坐标, 则动能 T 、势能 U 分别为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

由拉格朗日方程式, 得系统自由振动方程式为

$$m \ddot{x}_1 + k x_1 = 0$$

$$m \ddot{x}_2 + k x_2 = 0$$

求 $x_i = A_i \sin(pt + \varphi)$ ($i = 1, 2$) 的解, 得

$$(k - m p^2) A_1 = 0$$

$$(k - m p^2) A_2 = 0$$

特征方程式为 $(k - m p^2)^2 = 0$

故
$$p_1^2 = p_2^2 = \frac{k}{m}$$

显然, 我们可取

$$\{A^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{A^{(2)}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这样一组相互正交的主振型(图 6-7); 但也可以取

$$\{A^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{A^{(2)}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

这样一组相互正交的主振型(图 6-8)。此外还可选取其他形式的各组相互正交的主振型。

当正定系统具有 $r (> 2)$ 个相等的固有频率时, 我们也可以与上面类似地求得任意 r 个独立的主振型, 对它们再进

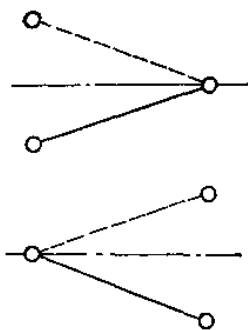


图 6-7

行一定的线性组合,总可以选出 r 个彼此既独立又正交的主振型。

对应于正定系统的 r 个相等的固有频率及选定的 r 个独立又正交的主振型,存在着系统的 r 个主振动,其形式都是如 6.3 节中 (6.37) 式所表示的简谐振动,它们之间虽然彼此频率相同,但振幅及相位角却相互是独立的,每个主振动具有两个待定常数,因此 6.3 节中正定系统自由振动的一般解的形式 (6.36) 式仍然有效。

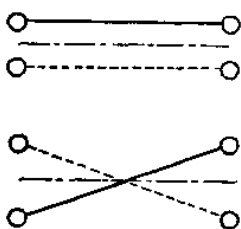


图 6-8

下面再讨论系统固有频率中出现零值的情况。

6.3 节中已经指出,正定系统的各固有频率恒取正值,决不可能取零值。固有频率取零值的情况只能在半正定系统中出现,反之,半正定系统一定会出现零值的固有频率。

6.2 节中指出,任何盘轴扭振系统如支承允许轴自由转动,都是半正定系统。第四章 4.3 节中讨论过将发动机曲轴扭振简化为两圆盘的盘轴扭振系统的例子,求得的固有频率中有一个为零,相应的各圆盘转角幅度比值为

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a}{a - p^2} = \frac{a}{a - 0} = 1$$

即各圆盘转角相同。从物理意义上说,这个零值的固有频率对应的系统的运动,是系统没有弹性变形的、离开原有中性平衡位置的整体刚体转动,而不是围绕平衡位置所作的简谐运动。这是一个例子。

为了进一步加深理解,再举一个三圆盘的盘轴扭振系统的例子加以说明。

例 6.4 图 6-9 所示系统,三圆盘转动惯量均为 I ,其间两段轴的抗扭刚度均为 k ,求系统的固有频率及主振型并讨论之。

解 系统的动能为 $T = \frac{1}{2} (I\dot{\theta}_1^2 + I\dot{\theta}_2^2 + I\dot{\theta}_3^2)$, 势能为

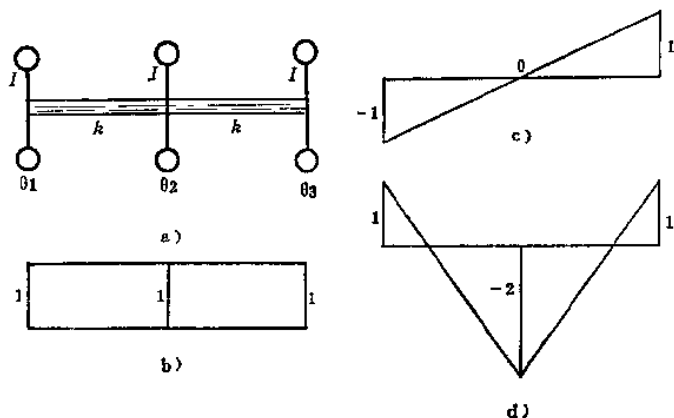


图 6-9

$U = \frac{1}{2} k [(\theta_1 - \theta_2)^2 + (\theta_1 - \theta_3)^2]$, 代入拉格朗日方程式可得自由振动方程式为

$$\left. \begin{aligned} I\ddot{\theta}_1 + k\theta_1 - k\theta_2 &= 0 \\ I\ddot{\theta}_2 - k\theta_1 + 2k\theta_2 - k\theta_3 &= 0 \\ I\ddot{\theta}_3 - k\theta_2 + k\theta_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

令 $\theta_i = A_i \sin(pt + \varphi) \quad (i = 1, 2, 3)$ 代入(d)式得

$$\left. \begin{aligned} (k - Ip^2)A_1 - kA_2 &= 0 \\ -kA_1 + (2k - Ip^2)A_2 - kA_3 &= 0 \\ -kA_2 + (k - Ip^2)A_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

特征方程式展开并简化后可得

$$p^2 \left(p^2 - \frac{k}{I} \right) \left(p^2 - \frac{3k}{I} \right) = 0$$

$$\therefore p_1^2 = 0, \quad p_2^2 = \frac{k}{I}, \quad p_3^2 = \frac{3k}{I}$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \sqrt{\frac{k}{I}}, \quad p_3 = \sqrt{\frac{3k}{I}}$$

将 $p_1 = 0$ 代回(e)式, 得

$$\left. \begin{aligned} k A_1^{(1)} - k A_2^{(1)} &= 0 \\ -k A_1^{(1)} + 2k A_2^{(1)} - k A_3^{(1)} &= 0 \\ -k A_2^{(1)} + k A_3^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

如令 $A_3^{(1)} = 1$, 则 $A_1^{(1)} = A_2^{(1)} = 1$ 是满足上式的解, 故

$$A_1^{(1)} = A_2^{(1)} = A_3^{(1)} = 1$$

把 p_2^* 、 p_3^* 值代回 (e) 式, 并令 $A_3^{(2)} = 1$, $A_3^{(3)} = 1$ 可分别解得

$$A_1^{(2)} = -1, \quad A_2^{(2)} = 0$$

$$A_1^{(3)} = 1, \quad A_2^{(3)} = -2$$

因此对应于三个固有频率 p_1 、 p_2 、 p_3 , 其主振型各为 (见图 6-9)

$$\{A^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{A^{(2)}\} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{A^{(3)}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (g)$$

对应两个非零值的固有频率 p_2 、 p_3 , 系统有两个以

$$\theta_i = A_i^{(2)} \sin(p_2 t + \varphi_2) \quad (h)$$

$$\theta_i = A_i^{(3)} \sin(p_3 t + \varphi_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

形式表示的主振动, 这与正定系统中的情况是类似的。但需着重指出: 对应于 $p_1 = 0$ 的情况, 系统不再在平衡位置附近作简谐振动形式的主振动, 而是按

$$\theta_i = A_i^{(1)} (t + \tau_1) \quad (6.109)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

这种可以无限远离平衡位置 $\theta_i = 0$ 的刚体转动的运动规律 (其中 $A_i^{(1)}$ 及 τ_1 为待定常数)。如将 (6.109) 式形式的解代入系统运动方程式 (d), 我们同样得到联系各 $A_i^{(1)}$ 的方程式 (f)。这个 (f) 式在本质上可理解为系统的平衡方程。事实上, 根据平衡方程式

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_i} = 0 \text{ 可得}$$

$$\left. \begin{aligned} k\theta_1 - k\theta_2 &= 0 \\ -k\theta_1 + 2k\theta_2 - k\theta_3 &= 0 \\ -k\theta_2 + k\theta_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

它的形式与(f)式完全相同。(f)式或(i)式之所以有非零解,正是由于半正定系统在 $\theta_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$)的位置只是中性平衡位置,此外还有其他无限多个 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \neq 0$ 的中性平衡位置。这也正是此系统可以具有整体的刚体运动的实质。这种情况在正定系统中是绝不可能出现的。

这样,对应于零值固有频率的系统刚体运动规律的(6.109)式,也具有两个待定常数,一个是 τ_1 ,一个是确定幅度的待定常数,例如可取为 $A_3^{(1)}$,将(6.109)式的解与两个简谐的主振动的解(h)式叠加起来,一共有六个待定常数,仍是这系统自由振动的一般解。根据系统初始条件可以求解(见6.6节例6.7)。

本例中主振型 $\{A^{(1)}\}$ 与 $\{A^{(2)}\}$ 、 $\{A^{(3)}\}$ 之间的正交性,可以仿前面类似地证明。这里对质量矩阵 $[M]$ 的正交性具有一定的物理意义。由 $\{A^{(1)}\}^T [M] \{A^{(2)}\} = 0$, $\{A^{(2)}\}^T [M] \{A^{(3)}\} = 0$,并取 $\{A^{(1)}\}^T = [1, 1, 1]$ 得

$$\left. \begin{aligned} I A_1^{(2)} + I A_2^{(2)} + I A_3^{(2)} &= 0 \\ I A_1^{(3)} + I A_2^{(3)} + I A_3^{(3)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

此二式分别乘以 $\sin(p_2 t + \varphi_2)$ 及 $\sin(p_3 t + \varphi_3)$ 后,可得

$$\left. \begin{aligned} I \theta_1^{(2)} + I \theta_2^{(2)} + I \theta_3^{(2)} &= 0 \\ I \theta_1^{(3)} + I \theta_2^{(3)} + I \theta_3^{(3)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

如系统在自由振动时不包含刚体运动成分,则各圆盘 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 的运动规律为

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= A_1^{(2)} \sin(p_2 t + \varphi_2) + A_1^{(3)} \sin(p_3 t + \varphi_3) = \theta_1^{(2)} + \theta_1^{(3)} \\ \theta_2 &= A_2^{(2)} \sin(p_2 t + \varphi_2) + A_2^{(3)} \sin(p_3 t + \varphi_3) = \theta_2^{(2)} + \theta_2^{(3)} \\ \theta_3 &= A_3^{(2)} \sin(p_2 t + \varphi_2) + A_3^{(3)} \sin(p_3 t + \varphi_3) = \theta_3^{(2)} + \theta_3^{(3)} \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

故将(k)式中两式相加后可得

$$I\theta_1 + I\theta_2 + I\theta_3 = 0 \quad (m)$$

对时间求导数, 得

$$I\dot{\theta}_1 + I\dot{\theta}_2 + I\dot{\theta}_3 = 0 \quad (n)$$

此式表示系统在这样的自由振动时, 其总动量矩守恒且恒为零值, (m)式是此式积分形式。

如果我们只想研究系统不包含刚体运动成分的自由振动解, 可利用(m)式, 得

$$\theta_3 = -\theta_1 - \theta_2 \quad (o)$$

把座标 θ_3 消去, 即将系统的座标由 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 三个缩减为 θ_1 、 θ_2 两个。将(o)式代入系统动能 T 与势能 U 的表达式, 得

$$T = \frac{1}{2} I [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + (-\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2] = I [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2]$$

$$U = \frac{1}{2} k [(\theta_1 - \theta_2)^2 + (\theta_2 + \theta_1 + \theta_2)^2] = \frac{k}{2} [2\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 + 5\theta_2^2]$$

根据拉格朗日方程式, 可建立缩减座标后的系统的自由振动微分方程式为

$$\left. \begin{aligned} 2I\ddot{\theta}_1 + I\ddot{\theta}_2 + 2k\theta_1 + k\theta_2 &= 0 \\ I\ddot{\theta}_1 + 2I\ddot{\theta}_2 + k\theta_1 + 5k\theta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

$$\text{令} \quad \theta_i = A_i \sin(p_i t + \varphi) \quad (q)$$

$$(i = 1, 2)$$

代入(p)式, 得

$$\left. \begin{aligned} (2k - 2Ip^2)A_1 + (k - Ip^2)A_2 &= 0 \\ (k - Ip^2)A_1 + (5k - 2Ip^2)A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

特征方程式展开后可求得两个固有频率平方值为

$$p_1^2 = \frac{k}{I}, \quad p_2^2 = \frac{3k}{I} \quad (s)$$

它们与前面求到的系统两个非零的固有频率的平方值相同。将(s)式中 p_1^2 、 p_2^2 值分别代入(r)式中第二式, 并令 $A_1^{(1)} = A_1^{(2)} = 1$ 可得

$$A_1^{(1)} = 0 \quad A_2^{(2)} = -2$$

由(○)式

$$\begin{aligned}\theta_3 &= -\theta_1 - \theta_2 = -A_1 \sin(pt + \varphi) - A_2 \sin(pt + \varphi) \\ &= -(A_1 + A_2) \sin(pt + \varphi) = A_3 \sin(pt + \varphi)\end{aligned}$$

因此

$$A_3^{(1)} = -A_1^{(1)} - A_2^{(1)} = -1 - 0 = -1$$

$$A_3^{(2)} = -A_1^{(2)} - A_2^{(2)} = -1 - (-2) = 1$$

故仍得系统自由振动时两个简谐振动成分的主振型为

$$\{A^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \{A^{(2)}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t)$$

此结果与前面系统未缩减坐标时求得的结果是一样的，与(§)式比较即可看出。

这个例子显示出来的一些特点，在其他半正定系统中也会类似地表现出来。总之，半正定系统的每一个零值固有频率总对应着系统的一种刚体运动形式，其特解都如(6.109)式所表示那样。

有些半正定系统可能求出不止一个的零值固有频率，这说明这些系统具有不止一个独立的刚体运动形式。例如，对于没有任何约束的带有若干集中质量的梁，计算其平面弯曲振动时，就可以出现两个零值的固有频率，说明此系统在平面内具有上下移动及转动两种独立的刚体运动形式。对于这种有几个零值固有频率的情况，我们仍可以采用类似有几个非零值的相等的固有频率那样的处理方法，求出对应的几个既独立又正交的主振型，这几阶主振动都是如(6.109)式所示的刚体运动形式，每个主振动含有两个独立的待定常数，将这些刚体运动形式的主振动与其他简谐振动形式的主振动叠加起来，可以得到这些半正定系统自由振动的一般解。

如前所述，任意半正定系统的平衡位置都只是中性平衡位置，除各座标值均为零的平衡位置外，还有其他各座标值不均为零的平衡位置。平衡位置可由平衡方程 $\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots$),

n) 确定, 即由下式确定

$$\left. \begin{aligned} k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + \cdots + k_{1n}q_n &= 0 \\ k_{21}q_1 + k_{22}q_2 + \cdots + k_{2n}q_n &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ k_{n1}q_1 + k_{n2}q_2 + \cdots + k_{nn}q_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.110)$$

各座标 q_i 值在平衡位置时如不均为零, 意味着上式的系数矩阵 (即刚度矩阵 $[K]$) 的行列式取零值, 因此不能由半正定系统的刚度矩阵 $[K]$ 求逆得到柔度矩阵 $[\delta]$ 。在物理意义上, 说明任意半正定系统在其上某一点加以单位力后, 通常系统将无法维持平衡而产生刚体运动, 因此柔度影响系数及柔度矩阵 $[\delta]$ 没有意义。所以, 半正定系统只能用刚度矩阵 $[K]$ 建立前面 (6.25) 式那种形式的自由振动微分方程式, 用柔度矩阵 $[\delta]$ 建立运动方程式的方法 (见前面 (6.41) 式), 只能对正定系统才能使用。

综合本节所述, 即使多自由度系统的固有频率中出现其中有几个相等或有取零值的情况, 我们仍可找到对应的各阶独立且正交的主振型, 还可进而求出各阶正则振型, 所以无论对各种正定或半正定的系统, 6.3、6.4 节叙述的有关振型矩阵, 正则振型矩阵、主座标、正则座标等一切概念及分析方法均可以应用。

6.6 系统对初始条件的响应

假定系统的座标为 x_1, x_2, \dots, x_n , 给出了初始时刻 $t = 0$ 时, 各座标 x_1, x_2, \dots, x_n 及速度 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ 的初始值 $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ 及 $\dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dots, \dot{x}_{n0}$, 下面我们来求在这样给定的初始条件下的系统的自由振动即系统对于给定初始条件的响应。

如前所述, 系统自由振动微分方程式是 n 个二阶的常微分方程组。给定了 $2n$ 个初始条件, 就完全确定了方程的一组特解, 这组特解就是系统的响应。数学上把这类问题称为微分方程组的初值问题。可以用数值求解的方法直接求出这组特解; 也可以先求出方程式的一般解, 用 $2n$ 个初始条件确定一般解中 $2n$ 个待定常数值, 从而求得这组特解。对前一种方法我们这里不予讨论。后

一种方法正是我们前几节中已开始讨论的方法：根据系统的自由振动微分方程式，我们已经求得正定系统的自由振动的一般形式，即如(6.36)式所示的由 n 组简谐振动成分的主振动叠加而成的一般自由振动形式，其中固有频率及主振型可由系统惯性及弹性性质确定，与系统各座标特定的初始值无关；固有频率中有几个相等时，仍不改变一般解(6.36)式的形式。半正定系统的固有频率中有一个或几个为零，相应的一个或几个主振动就呈类同(6.109)式那样的刚体运动形式，将其替换(6.36)式中第一阶或前几阶的简谐振动形式的主振动表达式后，就可以得到半正定系统自由振动的一般解的表达式。为了确定正定或半正定系统自由振动一般解中 $2n$ 个待定常数，如限于在原先座标 x_1, x_2, \dots, x_n 范围内求解，可以根据给定的 $2n$ 个初始条件 $x_{i0}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ 及 $\dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dots, \dot{x}_{n0}$ ，求解 $2n$ 个联立方程式(或改换每阶主振动解的形式，求解两组 n 个联立方程式)。这种联立方程式的求解并没有原则上的困难，但是有一定的计算工作量。如果我们利用已经求得的主振型或正则振型，并借助系统原座标与主座标或正则座标间的座标变换，就可以避免求解联立方程式，使计算工作量减少，这样可以充分体现振型叠加法的长处。

为此，我们在求出系统的固有频率及主振型、正则振型后，利用(6.85)式建立系统原有座标与正则座标之间的座标变换，用正则座标 $x_{N1}, x_{N2}, \dots, x_{Nn}$ 表示的系统自由振动微分方程式为(6.88)式，对于正定系统，由(6.88)式很容易求出各正则座标的一般解为

$$x_{Ni} = A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.111)$$

待定常数 A_i, B_i 可以由初始时刻 $t = 0$ 时，各正则座标及其速度的初始值 x_{Ni0}, \dot{x}_{Ni0} 表示，这与一自由度系统中由初始条件决定待定常数的情况是一样的，即(6.111)式可改写为

$$x_{Ni} = x_{Ni0} \cos p_i t + \frac{\dot{x}_{Ni0}}{p_i} \sin p_i t \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.112)$$

这样，剩下的问题就是如何由给定的系统座标及速度的初始值

$x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ 及 $\dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dots, \dot{x}_{n0}$, 求出各正则座标及速度的初始值 $x_{N10}, x_{N20}, \dots, x_{Nn0}$ 及 $\dot{x}_{N10}, \dot{x}_{N20}, \dots, \dot{x}_{Nn0}$ 。这问题可由(6.90)式解决, 利用(6.90)式, 我们可求得正则座标的初始值为

$$\{x_N\}_{t=0} = [A_N]^T [M] \{x\}_{t=0} \quad (6.113)$$

即

$$\begin{bmatrix} x_{N10} \\ x_{N20} \\ \vdots \\ x_{Nn0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N2}^{(1)} & \dots & A_{Nn}^{(1)} \\ A_{N1}^{(2)} & A_{N2}^{(2)} & \dots & A_{Nn}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}^{(n)} & A_{N2}^{(n)} & \dots & A_{Nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix} \quad (6.114)$$

将(6.90)式两边对时间求导数, 得

$$\{\dot{x}_N\} = [A_N]^T [M] \{\dot{x}\} \quad (6.115)$$

在初始时刻 $t = 0$, 有

$$\{\dot{x}_N\}_{t=0} = [A_N]^T [M] \{\dot{x}\}_{t=0} \quad (6.116)$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{N10} \\ \dot{x}_{N20} \\ \vdots \\ \dot{x}_{Nn0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N2}^{(1)} & \dots & A_{Nn}^{(1)} \\ A_{N1}^{(2)} & A_{N2}^{(2)} & \dots & A_{Nn}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}^{(n)} & A_{N2}^{(n)} & \dots & A_{Nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n0} \end{bmatrix} \quad (6.117)$$

将(6.114)、(6.117)式计算结果代入(6.112)式, 再由(6.85)式就可求得系统用原坐标 x_1, x_2, \dots, x_n 表示的响应, 即

$$\{x\} = [A_N] \{x_N\}$$

或

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N1}^{(2)} & \dots & A_{N1}^{(n)} \\ A_{N2}^{(1)} & A_{N2}^{(2)} & \dots & A_{N2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{Nn}^{(1)} & A_{Nn}^{(2)} & \dots & A_{Nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N10} \cos p_1 t + \frac{1}{p_1} \dot{x}_{N10} \sin p_1 t \\ x_{N20} \cos p_2 t + \frac{1}{p_2} \dot{x}_{N20} \sin p_2 t \\ \vdots \\ x_{Nn0} \cos p_n t + \frac{1}{p_n} \dot{x}_{Nn0} \sin p_n t \end{bmatrix} \quad (6.118)$$

例6.5 求例6.1的系统对于初始条件: $t = 0$, $x_{10} = 1$, $x_{20} = x_{30} = 0$, $\dot{x}_{30} = 1$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$ 的响应。

解 由例6.1、6.2, 已求得系统的固有频率

$$p_1 = 0.592845\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad p_2 = 1.237517\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad p_3 = 1.882003\sqrt{\frac{k}{m}},$$

正则振型矩阵 $[A_N]$ 为

$$[A_N] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & -0.431677 & 0.513228 \\ 0.481637 & -0.385660 & -0.534751 \\ 0.742654 & 0.635775 & 0.210371 \end{bmatrix}$$

因

$$[M] = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

故可由 (6.114)、(6.117)、式求得各正则座标及速度的初始值为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{N10} \\ x_{N20} \\ x_{N30} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & 0.481637 & 0.742654 \\ -0.431677 & -0.385660 & 0.635775 \\ 0.513228 & -0.534751 & 0.210371 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0.448340 \\ -0.863353 \\ 1.026456 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{N10} \\ \dot{x}_{N20} \\ \dot{x}_{N30} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & 0.481637 & 0.742654 \\ -0.431677 & -0.385660 & 0.635775 \\ 0.513228 & -0.534751 & 0.210371 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0.742654 \\ 0.635775 \\ 0.210371 \end{bmatrix}$$

再代入(6.118)式即得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & -0.431677 & 0.513228 \\ 0.481637 & -0.385660 & -0.534751 \\ 0.742654 & 0.635775 & 0.210371 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.448340\sqrt{m} \cos p_1 t + \frac{0.742654\sqrt{m}}{p_1} \sin p_1 t \\ -0.863353\sqrt{m} \cos p_2 t + \frac{0.635775\sqrt{m}}{p_2} \sin p_2 t \\ 1.026456\sqrt{m} \cos p_3 t + \frac{0.210371\sqrt{m}}{p_3} \sin p_3 t \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_1 = 0.100504 \cos p_1 t + \frac{0.166481}{p_1} \sin p_1 t + 0.372690 \cos p_2 t$$

$$- \frac{0.274449}{p_2} \sin p_2 t + 0.526806 \cos p_3 t + \frac{0.107969}{p_3} \sin p_3 t$$

$$x_2 = 0.215937 \cos p_1 t + \frac{0.357689}{p_1} \sin p_1 t + 0.332961 \cos p_2 t$$

$$- \frac{0.245193}{p_2} \sin p_2 t - 0.518898 \cos p_3 t - \frac{0.112496}{p_3} \sin p_3 t$$

$$x_3 = 0.332961 \cos p_1 t + \frac{0.551534}{p_1} \sin p_1 t - 0.54889 \cos p_2 t$$

$$+ \frac{0.404210}{p_2} \sin p_2 t + 0.215937 \cos p_3 t + \frac{0.014256}{p_3} \sin p_3 t$$

这个计算结果表明：对于本例中给出的初始条件，系统的自由振动同时包含三种主振动的分量。

例6.6 求例6.1的系统具有初始条件：\$t=0\$，\$x_{10}=2.15838\$，\$x_{20}=1.92830\$，\$x_{30}=-3.17887\$，\$\dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=\dot{x}_{30}=0\$的响应。

解 与例6.5类似，可求出各正则座标及速度的初始值为

$$\begin{bmatrix} x_{N10} \\ x_{N20} \\ x_{N30} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & 0.481637 & 0.742654 \\ -0.431677 & -0.385660 & 0.635775 \\ 0.513228 & -0.534751 & 0.210371 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.15838 \\ 1.92830 \\ -3.17887 \end{bmatrix} = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0 \\ -5.00000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{N10} \\ \dot{x}_{N20} \\ \dot{x}_{N30} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & 0.481637 & 0.742654 \\ -0.431677 & -0.385660 & 0.635775 \\ 0.513228 & -0.534751 & 0.210371 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

代入(6.118)式即得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.224170 & -0.431677 & 0.513228 \\ 0.481637 & -0.385660 & -0.534751 \\ 0.742654 & 0.635775 & 0.210371 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5.00000\sqrt{m}\cos p_2 t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} x_1 &= 2.15838 \cos p_2 t, \quad x_2 = 1.92830 \cos p_2 t, \\ x_3 &= -3.17887 \cos p_2 t \end{aligned}$$

这个结果表明, 由于本例给定的初始条件比较特殊, 使得系统产生的自由振动只包含第二阶主振动的成分。

上面是正定系统的情况。对于半正定系统, 由于它的固有频率中至少有一个或有 r 个为零, 对应于零值固有频率的正则座标 x_{Ni} ($i = 1, 2, \dots, r$) 的运动方程式为

$$\ddot{x}_{Ni} + p_i^2 x_{Ni} = \ddot{x}_{Ni} + 0 \cdot x_{Ni} = \ddot{x}_{Ni} = 0 \quad (6.119)$$

$$\therefore \quad x_{Ni} = A_i + B_i t \quad (6.120)$$

或用其初始值 x_{Ni0} 及 \dot{x}_{Ni0} 表示为

$$x_{Ni} = x_{Ni0} + \dot{x}_{Ni0} t \quad (6.121)$$

再利用(6.118)式可求得系统原先各座标 x_1, x_2, \dots, x_n 的响应为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N1}^{(2)} \cdots A_{N1}^{(n)} \\ A_{N2}^{(1)} & A_{N2}^{(2)} \cdots A_{N2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots \\ A_{Nr}^{(1)} & A_{Nr}^{(2)} \cdots A_{Nr}^{(n)} \\ A_{N,r+1}^{(1)} & A_{N,r+1}^{(2)} \cdots A_{N,r+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots \\ A_{Nn}^{(1)} & A_{Nn}^{(2)} \cdots A_{Nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N10} + \dot{x}_{N10} t \\ x_{N20} + \dot{x}_{N20} t \\ \vdots \\ x_{Nr0} + \dot{x}_{Nr0} t \\ x_{N,r+10} \cos p_{r+1} t + \dot{x}_{N,r+10} \sin p_{r+1} t \\ \vdots \\ x_{Nn0} \cos p_n t + \dot{x}_{Nn0} \sin p_n t \end{bmatrix} \quad (6.122) \end{aligned}$$

例6.7 对例6.4的半正定系统, 如各圆盘 I 在初始时刻 $t = 0$ 时, $\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_{30} = 0$, $\dot{\theta}_{10} = \omega$, $\dot{\theta}_{20} = \dot{\theta}_{30} = 0$, 求系统的响应。

解 例6.4中已求得此系统的固有频率为 $p_1 = 0$, $p_2 = \sqrt{\frac{k}{I}}$,

$p_2 = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{k}{I}}$, 振型矩阵 $[A_p]$ 为

$$[A_p] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

进一步不难由 $[A_p]$ 算出正则振型矩阵 $[A_N]$ 为

$$[A_N] = \frac{1}{\sqrt{6}I} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

质量矩阵 $[M]$ 为

$$[M] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此可求出各正则座标及速度的初始值为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_{N10} \\ \theta_{N20} \\ \theta_{N30} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{6}I} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{N10} \\ \dot{\theta}_{N20} \\ \dot{\theta}_{N30} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{6}I} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{I}{6}} \omega \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}\theta_{v1} &= \sqrt{\frac{I}{6}} \omega \cdot \sqrt{2} t \\ \theta_{v2} &= -\sqrt{\frac{I}{6}} \omega \cdot \sqrt{3} \frac{\sin p_2 t}{p_2} \\ \theta_{v3} &= \sqrt{\frac{I}{6}} \omega \cdot \left(-\frac{1}{p_3}\right) \sin p_3 t\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6} I} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{I}{6}} \omega \begin{bmatrix} \sqrt{2} t \\ -\sqrt{3} \cdot \frac{1}{p_2} \sin p_2 t \\ \frac{1}{p_3} \sin p_3 t \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\omega}{6} \begin{bmatrix} 2t + \frac{3}{p_2} \sin p_2 t + \frac{1}{p_3} \sin p_3 t \\ 2t - \frac{2}{p_3} \sin p_3 t \\ 2t - \frac{3}{p_2} \sin p_2 t + \frac{1}{p_3} \sin p_3 t \end{bmatrix}$$

此结果说明, 在这里给出的初始条件下, 各圆盘的响应是整个系统的刚体转动与简谐振动形式的主振动的叠加。

6.7 矩阵迭代法

在 6.3 节中我们已经知道, 无阻尼多自由度系统的自由振动, 其固有频率及主振型可由下式求出

$$[K]\{A\} - p^2[M]\{A\} = \{0\} \quad (6.123)$$

或写成

$$[K]\{A\} = p^2[M]\{A\} \quad (6.124)$$

对于正定系统, 还可下面的式子求固有频率及主振型

$$\frac{1}{p^2}\{A\} - [D][M]\{A\} = \{0\} \quad (6.125)$$

$$\text{或} \quad \frac{1}{p^2} \{A\} = [\delta][M]\{A\} \quad (6.126)$$

前几节我们分析的一些例题，系统的自由度数较少，在计算固有频率及主振型时，我们先从系统的特征方程式求出特征值、即固有频率的平方值 p^2 ，然后再求出特征矢量、即主振型。这种计算方法对于自由度数较多的系统来说，计算工作量较大，并不很有效。目前求特征值、特征矢量的计算方法很多，有些方法已有标准的计算程序，可参看[5]。

本节中我们介绍一种常用的方法，即**矩阵迭代法**。使用这种方法进行计算时，要利用上面(6.126)式或(6.124)式的变换形式

$$p^2 \{A\} = [M]^{-1}[K]\{A\} \quad (6.127)$$

从假定的主振型形态出发，对(6.126)式或(6.127)式进行矩阵迭代运算，最后依次从最低或最高阶的固有频率与主振型开始，求得全部或一部分固有频率与主振型的值。通常工程上对系统的最低阶或较低的几阶固有频率及主振型比较重视，因此一般利用(6.126)式进行迭代运算，下面我们详细地介绍这一方法。

引进**动力矩阵** $[D] = [\delta][M]$ 。对于 n 自由度的系统，(6.126)式可展开为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{p^2} A_1 &= \sum_{j=1}^n D_{1j} A_j \\ -\frac{1}{p^2} A_2 &= \sum_{j=1}^n D_{2j} A_j \\ &\dots\dots\dots \\ -\frac{1}{p^2} A_n &= \sum_{j=1}^n D_{nj} A_j \end{aligned} \right\} \quad (6.128)$$

其中 D_{ij} 是动力矩阵 $[D]$ 的元素 ($i, j = 1, 2, \dots, n$)，一般 $D_{ij} \neq D_{ji}$ ($i \neq j$)。系统任意一阶固有频率与主振型都是(6.128)式的精确解。如果我们任意假定一组 $A_{1,1}, A_{2,1}, \dots, A_{n,1}$

的值(通常令 $A_{n,1} = 1$)，显然不会恰好是一组主振型，即不会是(6.128)式的解。记 $\{A\}_1$ 为由 $A_{1,1}$ 、 $A_{2,1}$ 、 \dots 、 $A_{n,1}$ 为元素组成的列阵称它为初始列阵，对 $\{A\}_1$ 进行 $[D]\{A\}_1$ 的运算，可求得新的一个列阵 $\{B\}_1 = [D]\{A\}_1$ ，它的各元素 $B_{1,1}$ 、 $B_{2,1}$ 、 \dots 、 $B_{n,1}$ 的值为

$$\left. \begin{aligned} B_{1,1} &= \sum_{j=1}^n D_{1j} A_{j,1} \\ B_{2,1} &= \sum_{j=1}^n D_{2j} A_{j,1} \\ &\dots\dots\dots \\ B_{n,1} &= \sum_{j=1}^n D_{nj} A_{j,1} \end{aligned} \right\} \quad (6.129)$$

由于 $\{A\}_1$ 是任意假定的，故 $\{B\}_1$ 的各元素与 $\{A\}_1$ 各对应元素的比值 $\frac{B_{1,1}}{A_{1,1}}$ 、 $\frac{B_{2,1}}{A_{2,1}}$ 、 \dots 、 $\frac{B_{n,1}}{A_{n,1}}$ 各不相等，这说明 $\{A\}_1$ 及 $\{B\}_1$ 都不是主振型。但下面我们即将证明， $\{B\}_1$ 比 $\{A\}_1$ 更接近于系统的第一阶主振型。

将 $\{B\}_1$ 各元素均除以 $B_{n,1}$ ，得一个新的列矩阵 $\{A\}_2$ ， $\{A\}_2 = \frac{1}{B_{n,1}} \{B\}_1$ ， $\{A\}_2$ 中各元素分别为 $A_{1,2} = \frac{B_{1,1}}{B_{n,1}}$ ， $A_{2,2} = \frac{B_{2,1}}{B_{n,1}}$ ， \dots ， $A_{n,2} = \frac{B_{n,1}}{B_{n,1}} = 1$ 。

对 $\{A\}_2$ 再进行 $[D]\{A\}_2$ 的运算，求得又一个新列阵 $\{B\}_2 = [D]\{A\}_2$ ，它的元素为 $B_{1,2}$ 、 $B_{2,2}$ 、 \dots 、 $B_{n,2}$ ，将 $\{B\}_2$ 中各元素均除以 $B_{n,2}$ 后得列矩阵 $\{A\}_3$ ， $\{A\}_3 = \frac{1}{B_{n,2}} \{B\}_2$ ，它的各元素为 $A_{1,3} = \frac{B_{1,2}}{B_{n,2}}$ ， $A_{2,3} = \frac{B_{2,2}}{B_{n,2}}$ ， \dots ， $A_{n,3} = \frac{B_{n,2}}{B_{n,2}} = 1$ 。

依次进行相同的重复运算，可继续得到一系列的列阵： $\{B\}_3$ 、 $\{A\}_4$ 、 $\{B\}_4$ 、 \dots 、 $\{A\}_k$ 、 $\{B\}_k$ ，下面我们证明：当 k 很大时，有

(1) $\{A\}_k$ 及 $\{B\}_k$ 均可近似看成第一阶主振型。

$$(2) B_{n,k} \approx \frac{1}{p_1^2}, \text{ 即 } p_1^2 \approx \frac{1}{B_{n,k}}$$

为了证明上述结论, 我们记这系统的各阶固有频率为 p_1, p_2, \dots, p_n , 主振型为 $\{A^{(1)}\}, \{A^{(2)}\}, \dots, \{A^{(n)}\}$ 。为确定起见, 如果各阶主振型的最后一个元素均不为零, 则取 $A_n^{(1)} = A_n^{(2)} = \dots = A_n^{(n)} = 1$ 。

我们先研究正定系统固有频率值各不相等的情形, 将固有频率从小到大排列为

$$0 < p_1 < p_2 < \dots < p_{n-1} < p_n$$

由固有频率及主振型的定义, 有

$$\frac{1}{p_j^2} \{A^{(j)}\} = [D][M]\{A^{(j)}\} = [D]\{A^{(j)}\} \quad (6.130)$$

($j = 1, 2, \dots, n$)

将最先假定的初始列阵 $\{A\}_1$ 用下式表示

$$\begin{aligned} \{A\}_1 &= \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ \vdots \\ A_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \dots & A_1^{(n)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \dots & A_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^{(1)} & A_n^{(2)} & \dots & A_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \\ &= C_1 \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ \vdots \\ A_n^{(1)} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ \vdots \\ A_n^{(2)} \end{bmatrix} + \dots + C_n \begin{bmatrix} A_1^{(n)} \\ A_2^{(n)} \\ \vdots \\ A_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (6.131) \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \{A\}_1 = C_1 \{A^{(1)}\} + C_2 \{A^{(2)}\} + \dots + C_n \{A^{(n)}\} \quad (6.132)$$

此式的意义在 6.4 节中已讨论过(见(6.74)、(6.75)式), 它表示初始列阵 $\{A\}_1$ 可看成由 n 组主振型按一定比例组合而成, 这 n 个比例因子就是各主座标的值 C_1, C_2, \dots, C_n 。通常 C_1, C_2, \dots, C_n 值都不为零。为了求得最低阶固有频率及主振型, 我们可以靠经验或理论上的分析, 尽量选取 $\{A\}_1$ 接近于第一阶主振型, 即选取 $\{A\}_1$ 尽量与上面已确定的 $\{A^{(1)}\}$ 列阵成正比。

由(6.132)式进一步可求得 $\{B\}_1$ 的表达式:

$$\begin{aligned}\{B\}_1 &= [D]\{A\}_1 = [D](C_1\{A^{(1)}\} + C_2\{A^{(2)}\} + \cdots + C_n\{A^{(n)}\}) \\ &= C_1[D]\{A^{(1)}\} + C_2[D]\{A^{(2)}\} + \cdots + C_n[D]\{A^{(n)}\} \\ &= \frac{C_1}{p_1^2}\{A^{(1)}\} + \frac{C_2}{p_2^2}\{A^{(2)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^2}\{A^{(n)}\} \quad (6.133)\end{aligned}$$

比较(6.132)与(6.133)式可以看出, $\{B\}_1$ 与 $\{A\}_1$ 的表达式的差别在于: $\{A\}_1$ 中各阶主振型的成分, 即主座标值为 C_1 、 C_2 、 \cdots 、 C_n , 而 $\{B\}_1$ 中表示各阶主振型成分的主座标值变为 $-\frac{C_1}{p_1^2}$ 、 $-\frac{C_2}{p_2^2}$ 、 \cdots 、 $-\frac{C_n}{p_n^2}$, 由于 $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$, 故 $\{B\}_1$ 与 $\{A\}_1$ 相比, 第一阶主振型的成分要比其他各阶主振型成分更占主要地位, 即 $\{B\}_1$ 比 $\{A\}_1$ 更接近于第一阶主振型。

我们依次还可求出各列阵 $\{A\}_2$ 、 $\{B\}_2$ 、 $\{A\}_3$ 、 $\{B\}_3$ 、 \cdots 、 $\{A\}_n$ 、 $\{B\}_n$ 的表达式

$$\begin{aligned}\{A\}_2 &= -\frac{1}{B_{n,1}}\{B\}_1 = -\frac{1}{B_{n,1}}\left(\frac{C_1}{p_1^2}\{A^{(1)}\} + \frac{C_2}{p_2^2}\{A^{(2)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^2}\{A^{(n)}\}\right) \\ \{B\}_2 &= [D]\{A\}_2 = \frac{1}{B_{n,1}}[D]\left(\frac{C_1}{p_1^2}\{A^{(1)}\} + \frac{C_2}{p_2^2}\{A^{(2)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^2}\{A^{(n)}\}\right) \\ &= -\frac{1}{B_{n,1}}\left(\frac{C_1}{p_1^2}[D]\{A^{(1)}\} + \frac{C_2}{p_2^2}[D]\{A^{(2)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^2}[D]\{A^{(n)}\}\right) \\ &= -\frac{1}{B_{n,1}}\left(\frac{C_1}{p_1^4}\{A^{(1)}\} + \frac{C_2}{p_2^4}\{A^{(2)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^4}\{A^{(n)}\}\right) \\ \{A\}_3 &= \frac{1}{B_{n,2}}\{B\}_2 = \frac{1}{B_{n,2}B_{n,1}}\left(\frac{C_1}{p_1^4}\{A^{(1)}\} + \frac{C_2}{p_2^4}\{A^{(2)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^4}\{A^{(n)}\}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{B\}_3 &= [D]\{A\}_3 = \frac{1}{B_{n,2}B_{n,1}} [D] \left(\frac{C_1}{p_1^4} \{A^{(1)}\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_2}{p_2^4} \{A^{(2)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^4} \{A^{(n)}\} \right) \\
 &= \frac{1}{B_{n,1}B_{n,1}} \left(\frac{C_1}{p_1^4} [D]\{A^{(1)}\} + \frac{C_2}{p_2^4} [D]\{A^{(2)}\} \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \frac{C_n}{p_n^4} [D]\{A^{(n)}\} \right) \\
 &= \frac{1}{B_{n,1}B_{n,1}} \left(\frac{C_1}{p_1^4} \{A^{(1)}\} + \frac{C_2}{p_2^4} \{A^{(2)}\} + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_n}{p_n^4} \{A^{(n)}\} \right) \\
 &\quad \dots\dots
 \end{aligned} \tag{6.134}$$

$$\begin{aligned}
 \{A\}_k &= \frac{1}{B_{n,k-1}} \{B\}_{k-1} \\
 &= \frac{1}{B_{n,k-1}B_{n,k-2} \cdots B_{n,1}} \left(\frac{C_1}{p_1^{2(k-1)}} \{A^{(1)}\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_2}{p_2^{2(k-1)}} \{A^{(2)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^{2(k-1)}} \{A^{(n)}\} \right) \\
 \{B\}_k &= [D]\{A\}_k \\
 &= \frac{1}{B_{n,k-1}B_{n,k-2} \cdots B_{n,1}} \left(\frac{C_1}{p_1^{2(k-1)}} [D]\{A^{(1)}\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_2}{p_2^{2(k-1)}} [D]\{A^{(2)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^{2(k-1)}} [D]\{A^{(n)}\} \right) \\
 &= \frac{1}{B_{n,k-1}B_{n,k-2} \cdots B_{n,1}} \left(\frac{C_1}{p_1^{2k}} \{A^{(1)}\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_2}{p_2^{2k}} \{A^{(2)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^{2k}} \{A^{(n)}\} \right)
 \end{aligned}$$

由于 $\frac{p_1}{p_2}, \frac{p_1}{p_n}, \dots, \frac{p_1}{p_n}$ 值均小于 1, 当 k 很大时, 有

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{2(k-1)}, \left(\frac{p_1}{p_3} \right)^{2(k-1)}, \dots, \left(\frac{p_1}{p_n} \right)^{2(k-1)} &\ll 1 \\ \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{2k}, \left(\frac{p_1}{p_3} \right)^{2k}, \dots, \left(\frac{p_1}{p_n} \right)^{2k} &\ll 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.135)$$

这样, 可将 $\{A\}_k$ 及 $\{B\}_k$ 的表达式写成

$$\begin{aligned} \{A\}_k &= \frac{1}{B_{n,k-1} B_{n,k-2} \cdots B_{n,1} p_1^{2(k-1)}} \left(C_1 \{A^{(1)}\} \right. \\ &\quad \left. + C_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{2(k-1)} \{A^{(2)}\} + \cdots + C_n \left(\frac{p_1}{p_n} \right)^{2(k-1)} \{A^{(n)}\} \right) \\ &\approx \frac{C_1}{B_{n,k-1} B_{n,k-2} \cdots B_{n,1} p_1^{2(k-1)}} \{A^{(1)}\} \end{aligned} \quad (6.136)$$

$$\begin{aligned} \{B\}_k &= \frac{1}{B_{n,k-1} B_{n,k-2} \cdots B_{n,1} p_1^{2k}} \left(C_1 \{A^{(1)}\} \right. \\ &\quad \left. + C_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{2k} \{A^{(2)}\} + \cdots + C_n \left(\frac{p_1}{p_n} \right)^{2k} \{A^{(n)}\} \right) \\ &\approx \frac{C_1}{B_{n,k-1} B_{n,k-2} \cdots B_{n,1} p_1^{2k}} \{A^{(1)}\} \end{aligned} \quad (6.137)$$

即 $\{A\}_k$ 与 $\{B\}_k$ 中最低阶主振型成分均占绝对优势, $\{A\}_k$ 与 $\{B\}_k$ 均与 $\{A^{(1)}\}$ 非常接近成正比, 因此可近似地取 $\{A\}_k$ 或 $\{B\}_k$ 作为第一阶主振型, 这就证明了上面第一个结论。

另外, 由 (6.136)、(6.137) 式可看出

$$\{B\}_k \approx \frac{1}{p_1^2} \{A\}_k \quad (6.138)$$

即 $\{B\}_k$ 中各元素与 $\{A\}_k$ 中各对应元素的比值

$$\frac{B_{i,k}}{A_{i,k}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ 均接近于 } \frac{1}{p_1^2}, \text{ 特别是由于 } A_{n,k} = 1, \text{ 故}$$

$$B_{n,k} \approx \frac{1}{p_1^2} \quad (6.139)$$

这就证明了上面第二个结论。

例6.8 用矩阵迭代法求例 6.1 中弹簧质量系统的最低阶固有频率及主振型。

解 由例6.1, 系统质量矩阵 $[M]$ 为

$$[M] = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

柔度矩阵 $[\delta]$ 可由 $[K]$ 求逆得到,

$$[\delta] = \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6k} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

动力矩阵 $[D] = [\delta][M]$ 为

$$[D] = \frac{1}{6k} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \cdot m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{m}{6k} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7.5 & 5 \\ 4 & 7.5 & 11 \end{bmatrix}$$

如果我们选取 $\{A\}_1$ 的元素 $A_{1,1} = A_{2,1} = A_{3,1} = 1$, 由 $\{B\}_1 = [D]\{A\}_1$ 可求得

$$\begin{aligned} \{B\}_1 &= \frac{m}{6k} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7.5 & 5 \\ 4 & 7.5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{m}{6k} \begin{bmatrix} 9 \\ 16.5 \\ 22.5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{22.5m}{6k} \begin{bmatrix} 0.400000 \\ 0.733333 \\ 1.000000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这样, 我们就得到

$$B_{1,1} = \frac{22.5m}{6k} \quad \{A\}_2 = \begin{bmatrix} 0.400000 \\ 0.733333 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$$

再由 $\{B\}_2 = [D]\{A\}_1$ 可得

$$\begin{aligned}\{B\}_2 &= \frac{m}{6k} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7.5 & 5 \\ 4 & 7.5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.400000 \\ 0.733333 \\ 1.000000 \end{bmatrix} \\ &= \frac{m}{6k} \begin{bmatrix} 5.80000 \\ 12.1000 \\ 18.1000 \end{bmatrix} = \frac{18.1000m}{6k} \begin{bmatrix} 0.320442 \\ 0.668508 \\ 1.000000 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

即

$$B_{3,2} = \frac{18.1000m}{6k} \quad \{A\}_3 = \begin{bmatrix} 0.320442 \\ 0.668508 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$$

我们还可依次求得 $\{B\}_3$ 、 $\{A\}_4$ 、 $\{B\}_4$ 、 \dots 、 $\{A\}_{10}$ 、 $\{B\}_{10}$ 、 $\{A\}_{11}$ 、列表如下

k	1	2	3	4
$\{A\}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.400000 \\ 0.733333 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.320442 \\ 0.668508 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.305702 \\ 0.653091 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$
...	10	11		
...	$\begin{bmatrix} 0.301850 \\ 0.648535 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.301850 \\ 0.648535 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$		

k	1	2	3	4	...	10
$\frac{6k}{m} \{B\}_k$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 16.5 \\ 22.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.80000 \\ 12.1000 \\ 18.1000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.28729 \\ 11.2956 \\ 17.2956 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.18208 \\ 11.1210 \\ 17.1210 \end{bmatrix}$...	$\begin{bmatrix} 5.15301 \\ 11.0714 \\ 17.0714 \end{bmatrix}$

可以看出, $k=10$ 及 $k=11$ 的 $\{A\}_k$ 值已经相同, 因此可得 $\{A^{(1)}\}$ 及 p_1^* 的近似值为:

$$\{A^{(1)}\} \approx \{A\}_{11} = \begin{bmatrix} 0.301850 \\ 0.648535 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$$

$$p_1^* \approx \frac{1}{B_{3,10}} = \frac{6}{17.0714m} = 0.351465 \frac{k}{m}$$

这里的结果与例 6.1 中的结果是相符合的。

利用 (6.126) 式进行矩阵迭代运算, 不仅可以求出最低阶固有频率及主振型, 而且可以依次求得较低的各阶固有频率及主振型, 必要时可以一直求出全部固有频率及主振型。

前面我们证明了迭代法可以求出最低阶固有频率及主振型, 从证明的推理过程中, 不难发现, 如果一开始假设的初始列阵 $\{A\}_1$ 中不包含第一阶主振型的成分, 即 $C_1 = 0$, 则依次进行 k 次迭代后得到的 $\{A\}_k$ 及 $\{B\}_k$ 分别将为

$$\begin{aligned} \{A\}_k = & \frac{1}{B_{n,k-1}B_{n,k-2}\cdots B_{n,1}} \left(\frac{C_2}{p_2^{2(k-1)}} \{A^{(2)}\} \right. \\ & \left. + \frac{C_3}{p_3^{2(k-1)}} \{A^{(3)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^{2(k-1)}} \{A^{(n)}\} \right) \end{aligned} \quad (6.140)$$

$$\begin{aligned} \{B\}_k = & \frac{1}{B_{n,k-1}B_{n,k-2}\cdots B_{n,1}} \left(\frac{C_2}{p_2^{2k}} \{A^{(2)}\} \right. \\ & \left. + \frac{C_3}{p_3^{2k}} \{A^{(3)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^{2k}} \{A^{(n)}\} \right) \end{aligned} \quad (6.141)$$

由于 $\frac{p_2}{p_3}, \frac{p_2}{p_4}, \dots, \frac{p_2}{p_n}$ 值均小于 1, 当 k 很大时有

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{p_2}{p_3} \right)^{2(k-1)}, \left(\frac{p_2}{p_4} \right)^{2(k-1)}, \dots, \left(\frac{p_2}{p_n} \right)^{2(k-1)} \ll 1 \\ & \left(\frac{p_2}{p_3} \right)^{2k}, \left(\frac{p_2}{p_4} \right)^{2k}, \dots, \left(\frac{p_2}{p_n} \right)^{2k} \ll 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.142)$$

而 $\{A\}_k$, $\{B\}_k$ 也可写成

$$\begin{aligned}\{A\}_k &= \frac{1}{B_{n,k-1}B_{n,k-2}\cdots B_{n,1}p_2^{2(k-1)}} \left(C_2 \{A^{(2)}\} \right. \\ &\quad \left. + C_3 \left(\frac{p_2}{p_3} \right)^{2(k-1)} \{A^{(3)}\} + \cdots + C_n \left(\frac{p_2}{p_n} \right)^{2(k-1)} \{A^{(n)}\} \right) \\ &\approx \frac{C_2}{B_{n,k-1}B_{n,k-2}\cdots B_{n,1}p_2^{2(k-1)}} \{A^{(2)}\}\end{aligned}\quad (6.143)$$

$$\begin{aligned}\{B\}_k &= \frac{1}{B_{n,k-1}B_{n,k-2}\cdots B_{n,1}p_2^{2k}} \left(C_2 \{A^{(2)}\} \right. \\ &\quad \left. + C_3 \left(\frac{p_2}{p_3} \right)^{2k} \{A^{(3)}\} + \cdots + C_n \left(\frac{p_2}{p_n} \right)^{2k} \{A^{(n)}\} \right) \\ &\approx \frac{C_2}{B_{n,k-1}B_{n,k-2}\cdots B_{n,1}p_2^{2k}} \{A^{(2)}\}\end{aligned}\quad (6.144)$$

因此, $\{A\}_k$ 或 $\{B\}_k$ 可近似地看成第二阶主振型, 并由 $\{B\}_k \approx$

$\frac{1}{p_2^2} \{A\}_k$ 及 $A_{n,k} = 1$ 可得

$$B_{n,k} \approx \frac{1}{p_2^2} \quad \text{即} \quad p_2^2 \approx \frac{1}{B_{n,k}} \quad (6.145)$$

这样, 只要在 $C_1 = 0$ 的条件下, 我们就可以用矩阵迭代法求得第二阶固有频率及主振型。

类似上面的推理, 如果开始假设的 $\{A\}_1$ 中不包含第一阶、第二阶、…一直到第 $i-1$ 阶主振型成分, 即如果 $C_1 = C_2 = \cdots = C_{i-1} = 0$, 则由矩阵迭代法, 我们可求出第 i 阶固有频率及主振型。当 $i = n-1$ 时, 我们就可求出系统的第 $n-1$ 阶固有频率及主振型。

最后, 如果 $\{A\}_1$ 中不包含第一阶、第二阶、…一直到第 $n-1$ 阶主振型的成分, 即如果 $C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-1} = 0$, 则

$$\{A\}_1 = C_n \{A^{(n)}\} \quad (6.146)$$

说明 $\{A\}_1$ 就是第 n 阶主振型, 用它算出 $\{B\}_1$ 为

$$\{B\}_1 = [D] \{A\}_1 = C_n [D] \{A^{(n)}\} = \frac{C_n}{p_n^2} \{A^{(n)}\} \quad (6.147)$$

因此有:

$$\frac{B_{n,1}}{A_{n,1}} = \frac{B_{n,1}}{1} = \frac{1}{p_n^2} \quad \text{即} \quad p_n^2 = \frac{1}{B_{n,1}} \quad (6.148)$$

即只要进行一次矩阵乘法就可得到 p_n^2 。

由此可见, 用矩阵迭代法求高阶固有频率及主振型的关键在于开始选取的 $\{A\}_1$ 中应不包含低阶主振型成分。用什么方法可以实现这个要求呢?

假定我们用矩阵迭代法已求得了系统第一阶固有频率 p_1 及主振型 $\{A^{(1)}\}$, 要进一步求第二阶固有频率 p_2 及主振型 $\{A^{(2)}\}$ 。

如果任意选取一组元素值组成 $\{A\}_1$, 显然一般它总包含各阶主振型的成分, 即如 (6.132) 式所示, 可将其写成

$$\{A\}_1 = C_1 \{A^{(1)}\} + C_2 \{A^{(2)}\} + \cdots + C_n \{A^{(n)}\} \quad (6.149)$$

利用各阶主振型之间的正交条件 (6.51) 式及 (6.54) 式, 即

$$\{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(j)}\} = \begin{cases} M_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (6.150)$$

将 (6.149) 式两边前乘以矩阵 $\{A^{(1)}\}^T [M]$, 得

$$\begin{aligned} \{A^{(1)}\}^T [M] \{A\}_1 &= C_1 \{A^{(1)}\}^T [M] \{A^{(1)}\} + C_2 \{A^{(1)}\}^T [M] \\ &\quad \{A^{(2)}\} + \cdots + C_n \{A^{(1)}\}^T [M] \{A^{(n)}\} \end{aligned} \quad (6.151)$$

由 (6.150) 式知此式右端除第一项外, 其余各项均为零, 故有

$$C_1 = \frac{\{A^{(1)}\}^T [M] \{A\}_1}{\{A^{(1)}\}^T [M] \{A^{(1)}\}} = \frac{\{A^{(1)}\}^T [M] \{A\}_1}{M_1} \quad (6.152)$$

(此式与 6.4 节中 (6.79) 式展开后的第一个式子完全相似, 只是符号不同而已)。这样, 如果在 $\{A\}_1$ 中减去 $C_1 \{A^{(1)}\}$, 把 $\{A\}_1 - C_1 \{A^{(1)}\}$ 作为新的初始列阵, 就可由矩阵迭代法求出第二阶固有频率 p_2 及主振型 $\{A^{(2)}\}$ 。由于这种计算方法编排计算机程序比较麻烦, 我们不再详细介绍, 读者可参见 [3]。

还有一种方法是将上述任选的 $\{A\}_1$ 先乘以动力矩阵, 求得 $\{B\}_1$ 为:

$$\begin{aligned}
\{B\}_1 &= [D]\{A\}_1 = [D](C_1\{A^{(1)}\} + C_2\{A^{(2)}\} + \cdots + C_n\{A^{(n)}\}) \\
&= C_1[D]\{A^{(1)}\} + C_2[D]\{A^{(2)}\} + \cdots + C_n[D]\{A^{(n)}\} \\
&= \frac{C_1}{p_1^2}\{A^{(1)}\} + \frac{C_2}{p_2^2}\{A^{(2)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^2}\{A^{(n)}\} \quad (6.153)
\end{aligned}$$

$\{B\}_1$ 中含有的第一阶主振型的成分 是 $\frac{C_1}{p_1^2}\{A^{(1)}\}$, 如把 $\{B\}_1$ 减去 $\frac{C_1}{p_1^2}\{A^{(1)}\}$, 将 $\{B\}_1 - \frac{C_1}{p_1^2}\{A^{(1)}\}$ 作为新的初始列阵, 通过矩阵迭代运算, 就可求出系统的第二阶固有频率 p_2 及主振型 $\{A^{(2)}\}$ 。

实际计算可这样进行: 由于

$$\begin{aligned}
\{B\}_1 - \frac{C_1}{p_1^2}\{A^{(1)}\} &= [D]\{A\}_1 - \frac{1}{p_1^2}\{A^{(1)}\} - \frac{1}{M_1}\{A^{(1)}\}^T[M]\{A\}_1 \\
&= \left([D] - \frac{1}{M_1 p_1^2}\{A^{(1)}\}\{A^{(1)}\}^T[M] \right)\{A\}_1 \quad (6.154)
\end{aligned}$$

所以我们可以先将 $[D] - \frac{1}{M_1 p_1^2}\{A^{(1)}\}\{A^{(1)}\}^T[M]$ 算出, 将它对任选的初始列阵 $\{A\}_1$ 相乘, 就可求得不包含第一阶主振型成分的 $\{B\}_1 - \frac{C_1}{p_1^2}\{A^{(1)}\}$, 再用其进行矩阵迭代。为了防止因计算数字精度不够以致使残余的第一阶主振型成分逐渐扩大, 在迭代过程中不再使用动力矩阵 $[D]$, 而始终以

$$[D]^* = [D] - \frac{1}{M_1 p_1^2}\{A^{(1)}\}\{A^{(1)}\}^T[M] \quad (6.155)$$

代替 $[D]$, 即依下列次序进行计算:

由任选的初始列阵 $\{A\}_1$, 求

$$\left. \begin{aligned} \{B\}_1 &= [D]^*\{A\}_1 \\ \{A\}_2 &= \frac{1}{B_{n,1}}\{B\}_1 \\ \{B\}_2 &= [D]^*\{A\}_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.156)$$

$$\left. \begin{aligned} \{A\}_s &= \frac{1}{B_{s,2}} \{B\}_s \\ \{B\}_s &= [D]^* \{A\}_s \\ &\dots \end{aligned} \right\}$$

最后求出第二阶固有频率及主振型。

在求得系统第一阶及第二阶固有频率及主振型后，仍可用上述计算程序求出第三阶固有频率及主振型，但 $[D]^*$ 需改成

$$\begin{aligned} [D]^* &= [D] - \frac{1}{M_1 p_1^2} \{A^{(1)}\} \{A^{(1)}\}^T [M] \\ &\quad - \frac{1}{M_2 p_2^2} \{A^{(2)}\} \{A^{(2)}\}^T [M] \end{aligned} \quad (6.157)$$

一般地说，在求出系统第一、二、…至 $i-1$ 阶固有频率及主振型后，计算出

$$\begin{aligned} [D]^* &= [D] - \frac{1}{M_1 p_1^2} \{A^{(1)}\} \{A^{(1)}\}^T [M] \\ &\quad - \frac{1}{M_2 p_2^2} \{A^{(2)}\} \{A^{(2)}\}^T [M] \\ &\quad - \dots - \frac{1}{M_{i-1} p_{i-1}^2} \{A^{(i-1)}\} \{A^{(i-1)}\}^T [M] \end{aligned} \quad (6.158)$$

我们就可以用(6.156)式的程序计算出第 i 阶固有频率及主振型。

例6.9 在例6.8计算结果的基础上，求该系统的第二阶、第三阶固有频率及主振型。

解 先求第二阶固有频率及主振型。由例6.8的计算结果，可求出第一阶主振型的主质量 M_1 为

$$\begin{aligned} M_1 &= \{A^{(1)}\}^T [M] \{A^{(1)}\} \\ &= [0.301850 \quad 0.648535 \quad 1.000000] \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.301850 \\ 0.648535 \\ 1.000000 \end{bmatrix} \\ &= 1.81312m \end{aligned}$$

而 $\{A^{(1)}\}\{A^{(1)}\}^T[M]$

$$= \begin{bmatrix} 0.301850 \\ 0.648535 \\ 1.000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.301850 & 0.648535 & 1.000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$= m \begin{bmatrix} 0.182227 & 0.293641 & 0.301850 \\ 0.391521 & 0.630897 & 0.648535 \\ 0.603700 & 0.972803 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

因而由(6.155)式可求得 $[D]^*$ 为

$$[D]^* = [D] - \frac{1}{M_1 p_1^2} \{A^{(1)}\}\{A^{(1)}\}^T[M]$$

$$= \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 0.380708 & 0.039206 & -0.140343 \\ 0.052275 & 0.259968 & -0.184378 \\ -0.280686 & -0.276566 & 0.264088 \end{bmatrix}$$

若仍选取

$$\{A\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

根据(6.156)式进行矩阵迭代运算, 各 $\{A\}_1$ 、 $\{B\}_1$ 、 \dots $\{A\}_{20}$ 的值如下表

k	1	2	3
$\{A\}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.953631 \\ -0.436155 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.797839 \\ -0.532836 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$
...	18	19	20
...	$\begin{bmatrix} -0.678977 \\ -0.606600 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.678977 \\ -0.606599 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.678977 \\ -0.606599 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccccc}
 k & 1 & 2 & 3 & \\
 \frac{k}{m} \{B\}_k & \begin{bmatrix} 0.279571 \\ 0.127865 \\ -0.293165 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.520498 \\ -0.347615 \\ 0.652385 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.464977 \\ -0.364605 \\ 0.635395 \end{bmatrix} & \\
 \dots & 18 & 19 & & \\
 & \begin{bmatrix} -0.422618 \\ -0.377567 \\ 0.622433 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.422618 \\ -0.377567 \\ 0.622433 \end{bmatrix} & & \\
 \dots & & & &
 \end{array}$$

故得
$$p_2^1 = \frac{1}{B_{3,18}} = \frac{k}{0.622433 m} = 1.606599 \frac{k}{m}$$

$$\{A^{(2)}\} = \begin{bmatrix} -0.678977 \\ -0.606599 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$$

再求第三阶固有频率及主振型。

由

$$M_2 = \{A^{(2)}\}^T [M] \{A^{(2)}\} = [-0.678977 \quad -0.606599 \quad 1.000000]$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.678977 \\ -0.606599 \\ 1.000000 \end{bmatrix} = 2.47396 m$$

$$\{A^{(2)}\} \{A^{(2)}\}^T [M]$$

$$= \begin{bmatrix} -0.678977 \\ -0.606599 \\ 1.000000 \end{bmatrix} [-0.678977 \quad -0.606599 \quad 1.000000]$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1.5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 0.922021 & 0.617801 & -0.678977 \\ 0.823734 & 0.551944 & -0.606599 \\ -1.357955 & -0.909899 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

再根据(6.157)式就可求出新的 $[D]^*$ 为

$$\begin{aligned}
 [D]^* &= \left([D] - \frac{1}{M_1 p_1^2} \{A^{(1)}\} \{A^{(1)}\}^T [M] \right) \\
 &\quad - \frac{1}{M_2 p_2^2} \{A^{(2)}\} \{A^{(2)}\}^T [M] \\
 &= \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 0.148734 & -0.116228 & 0.030483 \\ -0.154971 & 0.121103 & -0.031761 \\ 0.060966 & -0.047642 & 0.012495 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

如仍选取

$$\{A\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

用此 $[D]^*$ 进行矩阵迭代运算, 可得

$$\begin{array}{ccc}
 k & 1 & 2 & 3 \\
 \{A\}_k & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2.439628 \\ -2.541936 \\ 1.000000 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2.439628 \\ -2.541936 \\ 1.000000 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\frac{k}{m} \{B\}_k \begin{bmatrix} 0.0629884 \\ -0.0656299 \\ 0.0258189 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.688784 \\ -0.717669 \\ 0.282331 \end{bmatrix}$$

$$\therefore p_3^2 = \frac{k}{0.282331 m} = 3.541936 \frac{k}{m}$$

$$\{A^{(3)}\} = \begin{bmatrix} 2.439628 \\ -2.541936 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$$

上述计算结果与例 6.1 的结果相同。

例6.10 两端简支支承的等直轴, 在四等分跨距处有三圆盘, 其质量各为 m 、 $2m$ 、 m , 已知轴长 l , 弯曲刚度 EJ , 忽略轴的质量与圆盘的转动惯量, 试用矩阵迭代法求此系统的固有频率及主振型(图6-10)。

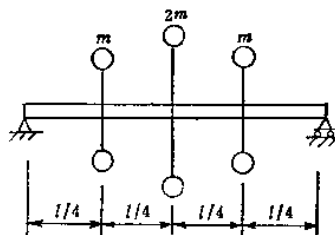


图 6-10

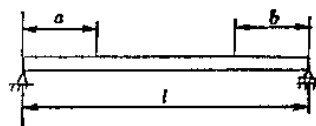


图 6-11

解 用材料力学中的单位载荷法, 不难计算出两端简支梁的柔度影响系数值, 对于距两端各为 a 、 b 处的柔度影响系数 δ_{ab} 为(图6-11)

$$\delta_{ab} = \frac{ab}{6EJl} (l^2 - a^2 - b^2)$$

当 $b = l - a$ 时, 得

$$\delta_{a, l-a} = \frac{a^2(l-a)^2}{3EJl}$$

用柔度矩阵可建立系统自由振动微分方程式为

$$\{\ddot{y}\} + [\delta][M]\{\ddot{y}\} = \{0\}$$

因而固有频率及主振型满足下式

$$-\frac{1}{p^2} \{A\} = [\delta][M]\{A\}$$

这里

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$[\delta] = \frac{l^3}{768EJ} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

其中 $[\delta]$ 中各元素值可用前面公式算出。动力矩阵 $[D]$ 为

$$\begin{aligned} [D] &= [\delta][M] = \frac{l^3}{768EJ} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{ml^3}{768EJ} \begin{bmatrix} 9 & 22 & 7 \\ 11 & 32 & 11 \\ 7 & 22 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

选取初始列阵

$$\{A\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

用 $[D]$ 进行矩阵迭代运算, 数字结果如下表

k	1	2	3	4	5
$\{A\}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.43333 \\ 1.00000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.42777 \\ 1.00000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.42770 \\ 1.00000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.42770 \\ 1.00000 \end{bmatrix}$
$\frac{768EJ}{ml^3} \{B\}_k$	$\begin{bmatrix} 60 \\ 86 \\ 60 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 47.5333 \\ 67.8667 \\ 47.5333 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 47.4109 \\ 67.6886 \\ 47.4109 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 47.4094 \\ 67.6864 \\ 47.4094 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 47.4094 \\ 67.6864 \\ 47.4094 \end{bmatrix}$

故得

$$p_1^2 \approx \frac{1}{B_{3,4}} = \frac{768EJ}{47.4094ml^3} = 16.1993 \frac{EJ}{ml^3}$$

$$p_1 = 4.02484 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

$$\{A^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.42770 \\ 1.00000 \end{bmatrix}$$

再求第二阶固有频率及主振型：由

$$M_1 = \{A^{(1)}\}^T [M] \{A^{(1)}\}$$

$$= [1.00000 \quad 1.42770 \quad 1.00000] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.42770 \\ 1.00000 \end{bmatrix}$$

$$= 6.07665m$$

$$\{A^{(1)}\} \{A^{(1)}\}^T [M]$$

$$= \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.42770 \\ 1.00000 \end{bmatrix} [1.00000 \quad 1.42770 \quad 1.00000] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$= m \begin{bmatrix} 1.00000 & 2.85540 & 1.00000 \\ 1.42770 & 4.07665 & 1.42770 \\ 1.00000 & 2.85540 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

再由(6.155)式可求得 $[D]^*$ 为

$$[D]^* = [D] - \frac{1}{M_1 p_1^2} \{A^{(1)}\} \{A^{(1)}\}^T [M]$$

$$= \frac{ml^3}{EJ} \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 1.56004 & -0.36136 & -1.04413 \\ -0.18068 & 0.25310 & -0.18068 \\ 1.04413 & -0.36136 & 1.56004 \end{bmatrix}$$

因系统具有对称性，故可选择第二阶主振型的初始列阵 $\{A\}_1$ 为

$$\{A\}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将此 $\{A\}_1$ 与 $[D]^*$ 相乘后, 得

$$\begin{aligned} & [D]^* \{A\}_1 \\ &= \frac{ml^3}{EJ} \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 1.56004 & -0.36136 & -1.04413 \\ -0.18068 & 0.25310 & -0.18068 \\ 1.04413 & -0.36136 & 1.56004 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{ml^3}{EJ} \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} -2.60417 \\ 0 \\ 2.60417 \end{bmatrix} = 2.60417 \times 10^{-3} \frac{ml^3}{EJ} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这说明我们选取的 $\{A\}_1$ 恰巧就是一个主振型, 根据它的形态, 我们可以判定它是第二阶主振型, 故得

$$p_2^2 = \frac{1}{2.60417 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{EJ}{ml^3} = 384.000 \frac{EJ}{ml^3}$$

$$p_2 = 19.5919 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

$$\{A^{(2)}\} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再求第三阶固有频率及主振型: 由

$$M_2 = \{A^{(2)}\}^T [M] \{A^{(2)}\}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 2m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{A^{(2)}\}\{A^{(2)}\}^T[M] &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \\ &= m \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由(6.157)式即可求得新的 $[D]^*$ 为

$$\begin{aligned} [D]^* &= \left([D] - \frac{1}{M_1 p_1^2} \{A^{(1)}\}\{A^{(1)}\}^T[M] \right) \\ &\quad - \frac{1}{M_2 p_2^2} \{A^{(2)}\}\{A^{(2)}\}^T[M] \\ &= \frac{m l^3}{EJ} \cdot 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 2.57954 & -3.61356 & 2.57954 \\ -1.80678 & 2.53103 & -1.80678 \\ 2.57954 & -3.61356 & 2.57954 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

如选取

$$\{A\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

作为第三阶主振型的初始列阵, 用此 $[D]^*$ 进行矩阵迭代运算, 可得

k	1	2	3
$\{A\}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00000 \\ -0.70043 \\ 1.00000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00000 \\ -0.70043 \\ 1.00000 \end{bmatrix}$
$\frac{10^4 EJ}{m l^3} \{B\}_k$	$\begin{bmatrix} 8.77263 \\ -6.14459 \\ 8.77263 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.69011 \\ -5.38636 \\ 7.69011 \end{bmatrix}$	

$$\therefore p_1^2 = \frac{10^4 EJ}{7.69011 ml^3} = 1.30037 \times 10^4 \frac{EJ}{ml^3}$$

$$p_1 = 36.0606 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

$$\{A^{(3)}\} = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ -0.70043 \\ 1.00000 \end{bmatrix}$$

由例 6.9、6.10 可以看出，用矩阵迭代法求系统的固有频率及主振型时，如果初始列阵 $\{A\}_1$ 选得恰当，比较接近于所求主振型的形态，则迭代次数可以减少；另外，由于计算中误差的累积，因此求得的低阶固有频率及主振型精确度较高，而高阶的固有频率及主振型的精确度则逐渐降低。所以矩阵迭代法对于求低阶的固有频率及主振型比较合适。

如果系统的固有频率中有几个相等，则仍可用上述矩阵迭代法依次求出这几个相等的固有频率及对应的几个彼此正交的主振型。正如 6.5 节中指出的那样，这种正交的主振型组并不是唯一的。选用不同的初始列阵，会求得形式不同的正交的主振型组。但这并不妨碍振型叠加法的理论分析。

由于半正定系统的柔度矩阵没有意义，因此不能用这里的矩阵迭代法求半正定系统的低阶固有频率及主振型，除非设法进行一些特殊的处理。方法之一是事先消去系统作刚体运动的自由度，即采用缩减系统座标的方法，这种方法可参阅[3]，还有一种方法是‘移频’，即将半正定系统求固有频率及主振型的方程

$$[K]\{A\} = p^2[M]\{A\} \quad (6.159)$$

改写为(其中 α 为任意正数)

$$([K] + \alpha[M])\{A\} = (p^2 + \alpha)[M]\{A\} \quad (6.160)$$

由于质量矩阵 $[M]$ 是正定的，故 $[K] + \alpha[M]$ 也是正定的，可以求得它的逆矩阵 $[B]^* = ([K] + \alpha[M])^{-1}$ ，因而(6.160)式可改写为与(6.126)式类似的形式

$$\frac{1}{p_i^2 + \alpha} \{A\} = [\delta] * [M] \{A\} \quad (6.161)$$

由此可仍采取矩阵迭代运算求出各个 $p_1^2 + \alpha$ 、 $p_2^2 + \alpha$ 、 \dots 、 $p_n^2 + \alpha$ 的值及各阶主振型 $\{A^{(i)}\}$ ，将上述各 $p_i^2 + \alpha$ 值中减去 α 值，即可求得原来的半正定系统的各阶固有频率平方值。这种方法的计算程序可见第十章。

6.8 其他近似解法

除矩阵迭代法外，还有其他很多方法可以计算固有频率及主振型，下面再介绍其中几种常用的方法：

(1) 瑞雷法

第二章中曾介绍过，利用瑞雷法可求单自由度系统的固有频率。我们还可以用瑞雷法求多自由度系统的最低阶固有频率。

多自由度系统的动能 T 与势能 U 的一般表达式为

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\} \quad (6.162)$$

$$U = \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\} \quad (6.163)$$

系统作某一阶主振动时，

$$\{x\} = \{A\} \sin(pt + \varphi) \quad (6.164)$$

各座标的速度及加速度为

$$\{\dot{x}\} = \{A\} p \cos(pt + \varphi) \quad (6.165)$$

$$\{\ddot{x}\} = -\{A\} p^2 \sin(pt + \varphi) \quad (6.166)$$

将 (6.165)、(6.164) 式分别代入 (6.162)、(6.163) 式，可看出系统在作主振动时，最大动能值 T_{\max} 与最大势能值 U_{\max} 分别为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} p^2 \{A\}^T [M] \{A\} \quad (6.167)$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \{A\}^T [K] \{A\} \quad (6.168)$$

根据机械能守恒原理， $T_{\max} = U_{\max}$ ，即

$$\frac{1}{2} p^2 \{A\}^T [M] \{A\} = \frac{1}{2} \{A\}^T [K] \{A\} \quad (a)$$

故得

$$p^2 = \frac{\{A\}^T [K] \{A\}}{\{A\}^T [M] \{A\}} \quad (6.169)$$

上式就是 6.4 节中的 (6.56) 式, 当 $\{A\}$ 为第 i 阶主振型 $\{A^{(i)}\}$ 时, 从此式可求得第 i 阶固有频率平方值 p_i^2 。

如果我们任选一个列阵 $\{A\}$, 它一般并不是主振型, 但可将其用正则振型的线性组合表示, 即

$$\{A\} = C_1 \{A_N^{(1)}\} + C_2 \{A_N^{(2)}\} + \cdots + C_n \{A_N^{(n)}\} \quad (6.170)$$

对这一般的 $\{A\}$ 计算 $\{A\}^T [M] \{A\}$ 及 $\{A\}^T [K] \{A\}$ 值, 根据 6.4 节中正则振型的性质, 可得

$$\begin{aligned} \{A\}^T [M] \{A\} &= (C_1 \{A_N^{(1)}\}^T + C_2 \{A_N^{(2)}\}^T + \cdots + C_n \{A_N^{(n)}\}^T) [M] \\ &\quad \cdot (C_1 \{A_N^{(1)}\} + C_2 \{A_N^{(2)}\} + \cdots + C_n \{A_N^{(n)}\}) \\ &= C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2 \end{aligned} \quad (6.171)$$

$$\begin{aligned} \{A\}^T [K] \{A\} &= (C_1 \{A_N^{(1)}\}^T + C_2 \{A_N^{(2)}\}^T + \cdots + C_n \{A_N^{(n)}\}^T) [K] \\ &\quad \cdot (C_1 \{A_N^{(1)}\} + C_2 \{A_N^{(2)}\} + \cdots + C_n \{A_N^{(n)}\}) \\ &= C_1^2 p_1^2 + C_2^2 p_2^2 + \cdots + C_n^2 p_n^2 \end{aligned} \quad (6.172)$$

其中 p_1 、 p_2 、 \cdots 、 p_n 各为第一、二、 \cdots 、 n 阶固有频率。这样, 对任选的列阵 $\{A\}$, 按 (6.169) 式可算出 p^2 为

$$p^2 = \frac{\{A\}^T [K] \{A\}}{\{A\}^T [M] \{A\}} = \frac{C_1^2 p_1^2 + C_2^2 p_2^2 + \cdots + C_n^2 p_n^2}{C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2} \quad (6.173)$$

它不是系统任何一阶固有频率的平方值。

如果我们选择 $\{A\}$ 很接近于第一阶主振型 $\{A^{(1)}\}$, 则 $\frac{C_1}{C_1}$,

$\frac{C_2}{C_1}, \cdots, \frac{C_n}{C_1} \ll 1$, 由 (6.173) 式得

$$\begin{aligned}
 p^2 &= p_1^2 \frac{1 + \frac{C_2^2 p_2^2}{C_1^2 p_1^2} + \cdots + \frac{C_n^2 p_n^2}{C_1^2 p_1^2}}{1 + \frac{C_2^2}{C_1^2} + \cdots + \frac{C_n^2}{C_1^2}} \\
 &\approx p_1^2 \left[1 + \frac{C_2^2}{C_1^2} \left(-\frac{p_1^2}{p_2^2} - 1 \right) + \cdots + \frac{C_n^2}{C_1^2} \left(-\frac{p_1^2}{p_n^2} - 1 \right) \right] \\
 &\approx p_1^2 \quad (6.174)
 \end{aligned}$$

即这时 p^2 可作为 p_1^2 的近似值。这就是瑞雷法求系统最低阶固有频率的原理。

瑞雷法也可应用于由柔度矩阵 $[\delta]$ 建立运动方程的情况，这时系统的势能 U 可这样计算：由功能转化原理，势能 U 数值上等于外力作的功，即

$$U = \frac{1}{2} \{F\}^T \{x\} \quad (6.175)$$

在系统自由振动过程中，只有惯性力作用在系统上，即

$$\{F\} = -[M]\{\ddot{x}\} \quad (a)$$

因而 $\{x\}$ 为

$$\{x\} = [\delta]\{F\} = -[\delta][M]\{\ddot{x}\} \quad (b)$$

将 (a)、(b) 式代入 (6.175) 式，得

$$U = \frac{1}{2} \{\ddot{x}\}^T [M][\delta][M]\{\ddot{x}\} \quad (6.176)$$

由 (6.166) 式可得势能 U 的最大值 U_{max} 为

$$U_{max} = \frac{1}{2} p^4 \{A\}^T [M][\delta][M]\{A\} \quad (6.177)$$

由 $T_{max} = U_{max}$ ，得

$$\frac{1}{2} p^2 \{A\}^T [M]\{A\} = \frac{1}{2} p^4 \{A\}^T [M][\delta][M]\{A\}$$

$$\text{故得} \quad p^2 = \frac{\{A\}^T [M]\{A\}}{\{A\}^T [M][\delta][M]\{A\}} \quad (6.178)$$

$$\text{由} \quad [\delta][M]\{A_n^{(j)}\} = \frac{1}{p_n^2} \{A_n^{(j)}\} \quad (6.179)$$

可对任选的列阵 $\{A\}$ 计算 $\{A\}^T [M] [\delta] [M] \{A\}$ 值:

$$\begin{aligned}
 & \{A\}^T [M] [\delta] [M] \{A\} \\
 &= (C_1 \{A_N^{(1)}\}^T + C_2 \{A_N^{(2)}\}^T + \cdots \\
 &\quad + C_n \{A_N^{(n)}\}^T) [M] [\delta] [M] (C_1 \{A_N^{(1)}\} \\
 &\quad + C_2 \{A_N^{(2)}\} + \cdots + C_n \{A_N^{(n)}\}) \\
 &= (C_1 \{A_N^{(1)}\}^T + C_2 \{A_N^{(2)}\}^T + \cdots + C_n \{A_N^{(n)}\}^T) [M] \\
 &\quad \left(\frac{C_1}{p_1^2} \{A_N^{(1)}\} + \frac{C_2}{p_2^2} \{A_N^{(2)}\} + \cdots + \frac{C_n}{p_n^2} \{A_N^{(n)}\} \right) \\
 &= \frac{C_1^2}{p_1^2} + \frac{C_2^2}{p_2^2} + \cdots + \frac{C_n^2}{p_n^2} \quad (6.180)
 \end{aligned}$$

代入 (6.178) 式求出对任选的 $\{A\}$ 所得 p^2 值为

$$p^2 = \frac{\{A\}^T [M] \{A\}}{\{A\}^T [M] [\delta] [M] \{A\}} = \frac{C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2}{\frac{C_1^2}{p_1^2} + \frac{C_2^2}{p_2^2} + \cdots + \frac{C_n^2}{p_n^2}} \quad (6.181)$$

如 $\{A\}$ 很接近于第一阶主振型 $\{A^{(1)}\}$, 即 $\frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_1}, \dots, \frac{C_n}{C_1} \ll 1$, 则有

$$\begin{aligned}
 p^2 &= p_1^2 \frac{1 + \frac{C_2^2}{C_1^2} + \cdots + \frac{C_n^2}{C_1^2}}{1 + \frac{C_2^2}{C_1^2} \frac{p_1^2}{p_2^2} + \cdots + \frac{C_n^2 p_1^2}{C_1^2 p_n^2}} \\
 &\approx p_1^2 \left[1 + \frac{C_2^2}{C_1^2} \left(1 - \frac{p_1^2}{p_2^2} \right) + \cdots + \frac{C_n^2}{C_1^2} \left(1 - \frac{p_1^2}{p_n^2} \right) \right] \\
 &\approx p_1^2 \quad (6.182)
 \end{aligned}$$

此时 p^2 值可作为 p_1^2 的近似值。

不管用 (6.169) 式还是 (6.178) 式算出的 p^2 值总比 p_1^2 值来得大。在物理意义上, 这表示任选一个 $\{A\}$ 意味着对系统施加了约束, 增加了系统的刚度, 因此频率值提高。对于同一计算公式 ((6.169) 式或 (6.178) 式), 如选取不同的 $\{A\}$ 计算出 p^2 值, 应选取那个最小的 p^2 值作为 p_1^2 的最好的近似值; 理论上说, 只有当 $\{A\}$ 选得恰好是第一阶主振型 $\{A^{(1)}\}$ 时, 算出的 p^2 值才达

到最最小的数值,也就是 p_1^2 的精确值。

可以证明,对于选取一组相同的列阵 $\{A\}$,采用 (6.178) 式算出的 p^2 值较用 (6.169) 式算出的 p^2 值小,因而更接近于 p_1^2 的精确值。

瑞雷法在原则上也可被用来求高阶固有频率,即如果选取的 $\{A\}$ 很接近于第 i 阶主振型 $\{A^{(i)}\}$,则由 (6.169) 式或 (6.178) 式算出的 p^2 值就接近于 p_i^2 。实际上由于我们很难选取 $\{A\}$ 接近于高阶主振型,故通常不用瑞雷法求高阶固有频率值。

选取一个接近于 $\{A^{(1)}\}$ 的列阵 $\{A\}$,也需要一些经验和从理论分析得出的一些估计。如果在选取时确有困难,不妨先任选一个 $\{A\}_1$,将其与动力矩阵 $[D]$ 相乘,求得 $\{B\}_1 = [D]\{A\}_1$,即相当于矩阵迭代法中计算第一个循环,然后选 $\{B\}_1$ 或与其成比例的 $\{A\}_2$ 作为 $\{A^{(1)}\}$ 的近似,用它按 (6.169) 式或 (6.178) 式计算出 p^2 ,一般就可得到 p_1^2 很好的近似值。

例 6.11 用瑞雷法计算例 6.1 中系统的第一个固有频率 p_1 值。

解 由例 6.1 及例 6.8 的结果,知该系统的 $[M]$ 、 $[K]$ 、 $[8]$ 各为

$$[M] = m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [K] = k \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[8] = -\frac{1}{6k} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

并已求得 p_1^2 及 p_1 的精确值为

$$p_1^2 = 0.351465 \frac{k}{m}, \quad p_1 = 0.592844 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

下面用瑞雷法计算。先需要选取列阵 $\{A\}$, 如选取

$$\{A\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

可算出

$$\{A\}^T [M] \{A\} = [1 \quad 1.5 \quad 2] m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix} = 9.375 m$$

$$\{A\}^T [K] \{A\} = [1 \quad 1.5 \quad 2] k \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix} = 3.750 k$$

$$\{A\}^T [M] [\delta] [M] \{A\}$$

$$= [1 \quad 1.5 \quad 2] m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6k} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= 26.05 \frac{m^2}{k}$$

由 (6.169) 式可算出

$$p^2 = \frac{3.750 k}{9.375 m} = 0.4000 \frac{k}{m}$$

$$p = 0.6325 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

此 p 值与 p_1 的精确值的相对误差为

$$\delta = \frac{p - p_1}{p} = \frac{0.6325 - 0.5928}{0.6325} \approx 6.3\%$$

由 (6.178) 式可算出

$$p^2 = \frac{9.375 m}{26.05 \frac{m^2}{k}} = 0.3599 \frac{k}{m}$$

$$p = 0.5999\sqrt{\frac{k}{m}}$$

此 p 值与 p_1 的精确值的相对误差为

$$\delta = \frac{p - p_1}{p} = \frac{0.5999 - 0.5928}{0.5999} \approx 1.2\%$$

如果选取的 $\{A\}$ 与 $\{A^{(1)}\}$ 很不接近, 例如取

$$\{A\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则可算出 $\{A\}^T [M] \{A\} = 4.5m$, $\{A\}^T [K] \{A\} = 3k$,

$\{A\}^T [M] [\delta] [M] \{A\} = 10.88 \frac{m^2}{k}$, 由 (6.169) 式可算出

$$p^2 = 0.6667 \frac{k}{m}, \quad p = 0.8165 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

p 值的相对误差达 27%; 如由 (6.178) 式计算, 可求得

$$p^2 = 0.4138 \frac{k}{m} \quad p = 0.6433 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

p 值的相对误差不到 8%, 可见即使 $\{A\}$ 选得很不合理, 用 (6.178) 式算出的 p 值与 p_1 精确值相差也不是太大。

在前面例 6.8 中, 我们曾用这里的 $\{A\}$ 作为 $\{A\}_1$ 进行过矩阵迭代运算, 得到的 $\{A\}_2$ 为

$$\{A\}_2 = \begin{bmatrix} 0.4000 \\ 0.7333 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

如果选取这 $\{A\}_2$ 作为 $\{A\}$, 则只要用 (6.169) 式计算, 就能得到很好的结果, 计算出数值为

$$p^2 = 0.3636 \frac{k}{m} \quad p = 0.6030 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

此 p 值作为 p_1 的近似值, 相对误差仅 1.7%。

例 6.12 用瑞雷法计算例 6.10 的系统的的第一阶固有频率。

解 由例 6.10, 已知系统的 $[M]$ 、 $[\delta]$ 为

$$[M] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\delta] = \frac{l^3}{768 EJ} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

如选取

$$\{A\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可求出

$$\{A\}^T [M] \{A\} = [1 \ 2 \ 1] m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 10 m$$

$$\{A\}^T [M] [\delta] [M] \{A\}$$

$$\begin{aligned} &= [1 \ 2 \ 1] m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{l^3}{768 EJ} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{464 m^2 l^3}{768 EJ} = \frac{29}{48} \frac{m^2 l^3}{EJ} \end{aligned}$$

由 (6.178) 式可算出

$$\begin{aligned} p_1^2 &= \frac{480 EJ}{29 m l^3} = 16.55 \frac{EJ}{m l^3} \\ p_1 &= 4.068 \sqrt{\frac{EJ}{m l^3}} \end{aligned}$$

例 6.10 中已求得 p_1 的精确值为 $p_1 = 4.025 \sqrt{\frac{EJ}{m l^3}}$, 这里用瑞雷法求出的值比它仅大 1%。

(2) 邓柯莱法

如果用柔度矩阵 $[\delta]$ 列出多自由度系统的运动方程式, 且假定系统的质量矩阵 $[M]$ 为对角矩阵, 则由 6.3 节 (6.44) 式, 可得系统的特征方程式为

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_{11} - \frac{1}{p^2} & \delta_{12}m_{22} & \cdots & \delta_{1n}m_{nn} \\ \delta_{21}m_{11} & \delta_{22}m_{22} - \frac{1}{p^2} & \cdots & \delta_{2n}m_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1}m_{11} & \delta_{n2}m_{22} & \cdots & \delta_{nn}m_{nn} - \frac{1}{p^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.183)$$

将其展开后可得

$$\frac{1}{p^{2n}} - (\delta_{11}m_{11} + \delta_{22}m_{22} + \cdots + \delta_{nn}m_{nn}) \frac{1}{p^{2(n-1)}} + \cdots = 0 \quad (6.184)$$

根据多项式的根与系数之间的关系, $\frac{1}{p^2}$ 的 n 个根 $\frac{1}{p_1^2}$ 、 $\frac{1}{p_2^2}$ 、 \cdots 、 $\frac{1}{p_n^2}$ 之和为

$$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots + \frac{1}{p_n^2} = \delta_{11}m_{11} + \delta_{22}m_{22} + \cdots + \delta_{nn}m_{nn} \quad (6.185)$$

引入符号

$$p_{ii}^2 \equiv \frac{1}{\delta_{ii}m_{ii}} \quad (6.186)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

p_{ii} 表示只有质量 m_{ii} 存在、因而原来的多自由度系统变成单自由度系统时的固有圆频率, 因为这种单自由度系统的自由振动微分方程式为

$$x_i + \delta_{ii}m_{ii}\ddot{x}_i = 0 \quad (c)$$

故固有圆频率为

$$p_{ii}^2 = \frac{1}{\delta_{ii}m_{ii}} \quad (d)$$

将 (6.186) 式代入 (6.185) 式右边, 并在等式左边只保留

最大的第一项, 得

$$\frac{1}{p_1^2} \approx \frac{1}{p_{11}^2} + \frac{1}{p_{22}^2} + \cdots + \frac{1}{p_{nn}^2} \quad (6.187)$$

此式可用来估算系统最低阶固有频率 p_1 值, 它说明系统最低阶固有频率 p_1 平方值 p_1^2 的倒数, 近似等于各质量 m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 单独存在时所得的各固有频率 p_{ii} 平方值 p_{ii}^2 的倒数之和。这公式是邓柯莱用实验确定多圆盘的轴横向振动固有频率时建立的, 通常称为**邓柯莱公式**。显然, 由这公式算出的 p_1 值恒低于 p_1 的精确值。

例 6.13 用邓柯莱公式计算例 6.10 的系统的最低固有频率 p_1 值。

解 由例 6.10, 已知 $m_{11} = m_{33} = m$, $m_{22} = 2m$, $\delta_{11} = \delta_{33} = \frac{9l^3}{768 EJ}$, $\delta_{22} = \frac{16l^3}{768 EJ}$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \frac{1}{p_{11}^2} &= \frac{1}{p_{33}^2} = \frac{9ml^3}{768 EJ} \\ \frac{1}{p_{22}^2} &= \frac{32ml^3}{768 EJ} \end{aligned}$$

由 (6.187) 式, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1^2} &\approx \frac{ml^3}{768 EJ} (9 + 32 + 9) = \frac{50ml^3}{768 EJ} \\ p_1^2 &\approx \frac{768 EJ}{50ml^3} = 15.36 \frac{EJ}{ml^3} \\ p_1 &\approx 3.919 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} \end{aligned}$$

这里求得的 p_1 值比例 6.10 中求得的 p_1 精确值小 2.5%。

(3) 李兹法

瑞雷法与邓柯莱法只用于求系统第一阶固有频率的近似值, 如果想求系统前几阶固有频率及主振型的近似解, 可以采用李兹法。

李兹法是一种缩减系统自由度数的近似解法。设有一个 n 自

由度的系统, 其座标为 q_1, q_2, \dots, q_n , 记为 $\{q\}$ 列阵, 采用李兹法时, 可用下式将系统的自由度数由 n 缩减为 n_1 ($n_1 < n$), 即令

$$\begin{aligned}\{q\} &= x_1\{\psi_1\} + x_2\{\psi_2\} + \dots + x_{n_1}\{\psi_{n_1}\} \\ &= [\Psi]\{x\}\end{aligned}\quad (6.188)$$

其中 $\{\psi_1\}, \{\psi_2\}, \dots, \{\psi_{n_1}\}$ 各为 n 元系的列阵, 由我们适当选取确定, $[\Psi]$ 为由 n_1 个列阵 $\{\psi_1\}, \{\psi_2\}, \dots, \{\psi_{n_1}\}$ 依序排列组成的 $n \times n_1$ 阶矩阵, x_1, x_2, \dots, x_{n_1} 是系统新的 n_1 个座标, 它们可记成列阵 $\{x\}$ 。(6.188) 式使系统原来独立的 n 个座标组成的列阵 $\{q\}$ 人为地受到限制, 即限制 $\{q\}$ 必须是事先选定的 n_1 个列阵 $\{\psi_1\}, \{\psi_2\}, \dots, \{\psi_{n_1}\}$ 的线性组合, 系统的自由度只表现为 n_1 个新座标 x_1, x_2, \dots, x_{n_1} 值的不同的组合, 这样, 系统的自由度数就由 n 缩减为 n_1 。系统采用新的缩减后的座标 $\{x\}$ 后, 仍可利用拉格朗日方程式建立它的运动方程式, 为此先要计算系统的动能 T 与势能 U , 在原座标 $\{q\}$ 中, 有

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} \quad (6.189)$$

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (6.190)$$

$[M], [K]$ 各为原座标中的 $n \times n$ 阶的质量矩阵及刚度矩阵, 利用 (6.188) 式及它对时间取导数后得到的下式

$$\{\dot{q}\} = [\Psi]\{\dot{x}\} \quad (6.191)$$

可将 T, U 写成

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [\Psi]^T [M] [\Psi] \{\dot{x}\} = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M^*] \{\dot{x}\} \quad (6.192)$$

$$U = \frac{1}{2} \{x\}^T [\Psi]^T [K] [\Psi] \{x\} = \frac{1}{2} \{x\}^T [K^*] \{x\} \quad (6.193)$$

其中 $[M^*] = [\Psi]^T [M] [\Psi]$ 及 $[K^*] = [\Psi]^T [K] [\Psi]$ 各为新座标 $\{x\}$ 中的 $n_1 \times n_1$ 阶的质量矩阵及刚度矩阵。根据拉格朗日方程式, 可求得系统采用新座标 $\{x\}$ 描写的自由振动微分方程式为

$$[M^*]\{\ddot{x}\} + [K^*]\{x\} = \{0\} \quad (6.194)$$

$$\text{令} \quad \{x\} = \{A^*\} \sin(p^*t + \varphi^*) \quad (6.195)$$

代入 (6.194) 式可得

$$([K^*] - p^{*2}[M^*])\{A^*\} = \{0\} \quad (6.196)$$

由上式可求得 n_1 个固有频率 $p_1^*, p_2^*, \dots, p_{n_1}^*$ 及主振型 $\{A^{*(1)}\}$ 、 $\{A^{*(2)}\}$ 、 \dots 、 $\{A^{*(n_1)}\}$ 。这 n_1 个固有频率值 $p_1^*, p_2^*, \dots, p_{n_1}^*$ ，可以作为系统 n 个固有频率中的前 n_1 个的近似值，相应的 $\{q\}$ 的前 n_1 阶主振型 $\{A^{(i)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n_1$) 可由

$$\{A^{(i)}\} = [\Psi]\{A^{*(i)}\} \quad (6.197)$$

求出。这就是李兹法求系统前几阶固有频率及主振型的具体过程。

从上述过程中可以看出，如果我们选取的各 $\{\psi_i\}$ 、 $\{\psi_2\}$ 、 \dots 、 $\{\psi_{n_1}\}$ 恰好是系统前 n_1 阶主振型 $\{A^{(1)}\}$ 、 $\{A^{(2)}\}$ 、 \dots 、 $\{A^{(n_1)}\}$ ，则 (6.188) 式与 6.4 节中振型截断法的坐标变换 (6.98) 式是相同的，因此这时由 (6.196) 式求出的 $p_1^*, p_2^*, \dots, p_{n_1}^*$ 就是系统 n 个固有频率中前 n_1 个 p_1, p_2, \dots, p_{n_1} 的精确值。一般情况下，由于我们只能根据分析或经验尽量选取各 $\{\psi_i\}$ 接近于 $\{A^{(i)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n_1$)，因此 p_i^* 与 p_i ($i = 1, 2, \dots, n_1$) 不精确相等。可以证明，恒有

$$p_i^* \geq p_i \quad (6.198)$$

通常在这 n_1 个 p_i^* 值中，前面 $\frac{1}{2}n_1$ 或 $\frac{1}{2}(n_1 + 1)$ 个 p_i^* 值比较接近真实的 p_i 值，后面的 p_i^* 值误差就比较大了。所以如果我们想求 n 自由度系统的前 S 阶固有频率及主振型的近似解，系统的自由度数最好由 n 缩减到 $n_1 \geq 2S$ 个，这样才能使计算结果接近精确解。

例 6.14 将等直杆件用聚缩质量的方法离散化成有限

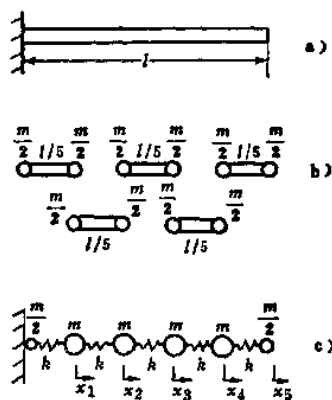


图 6-12

自由度系统，并用李兹法求杆件纵向振动第一阶固有频率及主振型的近似解（图6-12）。

解 等直杆的重度为 γ ，截面积为 A 、长度为 l ，按图6-12，假想地把杆等分成五段，将每段的质量 $m = \frac{\gamma A l}{5g}$ 等分成两半，分别置于每段端部，然后将五段合并，得到五个聚缩后的质量 m 、 m 、 m 、 m 、 $\frac{m}{2}$ （另外的固定端处 $\frac{m}{2}$ 质量在下面计算中不起作用），各质量之间由刚度为 k 的五个弹簧相连， k 值由每段杆件拉压刚度确定： $k = \frac{5EA}{l}$ ， E 是杆件弹性模量。

这样，我们就将杆件离散化成为一个近似的五个自由度的系统，这个系统的自由振动微分方程式不难列出，为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 &= 0 \\ m\ddot{x}_3 - kx_2 + 2kx_3 - kx_4 &= 0 \\ m\ddot{x}_4 - kx_3 + 2kx_4 - kx_5 &= 0 \\ \frac{m}{2}\ddot{x}_5 - kx_4 + kx_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

有

$$[M] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad [K] = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

因为只要计算纵向振动的第一阶固有频率及主振型，所以可以将这五个自由度的系统再用李兹法缩减为二个自由度（这里需要指出：不能一开始把杆件假想地等分成二段，再把质量配置与聚缩后，把杆件离散化成为二个自由度的系统，这样做在离散化过程中引起的误差太大）。令 $\{x\} = [\Psi]\{y\}$ ，并选取

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad (f)$$

新座标 $\{y\} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 中, 系统的自由振动微分方程式为

$$[M^*]\{\ddot{y}\} + [K^*]\{y\} = \{0\} \quad (g)$$

其中

$$[M^*] = [\Psi]^T [M] [\Psi]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= m \begin{bmatrix} 42.5 & 3.5 \\ 3.5 & 3.5 \end{bmatrix} \quad (h)$$

$$[K^*] = [\Psi]^T [K] [\Psi]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= k \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (i)$$

令

$$\{y\} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{bmatrix} \sin(\rho^* t + \varphi^*) = \{A^*\} \sin(\rho^* t + \varphi^*) \quad (j)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{得 } (5k - 42.5mp^{*2})A_1^* - (k + 3.5mp^{*2})A_2^* &= 0 \\ -(k + 3.5mp^{*2})A_1^* + (3k - 3.5mp^{*2})A_2^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

特征方程式为

$$\begin{vmatrix} 5k - 42.5mp^{*2} & -k - 3.5mp^{*2} \\ -k - 3.5mp^{*2} & 3k - 3.5mp^{*2} \end{vmatrix} = 0 \quad (l)$$

$$\text{即} \quad 136.5p^{*4} - 152\frac{k}{m}p^{*2} + 14\frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\text{可解得} \quad p_1^{*2} = 0.1013\frac{k}{m}, \quad p_2^{*2} = 1.012\frac{k}{m}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{故得} \quad p_1^* &= 0.3183\sqrt{\frac{k}{m}} = 1.592\frac{1}{l}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \\ p_2^* &= 1.006\sqrt{\frac{k}{m}} = 5.03 \cdot \frac{1}{l}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

对应的 $\{A^{*(1)}\}$ 、 $\{A^{*(2)}\}$ 为

$$\{A^{*(1)}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.506 \end{bmatrix}, \quad \{A^{*(2)}\} = \begin{bmatrix} -0.1194 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (n)$$

原坐标 $\{x\}$ 的振型 $\{A^{(i)}\}$ 可由 $[\Psi]\{A^{*(i)}\}$ 求得 ($i = 1, 2$),

即

$$\begin{aligned} \{A^{(1)}\} &= \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ A_3^{(1)} \\ A_4^{(1)} \\ A_5^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.506 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.506 \\ 2.506 \\ 3.506 \\ 4.000 \\ 4.494 \end{bmatrix} \\ &= 4.494 \begin{bmatrix} 0.336 \\ 0.558 \\ 0.781 \\ 0.891 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (o) \end{aligned}$$

$$\{A^{(2)}\} = \begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ A_3^{(2)} \\ A_4^{(2)} \\ A_6^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1194 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.881 \\ 0.761 \\ 0.642 \\ -0.478 \\ -1.597 \end{bmatrix}$$

$$= 1.597 \begin{bmatrix} 0.551 \\ 0.476 \\ 0.401 \\ -0.299 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{P})$$

这里求得的第一阶固有频率 p_1^* 及主振型 $\{A^{(1)}\}$ 比较精确，第二阶固有频率 p_2^* 及主振型 $\{A^{(2)}\}$ 的误差就较大。第七章中将给出本例的精确解。

李兹法也可以应用于用柔度矩阵 $[\delta]$ 建立运动方程的情况，此时势能 U 为（见 (6.176) 式）

$$U = \frac{1}{2} \{\tilde{q}\}^T [M] [\delta] [M] \{\tilde{q}\} \quad (6.199)$$

自由振动时， $\{\tilde{q}\}$ 可用 $-p^{*2}\{q\}$ 表示，故

$$U = \frac{1}{2} p^{*4} \{q\}^T [M] [\delta] [M] \{q\} \quad (6.200)$$

将 (6.191)、(6.188) 式分别代入 (6.189) 式及 (6.199) 式，可得 T 及 U 为

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [\Psi]^T [M] [\Psi] \{\dot{x}\} = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M^*] \{\dot{x}\} \quad (6.201)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} p^{*4} \{x\}^T [\Psi]^T [M] [\delta] [M] [\Psi] \{x\} \\ &= \frac{1}{2} p^{*4} \{x\}^T [L^*] \{x\} \end{aligned} \quad (6.202)$$

其中 $[M^*] = [\Psi]^T [M] [\Psi] \quad (6.203)$

$$[L^*] = [\Psi]^T [M] [\delta] [M] [\Psi] \quad (6.204)$$

由拉格朗日方程式可得

$$[M^*]\{\ddot{x}\} + p^{*2}[L^*]\{x\} = \{0\} \quad (6.205)$$

令 $\{x\} = \{A^*\} \sin(p^*t + \varphi^*)$, 则 $\{\ddot{x}\} = -\{A^*\} p^{*2} \sin(p^*t + \varphi^*)$, 代入 (6.205) 式可得

$$([M^*] - p^{*2}[L^*])\{A^*\} = \{0\} \quad (6.206)$$

由此式亦可求得 n_1 个固有频率 $p_1^*, p_2^*, \dots, p_{n_1}^*$ 及主振型 $\{A^{*(1)}\}, \{A^{*(2)}\}, \dots, \{A^{*(n_1)}\}$ 。这样就得到了系统前 n_1 个固有频率的近似值, 并由 (6.197) 式求得前 n_1 阶主振型。与瑞雷法的情况相似, 如果对同样选取的 $[W]$ 矩阵采用李兹法求近似解, 则由 (6.206) 式求出的 n_1 固有频率 $p_1^*, p_2^*, \dots, p_{n_1}^*$ 要比用 (6.196) 式求出的值更接近于系统真实的前 n_1 个固有频率, 而且数值上仍永远偏大, 即 (6.198) 式对 (6.206) 式求出的 p^* 仍然成立。

用李兹法进行座标缩减是一个很有用的概念。我们可以将李兹法与 6.7 节介绍的矩阵迭代法结合起来, 用以同时迭代运算后求得系统的较低的若干阶固有频率及主振型, 这就是所谓的子空间迭代法, 详细计算过程见第九章。

6.9 多自由度系统的阻尼

前面各节介绍了无阻尼的多自由度系统的自由振动。对于工程上按多自由度系统分析的各种弹性结构来说, 它们在振动时总是要受到各种阻尼力的作用 (如材料阻尼、结构阻尼、介质粘性阻尼等)。由于各种阻尼力的机理比较复杂, 在振动分析计算时, 常常将各种阻尼力都简化为与速度成正比的粘性阻尼力, 其中有些粘性阻尼力与各座标的绝对速度成正比 (如介质粘性阻尼), 有些阻尼力与各座标的相对速度成正比 (如轴上带有圆盘的扭振系统中, 各圆盘间轴段的材料阻尼与两端圆盘角速度的相差值成正比), 它们可分别以 $C\dot{x}_i$ 或 $C(\dot{x}_i - \dot{x}_j)$ 的形式定量地表示, 其中 \dot{x}_i 与 $\dot{x}_i - \dot{x}_j$ 分别是各座标的绝对速度与相对速度, 阻尼系数 C 须由工程上各种理论与经验公式求出, 或直接根据实验数据确定, 可参看 [4]。

例如, 对于图 6-13 所示轴上带有三圆盘的扭振系统, 在 各 外 扭 矩 及 阻 尼 扭 矩 的 作 用 下, 其 运 动 方 程 式 可 写 成

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1 \dot{\varphi}_1 + C_4 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= M_1 \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + C_2 \dot{\varphi}_2 + C_4 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + C_5 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) + k_1 (\varphi_2 - \varphi_1) \\ &+ k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = M_2 \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 + C_3 \dot{\varphi}_3 + C_5 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + k_2 (\varphi_3 - \varphi_2) &= M_3 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

或写成下述矩阵形式

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_4 & -C_4 & 0 \\ -C_4 & C_2 + C_4 + C_5 & -C_5 \\ 0 & -C_5 & C_3 + C_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (b)$$

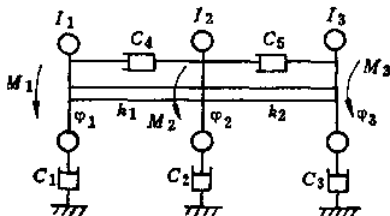


图 6-13

对于一般的带有粘性阻尼的多自由度系统, 在外力作用下, 它的运动方程式的形式为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\} \quad (6.207)$$

其中质量矩阵 $[M]$ 、刚度矩阵 $[K]$ 及外力列阵 $\{P\}$ 的意义与前面相同, 而阻尼矩阵 $[C]$ 的形式为

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \cdots C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} \cdots C_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} \cdots C_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.208)$$

阻尼矩阵 $[C]$ 一般是正定或半正定的对称矩阵。

如没有外力作用，则带有粘性阻尼的多自由度系统的自由振动微分方程式为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (6.209)$$

令此式具有解

$$x_i = A_i e^{pt}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.210)$$

代入(6.209)式，可得有阻尼的多自由度系统的特征方程式为

$$\begin{vmatrix} k_{11} + C_{11}p + m_{11}p^2 & k_{12} + C_{12}p + m_{12}p^2 & \cdots & k_{1n} + C_{1n}p + m_{1n}p^2 \\ k_{21} + C_{21}p + m_{21}p^2 & k_{22} + C_{22}p + m_{22}p^2 & \cdots & k_{2n} + C_{2n}p + m_{2n}p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} + C_{n1}p + m_{n1}p^2 & k_{n2} + C_{n2}p + m_{n2}p^2 & \cdots & k_{nn} + C_{nn}p + m_{nn}p^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.211)$$

将其展开后，可得到一个 p 的 $2n$ 次方程式，由它可得到 p 的 n 对共轭复根，对应地可得到 n 对 $\{A\}$ 的共轭复振型。将这些解线性组合后，可得到系统的一般解。对于这种求解方法，我们打算详细介绍，读者可参考有关资料 \ominus 。

下面我们主要介绍用振型叠加法求解有阻尼的多自由度系统的振动问题。

按6.4节(6.85)式，引进正则座标 $\{x_n\}$ ，并将(6.85)式代入(6.209)式，可得

$$[M][A_N]\{\ddot{x}_n\} + [C][A_N]\{\dot{x}_n\} + [K][A_N]\{x_n\} = \{P\} \quad (6.212)$$

对此式两边前乘以 $[A_N]^T$ ，由6.4节(6.66)式及(6.69)式，可得

$$[I]\{\ddot{x}_n\} + [C_N]\{\dot{x}_n\} + [K_N]\{x_n\} = \{P_n\} \quad (6.213)$$

\ominus “应用电子计算机计算柴油机轴系扭转振动”，上海柴油机厂等。参看本书P. 473页下注。

其中 $\{P_N\} = [A_N]^T \{P\}$ 为正则坐标中的广义力列阵, $[C_N]$ 是正则坐标中的阻尼矩阵, 它是由原先坐标中的阻尼矩阵 $[C]$ 转换出来的

$$[C_N] = [A_N]^T [C] [A_N] \quad (6.214)$$

即

$$\begin{aligned} [C_N] &= \begin{bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N2}^{(1)} & \cdots & A_{Nn}^{(1)} \\ A_{N1}^{(2)} & A_{N2}^{(2)} & \cdots & A_{Nn}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}^{(n)} & A_{N2}^{(n)} & \cdots & A_{Nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N1}^{(2)} & \cdots & A_{N1}^{(n)} \\ A_{N2}^{(1)} & A_{N2}^{(2)} & \cdots & A_{N2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{Nn}^{(1)} & A_{Nn}^{(2)} & \cdots & A_{Nn}^{(n)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_{N11} & C_{N12} & \cdots & C_{N1n} \\ C_{N21} & C_{N22} & \cdots & C_{N2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{Nn1} & C_{Nn2} & \cdots & C_{Nnn} \end{bmatrix} \quad (6.215) \end{aligned}$$

虽然 (6.213) 式中 $\{\ddot{x}_v\}$ 与 $\{x_n\}$ 的系数矩阵都已分别是对角矩阵 $[I]$ 与 $[K_n]$, 但由于 $[C_N]$ 一般不是对角矩阵, 所以 (6.213) 式是一组通过速度项相互耦合的微分方程式。

类似地可将 (6.209) 式转换成

$$[I] \{\ddot{x}_n\} + [C_N] \{\dot{x}_n\} + [K_n] \{x_n\} = \{0\} \quad (6.216)$$

显然, 如果 $[C_N]$ 是一个对角矩阵, 这将大大简化 (6.213) 式或 (6.216) 式的求解工作。

很早以前, 瑞雷就已指出: 如果原坐标的阻尼矩阵 $[C]$ 恰好与质量矩阵 $[M]$ 或刚度矩阵 $[K]$ 成正比, 或者 $[C]$ 是 $[M]$ 与 $[K]$ 的某种线性组合, 即

$$[C] = a[M] + b[K] \quad (6.217)$$

其中 a 、 b 各为正的常数, 我们称这种阻尼为**比例阻尼**, 对这种比例阻尼来说, 当坐标转换成正则坐标时, 在正则坐标中的阻尼矩阵 $[C_N]$ 将是一个对角矩阵, 即有

$$\begin{aligned}
[C_N] &= [A_N]^T [C] [A_N] \\
&= [A_N]^T (a [M] + b [K]) [A_N] \\
&= a [A_N]^T [M] [A_N] + b [A_N]^T [K] [A_N] \\
&= a [I] + b [K_N] \\
&= \begin{bmatrix} a + b p_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a + b p_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a + b p_n^2 \end{bmatrix} \quad (6.218)
\end{aligned}$$

比例阻尼只是使 $[C_N]$ 成为对角矩阵的一种特殊情形, 还可以找到其他一些条件, 只要当 $[C]$ 满足这些条件时, 同样可以得到 $[C_N]$ 为对角矩阵。但是, 对工程上绝大多数实际阻尼的情况来说, 要精确满足上述一些条件是很困难的, 因此一般 $[C_N]$ 总不是对角矩阵。

然而, 工程上的大多数振动系统中, 阻尼都比较小, 而且由于各种阻尼的机理至今还没有完全搞清楚, 精确测定阻尼的大小也还有很多困难, 因此, 如果仅仅由于阻尼矩阵 $[C]$ 转换而得的 $[C_N]$ 不是对角矩阵, 导致必须求解相互耦合的微分方程组(6.213)式或(6.216)式, 即使我们可以设法克服计算方面的困难, 采取这样的分析计算方法的必要性也是值得商榷的。

为此, 提出了各种方案, 企图用一个对角矩阵形式的阻尼矩阵近似地代替 $[C_N]$, 其中最简单的一个方案就是根据(6.214)式由 $[C]$ 算出 $[C_N]$ 后, 将这 $[C_N]$ 中所有的非对角元素的值改为零, 保留 $[C_N]$ 中对角元素的原有数值, 用这样一个经过上述处理的对角矩阵 $[C_N]$ 近似地代替 $[C_N]$, 即

$$[C_N] = \begin{bmatrix} C_{N11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{N22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{Nnn} \end{bmatrix} \quad (6.219)$$

对于这种方案的合理性, 可以作如下的说明。

以(6.213)式为例。假定各座标上作用的外力是同频率且

同相位的简谐力，则 (6.213) 式的原来展开的形式为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{n1} + C_{n11}\dot{x}_{n1} + C_{n12}\dot{x}_{n2} + \cdots + C_{n1n}\dot{x}_{nn} + p_1^2 x_{n1} &= P_{n1} \sin \omega t \\ \ddot{x}_{n2} + C_{n21}\dot{x}_{n1} + C_{n22}\dot{x}_{n2} + \cdots + C_{n2n}\dot{x}_{nn} + p_2^2 x_{n2} &= P_{n2} \sin \omega t \\ \cdots \\ \ddot{x}_{nn} + C_{nn1}\dot{x}_{n1} + C_{nn2}\dot{x}_{n2} + \cdots + C_{nnn}\dot{x}_{nn} + p_n^2 x_{nn} &= P_{nn} \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

对大多数正定系统来说，各固有频率值 p_1, p_2, \cdots, p_n 值彼此不等且不非常接近，并且如前所述，阻尼通常是比较小的。对于 (c) 式的稳态阶段的解 $x_{n1}(t), x_{n2}(t), \cdots, x_{nn}(t)$ ，我们可以进行这样一些分析：

1) 当外力频率 ω 与各固有频率 p_1, p_2, \cdots, p_n 值均不很接近时，

这时，对 (c) 式中任意第 r 个式子来说，由

$$\ddot{x}_{nr} + C_{nr1}\dot{x}_{n1} + C_{nr2}\dot{x}_{n2} + \cdots + C_{nrn}\dot{x}_{nn} + p_r^2 x_{nr} = P_{nr} \sin \omega t \quad (d)$$

因为 ω 与 p_r 并不接近，阻尼又比较小，因此等式左端各项中，起主要作用的是 \ddot{x}_{nr} 或 $p_r^2 x_{nr}$ 二项，即外力主要与惯性力或弹性力相对抗，阻尼力各项的作用很小，可以近似地略去不计。

2) 当外力频率 ω 与第 r 个固有频率 p_r 比较接近时，

这时，由于 (d) 式左端 \ddot{x}_{nr} 与 $p_r^2 x_{nr}$ 两项大小比较接近，即惯性力与弹性力相互接近平衡，外力主要与阻尼力相对抗，而在阻尼力各项中，因各固有频率 p_1, p_2, \cdots, p_n 彼此不是非常接近， ω 仅与 p_r 比较接近而离其他各固有频率值较远，又因为阻尼比较小，所以 \dot{x}_{nr} 值远比其他各 $\dot{x}_{n1}, \dot{x}_{n2}, \cdots, \dot{x}_{nr-1}, \dot{x}_{nr+1}, \cdots, \dot{x}_{nn}$ 值大，并由于 $[C_n]$ 是正定或半正定的矩阵，很少出现其对角线元素小于甚至远小于非对角线元素的情况。所以在 (d) 式左端阻尼力各项中，往往只有 $C_{nr,r} \dot{x}_{nr}$ 项是主要的，其他各项相比之下均可近似地略去不计。

综合上述两种情况可知，略去 $[C_n]$ 非对角线元素组成的各阻尼力项，即令 $[C_n]$ 的所有非对角线元素的值为零，并不会引起很大误差。

一般的外力可以看成是许多简谐力的叠加, 因此上述分析在适当推广后仍然有效。对于自由振动的情形, 也可进行类似的分析, 不再赘述。

因此, 只要系统的阻尼比较小, 而且系统的各固有频率值彼此不等且不非常接近, 那么按照上述处理方法, 将原来非对角矩阵 $[C_N]$ 简化成对角矩阵 $[C_N]$ 进行分析计算, 通常都能求得系统运动规律的很好的近似解。这样, 我们就把振型叠加法有效地推广到有阻尼的多自由度系统的振动问题的分析求解。

用 $[C_N]$ 代替 $[C_N]$ 后, 使 (6.213) 式改成下述形式

$$[I] \{\ddot{x}_N\} + [C_N] \{\dot{x}_N\} + [K_N] \{x_N\} = \{P_N\} \quad (6.220)$$

它的展开形式是

$$\ddot{x}_{Nr} + C_{Nrr} \dot{x}_{Nr} + p_r^2 x_{Nr} = P_{Nr} \quad (6.221)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

这是一组 n 个相互独立的二阶常系数线性微分方程式, 彼此可以独立求解。这样, 我们就把有阻尼的多自由度系统的振动问题, 简化成为 n 个正则座标的单自由度系统的振动问题。 C_{Nrr} 称为第 r 阶正则振型的阻尼系数, $[C_N]$ 称为正则振型的阻尼矩阵。

还可以将 (6.221) 式改写成

$$\ddot{x}_{Nr} + 2n_r \dot{x}_{Nr} + p_r^2 x_{Nr} = P_{Nr} \quad (6.222)$$

$$\text{或} \quad \ddot{x}_{Nr} + 2\zeta_r p_r \dot{x}_{Nr} + p_r^2 x_{Nr} = P_{Nr} \quad (6.223)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

其中 $n_r = \frac{1}{2} C_{Nrr}$ 称为第 r 阶正则振型的衰减系数, $\zeta_r = \frac{C_{Nrr}}{2p_r} = \frac{n_r}{p_r}$ 称为第 r 阶正则振型的相对阻尼系数。

如系统没有外力作用, 并用 $[C_N]$ 代替 $[C_N]$, 系统的自由振动微分方程式 (6.216) 式变成

$$[I] \{\ddot{x}_N\} + [C_N] \{\dot{x}_N\} + [K_N] \{x_N\} = \{0\} \quad (6.224)$$

$$\text{其展开形式是} \quad \ddot{x}_{Nr} + C_{Nrr} \dot{x}_{Nr} + p_r^2 x_{Nr} = 0 \quad (6.225)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{还可改写成} \quad \ddot{x}_{Nr} + 2n_r \dot{x}_{Nr} + p_r^2 x_{Nr} = 0 \quad (6.226)$$

$$\text{或} \quad \ddot{x}_{Nr} + 2\zeta_r p_r \dot{x}_{Nr} + p_r^2 x_{Nr} = 0 \quad (6.227)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

这样,我们就很容易分析求解系统的自由振动。由(6.226)式,可求出各正则座标的运动规律为

$$x_{Nr} = e^{-n_r t} (C_{r1} \cos p'_r t + C_{r2} \sin p'_r t) \quad (6.228)$$

其中 p'_r 是有阻尼存在时的自由振动频率,其值为

$$p'_r = \sqrt{p_r^2 - n_r^2} = p_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad (6.229)$$

C_{r1} 、 C_{r2} 是待定常数,由初始时刻 $t = 0$ 时 x_{Nr} 及 \dot{x}_{Nr} 的值 x_{Nr0} 、 \dot{x}_{Nr0} 确定

$$C_{r1} = x_{Nr0}$$

$$C_{r2} = \frac{1}{p'_r} (\dot{x}_{Nr0} + n_r x_{Nr0}) \quad (6.230)$$

已知系统原先的座标 $\{x\}$ 与正则座标 $\{x_N\}$ 之间的转换关系为

$$\{x\} = [A_N] \{x_N\} \quad (6.231)$$

$$\{x_N\} = [A_N]^T [M] \{x\} \quad (6.232)$$

假定给出系统原先座标 $\{x\}$ 及速度 $\{\dot{x}\}$ 在 $t = 0$ 时的值 $\{x\}_{t=0}$ 及 $\{\dot{x}\}_{t=0}$, 由(6.232)式可求出

$$\{x_N\}_{t=0} = [A_N]^T [M] \{x\}_{t=0} \quad (6.233)$$

$$\{\dot{x}_N\}_{t=0} = [A_N]^T [M] \{\dot{x}\}_{t=0} \quad (6.234)$$

这样,就可由(6.230)式确定各 C_{r1} 、 C_{r2} 的值,代入(6.228)式可求得 x_{Nr} 亦即 $\{x_N\}$ 的运动规律,再由(6.231)式就可求出系统原先座标 $\{x\}$ 的自由振动解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N1}^{(2)} & \dots & A_{N1}^{(n)} \\ A_{N2}^{(1)} & A_{N2}^{(2)} & \dots & A_{N2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{Nn}^{(1)} & A_{Nn}^{(2)} & \dots & A_{Nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-n_1 t} \left\{ x_{N10} \cos p'_1 t + \frac{1}{p'_1} (\dot{x}_{N10} + n_1 x_{N10}) \sin p'_1 t \right\} \\ e^{-n_2 t} \left\{ x_{N20} \cos p'_2 t + \frac{1}{p'_2} (\dot{x}_{N20} + n_2 x_{N20}) \sin p'_2 t \right\} \\ \vdots \\ e^{-n_n t} \left\{ x_{Nn0} \cos p'_n t + \frac{1}{p'_n} (\dot{x}_{Nn0} + n_n x_{Nn0}) \sin p'_n t \right\} \end{bmatrix} \quad (6.235)$$

因此, 引进正则振型的阻尼矩阵 $[C_N]$ 后, 我们得到了以 (6.235) 式表示的有阻尼正定系统的自由振动运动规律, 系统每一座标的运动都由 n 个主振动分量叠加而成, 这里每个主振动都是衰减的简谐振动, 通常低频衰减较慢, 高频衰减较快, 频率 p_r' 比无阻尼的固有振动频率值 p_r 稍小。

对于半正定系统的自由振动, 也可以类似求出, 不再详述。

上面我们讨论了利用正则振型的阻尼矩阵 $[C_N]$, 可以大大简化对很多有阻尼的多自由度系统振动的分析计算工作, 其中 $[C_N]$ 是由系统原先座标的阻尼矩阵 $[C]$ 经过座标转换及对角线化的处理以后得到的。目前这种**振型阻尼**的概念已在工程上广泛使用。有时候我们可以采用实验方法或对类似系统阻尼性能的实际经验, 直接确定所分析的系统的各阶振型阻尼的大小。例如, 可以先直接确定或估计系统第 r 阶正则振型的相对阻尼系数 ξ_r 值, 再由 $C_{Nrr} = 2\xi_r p_r$ 求出 C_{Nrr} 及 $[C_N]$ 。这样, 就略去了对系统原先座标的阻尼矩阵 $[C]$ 的计算或实测工作。如果我们需要知道 $[C]$ 的话 (例如当需要对系统用原先座标表示的运动方程式直接数值积分求解时), 可以反过来由已经确定的 $[C_N]$ 计算出 $[C]$, 即把 $[C_N]$ 看成是 $[C_N]$, 利用 (6.214) 式, 有

$$[C_N] = [A_N]^T [C] [A_N] \quad (6.236)$$

反过来求出

$$[C] = ([A_N]^T)^{-1} [C_N] [A_N]^{-1} \quad (6.237)$$

利用 6.4 节 (6.91) 式, 可得

$$[C] = [M] [A_N] [C_N] [A_N]^T [M] \quad (6.238)$$

由于

$$[C_N] = \begin{bmatrix} C_{N11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{N22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{Nnn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\xi_1 p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_2 p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\xi_n p_n \end{bmatrix} \quad (6.239)$$

代入 (6.238) 式, 得

$$[C] = [M] \left(\sum_{r=1}^n 2\xi_r p_r \{A_N^{(r)}\} \{A_N^{(r)}\}^T \right) [M] \quad (6.240)$$

从此式中可以明显地看出各阶振型阻尼对 $[C]$ 的贡献。

如果采用振型截断法, 对 n 自由度的系统只分析前 n_1 个 ($n_1 < n$) 正则座标, 则由

$$[C_n] = \begin{bmatrix} C_{n11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{n22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{nn_1 n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\xi_1 p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_2 p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\xi_{n_1} p_{n_1} \end{bmatrix} \quad (6.241)$$

可类似地求得

$$\begin{aligned} [C] &= [M][A_N^*][C_n][A_N^*]^T[M] \\ &= [M] \left(\sum_{r=1}^{n_1} 2\xi_r p_r \{A_N^{(r)}\} \{A_N^{(r)}\}^T \right) [M] \end{aligned} \quad (6.242)$$

这相当于取系统的高阶振型阻尼值都为零。

由 $[C_n]$ 换算 $[C]$ 还可采用其他的方法, 这里不再详述。

6.10 系统对激振的响应

我们先研究最简单的情况。假定有一个具有粘性阻尼的多自由度系统, 它的各广义座标上有同频率、同相位的简谐力作用, 则系统的强迫振动方程式为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\}\sin\omega t \quad (6.243)$$

通常, 我们只希望得到系统的稳态的强迫振动解, 即系统的稳态响应 (因为与系统初始条件有关的自由衰减振动总要随时间增长而消失, 一般不予重视)。在有阻尼存在的情况下, 座标 $\{x\}$ 的运动规律比没有阻尼时要复杂一些, 一般的讲, 各座标虽作与外力频率相同的简谐运动, 但与外力的相位并不相同, 且各座标间彼此相位也不相同。就是说, (6.243) 式的稳态强迫振动解具有下述形式

$$\{x\} = \{A\}_1 \sin\omega t + \{A\}_2 \cos\omega t \quad (6.244)$$

由此

$$\{\dot{x}\} = \{A\}_1 \omega \cos \omega t - \{A\}_2 \omega \sin \omega t \quad (6.245)$$

$$\{\ddot{x}\} = -\{A\}_1 \omega^2 \sin \omega t - \{A\}_2 \omega^2 \cos \omega t \quad (6.246)$$

代入 (6.243) 式, 有

$$(-[M]\{A\}_1 \omega^2 - [C]\{A\}_2 \omega + [K]\{A\}_1) \sin \omega t +$$

$$(-[M]\{A\}_2 \omega^2 + [C]\{A\}_1 \omega + [K]\{A\}_2) \cos \omega t = \{P\} \sin \omega t$$

等式两边 $\sin \omega t$ 与 $\cos \omega t$ 项前面的系数必须相等, 故有

$$([K] - \omega^2 [M])\{A\}_1 - \omega [C]\{A\}_2 = \{P\}$$

$$\omega [C]\{A\}_1 + ([K] - \omega^2 [M])\{A\}_2 = \{0\} \quad (6.247)$$

这是一组 $2n$ 个未知数的联立方程式, 由此可解出两个各具有 n 个元素的列阵 $\{A\}_1$ 及 $\{A\}_2$, 再代回 (6.244) 式就求得系统的稳态响应。

如

$$\{A\}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix}, \quad \{A\}_2 = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{n2} \end{bmatrix} \quad (6.248)$$

则有 $x_i = A_{i1} \sin \omega t + A_{i2} \cos \omega t$

$$= \sqrt{A_{i1}^2 + A_{i2}^2} \sin(\omega t - \varphi_i) = X_i \sin(\omega t - \varphi_i) \quad (6.249)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

其中

$$\operatorname{tg} \varphi_i = -\frac{A_{i2}}{A_{i1}} \quad (6.250)$$

显然, 由 (6.250) 式可看出, 各座标与外力间的相位差 φ_i 值一般各不相同。

如果系统各座标上作用的外力虽都是同一频率的简谐力, 但彼此相位不同, 则只要将各外力分别写成 $P_{i1} \sin \omega t + P_{i2} \cos \omega t$ 的形式, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$, 再令

$$\{P\}_1 = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ \vdots \\ P_{n1} \end{bmatrix}, \quad \{P\}_2 = \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ \vdots \\ P_{n2} \end{bmatrix} \quad (6.251)$$

就可得到系统强迫振动方程式为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\}_1 \sin \omega t + \{P\}_2 \cos \omega t \quad (6.252)$$

此式仍可按 (6.243) 式类似地求解, 不再详述。

如果系统各座标上作用的外力为具有同一周期的周期力, 则可将各外力先按富氏级数展开, 求出外力各谐波分量所引起的系统各稳态强迫振动解, 最后将各解叠加起来, 就得到系统在这种周期力作用下的响应。工程上多缸活塞式发动机的干扰力矩, 就是一种周期性的外力矩, 它会使发动机曲轴的轴系产生多频率的强迫扭转振动, 这是在周期力激励下系统产生响应的一个实例。其他的例子还有不少。

当系统各座标上作用的外力是一般任意随时间变化的情况, 由系统的强迫振动方程式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\} \quad (6.253)$$

即

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \cdots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} \cdots m_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} \cdots m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \cdots C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} \cdots C_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} \cdots C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \cdots k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} \cdots k_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} \cdots k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix} \quad (6.254)$$

如要求其各座标 $x_1(t), x_2(t) \cdots x_n(t)$ 的一般解的分析表达式, 是比较困难的。通常工程上采用对 (6.254) 式进行数值积分求解的方法, 这些数值积分的方法我们将在本书下册进行介绍,

这里暂先略去。

求解外力激振下系统的响应,可以采用另一种很有效的方法,就是振型叠加法。

我们先研究最简单的情况,即假定各座标上作用的外力为同频率、同相位的简谐力 $\{P\}\sin\omega t$ 。

6.9 节中指出,只要系统各固有频率各不相等且不非常接近,而且阻尼比较小(例如,各阶振型阻尼的相对阻尼系数 ξ 值不大于 0.20),则总可以用 6.9 节所述的方法,采用正则座标 $\{x_n\}$ 代替原有座标 $\{x\}$,建立下述互不耦合的正则座标的强迫振动方程式

$$[I]\{\ddot{x}_n\} + [C_n]\{\dot{x}_n\} + [K_n]\{x_n\} = \{P_n\}\sin\omega t \quad (6.255)$$

$$\text{即} \quad \ddot{x}_{nr} + C_{nr}\dot{x}_{nr} + p_r^2 x_{nr} = P_{nr}\sin\omega t \quad (6.256)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

其中 $\{x_n\}$ 、 $\{P_n\}$ 与 $\{x\}$ 、 $\{P\}$ 的关系为

$$\{x\} = [A_n]\{x_n\} \quad (6.257)$$

$$\{x_n\} = [A_n]^T [M]\{x\} \quad (6.258)$$

$$\{P_n\} = [A_n]^T \{P\} \quad (6.259)$$

而 C_{nr} 为第 r 阶主振动的振型阻尼系数,有 $C_{nr} = 2n_r = 2\xi_r p_r$, (6.256) 式也可改写为

$$\ddot{x}_{nr} + 2n_r \dot{x}_{nr} + p_r^2 x_{nr} = P_{nr}\sin\omega t \quad (6.260)$$

$$\text{或} \quad \ddot{x}_{nr} + 2\xi_r p_r \dot{x}_{nr} + p_r^2 x_{nr} = P_{nr}\sin\omega t \quad (6.261)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

这样就可以直接利用第三章中单自由度系统强迫振动的结果,得到每个正则座标的响应为

$$x_{nr} = \frac{P_{nr}}{p_r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p_r}\right)^2\right]^2 + \left[2\left(\frac{n_r}{p_r}\right)\left(\frac{\omega}{p_r}\right)\right]^2}} \sin(\omega t - \psi_r) \quad (6.262)$$

$$\text{或} \quad x_{nr} = \frac{P_{nr}}{p_r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi_r \lambda_r)^2}} \sin(\omega t - \psi_r) \quad (6.263)$$

$$\text{其中} \quad \lambda_r = \frac{\omega}{p_r}, \quad \xi_r = \frac{n_r}{p_r} \quad (6.264)$$

$$\psi_r = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2n_r \omega}{p_r^2 - \omega^2} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\xi_r \frac{\omega}{p_r}}{1 - \frac{\omega^2}{p_r^2}} \right) \quad (6.265)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

代入 (6.257) 式, 就可以求出系统原先座标的响应, 即

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{r=1}^n A_{N1}^{(r)} x_{Nr} \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{A_{N1}^{(r)} P_{Nr}}{p_r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda_r^2)^2 + (2\xi_r \lambda_r)^2}} \sin(\omega t - \psi_r) \end{aligned} \quad (6.266)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

将 n 项和合并化简, 可得

$$x_i = X_i \sin(\omega t - \varphi_i) \quad (6.267)$$

其中 X_i 是座标 x_i 稳态强迫振动的振幅, φ_i 是座标 x_i 与激振外力之间的相位差, 一般说, 各 φ_i 值不相同。

当外力频率 ω 与系统第 r 阶固有频率 p_r 值比较接近时, $\lambda_r = \frac{\omega}{p_r} \approx 1$, 这时第 r 阶主座标 x_{Nr} 的稳态强迫振动的振幅值就很大, 这不难从 (6.266) 式看出, 与单自由度系统中的共振现象是完全类似的。对于 n 自由度系统, 当系统具有 n 个不相等的固有频率时, 可以出现 n 阶频率不同的共振现象。当发生第 r 阶共振时, 由于 x_{Nr} 的幅值远大于其他各主座标的振幅值, 因此在 (6.266) 式中, 第 r 项在整个和式中占有主要成分, 这时各座标 x_i 的振幅均很大, 其运动规律近似地可看成

$$x_i \approx \frac{A_{N1}^{(r)} P_{Nr}}{p_r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda_r^2)^2 + (2\xi_r \lambda_r)^2}} \sin(\omega t - \psi_r) \quad (6.268)$$

$$\text{或} \quad x_r \approx \frac{A_{Nr}^{(r)} P_{Nr}}{p_r^2} \cdot \frac{1}{2\zeta_r} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.269)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

因为 $\lambda_r \approx 1$ 时, $\psi_r \approx \frac{\pi}{2}$ (见 (6.264)、(6.265) 式)。(6.269) 式说明, 当外力频率 ω 与第 r 阶固有频率 p_r 接近时, 各座标 x_r 的振幅值比值接近于系统第 r 阶主振型。根据这一点, 我们可以采用一般的共振实验方法, 近似地测量系统的各阶固有频率及主振型。

对于外力是一般周期力的情况, 用振型叠加法也容易分析求解。因为正则座标的运动方程式是一组不耦合的单自由度系统形式的强迫振动方程式组, 当外力是一般周期力时, 求解一个单自由度系统的强迫振动规律并不困难, 我们在第三章中已经进行过讨论。进一步用振型叠加的方法, 就可求出系统原先座标的响应。

即使对于外力是一般任意随时间变化 $\{P(t)\}$ 的情况, 用振型叠加法也很容易求出各座标响应的分析表达式。事实上, 由 (6.253) 及 (6.254) 式, 根据座标变换 (6.257)、(6.258) 式, 可得正则座标的强迫振动方程式为

$$[I] \{\ddot{x}_n\} + [C_N] \{\dot{x}_n\} + [K_N] \{x_n\} = \{P_N(t)\} \quad (6.270)$$

$$\text{即} \quad \ddot{x}_{Nr} + C_{Nr} \dot{x}_{Nr} + p_r^2 x_{Nr} = P_{Nr}(t) \quad (6.271)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{其中} \quad \{P_N(t)\} = [A_N]^T \{P(t)\} \quad (6.272)$$

即

$$\begin{bmatrix} P_{N1}(t) \\ P_{N2}(t) \\ \vdots \\ P_{Nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N1}^{(1)} & A_{N2}^{(1)} & \dots & A_{Nn}^{(1)} \\ A_{N1}^{(2)} & A_{N2}^{(2)} & \dots & A_{Nn}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}^{(n)} & A_{N2}^{(n)} & \dots & A_{Nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix} \quad (6.273)$$

(6.271) 式也可改写为

$$\ddot{x}_{Nr} + 2\zeta_r \dot{x}_{Nr} + p_r^2 x_{Nr} = P_{Nr}(t) \quad (6.274)$$

$$\text{或} \quad \ddot{x}_{Nr} + 2\zeta_r p_r \dot{x}_{Nr} + p_r^2 x_{Nr} = P_{Nr}(t) \quad (6.275)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

根据事先给定的原先座标 $\{x\}$ 的初始条件 $\{x\}_{t=0}$ 及 $\{\dot{x}\}_{t=0}$ 的值, 可由 (6.258) 式确定正则座标 $\{x_n\}$ 的初始条件 $\{x_n\}_{t=0}$ 及 $\{\dot{x}_n\}_{t=0}$ 的值 (也可参看 6.6 节中 (6.114) 及 (6.117) 式), 再参照第三章 3.12 节的结果, 可得

$$x_{nr}(t) = e^{-\zeta_r p_r' t} \left\{ \frac{1}{p_r'} (\dot{x}_{nr0} + \zeta_r p_r' x_{nr0}) \sin p_r' t + x_{nr0} \cos p_r' t + \frac{1}{p_r'} \int_0^t P_{nr}(\tau) e^{\zeta_r p_r' \tau} \sin p_r'(t - \tau) d\tau \right\} \quad (6.276)$$

$$\text{其中} \quad p_r' = \sqrt{p_r^2 - n_r^2} \quad (6.277)$$

求得各 $x_{nr}(t)$ ($r = 1, 2, \dots, n$) 后, 就可由 (6.257) 式求出原先座标的响应 $\{x(t)\}$ 。

本章上述各节详细地介绍了振型叠加法的原理, 并将其应用于求系统的响应。现简要概括如下:

一、由系统任意选取的座标 $\{x\}$ (或 $\{y\}$) 列出系统的自由振动方程式 (6.11) 或 (6.21) 式, 用矩阵迭代法或其他方法求出系统的各阶固有频率 p_r 值及主振型 $\{A^{(i)}\}$ 。

二、将主振型 $\{A^{(i)}\}$ 正则化后求得各阶正则振型 $\{A_n^{(i)}\}$ 。

三、建立系统原先座标 $\{x\}$ 与正则座标 $\{x_n\}$ 之间的关系, 即

$$\{x\} = [A_n] \{x_n\} \quad (6.85)$$

$$\{x_n\} = [A_n]^T [M] \{x\} \quad (6.90)$$

四、在求系统对初始条件的响应时, 可利用座标之间关系, 由 (6.114) 及 (6.117) 式先求出各正则座标 $\{x_n\}$ 的初始条件 $\{x_n\}_{t=0}$ 、 $\{\dot{x}_n\}_{t=0}$, 随之求出各正则座标对初始条件的响应 (无阻尼时用 (6.112) 式, 有振型阻尼存在时用 (6.228) 至 (6.230) 式), 然后再利用 (6.118) 或 (6.235) 式将各正则座标对初始条件的响应叠加起来, 就可求得系统原先座标 $\{x\}$ 对初始条件的响应。

五、当系统受外力 (简谐力或其他一般的力) 激励时, 先将作用在原先座标 $\{x\}$ 上的广义力用 (6.259) 或 (6.272) 式转换

成各正则座标 $\{x_n\}$ 上的广义力, 即

$$\{P_n\} = [A_n]^T \{P\} \quad (6.259)$$

$$\{P_n(t)\} = [A_n]^T \{P(t)\} \quad (6.272)$$

再由单自由度系统对外力的响应的计算方法, 用 (6.263) 至 (6.265) 式或 (6.276) 式可立即求出各正则座标对外力的稳态响应或一般的响应, 然后再利用 (6.85) 式将各正则座标对外力的响应叠加起来, 就可求得系统原先座标 $\{x\}$ 对外力的响应。

六、对于外力随时间变化较慢及系统初始条件中包含高阶主振动分量较少的情况, 可采用振型截断法。在求得系统的低阶固有频率及主振型、正则振型后, 当没有阻尼时, 可用 (6.98) 至 (6.103) 式求系统对初始条件的低阶的响应。当存在阻尼时, 系统对初始条件或对外力的响应也可稍加推广后求得。

6.11 传递矩阵法

本章前面各节介绍了一般的多自由度系统振动的研究方法, 即振型叠加法。它的优点在于其通用性, 特别是利用了现代大型数字计算机以后, 原则上对于任意复杂的、几百几千个自由度的系统, 都能进行振动的分析与计算, 但是, 计算的工作量要随着自由度数目的增加而急剧增加, 即使引进了所谓振型截断法的概念, 企图将计算的矩阵阶数尽量缩减到一定的程度, 但总的说来, 自由度愈多的系统, 所要计算的矩阵阶数总愈高, 计算量要增加得较多, 这是很不方便的一个缺点。

工程上有些结构是由很多单元一环连一环地结合而成的, 呈一种链状结构的形式, 如连续梁、汽轮机发电机转轴、发动机曲轴等, 这些结构可以离散化成轴上带有集中质量的横向振动系统或轴上带有圆盘的扭转振动系统, 对这种多自由度系统进行振动分析时, 可以采用另一种很有效的计算方法——传递矩阵法。用传递矩阵法进行振动分析时, 只需要对一些阶次很低的传递矩阵进行连续的矩阵乘法运算, 在数值求解时只需计算低阶次的传递矩阵和行列式值, 这就大大节省了计算工作量。不管离散化以后

的系统自由度数有多少,也不管系统有没有一些中间支座条件,这些对传递矩阵的阶数都没有什么影响,传递矩阵的阶数只决定于构成结构的单元的性质,描写单元运动的微分方程式的阶数就是传递矩阵的阶数,梁单元弯曲振动微分方程式为四阶,轴单元扭转振动微分方程式为二阶,则相应的传递矩阵也为四阶或二阶。

下面我们只介绍用传递矩阵法计算没有阻尼的链状结构的固有频率及主振型。

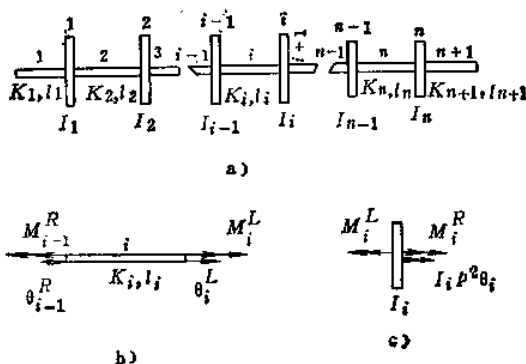


图 6-14

(1) 轴盘扭转振动系统

设有一链状的轴盘扭转振动系统,如图 6-14 a)所示。将其中第 i 段轴及第 i 个盘从系统中隔离出来,见图 6-14 b)、c)规定轴线的正方向向右,第 i 段轴右端面外法线也向右,称其为正面,正面上作用的扭矩 M_i^L 及轴的转角 θ_i^L ,采用右手螺旋规则,其正方向均指向右方,其中扭矩与转角的下标 i 表示该正面与第 i 个盘相接,上标 L 表示该正面在第 i 个盘左面;类似地可对第 i 段轴左端面即负面定义扭矩 M_{i-1}^R 与转角 θ_{i-1}^R 的正方向如图,扭矩及转角的下标意义与前类似,上标 R 表示该面在第 $i-1$ 个盘的右面,由于各盘及轴转角的正方向相同,故 θ_{i-1}^R 与 θ_i^L 同向,但 M_{i-1}^R 与 M_i^L 则异向。

再看第 i 个圆盘, 它的左、右边各有扭矩 M_i^L 与 M_i^R 作用, 使它产生转动角加速度, 按动力学中转动方程式, 有

$$I_i \ddot{\theta}_i = M_i^R - M_i^L \quad (6.278)$$

设轴系以圆频率 p 作简谐扭转振动, 即令

$$\theta_i = \Theta_i \sin(pt - \alpha) \quad (6.279)$$

$$\text{则} \quad \ddot{\theta}_i = -p^2 \Theta_i \sin(pt - \alpha) = -p^2 \theta_i \quad (6.280)$$

代入 (6.278) 式, 得

$$M_i^R = M_i^L - I_i p^2 \theta_i \quad (6.281)$$

由于圆盘转角 θ_i 值不分左、右面都一样, 引入等式

$$\theta_i = \theta_i^L = \theta_i^R \quad (6.282)$$

就可将 (6.281)、(6.282) 式合并成下述矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 I & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i^L \quad (6.283)$$

其中列矩阵 $\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i^L$ 与 $\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i^R$ 是第 i 个圆盘、即轴上第 i 个点左、

右两个相邻的**状态矢量**, 它分别由第 i 个圆盘的转角及左边或右边的扭矩组成, 说明了第 i 个圆盘左、右的状态。(6.283) 式建

立了这两个相邻的状态矢量之间的关系, 方阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 I & 1 \end{bmatrix}_i$ 体

现了从轴上第 i 个点 (即第 i 个圆盘) 左边的状态到右边的状态的传递关系, 因此称为**点传递矩阵**, 简称**点矩阵**。

由于列矩阵 $\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i^L$ 和 $\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i^R$ 中各元素具有相同的时间函数 $\sin(pt - \alpha)$, 因此可以从 (6.283) 式两边消去此时间函数而并不影响传递关系, 就是说, (6.283) 式可理介为列矩阵各元素的幅值间的传递关系。以后类同。

再看第 i 段轴左、右两边的关系, 由于轴的转动惯量一般忽略不计, 故两边扭矩应相等, 即

$$M_i^L = M_{i-1}^R \quad (6.284)$$

由于轴段的变形, 两边转角满足下述关系

$$\theta_i^L - \theta_{i-1}^R = \frac{1}{K_i} M_i^L = -\frac{1}{K_i} M_{i-1}^R \quad (6.285)$$

K_i 为第 i 段轴的抗扭刚度, $K_i = \frac{GJ_{\rho i}}{l_i}$, $J_{\rho i}$ 及 l_i 分别为第 i 段轴截面的极惯性矩及轴段长, G 为材料的剪切弹性模量。

(6.284)、(6.285) 式也可合并写成下述矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_{i-1}^R \quad (6.286)$$

方矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i$ 体现了从第 i 段轴左边到右边的传递关系, 称为

场传递矩阵, 简称**场矩阵**。

将 (6.283)、(6.286) 式联合起来, 可以建立第 i 个盘右边的状态矢量与第 $i-1$ 个盘右边状态矢量之间的关系为

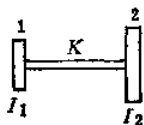
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i^R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 I & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_{i-1}^R \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K} \\ -p^2 I & 1 - \frac{p^2 I}{K} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_{i-1}^R \quad (6.287) \end{aligned}$$

这样, 方矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K} \\ -p^2 I & 1 - \frac{p^2 I}{K} \end{bmatrix}_i \quad (6.288)$$

就将第 $i-1$ 个点的状态矢量值 ‘传递’ 给了第 i 个点的状态矢

量, 称它为第 i 段的传递矩阵。类似地可建立轴上其他各段的传递矩阵, 借助于这些传递矩阵, 我们可以建立轴上从最左端到最右端的各点状态矢量之间的关系, 由于各传递矩阵已满足各段的微分方程, 如果再要求满足已知的边界条件, 就可以求出轴盘扭转振动系统的固有频率及主振型。



例6.15 以4.3节两圆盘扭转振动系统为例, 要求用传递矩阵法求固有频率及主振型 (图6-15)。

解 1、2 两圆盘没有外扭矩作用, 故

$$M_1^L = 0, \quad M_2^R = 0$$

由 (6.283) 式, 有

$$\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_1^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 I_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_1^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 I_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \end{bmatrix}_1^L$$

再由 (6.288) 式, 有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_2^R &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K} \\ -p^2 I_2 & 1 - \frac{p^2 I_2}{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_1^R \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K} \\ -p^2 I_2 & 1 - \frac{p^2 I_2}{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 I_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \end{bmatrix}_1^L \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{p^2 I_1}{K} & \frac{1}{K} \\ -p^2 I_2 - p^2 I_1 + \frac{p^2 I_1 I_2}{K} & 1 - \frac{p^2 I_2}{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \end{bmatrix}_1^L \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \theta_2 = \theta_2^R = \left(1 - \frac{p^2 I_1}{K}\right) \theta_1^L = \left(1 - \frac{p^2 I_1}{K}\right) \theta_1 \quad (\text{a})$$

$$M_2^R = \left(-p^2 I_2 - p^2 I_1 + \frac{p^2 I_1 I_2}{K}\right) \theta_1 \quad (\text{b})$$

但已知 $M_1^R = 0$, 故

$$\left(-p^2 I_2 - p^2 I_1 + \frac{1}{K} \cdot p^4 I_1 I_2\right) \theta_1 = 0$$

如 $\theta_1 \neq 0$ ，则

$$-p^2 I_2 - p^2 I_1 + \frac{1}{K} \cdot p^4 I_1 I_2 = 0$$

p 的两根为

$$p_1^2 = 0, \quad p_2^2 = 0$$

$$p_1^2 = -\frac{K(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} \quad p_2^2 = \sqrt{\frac{K(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$$

这 p_1 、 p_2 值就是系统的两个固有频率值。对应的两个主振型为：

第一主振型 将 $p_1 = 0$ 代入 (a) 式右端，得

$$\theta_2 = \theta_1$$

即

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = 1$$

系统作刚体转动。

第二主振型 将 $p_2 = \sqrt{\frac{K(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$ 代入 (a) 式，得

$$\theta_2 = -\frac{I_1}{I_2} \theta_1$$

即

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = -\frac{I_1}{I_2}$$

这里的固有频率与主振型的计算结果，同 4.3 节中的结果完全相同。

对于圆盘数目较多的情况，一般不用文字公式进行演算，而直接采用数值计算，方法是：先假定一系列的频率 p 的值，根据最左端的边界条件，由传递矩阵逐级算到最右端的状态矢量值，如对某一个假定的 p 值，算出最右端状态矢量中的元素值恰好满足了边界条件，则此 p 值就是固有频率值，相应地还可以得到各圆盘的振型。自然，在具体数值计算时，只要边界条件很近似地得到了满足，则相应的 p 值就是固有频率的很好的近似值，并不需要也不可能追求绝对的精确解。

下面以一个三圆盘的扭振系统为例，说明数值计算的情况。

例 6.16 有一个三圆盘的扭振系统 (图 6-16), 各圆盘的转动惯量为 $I_1 = 50 \text{ kg-cm-s}^2$, $I_2 = 100 \text{ kg-cm-s}^2$, $I_3 = 200 \text{ kg-cm-s}^2$, 轴段扭转刚度为 $K_2 = 10^6 \text{ kg-cm}$, $K_3 = 2 \times 10^6 \text{ kg-cm}$. 求固有频率及主振型。

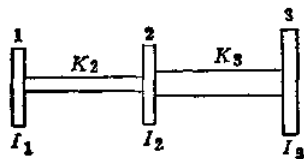


图 6-16

解 边界条件为 $M_1^L = M_3^R = 0$, 由 $M_1^L = 0$, 并令 $\theta_1 = 1$, 则由 (6.283) 式, 得

$$\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_1^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 I & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_1^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -50 p^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -50 p^2 \end{bmatrix}$$

进而位置 2、3 的状态矢量由 (6.287) 式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_2^R &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K} \\ -p^2 I & 1 - \frac{p^2 I}{K} \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_1^R \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 10^{-6} \\ -100 p^2 & 1 - \frac{1}{10^6} \cdot 100 p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -50 p^2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_3^R &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K} \\ -p^2 I & 1 - \frac{p^2 I}{K} \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_2^R \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \times 10^{-6} \\ -200 p^2 & 1 - \frac{1}{2 \times 10^6} \times 200 p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_2^R \end{aligned}$$

假定一系列不同的 p 值, 可计算出一系列的 $\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_1^R$, $\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_2^R$,

$\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_3^R$ 的值, 并可画出 M_3^R 值随 p 值变化的曲线, 见图 6-17。

图 6-17 中使 M_3^R 值恰好为零 (即满足了最右端边界条件) 的各 p 值, 就是此扭振系统的固有频率值, 即 $p_1 = 0$, $p_2 \cong 126$ 1/s, $p_3 = 210$ 1/s, 对应的各主振型由下表中各状态矢量的 θ 值确定, 亦可见图 6-18, 其中 $p_1 = 0$ 时, 系统作刚体转动, 故各盘转角相同。

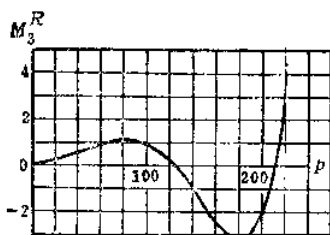


图 6-17

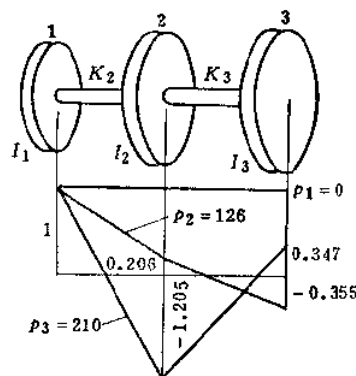


图 6-18

p (1/s)	$\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_1^R$	$\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_2^R$	$\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_3^R$
0	1 0	1 0	1 0
126	1 0.794×10^5	0.206 1.121×10^5	-0.355 -0.009×10^5
210	1 2.205×10^5	-1.205 -3.104×10^5	0.347 -0.044×10^5

有些扭振系统不是简单的链状结构, 而是呈分支系统, 如船舶中的双螺旋桨系统或汽车中的驱动轴及差动轴系统, 就是例子。

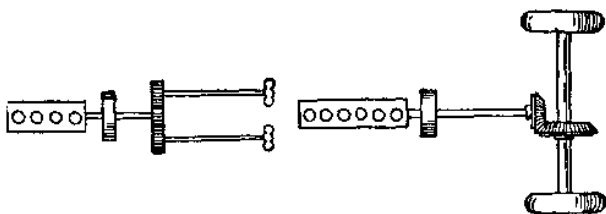


图 6-19

见图 6-19。这类系统在简化成轴盘扭振系统进行自由振动计算时，常常选择其一部分为主要的链状系统，其他部分作为分支的链状系统，在它们相接的齿轮传动环节上，点传递矩阵须由主链及分链的转角与扭矩间的结合关系单独确定。一般由于传动的齿轮转动惯量较小，常常忽略不计；如不能忽略时，计算也没有什么困难。

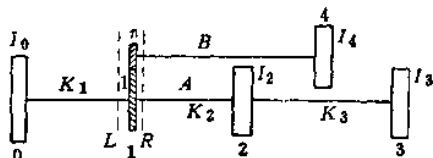


图 6-20

以图 6-20 所示的分支系统为例。取 I_0 、 I_2 、 I_3 各圆盘所在的 A 轴为主链系统，假定 I_4 盘所在的 B 轴的转速为 A 轴转速的 n 倍，齿轮转动惯量不计。主链系统中状态矢量 $\begin{bmatrix} \theta_A \\ M_A \end{bmatrix}_1^L$ 向左的传递关系以及状态矢量 $\begin{bmatrix} \theta_A \\ M_A \end{bmatrix}_1^R$ 向右的传递关系，均与一般没有分支的轴-盘系统相同，只在齿轮传动处 1 这点的点矩阵须结合分支链状系统、即 I_4 所在的 B 轴一起考虑。 B 轴中状态矢量 $\begin{bmatrix} \theta_B \\ M_B \end{bmatrix}_1^R$ 与 $\begin{bmatrix} \theta_B \\ M_B \end{bmatrix}_4^R$ 之间的传递关系由 (6.287) 式应为

$$\begin{bmatrix} \theta_s \\ M_s \end{bmatrix}_4^R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K_4} \\ -p^2 I_4 & 1 - \frac{p^2 I_4}{K_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s \\ M_s \end{bmatrix}_1^R \quad (6.289)$$

将此式求逆后可改写成

$$\begin{bmatrix} \theta_s \\ M_s \end{bmatrix}_1^R = \begin{bmatrix} 1 - \frac{p^2 I_4}{K_4} & -\frac{1}{K_4} \\ p^2 I_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s \\ M_s \end{bmatrix}_4^R \quad (6.290)$$

因已给边界条件有 $M_s^* = 0$ ，故

$$\begin{aligned} \theta_{s1} &= \left(1 - \frac{p^2 I_4}{K_4} \right) \theta_{s4} \\ M_{s1}^* &= p^2 I_4 \theta_{s4} \end{aligned} \quad (6.291)$$

这样就可建立 M_{s1}^* 与 θ_{s1}^* 间关系为

$$M_{s1}^* = \frac{p^2 I_4}{1 - \frac{p^2 I_4}{K_4}} \theta_{s1}^* \quad (6.292)$$

我们再来建立主链 A 轴 1 点左、右状态矢量间的关系：首先，A 轴与 B 轴的扭振频率 p 值应是相同的；其次，由于 B 轴转速比 A 轴快 n 倍，故 A 轴上啮合齿轮的半径比 B 轴啮合齿轮半径大 n 倍，两齿轮间啮合力互为作用、反作用力，故在不计齿轮本身转动惯量的条件下，对应于 B 轴上扭矩 M_{B1}^* ，A 轴齿轮上有扭矩 nM_{B1}^* 。

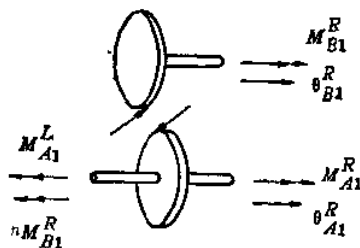


图 6-21

A 轴 1 点左边、右边的转角 θ_{A1}^L 、 θ_{A1}^R 与 B 轴 1 点转角 θ_{B1}^* 间的关系为

$$\theta_{A1}^L = \theta_{A1}^R = -\frac{1}{n} \theta_{B1}^* \quad (6.293)$$

A 轴 1 点左、右两边的扭矩应有下述关系 (参见图 6-21)

$$M_{A1}^R = M_{A1}^L + nM_{B1}^R \quad (6.294)$$

代入 (6.292) 式, 并将 θ_{A1}^R 用 θ_{A1}^L 表示, 得

$$M_{A1}^R = M_{A1}^L - \frac{n^2 p^2 I_4}{1 - \frac{p^2 I_4}{K_4}} \theta_{A1}^L \quad (6.295)$$

联合 (6.283)、(6.295) 式, 可得到 A 轴上 1 点的传递关系为:

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ M_A \end{bmatrix}_1^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n^2 p^2 I_4}{1 - \frac{p^2 I_4}{K_4}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ M_A \end{bmatrix}_1^L \quad (6.296)$$

此式中的点传递矩阵已经体现了分支 B 轴对主链 A 轴的影响, 与 A 轴中其他各点矩阵及场矩阵联合起来, 就可对 A 轴如同一般没有分支的系统一样进行扭振计算。

在数值计算时, 当 p 值恰好取 $p = \sqrt{\frac{K_4}{I_4}}$ 值时, 这时 (6.296)

式点矩阵中左下元素值分母为零, 意味着必须有 $\theta_{A1} = 0$ 。在物理意义上表示: 因这时的 p 值为分支 B 轴当齿轮固定不动时的固有频率值, 这时分支 B 轴对主链 A 轴的作用, 有如一个动力减振器 (见 4.9 节)。因此必须有 $\theta_{A1} = 0$; 如果像例 6.16 中那样, 画

出 A 轴最右端扭矩随 p 变化的曲线, 则在 $p = \sqrt{\frac{K_4}{I_4}}$ 值附近, 扭矩值将有 $\pm \infty$ 值之间的突变发生。

类似本例的各种简单的分支扭振系统, 均可同样进行计算。

(2) 梁上有集中质量的横向振动系统

连续梁或汽轮机-发电机转子这种结构常可先用 6.1 节中介绍的方法, 离散化成无质量的梁上带有若干集中质量的横向振动系统, 它们也可以用传递矩阵法计算固有频率及主振型。如图 6-22 所示这样一个系统, 可以将第 i 段梁及第 i 个集中质量 m_i , 分别从系统中隔离出来, 分别求出点矩阵、场矩阵及传递矩阵。

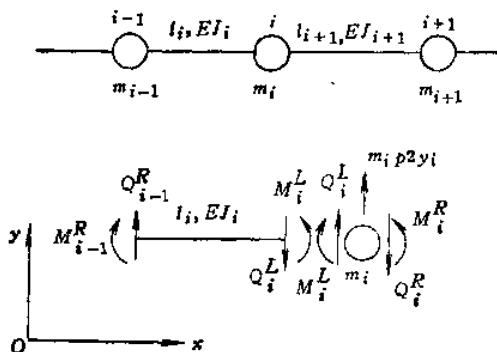


图 6-22

先求点矩阵。考虑质量 m_i 的受力与运动情况，假定质量 m_i 只产生横向简谐振动，并忽略此质量 m_i 的转动惯量，则不难由动力学方程式得到

$$\left. \begin{aligned} M_i^R &= M_i^L \\ Q_i^R &= Q_i^L + p^2 m_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (6.297)$$

再引入质量 m_i 左右两边挠度 y 与转角 $\theta \left(= \frac{dy}{dx} \right)$ 应该相同的两个等式

$$\left. \begin{aligned} y_i^R &= y_i^L \\ \theta_i^R &= \theta_i^L \end{aligned} \right\} \quad (6.298)$$

联合 (6.297)、(6.298) 式，就得到

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p^2 m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i^L \quad (6.299)$$

此式中两个列矩阵分别为第 i 个点、即质量 m_i 左右两个相邻的状态矢量，而方矩阵为点传递矩阵，或简称点矩阵。

再看第 i 段梁左右两边的关系。因梁段质量不计，故有（图 6-23）

$$\left. \begin{aligned} Q_i^L &= Q_{i-1}^R \\ M_i^L &= M_{i-1}^R + Q_{i-1}^R l_i \end{aligned} \right\} \quad (6.300)$$

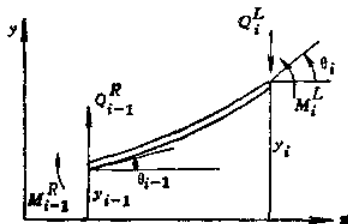


图 6-23

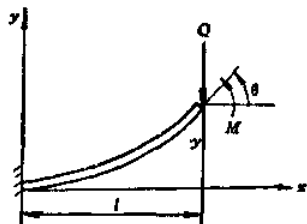


图 6-24

为建立左右两边的挠度、转角间的关系，先看图 6-24 所示一悬臂梁端部有集中力 Q 及集中力矩 M 作用时端部的变形，由材料力学变形计算方法不难求出

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{Ml^2}{2EJ} - \frac{Ql^3}{3EJ} \\ \theta &= \frac{Ml}{EJ} - \frac{Ql^2}{2EJ} \end{aligned} \right\} \quad (6.301)$$

此 y 与 θ 值也就是右端相对于左端的挠度与转角，比较图 6-23 与图 6-24，不难看出在图 6-23 中应有

$$\left. \begin{aligned} y_i - y_{i-1} - \theta_{i-1} l_i &= \frac{M_i^L l_i^2}{2EJ_i} - \frac{Q_i^L l_i^3}{3EJ_i} \\ \theta_i - \theta_{i-1} &= \frac{M_i^L l_i}{EJ_i} - \frac{Q_i^L l_i^2}{2EJ_i} \end{aligned} \right\} \quad (6.302)$$

移项并代入 (6.300) 式后，上式可写成

$$\left. \begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + \theta_{i-1} l_i + \frac{M_{i-1}^R l_i^2}{2EJ_i} + \frac{Q_{i-1}^R l_i^3}{6EJ_i} \\ \theta_i &= \theta_{i-1} + \frac{M_{i-1}^R l_i}{EJ_i} + \frac{Q_{i-1}^R l_i^2}{2EJ_i} \end{aligned} \right\} \quad (6.303)$$

将此式与 (6.300) 式合并，可得

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{i-1}^R \quad (6.304)$$

此式右端的方阵就是场传递矩阵，简称场矩阵。

将 (6.299)、(6.304) 两式合并，可建立第 i 点及第 $i-1$ 点彼此右边状态矢量间的关系为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i^R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ mp^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{i-1}^R \\ &= \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ mp^2 & mlp^3 & \frac{ml^2p^2}{2EJ} & 1 + \frac{ml^3p^2}{6EJ} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{i-1}^R \quad (6.305) \end{aligned}$$

我们称此式右端的方阵为传递矩阵。类似地还可求出其他各段的传递矩阵，并可建立梁上各点的状态矢量之间的关系。

对于连续梁或多支座的汽轮机发电机组，还要建立刚性或弹性支座两边的关系。由于目前汽轮机发电机组支座通常考虑轴承支座及油膜刚度，故我们只介绍一下弹性支座的计算方法。

如图 6-25 所示，假定弹性支座的弹性系数 k_i 已知，并在此支座上有集中质量 m_i ，则此 i 点左右两边各量间的关系为

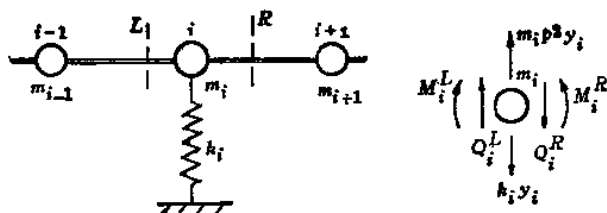


图 6-25

$$\left. \begin{aligned} y_i^R &= y_i^L \\ \theta_i^R &= \theta_i^L \\ M_i^R &= M_i^L \\ Q_i^R &= -k_i y_i + m_i p^2 y_i + Q_i^L \end{aligned} \right\} \quad (6.306)$$

故此 \$i\$ 点的点传递矩阵关系式为

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k + m p^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i^L \quad (6.307)$$

如果支座上不安放离散的集中质量 \$m_i\$, 即 \$m_i = 0\$, 则上述传递矩阵中元素 \$-k + m p^2\$ 需改为 \$-k\$。

有了这些传递矩阵的表达式, 我们就可建立最左端 0 点及最右端 \$N\$ 点的状态矢量之间的关系式, 一般地可表示为

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_N^R = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_0^L \quad (6.308)$$

如给出最左端 0 点及最右端 \$N\$ 点的各两个边界条件, 则可求出固有频率及主振型; 对于汽轮机发电机转子系统, 这固有频率值也就是临界转速值。

例如对图 6-26 所示弹性支座的汽轮机发电机转子, 最左端

0 点左边有 $M_0^L = 0, Q_0^L = 0$, 最右端 N 点右边有 $M_N^R = 0, Q_N^R = 0$, 故由 (6.308) 式, 可得

$$\left. \begin{aligned} 0 &= M_N^R = u_{31} y_0^L + u_{32} \theta_0^L \\ 0 &= Q_N^R = u_{41} y_0^L + u_{42} \theta_0^L \end{aligned} \right\} \quad (6.309)$$

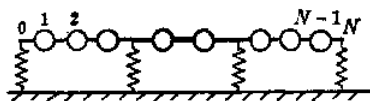


图 6-26

因 y_0^L, θ_0^L 不全为零, 故必须有下述行列式 Δ 值为零, 即

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{31} & u_{32} \\ u_{41} & u_{42} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.310)$$

(6.310) 式决定了固有频率值; 确定这固有频率值后, 代回 (6.309), 可求出 y_0^L 与 θ_0^L 间必须满足的关系式

$$\theta_0^L = -\frac{u_{31}}{u_{42}} y_0^L \quad (6.311)$$

这样就可将各点的状态矢量, 在每一固有频率时, 都可用 y_0^L 值表示, 因而确定了各点 y 值的相对大小, 也就是主振型。

对实际问题通常采用数值解法, 即假定一系列的 p 值, 算出一系列的行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} u_{31} & u_{32} \\ u_{41} & u_{42} \end{vmatrix}$ 的值, 找到 Δ 值随 p 变化的规律, 使 Δ 值为零的各 p 值, 就是各固有频率的值, 进一步还可以求出主振型。

传递矩阵法除了可计算自由振动的固有频率及主振型外, 还可以计算包括含有阻尼情况下由周期力引起的强迫振动; 另外, 除链状结构或带有简单分支的系统外, 其他复杂的分支系统甚至一些闭合回路型的结构, 经过一些数学上的处理, 也可应用传递矩阵法进行振动分析。传递矩阵法还并不一定要求将轴离散化成无质量的轴段与集中质量或圆盘, 而可以更精确地建立具有分布质量的轴段两端的传递矩阵, 这部分内容将在第七章中介绍。

第七章 弹性体振动（上）

7.1 引言

在此以前我们讨论了有限自由度系统或称离散系统的振动问题。本章开始讨论弹性体或称连续系统的振动问题。离散系统在力学模型上具有明显的集中质量和不计质量的弹性元件，在数学上表达为方程数目与自由度数相等的二阶常微分方程组。连续系统具有分布质量和分布的弹性。在数学上需要用时间和座标的函数来描写它的运动状态，因而最后得到的系统运动方程是偏微分方程。但是这些只是形式上的不同，在物理本质上并无区别。若把连续系统的质量分段聚缩到有限个点上，各点之间用弹性元件联结起来便成为离散系统。反之，离散系统的质点趋于无限多的极限情况就是连续系统。它们之间具有相同的动力特性。离散系统是连续系统的近似描述。

连续系统的振动偏微分方程只在一些比较简单的特殊情况下才能求得解析解。例如均匀的弦、绳索和几何形状比较简单的杆、环、薄膜、板及壳等的振动问题。对于几何形状复杂的构件常常需要离散化成有限自由度系统进行计算。

本章只讨论弦的横向振动、杆的纵向振动和扭转振动，以及梁的横向振动。并初步介绍管道中气柱的振动问题。前面三种情况在数学上属于同一类型的二阶偏微分方程，即波动方程。梁的横向振动则为四阶偏微分方程。

本章着重讨论解析解的基本性质，介绍了瑞雷法和李兹法两种近似解法。在下一章里再着重介绍用变分原理解振动问题。

作为线性弹性体的基本假设：材料是均匀连续的；在所有情况下应力都不超过弹性极限，并服从虎克定律；任一点的变形都是微小的，并满足连续条件等，仍然是建立连续系统振动理论的前提。

7.2 弦 振 动

现在从最简单的弦的自由振动开始, 先后用离散系统和连续系统两种模型建立振动微分方程, 说明它们之间关系。

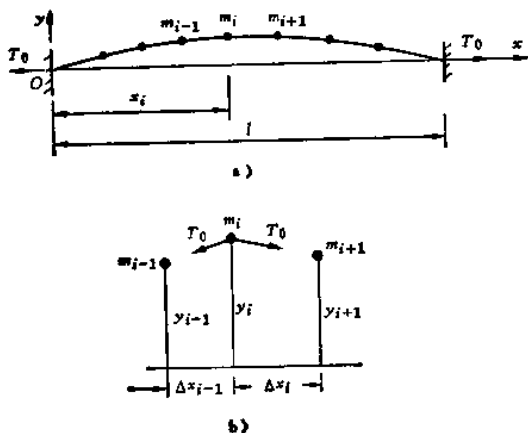


图 7-1

图 7-1 a) 为一根两端固定、用张力 T_0 拉紧的弦, 在初始干扰下作横向自由振动。现将弦任意分成 $n+1$ 段, 每段弦的质量分成两半聚缩到每段的两端。以 m_i ($i=1, 2, \dots, n$) 表示各点质量, 各质量 m_i 之间为无质量具有张力 T_0 的弦段所联结, 成为一 n 自由度系统 (在两端两个质量 m_0 和 m_{n+1} 不振动)。以 y_i ($i=1, 2, \dots, n$) 表示各 m_i 偏离平衡位置的位移。由于是微振动, 各质点的位移很小, 弦伸长引起的张力变化可以忽略不计, 即在整个振动过程中 T_0 保持不变。但因相邻两弦段中张力的方向不同, 所以在质量 m_i 上将受到 T_0 的不平衡垂直分力的作用, 如图 7-1 b)。根据牛顿运动定律, 可得质点 m_i 的横向振动微分方程

$$T_0 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_i} \right) - T_0 \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} \right) = m_i \ddot{y}_i \quad (7.1a)$$

或

$$m_i \ddot{y}_i - \frac{T_0}{\Delta x_{i-1}} y_{i-1} + T_0 \left(\frac{1}{\Delta x_i} + \frac{1}{\Delta x_{i-1}} \right) y_i - \frac{T_0}{\Delta x_i} y_{i+1} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n) \quad (7.1b)$$

如使 $k_{i-1} = -\frac{T_0}{\Delta x_{i-1}}, \quad k_{ii} = T_0 \left(\frac{1}{\Delta x_i} + \frac{1}{\Delta x_{i-1}} \right),$

$$k_{i+1} = -\frac{T_0}{\Delta x_i}$$

则 (7.1b) 式成为

$$m_i \ddot{y}_i + k_{i-1} y_{i-1} + k_{ii} y_i + k_{i+1} y_{i+1} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n) \quad (7.2)$$

这就是以刚度影响系数表达的 n 个二阶常微分方程组。以矩阵形式表达为

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = 0$$

它的解已在上一章详细讨论过。

再回到 (7.1a) 式。令 $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1}$, 并将式子左边 T_0 的不平衡垂直分力以增量形式表示, (7.1a) 式可写成

$$\Delta \left(T_0 \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right) = m_i \ddot{y}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

两边除以 Δx_i , 张力 T_0 为常数, 得

$$T_0 \frac{\Delta}{\Delta x_i} \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right) = \frac{m_i}{\Delta x_i} \ddot{y}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

如将分段无限缩小, 即 $\Delta x_i \rightarrow 0$, 质量就分布在弦的全长。以 ρ 表示弦单位体积的质量, A 表示截面积, y 是 x 和 t 的二元函数, 上式趋向它的极限, 即为弦振动的偏微分方程

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.3)$$

(7.3) 式也可以很容易地用图 7-2a) 的连续系统模型直接

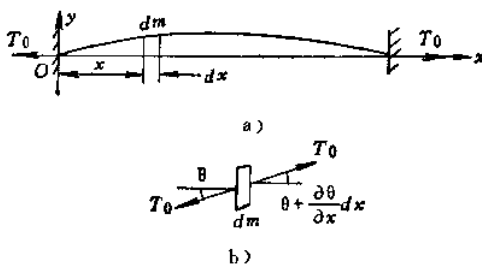


图 7-2

推导出。设 xoy 坐标如图。在弦上取 x 处一微段 dx ，其质量为 $dm = \rho A dx$ 。在任一瞬时微段两端作用着大小相等方向不同的张力 T_0 ，如图 7-2 b)。同样根据牛顿运动定律，得

$$T_0 \left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \right) - T_0 \theta = \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

代入 $\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$ ，简化后即得

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

可见从两个不同的模型出发可以得到同样的结果，它们之间并无本质区别。

下面就来解偏微分方程 (7.3) 式，并分析弹性体振动的一些普遍特性。

令 $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}$ ， a 为波沿弦长度方向传播的速度，(7.3) 式成为

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.4)$$

(7.4) 式通常称为波动方程。

根据以前有限自由度系统的分析，各质点作同样频率和相位的运动，各点同时经过静平衡位置和到达最大偏离位置，即系统具有一定的、与时间无关的振型。连续系统也具有这种同样的特

性。所以我们可以将 (7.4) 式的解设为

$$y(x, t) = Y(x) T(t) \quad (7.5)$$

式中 $Y(x)$ 表示弦的振型, 仅为 x 的函数, 而 $T(t)$ 表示弦的振动方式, 仅为 t 的函数。代入 (7.4) 式得,

$$\frac{a^2}{Y} \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (a)$$

(a) 式中 x 和 t 两个变量已经分离, 故称为分离变量法。经过分离变量, 偏微分方程可转变为常微分方程。既然 (a) 左边与 t 无关, 而右边又与 x 无关, 则两边必须都等于同一个常数。设此常数为 $-p^2$, 便得到两个我们熟悉的二阶常微分方程式。

$$-\frac{d^2 T}{dt^2} + p^2 T = 0 \quad (b)$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{p^2}{a^2} Y = 0 \quad (c)$$

上式中只有把常数设为负值才可能得到满足端点条件的非零解, 同时得到和单自由度形式相同的 (b) 式的简谐振动方程。显然, p 即为系统的固有频率。读者可以验证, 设常数为 p^2 不可能满足端点条件, 而设常数为零时只能得零解。(b) 与 (c) 式的解分别为

$$T(t) = C \sin(pt + \varphi) \quad (d)$$

$$Y(x) = A_1 \sin \frac{p}{a} x + B_1 \cos \frac{p}{a} x \quad (e)$$

(e) 式称为**振型函数**。它描绘了弦以固有频率 p 作简谐振动的振动形态, 即主振型。将 (d) (e) 两式代入 (7.5) 式

$$\begin{aligned} y(x, t) &= C \left(A_1 \sin \frac{p}{a} x + B_1 \cos \frac{p}{a} x \right) \sin(pt + \varphi) \\ &= \left(A \sin \frac{p}{a} x + B \cos \frac{p}{a} x \right) \sin(pt + \varphi) \end{aligned} \quad (7.6)$$

式中 A , B , p , φ 为四个待定常数, 可以由弦的两个端点条件和振动时的两个初始条件来决定。

为了求得固有频率, 必须利用连续系统的两个端点条件。如

图 7-2 a) 的情况, 由于两端固定, 故有

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0$$

代入 (7.6) 式得

$$B = 0$$

$$A \sin \frac{\rho l}{a} = 0$$

上式中 $A = 0$ 显然不是振动解, 故导致

$$\sin \frac{\rho l}{a} = 0 \quad (7.7)$$

(7.7) 式为弦振动的特征方程, 即频率方程。由此可求得无限多阶固有频率。由 (7.7) 式

$$\frac{\rho_n l}{a} = n \cdot \pi$$

故

$$\rho_n = \frac{n \pi a}{l} = \frac{n \pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.8)$$

对应于上述无限多阶固有频率, 有无限多阶主振动

$$y_n(x, t) = A_n \sin \frac{\rho_n}{a} x \sin(\rho_n t + \varphi_n)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.9)$$

对应的主振型为

$$Y_n(x) = A_n \sin \frac{\rho_n}{a} x = A_n \sin \frac{n \pi}{l} x$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.10)$$

(7.10) 式表明主振型均为三角函数。联系到三角函数族的正交性, 不难证明连续系统同样存在两个不同阶主振型 Y_n, Y_m 之间的正交性。在 ρA 不是常数的一般情况下, 它可表达为

$$\int_0^l \rho A Y_n Y_m dx = 0 \quad m \neq n \quad (7.11)$$

(7.9) 式中剩下 A_n 与 φ_n 两个待定常数, 由振动的初始条件 $y(x, 0)$ 和 $\dot{y}(x, 0)$ 决定。这说明振幅的大小是与初始

条件有关的。

在一般情况下，弦的自由振动为无限多阶主振动的叠加。

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{p_n}{a} x \sin(p_n t + \varphi_n) \quad (7.12)$$

以上的一些特性显然也是和多自由度系统一致的。只不过离散系统的主振型是以各质点之间的振幅比来表示的。当质点数趋向于无限时，各质点振幅就成为 x 的连续函数，即为连续系统中的振型函数 $Y(x)$ 。离散系统所描绘的主振型只是近似解，而 $Y(x)$ 则表达了真实的振型。它们之间存在着有限与无限的辩证关系。

例7.1 求图 7-2 a) 的弦振动的头三阶固有频率和相应的主振型，作出主振型图。若将弦分成四段聚缩成三自由度系统，比较其固有频率和相应的主振型。

解 先将 $n = 1, 2, 3$ 代入 (7.8) 及 (7.10) 式得

$$p_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}, \quad p_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}, \quad p_3 = \frac{3\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}$$

$$Y_1 = A_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$Y_2 = A_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$$

$$Y_3 = A_3 \sin \frac{3\pi x}{l}$$

以 x 为横坐标， $Y(x)$ 为纵坐标，并令 $A_n = 1$ ($n = 1, 2, 3$)，可作出头三阶主振型如图 7-3 a)。系统各阶固有频率之值由低到高成倍增长，相应的振型波形逐渐增多。振幅始终为零的点称为节点。节点数随阶次的增高而逐一增加，第 n 阶主振型有 $(n - 1)$ 个节点。

再将系统聚缩成三自由度系统, 如图 7-3 b)

$$m_i = \frac{\rho A l}{4}$$

$$\Delta x_i = \frac{l}{4}$$

$$k_{11} = \frac{8T_0}{l}; \quad k_{12} = k_{21} = -\frac{4T_0}{l}; \quad k_{22} = \frac{8T_0}{l};$$

$$k_{23} = k_{32} = -\frac{4T_0}{l}; \quad k_{33} = \frac{8T_0}{l}$$

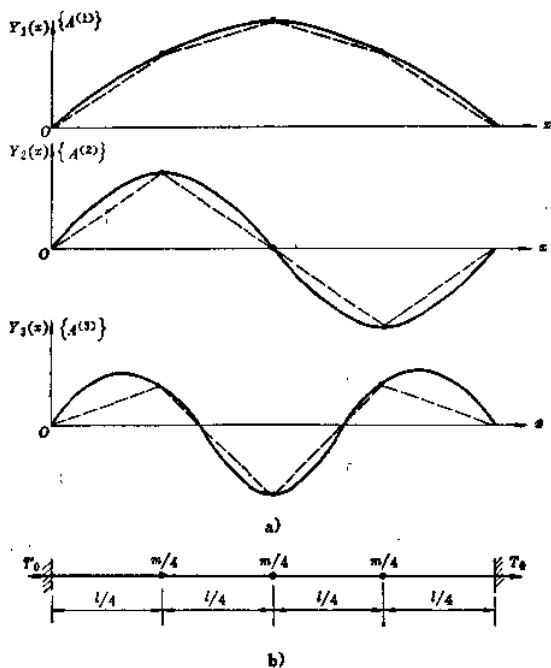


图 7-3

代入 (7.2) 式, 以矩阵表达为

$$\begin{bmatrix} \frac{\rho A l}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho A l}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho A l}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8T_0}{l} & -\frac{4T_0}{l} & 0 \\ -\frac{4T_0}{l} & \frac{8T_0}{l} & -\frac{4T_0}{l} \\ 0 & -\frac{4T_0}{l} & \frac{8T_0}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = 0$$

其特征方程为

$$\Delta(p^2) = \begin{bmatrix} \frac{8T_0}{l} - \frac{\rho A l}{4} p^2 & -\frac{4T_0}{l} & 0 \\ -\frac{4T_0}{l} & \frac{8T_0}{l} - \frac{\rho A l}{4} p^2 & -\frac{4T_0}{l} \\ 0 & -\frac{4T_0}{l} & \frac{8T_0}{l} - \frac{\rho A l}{4} p^2 \end{bmatrix} = 0$$

由此解出特征根

$$p_1^2 = \frac{9.37}{l^2} - \frac{T_0}{\rho A}, \quad p_2^2 = \frac{32}{l^2} - \frac{T_0}{\rho A}, \quad p_3^2 = \frac{54.62}{l^2} - \frac{T_0}{\rho A}$$

固有频率为

$$p_1 = \frac{3.059}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}, \quad p_2 = \frac{5.657}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}, \\ p_3 = \frac{7.391}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}$$

结果表明基频的误差约 5%, 随着阶次的增高, 误差更大。所以为了得到较精确的固有频率值, 应把离散系统的自由度数增多。

相应的主振型取为

$$\{A^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.707 \\ 1.000 \\ 0.707 \end{Bmatrix}, \quad \{A^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0 \\ -1.000 \end{Bmatrix},$$

$$\{A^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0.707 \\ -1.000 \\ 0.707 \end{Bmatrix}$$

近似的主振型用虚线画在图 7-3 a), 与实际主振型比较, 低阶的主振型是很接近的, 随着阶数的增高, 误差逐渐增加。

7.3 杆的纵向振动

本节讨论细长杆的纵向振动。如图 7-4 a), 杆的单位体积质量为 ρ , 截面抗拉刚度为

$EA(x)$, E 为弹性模量, $A(x)$ 为横截面积。

假设杆的横截面在纵向振动过程中始终保持平面,

杆的横向变形也可忽略不计, 即同一横截面上各点仅在 x 方向作相等位移。

以 $u(x, t)$ 表示 x 截面的位移, 它是截面位置 x

与时间 t 的二元函数。取微段 dx , 它的应变量为

$$\epsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

在 x 和 $x + dx$ 两截面上的内力分别为 N 和 $N + \frac{\partial N}{\partial x} dx$ 。对于细长杆 N 可近似认为

$$N = EA\epsilon = EA \frac{\partial u}{\partial x}$$

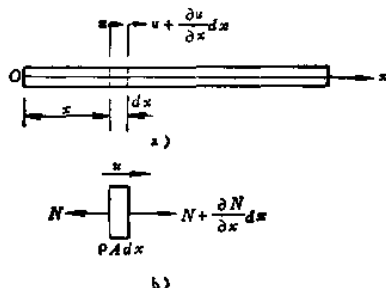


图 7-4

根据牛顿运动定律可得

$$\begin{aligned}\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= N + \frac{\partial N}{\partial x} dx - N = \frac{\partial N}{\partial x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx\end{aligned}$$

$$\text{或} \quad \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (7.13)$$

只要知道截面变化规律 $A(x)$ ，即可求得 (7.13) 式的解。对于等直杆， $A(x)$ 为常数，(7.13) 式成为

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

引入 $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ，即得到与 (7.4) 式形式完全相同的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.14)$$

a 亦为弹性纵波沿 x 轴的传播速度。将 (7.4) 式中 y 代以 u ，就可直接得到 (7.14) 式的解

$$\begin{aligned}u(x, t) &= U(x) T(t) \\ &= \left(A \sin \frac{p}{a} x + B \cos \frac{p}{a} x \right) \sin(pt + \varphi) \quad (7.15)\end{aligned}$$

式中 A , B , p , φ 四个待定常数同样要决定于杆的两个端点条件和振动的两个初始条件。

现在着重讨论端点条件对决定固有频率和主振型的影响

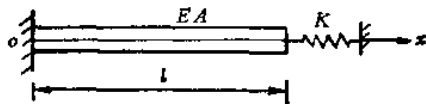


图 7-5

1) 端点具有不同约束 如图 7-5 所示的等直杆，左端固定，右端联结一刚度为 K 的弹簧。其端点条件仅为 x 的函数，故可用振型函数 $U(x)$ 来描述。在左端

$$x = 0 \quad U = 0$$

称为几何端点条件。在右端，杆受到弹簧力 $-KU(l)$ 的作用。故

$$x = l \quad EA \frac{dU}{dx} = -KU$$

称为力的端点条件。因

$$U(x) = A \sin \frac{p}{a} x + B \cos \frac{p}{a} x$$

代入两个端点条件后得

$$B = 0$$

及频率方程

$$EA \frac{p}{a} \cos \frac{pl}{a} = -K \sin \frac{pl}{a}$$

上式根据不同的 K 值，可解出不同的固有频率值。例如 $K = 0$ ，便相当于自由端。频率方程成为

$$\cos \frac{pl}{a} = 0$$

解出

$$p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{a}{l} = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (a)$$

相应主振型为

$$U_n(x) = A_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (b)$$

头三阶主振型如图 7-6 a) 所示。

如 $K = \infty$ ，便相当于固定端。频率方程成为

$$\sin \frac{pl}{a} = 0$$

$$p_n = \frac{n\pi a}{l} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (c)$$

相应的主振型为

$$U_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (d)$$

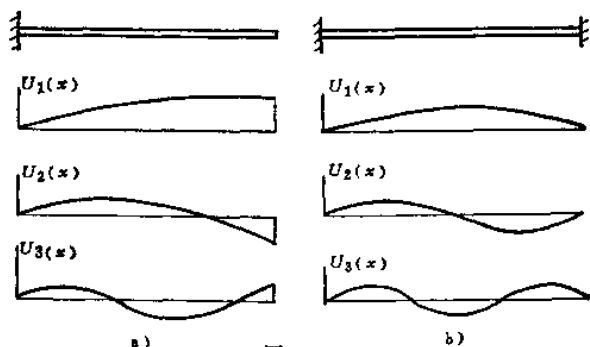


图 7-6

前三阶主振型如图 7-6 b) 所示。

上述结果表明,不同的约束条件相当于给系统以不同的刚度,从而得出不同的固有频率。右端由自由端变成固定端,就要增加系统的刚度,致使各阶固有频率都有提高。

2) 端点具有附加质量 再讨论图 7-7 所示在自由端有附加质量 M 的等直杆。现在下端由于有附加质量而在振动时产生对杆端的惯性力。故端点条件为

$$x = 0 \quad u = 0$$

$$x = l \quad EA \frac{\partial u}{\partial x} = -M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

代入 (7.15) 式, 得

$$B = 0$$

及频率方程

$$EA \frac{p}{a} \cos \frac{pl}{a} = M p^2 \sin \frac{pl}{a}$$

代入 $\alpha^2 = \frac{E}{\rho}$, 整理后得

$$\frac{\rho Al}{M} = \frac{pl}{a} \operatorname{tg} \frac{pl}{a} \quad (a)$$

上式左边为杆的质量与附加质量的比值。给定比值后, 这个频率

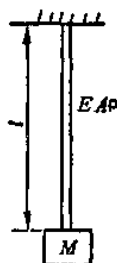


图 7-7

方程的根可以用下述作图法求出。

设质量比

$$\frac{\rho A l}{M} = 1$$

令 $\beta = \frac{\rho l}{a}$, 将(a)式简化成

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\beta}$$

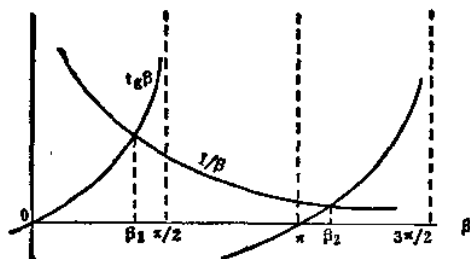


图 7-8

然后作出 $\operatorname{tg} \beta$ 和 $\frac{1}{\beta}$ 两个图形如图 7-8 所示, 得到两个图形的交点 β_1, β_2, \dots , 便可求出各阶固有频率。由图 7-8 得

$$\beta_1 = 0.86 \quad \beta_2 = 3.43$$

$$p_1 = \frac{\beta_1 a}{l} = \frac{0.86}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad p_2 = \frac{\beta_2 a}{l} = \frac{3.43}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

与图 7-6 a) 一端固定一端自由的等直杆比较, 显然由于杆下端有了附加质量, 增加了系统的质量, 而使固有频率明显地降低。

如果杆的质量相对于附加质量很小, $\frac{\rho A l}{M} \ll 1$, 可取 $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$, (a) 式简化为

$$\frac{\rho A l}{M} = \left(\frac{\rho_1 l}{a} \right)^2$$

由此计算得基频

$$p_1 = \sqrt{\frac{\rho A l}{M}} \cdot \frac{a}{l} = \sqrt{\frac{EA}{lM}} = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

式中 $K = \frac{EA}{l}$ 为不计本身质量时杆的抗拉刚度, M 为附加质量。这个结果和第二章单自由度系统的结果相同, 说明在计算基频时, 如杆本身质量与悬挂的质量比较很小就可以忽略不计。例如 $\frac{\rho A l}{M} = \frac{1}{10}$ 时, 精确解 $p_1 = \frac{0.32a}{l}$, 而忽略杆的质量后按单自由度系统计算得 $p_1 = \frac{0.316a}{l}$, 误差仅为 1.25%。如果杆的质量与悬挂质量差不多, 可以用第二章所述等效质量的方法, 将 $\frac{1}{3}$ 杆的质量加到 M 上, 再按单自由度系统计算基频, 可得到较好的近似值。例如杆的质量等于附加质量 M 时,

$$p_1 = \sqrt{\frac{\frac{EA}{l}}{M + \frac{M}{3}}} = \frac{0.866}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

式中 $M = \rho A l$ 。与前面计算的精确解比较误差仅 0.7%。

7.4 杆的扭转振动

现在讨论细长杆的扭转振动。如图 7-9 a) 所示。杆的单位体积质量仍为 ρ , 截面抗扭刚度为 $GJ_t(x)$, G 为剪切弹性模量, $J_t(x)$ 为截面抗扭常数^①, 对于圆形截面即为截面的极惯性矩

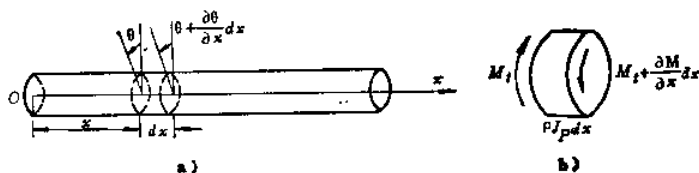


图 7-9

① 对于非圆截面的 $J_t(x)$ 可通过弹性力学扭转问题计算。

J_p 。设杆作扭转振动时可忽略截面的翘曲,截面保持平面绕 x 轴作微摆动。以 $\theta(x, t)$ 表示 x 截面的角位移。取微段 dx 。由图 7-9 a) 可知微段两端的相对扭转角为 $\frac{\partial \theta}{\partial x} dx$ 。根据材料力学,其近似值为

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{M_t}{GJ_t} dx$$

或
$$M_t = GJ_t \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

式中 M_t 为 x 截面上的内扭矩。在 $x+dx$ 截面上则为 $M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x} dx$ 。根据转动方程式得

$$\begin{aligned} I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x} dx - M_t = \frac{\partial M_t}{\partial x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[GJ_t \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dx \end{aligned} \quad (a)$$

式中 $I_p(x)$ 为微段对 x 轴的转动惯量。因

$$I_p(x) = \rho J_p(x) dx$$

(a) 式可简化为

$$\rho J_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[GJ_t \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (7.16)$$

对于等截面直杆 J_t 为一常数, (7.16) 式还可简化为

$$\rho J_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = GJ_t \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

或写成
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (7.17)$$

式中 $a = \sqrt{\frac{GJ_t}{\rho J_p}}$, 对于圆截面杆, $J_t = J_p$, $a = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, 为剪切弹性波(横波)沿 x 轴的传播速度。可见杆的扭转振动和弦振动以及杆的纵向振动具有同一形式的偏微分方程。它的解为

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= \Theta(x) T(t) \\ &= \left(A \sin \frac{p}{a} x + B \cos \frac{p}{a} x \right) \sin(pt + \varphi) \end{aligned} \quad (7.18)$$

式中同样有决定于端点条件和初始条件的四个待定常数 A , B , p 和 φ 。求杆扭转的固有频率和主振型的方法和上两节完全相同。如前所述, 利用杆的两个端点条件可以解出 A 或 B 一个常数和固有频率 p , 并得到各阶主振动。

$$\theta_n(x, t) = \left(A_n \sin \frac{p_n}{a} x + B_n \cos \frac{p_n}{a} x \right) \sin(p_n t + \varphi_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.19)$$

现在来讨论如何根据振动的初始条件决定剩下的两个待定常数, 从而确定系统在初始条件下的响应。

在一般初始条件下, 各阶主振动都将被激发, (7.17) 式的一般解为各阶主振动的叠加。即

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{p_n}{a} x + B_n \cos \frac{p_n}{a} x \right) \sin(p_n t + \varphi_n) \quad (7.20)$$

设给定初始条件 $\theta(x, 0) = f_1(x)$, $\dot{\theta}(x, 0) = f_2(x)$ 则有

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{p_n}{a} x + B_n \cos \frac{p_n}{a} x \right) \sin \varphi_n \\ f_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{p_n}{a} x + B_n \cos \frac{p_n}{a} x \right) p_n \cos \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

解此两个联立方程即可求出剩下的 A_n 或 B_n 和 φ_n 之值。代回 (7.20) 式便是系统的位移响应。

例 7.2 图 7-10 为一端固定一端自由的圆等直杆。在自由端作用有扭矩 M_0 。在 $t = 0$ 时突然释放, 求杆自由端的振幅。

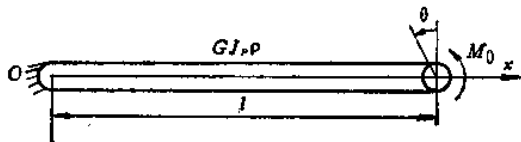


图 7-10

解: 根据杆的端点条件

$$x = 0 \quad \Theta = 0$$

$$x = l \quad \frac{d\Theta}{dx} = 0$$

可得 $B = 0$, $p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

代入 (7.20) 式, 得

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x \sin(p_n t + \varphi_n) \quad (b)$$

根据给定的初始条件

$$f_1(x) = \theta(x, 0) = \frac{M_0}{GJ_p} x$$

$$f_2(x) = \dot{\theta}(x, 0) = 0$$

代入 (b) 式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x \sin \varphi_n = \frac{M_0}{GJ_p} x \quad (c)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n p_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x \cos \varphi_n = 0 \quad (d)$$

由 (d) 式, 要求对于任意给定的 x 都成立, 必须 $\cos \varphi_n = 0$ 。

故 $\varphi_n = \frac{\pi}{2}, \sin \varphi_n = 1$

代入 (c) 式,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x = \frac{M_0}{GJ_p} x \quad (e)$$

利用三角函数族的正交性, 实际上就是主振型的正交性, 求常数 A_n 。在上式两边各乘以 $\sin \frac{(2m-1)\pi}{2l} x dx$, 并在杆全长积分。注意到

$$\int_0^l \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x \sin \frac{(2m-1)\pi}{2l} x dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{当 } m \neq n \\ \frac{l}{2} & \text{当 } m = n \end{cases}$$

就得到

$$A_n = \frac{2}{l} \frac{M_0}{GJ_p} \int_0^l x \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x dx$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} 8l}{(2n-1)^2 \pi^2} \frac{M_0}{GJ_p} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

代回 (b) 式, 得系统响应

$$\theta(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \frac{M_0 l}{GJ_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$$

$$\times \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x \cos \frac{(2n-1)\pi}{2l} at$$

在自由端 $x = l$ 处振幅最大,

$$\theta_{\max} = \frac{8}{\pi^2} \frac{M_0 l}{GJ_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \frac{M_0 l}{GJ_p} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = \frac{8}{\pi^2} \frac{M_0 l}{GJ_p} \cdot \frac{\pi^2}{8}$$

$$= \frac{M_0 l}{GJ_p}$$

这正是杆在扭矩 M_0 静力作用下自由端的转角。

7.5 梁的横向振动

细长杆作垂直于轴线方向的振动时, 其主要变形形式是梁的弯曲变形, 通常称为横向振动或弯曲振动, 简称梁振动。下面讨论的梁振动限于这样的条件: 梁各截面的中心主轴在同平面内, 如图 7-11 a) 所示的 xoy 平面, 且在此平面内作横向振动。在振动过程中仍应用材料力学中的平面假设, 忽略剪切变形的影响。同

时截面绕中性轴的转动比之横向位移也小得多而可先不予考虑。于是梁上各点的运动只需用轴线的横向位移来描述。

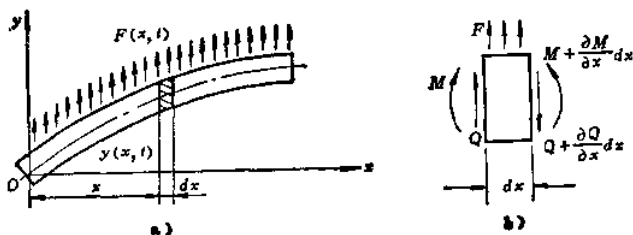


图 7-11

(1) 振动微分方程及解

以 $y(x, t)$ 表示梁的横向位移, 它同样是截面位置 x 和时间 t 的二元函数。以 ρ 为梁单位体积质量, $EJ(x)$ 为截面抗弯刚度, $J(x)$ 为横截面对中心主轴的惯性矩, 横截面积为 $A(x)$, 梁上作用有单位长度分布力 $F(x, t)$ 。

取微段 dx , 上面有剪力 $Q(x, t)$, 弯矩 $M(x, t)$, 和作用力 $F(x, t)$, 如图 7-11 b) 所示。图中所有力均按正方向表示。根据牛顿运动定律, 在 y 方向的运动方程为

$$Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) + F dx = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

简化后得

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} = F \quad (a)$$

由于忽略截面转动的影响, 微段 dx 的转动方程式为

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M - Q dx = 0$$

简化后得

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x}$$

代入 (a) 式得

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = F \quad (b)$$

根据材料力学平面假设所得弯矩与挠度关系式

$$M = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

代入 (b) 式得

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \quad (7.22)$$

这就是梁横向振动的偏微分方程。如 $F(x, t) = 0$ ，即为梁自由振动的偏微分方程

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (7.23)$$

根据系统具有与时间无关而确定的振型的特性，可设 (7.23) 式的解为

$$y(x, t) = Y(x) T(t)$$

$T(t)$ 根据以前分析为简谐函数

$$\left. \begin{aligned} T(t) &= \sin(pt + \varphi) \\ \text{故 } y(x, t) &= Y(x) \sin(pt + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

代入 (7.23) 式得

$$-\frac{d^4}{dx^4} \left[EJ \frac{d^2 Y}{dx^2} \right] - p^2 \rho A Y = 0 \quad (7.25)$$

通过解 (7.25) 式可以得到振型函数 $Y(x)$ 的一般表达式。对于等截面梁， $A(x)$ 与 $I(x)$ 均为常数，(7.25) 式可写为

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - k^4 Y = 0 \quad (7.26)$$

式中

$$k^4 = \frac{p^2}{a^2} \quad (c)$$

$$a^2 = \frac{EJ}{\rho A} \quad (d)$$

这个四阶常微分方程的解可取为 $Y(x) = e^{ix}$, 代入得

$$s^4 - k^4 = 0$$

它的四个根为

$$s_{1,2} = \pm k, \quad s_{3,4} = \pm ik$$

于是 (7.26) 式的解为

$$Y(x) = A'e^{kx} + B'e^{-kx} + C'e^{ikx} + D'e^{-ikx} \quad (7.26)$$

因

$$e^{\pm kx} = \cosh kx \pm \sinh kx$$

$$e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx$$

(7.26) 式可写成常用的形式

$$Y(x) = A \sinh kx + B \cosh kx + C \sin kx + D \cos kx \quad (7.27)$$

这就是梁振动的振型函数。代回 (7.24) 式即得偏微分方程 (7.26) 式的解

$$y(x, t) = (A \sinh kx + B \cosh kx + C \sin kx + D \cos kx) \cdot \sin(pt + \varphi) \quad (7.28)$$

(7.28) 式有 A 、 B 、 C 、 D 、 p 和 φ 六个待定常数。但因为梁每个端点有两个端点条件, 共有四个端点条件, 加上两个振动初始条件恰好可以决定六个未知常数。

(2) 固有频率和主振型

梁振动同样要根据端点条件才能决定固有频率和相应的主振型。对应于梁最简单支承情况的端点条件为

固定端: 位移与转角等于零, 即

$$Y = 0, \quad \frac{dY}{dx} = 0$$

简支端: 位移与弯矩等于零, 即

$$Y = 0, \quad EJ \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0$$

自由端: 弯矩与剪力等于零, 即

$$EJ \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d}{dx} \left[EJ \frac{d^2 Y}{dx^2} \right] = 0$$

位移与转角等于零属于几何端点条件, 剪力与弯矩等于零则属于

力的端点条件。读者可以仿照 7.3 节的方法写出端点有弹簧支承或有集中质量的端点条件。

对于等截面梁, EJ 为常数, 端点条件便与 EJ 无关。

现以等截面简支梁为例求其固有频率及主振型, 如图 7-12, 端点条件为

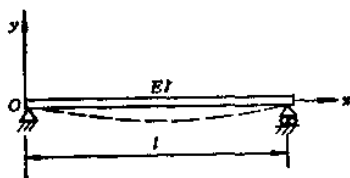


图 7-12

$$x = 0, Y(0) = 0, Y''(0) = 0$$

$$x = l, Y(l) = 0, Y''(l) = 0$$

代入 (7.27) 式及其二阶导数式, 得

$$B = D = 0$$

及

$$A \sin kl + C \operatorname{sh} kl = 0$$

$$-A \sin kl + C \operatorname{sh} kl = 0$$

上式中 $\operatorname{sh} kl$ 不为零, 导致 $C = 0$, 并得频率方程

$$\sin kl = 0$$

它的根为

$$k_n l = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

因 $k^4 = \frac{p^2}{a^2}$, 故固有频率为

$$p_n = a k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.29)$$

相应的主振型为

$$Y_n(x) = A_n \sin k_n x = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.30)$$

这个振型函数和弦振动的振型函数是相似的。故它的头三个主振型亦如图 7-3 a) 所示。

除了简支梁外, 确定其他端点条件的梁的频率方程和主振型函数, 由于包括双曲函数而将复杂一些。现以等截面悬臂梁为例。

如图 7-13 a), 其端点条件为

$$x = 0, Y(0) = 0, Y'(0) = 0$$

$$x = l, Y''(l) = 0, Y'''(l) = 0$$

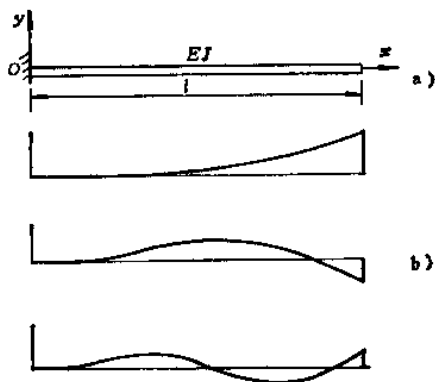


图 7-13

代入 (7.27) 式及其一、二、三阶导数式得

$$B = -D$$

$$A = -C$$

及

$$\left. \begin{aligned} C(\sin kl + \operatorname{sh} kl) + D(\cos kl + \operatorname{ch} kl) &= 0 \\ C(\cos kl + \operatorname{ch} kl) - D(\sin kl - \operatorname{sh} kl) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

这是两个 C 与 D 的代数联立方程, 具有非零解的条件为

$$\begin{vmatrix} \sin kl + \operatorname{sh} kl & \cos kl + \operatorname{ch} kl \\ \cos kl + \operatorname{ch} kl & -\sin kl + \operatorname{sh} kl \end{vmatrix} = 0$$

展开简化后得频率方程

$$\cos kl \operatorname{ch} kl = -1$$

它的根也可用作图法求出。将上式改写成

$$\cos kl = -\frac{1}{\operatorname{ch} kl}$$

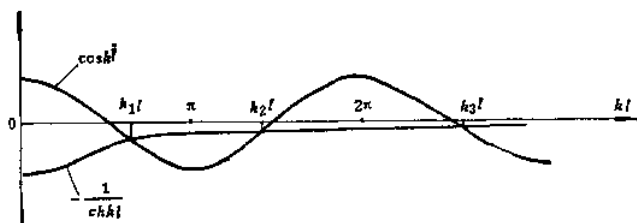


图 7-14

以 kl 为横坐标, 作出 $\cos kl$ 和 $-\frac{1}{\operatorname{ch} kl}$ 的曲线, 如图 7-14。两曲线的各个交点的横坐标就是频率方程的根

$k_1 l$	$k_2 l$	$k_3 l$	$k_4 l$	$k_5 l$	$k_6 l$
1.875	4.694	7.855	10.996	14.137	17.279

当 $n \geq 4$ 时, $k_n l \approx \frac{2n-1}{2} \pi$

固有频率为

$$p_n = \omega k_n^2 = \frac{(k_n l)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (7.31)$$

把 $A = -C$, $B = -D$ 代入 (7.27) 式便得主振型函数

$$Y(x) = D \left[\operatorname{ch} kx - \cos kx + \frac{C}{D} (\operatorname{sh} kx - \sin kx) \right]$$

式中比值 $\frac{C}{D}$ 可由 (f) 式中任选一个求出, 如取第二式,

$$\frac{C}{D} = -\frac{\operatorname{sh} kl - \sin kl}{\operatorname{ch} kl + \cos kl} \quad (g)$$

代入前式得

$$Y(x) = D \left[\operatorname{ch} kx - \cos kx - \frac{\operatorname{sh} kl - \sin kl}{\operatorname{ch} kl + \cos kl} (\operatorname{sh} kx - \sin kx) \right] \quad (7.32)$$

将各阶 $k_n l$ 之值代入 (7.32) 式, 就得各阶相应的主振型,

例如第一阶主振动时 $k_1 l = 1.875$, 代入 (g) 式

$$\begin{aligned} -\frac{\operatorname{sh} k_1 l - \sin k_1 l}{\operatorname{ch} k_1 l + \cos k_1 l} &= -\frac{\operatorname{sh}(1.875) - \sin(1.875)}{\operatorname{ch}(1.875) + \cos(1.875)} \\ &= -\frac{3.18378 - 0.95408}{3.33713 - 0.2995} \\ &= -0.7341 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= D \left[\operatorname{ch} \left(1.875 \frac{x}{l} \right) - \cos \left(1.875 \frac{x}{l} \right) \right. \\ &\quad \left. - 0.7341 \operatorname{sh} \left(1.875 \frac{x}{l} \right) \right. \\ &\quad \left. + 0.7341 \sin \left(1.875 \frac{x}{l} \right) \right] \end{aligned}$$

显然常数 D 取不同的数值并不影响振动形态, 因此可取 $D = 1$ 。然后沿梁长适当取若干个点, 如 $x = \frac{l}{4}, \frac{l}{2}, \frac{3l}{4}, \dots$ 等, 代入上式算出式子右边的数值, 即可描出第一主振型图。同样方法可以描出其他各阶主振型。头三阶主振型如图 7-13 b) 所示。

下面列出了其他三种简单端点条件的频率方程及其根, 并于图 7-15 中分别画出了它们头三阶主振型的图形, 供查用而不再一一详述。

两端自由: 频率方程为

$$\cos k_0 l \operatorname{ch} k_0 l = 1$$

其特征根为

$k_0 l$	$k_1 l$	$k_2 l$	$k_3 l$	$k_4 l$	$k_5 l$
0	4.730	7.853	10.996	14.137	17.279

$k_0 = 0$ 表示整个梁作刚体运动。除 $k_0 l = 0$ 外,

$$k_n l \approx \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

两端固定: 频率方程为

$$\cos k_0 l \operatorname{ch} k_0 l = 1$$

与两端自由的梁的频率方程完全相同,所以其特征根也完全相同,不过根据端点条件不会发生 $k_0 = 0$ 的刚体运动。

一端固定、一端简支: 频率方程为

$$\operatorname{tg} k l = \operatorname{th} k l$$

其特征根为

$k_1 l$	$k_2 l$	$k_3 l$	$k_4 l$	$k_5 l$
3.927	7.069	10.210	13.352	16.493

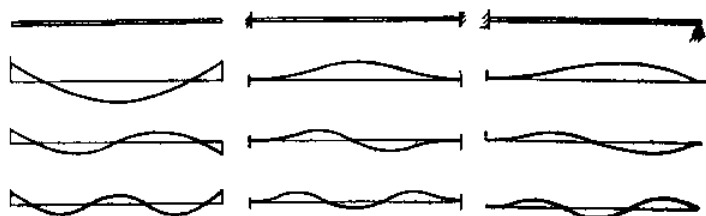
$$k_n l \approx \left(n + \frac{1}{4} \right) \pi$$


图 7-15

显然求出 $k_n l$ 后, 固有频率均可用 (7.31) 式计算。

例7.3 在机床动刚度有机玻璃模型实验中, 为了得到有机玻璃材料的动态弹性模量 E_0 , 采用了如图 7-16 所示装置, 把有机玻璃作成等直梁试件, 用康铜丝悬挂成两端自由的状态, 用共振法

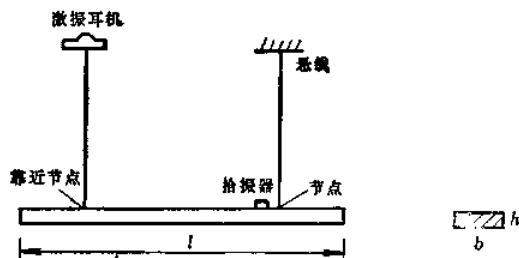


图 7-16

测出它的固有频率, 然后通过计算求出 E_0 。

已知试件尺寸为

$$\text{长度} \quad l = 299.5 \text{ mm}$$

$$\text{截面宽度} \quad b = 20 \text{ mm}$$

$$\text{截面高度} \quad h = 4.05 \text{ mm}$$

$$\text{材料比重} \quad \gamma = 1.18 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$$

通过试验测得固有频率为

$$f_1 = 90\text{Hz}, f_2 = 252\text{Hz}, f_3 = 505\text{Hz},$$

$$f_4 = 838\text{Hz}$$

试计算此有机玻璃的动态弹性模量 E_0 。

解 由 (7.31) 式

$$f_n = \frac{p_n}{2\pi} = \frac{(k_n l)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} = \frac{C_n}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{\gamma A}}$$

$$\text{可得} \quad E_0 = \frac{f_n^2 l^4 \gamma A}{C_n^2 J g} \quad (\text{h})$$

$$\text{式中} \quad C_n = \frac{(k_n l)^4}{2\pi}$$

将已知数据代入 (h) 式, 得

$$E_0 = \frac{f_n^2}{C_n^2} \cdot \frac{12\gamma}{g} \cdot \frac{l^4}{h^2} = 71.4 \frac{f_n^2}{C_n^2} \quad (\text{i})$$

对于两端自由的梁可以计算出

$$C_1 = \frac{4.73^2}{2\pi} = 3.56$$

$$C_2 = \frac{7.853^2}{2\pi} = 9.82$$

$$C_3 = \frac{10.996^2}{2\pi} = 19.24$$

$$C_4 = \frac{14.137^2}{2\pi} = 31.81$$

将已知 f_n 和 C_n 代入 (i) 式, 得

$$E_{D1} = 71.4 \times \frac{90^2}{3.56^2} = 4.57 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{D2} = 71.4 \times \frac{252^2}{9.82^2} = 4.72 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{D3} = 71.4 \times \frac{505^2}{19.24^2} = 4.93 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{D4} = 71.4 \times \frac{838^2}{31.81^2} = 4.96 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

实验说明有机玻璃的动态弹性模量 E_D 和静态弹性模量 E 有显著差别, 而且 E_D 随频率的提高而稍有提高, 并不是一个固定的值。

(3) 主振型的正交性

和有限自由度系统一样, 连续系统包括梁振动在内也存在主振型的正交性这一重要特性。不过在弹性体振动中, 将以积分形式表达。

设 $Y_n(x)$ 和 $Y_m(x)$ 分别代表对应于 n 阶和 m 阶固有频率 p_n 和 p_m 的两个不同阶的主振型函数。它们必然满足方程式 (7.25) 式, 即

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \right] = p_n^2 \rho A Y_n \quad (j)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 Y_m}{dx^2} \right] = p_m^2 \rho A Y_m \quad (k)$$

用 Y_m 乘 (j) 式, 并在梁全长进行部分积分, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^l Y_m \frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \right] dx \\ &= \left\{ Y_m \frac{d}{dx} \left[EJ \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \right] \right\} \bigg|_0^l - \left[\frac{dY_n}{dx} EJ \frac{d^2 Y_m}{dx^2} \right] \bigg|_0^l \\ & \quad + \int_0^l EJ \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \frac{d^2 Y_m}{dx^2} dx \\ &= p_n^2 \int_0^l \rho A Y_n Y_m dx \end{aligned} \quad (1)$$

同理, 用 Y_n 乘 (k) 式, 在梁全长进行部分积分, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^l Y_n \frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \cdot \frac{d^2 Y_m}{dx^2} \right] dx \\ &= \left\{ Y_n \frac{d}{dx} \left[EJ \frac{d^2 Y_m}{dx^2} \right] \right\} \bigg|_0^l - \left[\frac{dY_n}{dx} EJ \cdot \frac{d^2 Y_m}{dx^2} \right] \bigg|_0^l \\ & \quad + \int_0^l EJ \frac{d^2 Y_m}{dx^2} \cdot \frac{d^2 Y_n}{dx^2} dx \\ &= p_n^2 \int_0^l \rho A Y_n Y_m dx \end{aligned}$$

将上两式相减得

$$\begin{aligned} & (p_m^2 - p_n^2) \int_0^l \rho A Y_n Y_m dx \\ &= \left\{ Y_n \frac{d}{dx} \left[EJ \cdot \frac{d^2 Y_m}{dx^2} \right] - Y_m \frac{d}{dx} \left[EJ \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \right] \right\} \bigg|_0^l \\ & \quad - \left\{ \left[\frac{dY_n}{dx} EJ \cdot \frac{d^2 Y_m}{dx^2} \right] - \left[\frac{dY_m}{dx} EJ \cdot \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \right] \right\} \bigg|_0^l \end{aligned}$$

上式右边实际上是 $x=0$ 和 $x=l$ 的端点条件。对于用前面所述的固定、简支、自由端组成的梁, 上式右边都等于零。因此, 只要 $m \neq n$, $p_m^2 \neq p_n^2$, 便有

$$\int_0^l \rho A Y_n Y_m dx = 0 \quad m \neq n \quad (7.33)$$

这就是简单支承条件下梁的主振型对于质量的正交性条件。

将 (7.33) 式代回 (l) 式便得

$$\int_0^l EJ \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \cdot \frac{d^2 Y_m}{dx^2} dx = 0 \quad m \neq n \quad (7.34)$$

这就是简单支承条件下主振型对于刚度的正交性条件。

对于等截面梁主振型正交性的表达式简化为

$$\int_0^l Y_n Y_m dx = 0 \quad m \neq n \quad (7.35)$$

$$\int_0^l \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \cdot \frac{d^2 Y_m}{dx^2} dx = 0 \quad m \neq n \quad (7.36)$$

当两主振型是同阶时, 即 $m = n$, 则 (7.33) 式积分在一般情况下是一个正值。取 Y_n 和 Y_m 为正则振型函数, 可写成

$$\int_0^l \rho A Y_n Y_m dx = \delta_{nm} \quad (7.37)$$

式中符号 δ_{nm} 表示 $\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{当 } n = m \\ 0 & \text{当 } n \neq m \end{cases}$

将 (7.37) 式代回 (1) 式即得

$$\int_0^l Y_m \frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \right] dx = p_n^2 \delta_{nm} \quad (7.38)$$

利用主振型正交性的这些性质, 任何起始条件引起的自由振动和强迫振动都可以采用振型叠加法简化为类似一个自由度系统那样的微分方程式来求解, 这将在下面详细讨论。

7.6 轴向力、转动惯量和剪切变形的影响

(1) 轴向力的影响

如果梁在两端轴向力 T_0 的作用下作自由振动, 则微段 dx 上所受的力除剪力 $Q(x, t)$ 和弯矩 $M(x, t)$ 外, 将增加轴向力 T_0 的作用, 如图 7-17。于是微段在 y 方向的运动方程式将成为

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) + T_0 \left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \right) - T_0 \theta$$

将 $\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$, $M = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ 等关系代入上式, 简化后即得在轴向力作用下梁自由振动的偏微分方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (7.39)$$

仍设 $y(x, t) = Y(x) \sin(pt + \varphi)$

代入 (7.39) 式得

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 Y}{dx^2} \right] - T \frac{d^2 Y}{dx^2} - p^2 \rho A Y = 0$$

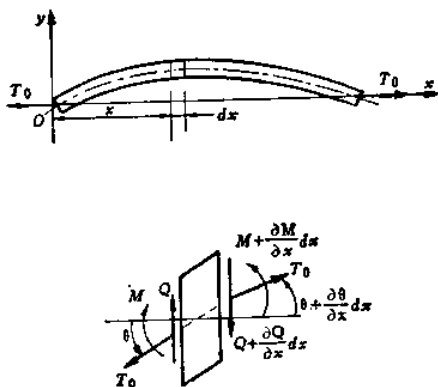


图 7-17

对于等截面梁, EJ 为常数, 并设 $\alpha = \sqrt{\frac{T_0}{EJ}}$, $k^4 = \rho^2 \frac{\rho A}{EJ}$, 代入上式得

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \alpha^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} - k^4 Y = 0 \quad (7.40)$$

上式的解为

$$Y(x) = A \sin \lambda_1 x + B \cos \lambda_1 x + C \operatorname{sh} \lambda_2 x + D \operatorname{ch} \lambda_2 x \quad (7.41)$$

式中

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + k^4}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + k^4}}$$

仍以简支梁为例求其固有频率。利用端点条件

$$x = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y''(0) = 0$$

$$x = l, \quad Y(l) = 0, \quad Y''(l) = 0$$

代入 (7.41) 式得

$$B = D = 0$$

$$A \sin \lambda_1 l + C \operatorname{sh} \lambda_2 l = 0$$

$$-A \lambda_1^2 \sin \lambda_1 l + C \lambda_2^2 \operatorname{sh} \lambda_2 l = 0$$

由 A 和 C 的系数行列式得

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sin \lambda_1 l \operatorname{sh} \lambda_2 l = 0$$

因 λ_1 , λ_2 及 $\operatorname{sh} \lambda_2 l$ 均不恒等于零, 故

$$\sin \lambda_1 l = 0$$

这就是简支梁在轴向拉力作用下自由振动的频率方程, 它的根为

$$\lambda_1 l = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

或

$$\lambda_1 = \frac{n\pi}{l} = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + k^4}}$$

由此可解出固有频率

$$p_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} \sqrt{1 + \frac{T_0 l^2}{n^2 \pi^2 EJ}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.42)$$

上式当 $EJ = 0$ 时, 即转变为弦振动的固有频率 (7.8) 式。而当 $T_0 = 0$ 时则即为上一节简支梁的固有频率 (7.29) 式。由于有轴向拉力后, 梁的挠度将减小, 相当于增加了梁的刚度, 所以导致梁的固有频率的提高。反之, 如果 T_0 为轴向压力, 则 (7.42) 式成为

$$p_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} \sqrt{1 - \frac{T_0 l^2}{n^2 \pi^2 EJ}}$$

梁的固有频率将有所降低。同时注意到 $\frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}$ 就是梁在轴向力作用下失稳的临界压力值, 所以必须 $T_0 < \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$, 不然梁将因失稳而破坏。

(2) 转动惯量和剪切变形的影响

当梁的横截面尺寸与长度之比并不很小, 或者在分析高阶振型时, 整个梁被节点平面分成若干比较短的小段, 这时就需要考虑转动惯量和剪切变形的影响。

仍取微段 dx , 如图 7-18。图上已经考虑了微段的转动和剪切变形。当忽略剪切变形时, 微段为虚线所示, 截面法线与梁轴

线的切线重合。现在两者之间有一夹角 β ，即为剪力引起的梁轴线的转角。这个转角由材料力学公式计算

$$\beta = \frac{kQ}{AG}$$

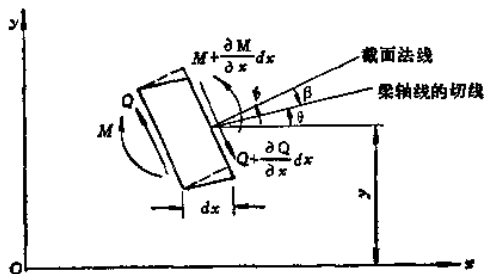


图 7-18

所以是一个平均值。式中 k 是一个决定于截面几何形状的常数。对于矩形截面 $k = 1.2$ ，圆形截面 $k = 1.11$ 。 G 为剪切弹性模量。 A 为截面积。

图中其他符号有： y 为梁轴线在 x 处的横向位移。 ϕ 为弯矩产生的梁轴线的转角，即忽略剪切变形时的转角。 $\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$ 为梁轴线在弯矩和剪力共同作用下的转角。显然有

$$\beta = \phi - \frac{\partial y}{\partial x}$$

由材料力学梁的基本公式，

$$M = EJ \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (a)$$

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = k' \left(\phi - \frac{\partial y}{\partial x} \right) AG \quad (b)$$

式中为了书写方便，引用 $k' = \frac{1}{k}$ ， k 即上面所述截面常数。

现在同样可列出微段的两个运动方程。在 y 方向移动的运动

方程仍为

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

将 (b) 式代入, 得

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[k' AG \left(\psi - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad (c)$$

由于考虑微段的转动惯量的影响, 微段的转动方程式将为

$$\rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial M}{\partial x} + Q = 0$$

式中 J 为横截面对中心主轴的惯性矩, 将 (a)(b) 两式关系代入, 得

$$\rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EJ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + k' AG \left(\psi - \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0 \quad (d)$$

设梁为等截面的, 由 (c)(d) 两式中消去 ψ , 得

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho J \left(1 + \frac{E}{k' G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{k' G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (7.43)$$

式中第三项和第四项表达了转动惯量和剪切变形的影响。方程 (7.43) 仍可用分离变量法求解。对于简单的梁, 可以利用端点条件求出固有频率和主振型。对于复杂的梁则可以用传递矩阵或其他近似解法。

现仍以简支梁为例。因为简支梁的振型函数是正弦函数, 故可直接设

$$y_n(x, t) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin(p_n t + \varphi_n)$$

代入 (7.43) 式得

$$EJ \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - \rho A p_n^2 - \rho J \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 p_n^2 - \frac{\rho J E}{k' G} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 p_n^2 + \frac{\rho^2 J}{k' G} p_n^4 = 0$$

由于末项 $\frac{\rho^2 J}{k' G} p_n^4$ 比之 $EJ \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4$ 是微小量, 在计算剪切变形的

影响时可以略去,从而得

$$\rho_n = \rho_n^0 \left[1 - \frac{n^2 \pi^2 J}{2 I^2 A} \left(1 + \frac{E}{k' G} \right) \right] \quad (7.44)$$

式中 $\rho_n^0 = \frac{n^2 \pi^2}{I^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$, 是不计转动惯量和剪切变形影响时简支梁的固有频率。从(7.44)式可见转动惯量和剪切变形的影响都使固有频率降低, 而且固有频率的阶数越高影响越大。这是因为考虑转动惯量后, 梁的惯性将增加, 而剪切变形则使梁的刚度降低, 所以都使固有频率降低。

如果只考虑转动惯量的影响, 则(7.44)式为

$$\rho_n = \rho_n^0 \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 J}{2 I^2 A} \right)$$

如果只考虑剪切变形的影响则

$$\rho_n = \rho_n^0 \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 EJ}{2 I^2 k' GA} \right)$$

比较上面两式可见剪切变形的影响要比转动惯量的影响大。

7.7 近似解法

以上讨论的等直杆振动问题, 只在简单端点条件下能得到精确解。对于变截面杆则除了个别简单情况外往往找不到精确解。而在实际问题中, 大量的质量和刚度不均匀分布的连续系统更不可能得到精确解。因此采用近似计算方法在工程上成为十分重要的途径。本节在第六章 6.8 节的基础上, 把瑞雷法和李兹法推广到连续系统。

(1) 瑞雷法

瑞雷法是根据机械能守恒定律得到的基频近似计算方法, 它不仅适用于以前的离散系统, 同样也适用于连续系统。对于任何一个连续系统, 只要近似地给出一个满足端点条件的第一阶振型函数, 并熟悉系统动能和势能的计算方法, 就可对基频进行估算。

仍以梁的横向振动为例。如梁以某一阶固有频率作主振动。设梁的振型函数为 $Y(x)$, 它满足梁的端点条件, 则梁在振动过

程中任一瞬时的位移为

$$y(x, t) = Y(x) \sin(pt + \varphi)$$

速度为

$$\dot{y}(x, t) = pY(x) \cos(pt + \varphi)$$

则梁的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{y}^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{y}^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

这里一般仍不考虑转动惯量和剪切变形的影响。

在静平衡位置，梁具有最大动能

$$T_{\max} = \frac{p^2}{2} \int_0^l \rho A Y^2 dx$$

而在偏离平衡位置最远距离处，梁具有最大弹性势能

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 dx$$

根据机械能守恒定律

$$T_{\max} = U_{\max}$$

得

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \rho A Y^2 dx} \quad (7.45)$$

(7.45) 式表明，当所设振型函数 $Y(x)$ 恰好是某一阶实际振型函数时，即可计算出该阶固有频率的精确解。但事实上往往不能预知各阶实际的振型函数，而只能近似地给出第一阶振型函数。因此，瑞雷法只适合于估算基频。

在假设第一阶振型函数时应尽量接近实际振型，最好是既满足几何端点条件又满足力的端点条件，这样可以得到比较好的近似值。但至少要满足几何条件。不然，会使由此计算所得结果误差过大，以至毫无意义。对于梁，通常选用静挠度曲线作为第一

阶振型函数就可得到较好计算结果。在第六章已阐明, 选用近似的振型函数相当于增加系统的约束, 使基频近似值总是偏高, 因此选用不同的 $Y(x)$ 而得到不同的计算结果时应取最低的数值。

当梁上有集中质量时, 在计算动能时应计入集中质量的动能。如图 7-19 所示在 x_i 处有一集中质量 m_i , 则梁的最大动能为

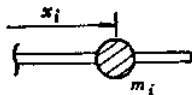


图 7-19

$$T_{\max} = \frac{\rho^2}{2} \int_0^l A Y^2 dx + \frac{\rho^2}{2} m_i Y^2(x_i) \quad (7.46)$$

当梁上 x_i 处有刚度为 K_i 和扭转刚度为 $K_{\theta i}$ 的弹性支承时, 如图 7-20 所示, 则梁的最大势能为

$$\begin{aligned} U_{\max} = & \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 dx \\ & + \frac{1}{2} K_i Y^2(x_i) \\ & + \frac{1}{2} K_{\theta i} Y'^2(x_i) \end{aligned} \quad (7.47)$$

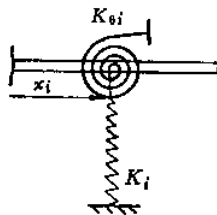


图 7-20

前面所述弦振动, 杆的纵向振动和扭转振动同样可用瑞雷法推导出类似 (7.45) 式的基频计算公式, 不再赘述。

例 7.4 求图 7-21 所示等截面悬臂梁的基频, (1) 设

$$Y(x) = \frac{q}{24EJ} (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2)$$

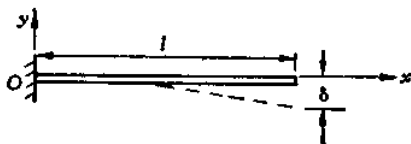


图 7-21

即均布载荷作用下的静挠度曲线; (2) 设

$$Y(x) = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$$

解 (1) 因 $Y(x) = \frac{q}{24EJ} (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2)$

$$Y''(x) = -\frac{q}{2EJ} (l - x)^2$$

代入 (7.45) 式得

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{EJ}{\rho A} \frac{\int_0^l \left[\frac{q}{2EJ} (l - x)^2 \right]^2 dx}{\int_0^l \left[\frac{q}{24EJ} (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2) \right]^2 dx} \\ &= \frac{162}{13l^4} \frac{EJ}{\rho A} \end{aligned}$$

故

$$p = \frac{3.53}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

(2) 因 $Y(x) = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$

$$Y''(x) = -\frac{\pi^2}{4l^2} \delta \cos \frac{\pi x}{2l}$$

代入 (7.45) 式得

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{EJ}{\rho A} \frac{\int_0^l \left[-\frac{\pi^2}{4l^2} \delta \cos \frac{\pi x}{2l} \right]^2 dx}{\int_0^l \delta^2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx} \\ &= \frac{\pi^4}{32 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) l^4} \frac{EJ}{\rho A} \end{aligned}$$

故

$$p = \frac{3.66}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

在 7.5 节中已解出悬臂梁的基频的准确解为

$$p_1 = \frac{(1.875)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} = \frac{3.515}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

第一种情况所设振型函数全部满足几何和力的端点条件, 误差仅为

$$\Delta = \frac{3.53 - 3.515}{3.515} \times 100\% = 0.4\%$$

第二种情况所设振型函数只满足几何端点条件, 不完全满足力的端点条件, 误差稍大, 为

$$\Delta = \frac{3.66 - 3.515}{3.515} \times 100\% = 4\%$$

例 7.5 求图 7-22 所示一端固定、一端有刚度为 K 的弹性支承的等直梁的基频。

解 仍设振型函数为

$$Y(x) = a(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2)$$

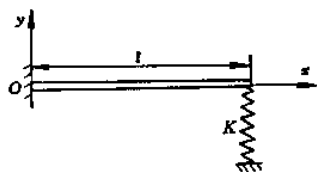


图 7-22

现在它只满足几何端点条件而不完全满足力的端点条件。

$$Y''(x) = 12a(l - x)^2$$

代入 (7.47) 式和 (7.46) 式得

$$\begin{aligned} U_{\max} &= \frac{1}{2} EJ \int_0^l [12a(l-x)^2]^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} K [a(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2)|_{x=l}]^2 \\ &\approx \frac{1}{2} EJ \left(\frac{144}{5} l^3 \right) \left(1 + \frac{Kl^3}{3EJ} \right) \\ T_{\max} &= \frac{\rho^2}{2} \int_0^l \rho A Y^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho^2 \rho A \int_0^l [a(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2)]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho^2 \rho A \left(\frac{104}{45} l^9 \right) \end{aligned}$$

由 $T_{max} = U_{max}$, 得

$$p^2 \approx \frac{162}{13l^4} \frac{EJ}{\rho A} \left(1 + \frac{Kl^3}{3EJ} \right)$$

$$p \approx \frac{3.53}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} \sqrt{1 + \frac{Kl^3}{3EJ}}$$

悬臂梁在自由端加了弹性支承, 就增加了梁的刚度, 所以固有频率提高。注意到 $\frac{3EJ}{l^3}$ 是悬臂梁在自由端的垂直刚度, $\frac{Kl^3}{3EJ}$ 是弹性支承刚度和梁刚度的比值, 因此固有频率的提高与此比值有关。当 $K = 0$, 即成为悬臂梁。

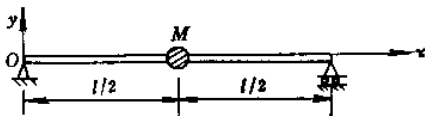


图 7-23

例 7.6 图 7-23

所示简支梁, 中间带有一集中质量, 其值等于梁质量的一半, 即 $M = \frac{1}{2}\rho Al$ 。试求该系统的基频近似值。

解 设振型函数为

$$Y(x) = a \sin \frac{\pi}{l} x$$

$$Y''(x) = -a \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi}{l} x$$

于是

$$p^2 = \frac{EJ \int_0^l Y''^2 dx}{\rho A \int_0^l Y^2 dx + M Y^2 \left(\frac{l}{2} \right)}$$

$$= \frac{EJ \int_0^l \left[a \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi}{l} x \right]^2 dx}{\rho A \int_0^l a^2 \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx + \left(\frac{\rho Al}{2} \right) \left(a \sin \frac{\pi}{2} \right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{EJ}{\rho A}$$

故

$$p = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

例7.7 图7-24所示变截面梁具有单位厚度, 截面变化为 $A(x) = 2b \frac{x}{l} = A_0 \frac{x}{l}$, A_0 为根部截面积, 求其基频的近似值。

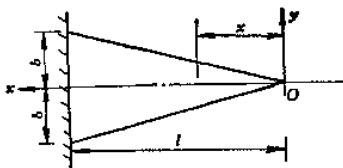


图 7-24

解 由给定条件

$$J(x) = \frac{1}{12} \left(\frac{2bx}{l} \right)^3 = J_0 \frac{x^3}{l^3}$$

J_0 为根部截面积对中心主轴的惯性矩。

设振型函数

$$Y(x) = a_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2, \quad Y''(x) = -\frac{2a_1}{l^2}$$

它满足全部端点条件

$$x=0 \quad M = EJ \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0, \quad Q = \frac{d}{dx} \left[EJ \frac{d^2 Y}{dx^2} \right] = 0$$

$$x=l \quad Y=0, \quad \frac{dY}{dx} = 0$$

将所设振型函数及其二阶导数代入 (7.45) 式得

$$p^2 = \frac{E}{\rho} \frac{\int_0^l \left(J_0 \frac{x^3}{l^3} \right) \left(\frac{2a_1}{l^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \left(A_0 \frac{x}{l} \right) \left[a_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 \right]^2 dx} = \frac{30}{l^4} \frac{EJ_0}{\rho A_0}$$

$$p = \frac{5.48}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\rho A_0}}$$

与精确解 $p = \frac{5.315}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\rho A_0}}$ 比较误差为 3%。由以上一些例题可见, 对于复杂的系统, 如果只要求估算基频, 瑞雷法是比较方便的。

(2) 李兹法

李兹法在瑞雷法的基础上作了改进, 可用以求出更精确的频率, 同时可用以求得高阶固有频率及主振型的近似值。李兹法的基本思想是把连续系统离散化为有限自由度系统, 然后根据机械能守恒定律进行计算。本节将运用拉格朗日方程来建立振动微分方程。

仍以梁振动为例, 选取 n 个广义坐标 $q_i(t)$, 并假设 n 个满足位移端点条件的振型函数 $Y_i(x)$, 将梁横向振动的位移近似表达为

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n Y_i(x) q_i(t)$$

则
$$\dot{y}(x, t) = \sum_{i=1}^n Y_i(x) \dot{q}_i(t)$$

梁的动能可表达为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\sum_{i=1}^n Y_i \dot{q}_i \right) \left(\sum_{j=1}^n Y_j \dot{q}_j \right) dx$$

展开后得

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

式中系数

$$m_{ij} = \int_0^l \rho A Y_i Y_j dx$$

梁的弹性势能可表达为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\sum_{i=1}^n \frac{d^2 Y_i}{dx^2} q_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{d^2 Y_j}{dx^2} q_j \right) dx$$

展开后得

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j$$

式中系数

$$k_{ij} = \int_0^l EJ \frac{d^2 Y_i}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dx^2} dx$$

将动能和势能代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$

得二阶常微分方程组

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} \ddot{q}_j + k_{ij} q_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7.48)$$

这样就将无限自由度系统转换成有限自由度系统。当系统作同频率同相位的简谐振动时, 则广义坐标 q_i 为简谐函数, 设

$$q_i = A_i \sin(pt + \varphi)$$

代入 (7.48) 式得振型方程

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - p^2 m_{ij}) A_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7.49)$$

利用 (7.49) 式即可计算系统的固有频率及主振型。

例 7.8 将例 7.7 的变截面梁改用李兹法计算基频。

解 设 $Y_i(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(\frac{x}{l}\right)^{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

现取头两项计算基频, 则

$$Y_1 = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2, \quad Y_1'' = \frac{2}{l^2}$$

$$Y_2 = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{x}{l}, \quad Y_2'' = \frac{2}{l^2} \left(\frac{3x}{l} - 2\right)$$

$$m_{11} = \int_0^l \rho A Y_1^2 dx = \int_0^l \rho \left(A_0 \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right)^4 dx = \frac{\rho A_0 l}{30}$$

$$\begin{aligned} m_{12} = m_{21} &= \int_0^l \rho A Y_1 Y_2 dx = \int_0^l \rho \left(A_0 \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right)^4 \frac{x}{l} dx \\ &= \frac{\rho A_0 l}{105} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{22} &= \int_0^l \rho A Y_2^2 dx = \int_0^l \rho \left(A_0 \frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right)^4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 dx \\
&= \frac{\rho A_0 l}{280} \\
k_{11} &= \int_0^l EJ (Y_1'')^2 dx = \int_0^l E \left(J_0 \frac{x^2}{l^3} \right) \left(\frac{2}{l^2} \right)^2 dx = \frac{EJ_0}{l^3} \\
k_{12} &= k_{21} = \int_0^l EJ Y_1'' Y_2'' dx = \int_0^l E \left(J_0 \frac{x^2}{l^3} \right) \left(\frac{2}{l^2} \right)^2 \left(\frac{3x}{l} - 2 \right) dx \\
&= \frac{2EJ_0}{5l^3} \\
k_{22} &= \int_0^l EJ (Y_2'')^2 dx = \int_0^l E \left(J_0 \frac{x^3}{l^3} \right) \left(\frac{2}{l^2} \right)^2 \left(\frac{3x}{l} - 2 \right)^2 dx \\
&= \frac{2EJ_0}{5l^3}
\end{aligned}$$

代入 (7.49) 式, 得

$$\left. \begin{aligned}
\left(\frac{EJ_0}{l^3} - p^2 \frac{\rho A_0 l}{30} \right) A_1 + \left(\frac{2EJ_0}{5l^3} - p^2 \frac{\rho A_0 l}{105} \right) A_2 &= 0 \\
\left(\frac{2EJ_0}{5l^3} - p^2 \frac{\rho A_0 l}{105} \right) A_1 + \left(\frac{2EJ_0}{5l^3} - p^2 \frac{\rho A_0 l}{280} \right) A_2 &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (a)$$

上列联立方程的系数行列式等于零

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{EJ_0}{l^3} - p^2 \frac{\rho A_0 l}{30} & \frac{2EJ_0}{5l^3} - p^2 \frac{\rho A_0 l}{105} \\ \frac{2EJ_0}{5l^3} - p^2 \frac{\rho A_0 l}{105} & \frac{2EJ_0}{5l^3} - p^2 \frac{\rho A_0 l}{280} \end{vmatrix} = 0$$

展开后得频率方程

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{EJ_0}{l^3} - p^2 \frac{\rho A_0 l}{30} \right) \left(\frac{2EJ_0}{5l^3} - p^2 \frac{\rho A_0 l}{280} \right) \\
&\quad - \left(\frac{2EJ_0}{5l^3} - p^2 \frac{\rho A_0 l}{105} \right)^2 = 0
\end{aligned}$$

由此可解出基频

$$p_1 = \frac{5.319}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\rho A_0}}$$

比瑞雷法所得结果更接近于精确解, 误差仅为 0.08%。

同时将 p_1 值代入 (a) 式的任一式可求得 A_1 和 A_2 之比值。从而得到相应的主振型的近似值。例如由 (a) 式第一式

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{k_{11} - p_1^2 m_{11}}{k_{12} - p_1^2 m_{12}} = -0.44$$

于是第一阶主振型的近似值为

$$Y_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 - 0.44 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{x}{l}$$

从频率方程还可算出第二阶固有频率, 但误差较大。所以采用李兹法计算各阶固有频率时, 所取振型函数的项数应比需求的固有频率阶数多一倍以上, 才能得到较好的计算结果。

显然, 上例中如果只取第一项振型函数 $Y_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$ 进行计算, 实际上就成为瑞雷法。

7.8 梁振动的响应

在求得杆件振动的固有频率和主振型后, 应用上一章介绍的振型叠加法, 就可以求得初始条件下的响应和任意激振的响应。本节仍以梁振动为例进一步说明振型叠加法在连续系统中的应用。

现在讨论图 7-11 a) 所示等直梁在任意分布力 $F(x, t)$ 作用下的响应。它的振动偏微分方程已在 7.5 节中导出

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \quad (7.22)$$

式中所有符号都和 7.5 节所述相同。

这个非齐次偏微分方程的全解同样包括两部分: 一部分是对应于齐次方程的通解, 相当于自由振动的解, 这在 7.5 节中已讨论过。只要给定初始条件, 即可求得相应的响应。另一部分是对应于非齐次项的特解, 在给定激振函数 $F(x, t)$ 后, 可求得激振力的响应。

设在给定的端点条件下的固有频率为 p_n , 相应的正则振型

函数为 $Y_n(x)$ ，引进正则坐标 $q_n(t)$ ，根据振型叠加法，可将适合方程 (7.22) 和给定端点条件的解 $y(x, t)$ 作类似于 (6.85) 式的变换，即令

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) q_n(t) \quad (7.50)$$

将 (7.50) 式代入 (7.22) 式，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho A Y_n \ddot{q}_n + \sum_{n=1}^{\infty} EJ \frac{d^4 Y_n}{dx^4} q_n = F \quad (a)$$

在 7.5 节中曾讨论过主振型的正交性，有

$$\int_0^l \rho A Y_n Y_m dx = \delta_{nm} \quad (7.37)$$

$$\int_0^l Y_m EJ \frac{d^4 Y_n}{dx^4} dx = p_n^2 \delta_{nm} \quad (7.38)$$

$$\text{或} \quad \int_0^l EJ \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \frac{d^2 Y_m}{dx^2} dx = p_n^2 \delta_{nm} \quad (7.38)'$$

$$\text{其中} \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{当 } n = m \\ 0 & \text{当 } n \neq m \end{cases} \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots)$$

现利用上述条件对 (a) 式加以简化。将 (a) 式两边均乘以 $Y_m dx$ ，然后对 x 自 0 至 l 进行积分。根据 (7.37) (7.38) 式，(a) 式左边只剩下 $n = m$ 的项，其余均为零。由此可得一组独立的常微分方程组

$$\ddot{q}_n + p_n^2 q_n = Q_n \quad (7.51)$$

$$\text{式中} \quad Q_n = \int_0^l F(x, t) Y_n(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.52)$$

定义为对应于正则坐标 q_n 的广义力。

方程组 (7.51) 式和无阻尼单自由度系统强迫振动的微分方程形式完全相同，因此可直接利用已讨论过的单自由度系统的结果得到 (7.51) 式的解。

方程组 (7.51) 也可用拉格朗日方程导出。先计算系统的动能

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{y}^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n \dot{q}_n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} Y_m \dot{q}_m \right) dx
 \end{aligned}$$

利用 (7.37) 式, 得

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n^2 \quad (\text{b})$$

系统的弹性势能为

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_n}{dx^2} q_n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_m}{dx^2} q_m \right) dx
 \end{aligned}$$

利用 (7.38)' 式, 得

$$U = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 q_n^2 \quad (\text{c})$$

再计算对应于广义座标 q_n 的广义力。因虚位移为

$$\delta y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \delta q_n$$

外力 $F(x, t)$ 在虚位移上所作之功为

$$\delta W = \int_0^l F \delta y dx = \int_0^l F \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \delta q_n dx$$

同时虚功可用广义力表达为

$$\delta W = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \delta q_n$$

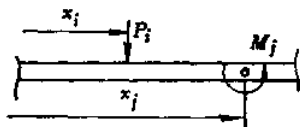


图 7-25

对比两式

$$Q_n = \int_0^l F(x, t) Y_n(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

即为 (7.52) 式。当 $F(x, t)$ 不是分布力而是如图 7-25 所示

在梁的 x_i 处有集中力 P_i 和在 x_j 处有集中弯矩 M_j 时, 虚功为

$$\begin{aligned}\delta W &= P_i \delta y + M_j \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_i Y_n(x_i) \delta q_n + \sum_{n=1}^{\infty} M_j Y'_n(x_j) \delta q_n\end{aligned}$$

故在集中力和集中弯矩作用下的广义力为

$$Q_n = P_i Y_n(x_i) + M_j Y'_n(x_j) \quad (7.53)$$

将 (b)、(c) 两式代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} + \frac{\partial U}{\partial q_n} = Q_n$$

得

$$\ddot{q}_n + p_n^2 q_n = Q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

即为 (7.51) 式。利用第三章 3.12 节 (3.60 b) 式, 以广义座标 q_n 代替 x , 广义力 Q_n 代替 $F(t)$, 即得 (7.51) 式的解。

$$\begin{aligned}q_n &= q_{n0} \cos p_n t + \frac{\dot{q}_{n0}}{p_n} \sin p_n t \\ &\quad + \frac{1}{p_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin p_n(t - \tau) d\tau\end{aligned} \quad (7.54)$$

式中 q_{n0} 和 \dot{q}_{n0} 表示广义座标和广义速度的初始值。它们的数值可以用已知初始条件代入 (7.50) 计算。

设初始条件为 $t = 0$, $y(x, 0) = y_0(x)$, $\dot{y}(x, 0) = \dot{y}_0(x)$, 则

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) q_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n q_{n0}$$

将上式两边均乘以 $\rho A Y_m dx$, 然后对 x 自 0 至 l 进行积分, 并利用主振型正交条件 (7.37) 式, 可得

$$q_{n0} = \int_0^l \rho A y_0 Y_n dx \quad (d)$$

同样方法可得

$$\dot{q}_{n0} = \int_0^l \rho A \dot{y}_0 Y_n dx \quad (e)$$

将 (7.54) 式代入 (7.50) 即得系统在初始条件下和任意激振的响应

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \left[q_{n0} \cos p_n t + \frac{\dot{q}_{n0}}{p_n} \sin p_n t + \frac{1}{p_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin p_n(t - \tau) d\tau \right] \quad (7.55)$$

上式前两项是系统仅在初始条件下的响应, 后面带有积分的项为任意激振的响应。式中 p_n , $Y_n(x)$ 对于给定端点条件的等直梁是已知的, $Q_n(\tau)$ 由给定的分布力 $F(x, t)$ 从 (7.52) 式求出, q_{n0} , \dot{q}_{n0} 则由已知初始条件从 (d)、(e) 式求出。

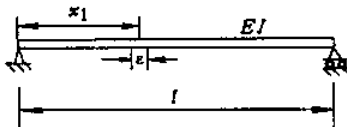


图 7-26

例 7.9 一简支梁图 7-26

在 $t = 0$ 时在 $x = x_1$ 处的微小范围 ϵ 内受到冲击, 得到初速度 v 后作自由振动, 试求此系统的响应。

解 已知初始条件

$$y_0(x) = 0$$

$$\dot{y}_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } 0 \leq x < x_1 - \frac{\epsilon}{2}, \quad x_1 + \frac{\epsilon}{2} < x \leq l \\ v & \text{当 } x_1 - \frac{\epsilon}{2} \leq x \leq x_1 + \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

由 7.5 节已知简支梁的固有频率为

$$p_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

相应的主振型为

$$Y(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

由 (7.37) 式可知

$$\int_0^l \rho A \left(A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)^2 dx = 1$$

得

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{\rho A l}}$$

正则振型函数为

$$Y_n = \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

代入 (d)、(e) 式求得

$$q_{n0} = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{n0} &= \int_0^l \rho A \dot{y}_0 \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= v \sqrt{\frac{2\rho A}{l}} \int_{x_1 - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_1 + \frac{\varepsilon}{2}} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= v \sqrt{\frac{2\rho A}{l}} \cdot \frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi \varepsilon}{2l} \end{aligned}$$

因 ε 是很小的区间, $\sin \frac{n\pi \varepsilon}{2l} \approx \frac{n\pi \varepsilon}{2l}$, 故

$$\dot{q}_{n0} = v\varepsilon \sqrt{\frac{2\rho A}{l}} \sin \frac{n\pi x_1}{l}$$

代入 (7.55) 式, 由于 $Q_n = 0$, 得简支梁在微小范围内有初速度 v 的响应为

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \left(q_{n0} \cos p_n t + \frac{\dot{q}_{n0}}{p_n} \sin p_n t \right) \\ &= \frac{2v\varepsilon}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin p_n t \end{aligned}$$

如梁在中部受到冲击, 即 $x_1 = \frac{l}{2}$, 则

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= \frac{2ve}{l} \left[\frac{1}{p_1} \sin \frac{\pi x}{l} \sin p_1 t - \frac{1}{p_3} \sin \frac{3\pi x}{l} \sin p_3 t \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{p_5} \sin \frac{5\pi x}{l} \sin p_5 t - \dots \right] \\
 &= \frac{2ve l}{a\pi^2} \left[\sin \frac{\pi x}{l} \sin p_1 t - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} \sin p_3 t \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{l} \sin p_5 t - \dots \right]
 \end{aligned}$$

式中 $a = \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$ 。这时由于梁受到的初始冲击是对称的, 所以只产生对称振型的振动。同时由于各阶振型的幅值按与 n^2 成反比下降, 因此高阶主振型所占成分很小, 实际上低阶主振型起主要作用, 级数收敛比较快。

例7.10 试求图7-27简支梁在 $x = x_1$ 处有一集中的简谐激振力 $P \sin \omega t$ 作用下的响应。

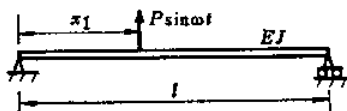


图 7-27

解 由上题已知简支梁的正则振型函数为

$$Y_n = \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

由 (7.53) 式, 对于在 $x = x_1$ 处有集中力作用的广义力为

$$\begin{aligned}
 Q_n &= P_1 Y_n(x_1) \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} P \sin \frac{n\pi x_1}{l} \sin \omega t
 \end{aligned}$$

由于 $q_{n0} = \dot{q}_{n0} = 0$, 故由 (7.54) 式得

$$\begin{aligned}
 q_n &= \frac{1}{p_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin p_n(t - \tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{p_n} \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} P \sin \frac{n\pi x_1}{l} \int_0^t \sin \omega \tau \sin p_n(t - \tau) d\tau \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \frac{P}{p_n^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{p_n} \right)^2 \right]} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p_n} \sin p_n t \right)
 \end{aligned}$$

代入 (7.55) 式, 求得系统响应

$$y(x, t) = \frac{2P}{\rho A l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{p_n} \right)^2 \right]} \times \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p_n} \sin p_n t \right)$$

例7.11 试求简支梁在梁全长突然受到均匀分布载荷 f_0 作用后的响应

解 已知 $F(x, t) = f_0 u(t)$

$u(t)$ 称为单位阶跃。由上题已知正则振型函数

$$Y_n = \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

由 (7.52) 式求广义力

$$\begin{aligned} Q_n &= \int_0^l f_0 u(t) Y_n(x) dx \\ &= f_0 u(t) \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= f_0 u(t) \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \frac{l}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \\ &= 2f_0 \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \frac{l}{n\pi} u(t) \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

代入 (7.54) 式, 求得正则座标

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1}{p_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin p_n(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{p_n} \cdot 2f_0 \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \frac{l}{n\pi} \int_0^t u(\tau) \sin p_n(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{p_n^2} \cdot 2f_0 \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \frac{l}{n\pi} (1 - \cos p_n t) \end{aligned}$$

代入 (7.55) 式得系统响应

$$y(x, t) = \frac{4f_0 l^4}{\pi^6 E J} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^6} \sin \frac{n\pi x}{l} (1 - \cos p_n t)$$

上式与时间无关的项表示梁在突加载荷 f_0 作用下的静挠度, 与时间余弦函数有关的项表示所引起的自由振动。式中各项与 n^2 成反比, 因此取第一项已与精确结果相当接近。

7.9 传递矩阵法

上一章 6.11 节中对传递矩阵法已作了一般性介绍, 并指出对于具有分布质量的轴段可直接建立其传递矩阵。例如某些转轴本来就是由不同截面的等直轴组成的阶梯轴, 按阶梯轴段的连接处和集中圆盘处分段, 便可得到符合实际情况的计算模型。对于截面变化缓慢的杆件, 也可以等效地分为若干段等直的杆件来处理。本节将以等直杆扭转振动和横向振动为例说明传递矩阵在连续系统振动中的应用。对于汽轮机叶片那样的变截面杆件, 还可以用数值积分的方法建立相应的传递矩阵, 这将在第十章中讨论。

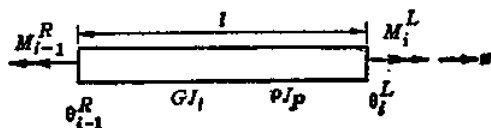


图 7-28

(1) 扭转振动

设轴系以圆频率 p 作扭转简谐振动, 忽略阻尼不计, 取图 7-28 所示 i 轴段建立传递矩阵。由 (7.18) 式可以写出适合偏微分方程 (7.17) 式的扭转角

$$\theta = \left(A \sin \frac{p}{a} x + B \cos \frac{p}{a} x \right) \sin pt \quad (7.56)$$

由扭矩公式 $M_t = GJ_t \frac{\partial \theta}{\partial x}$, 得

$$M_t = GJ_t \frac{p}{a} \left(A \cos \frac{p}{a} x - B \sin \frac{p}{a} x \right) \sin pt \quad (7.57)$$

式中 GJ_t 是 i 轴段的抗扭刚度, $a = \sqrt{\frac{GJ_t}{\rho J_p}}$, 均为常数。A 与 B 则

是待定常数, 由 $i-1$ 点右边的状态矢量来决定。将 $x=0$ 处的扭转角 θ_{i-1}^R 和扭矩 M_{i-1}^R 代入 (7.56) 和 (7.57) 式得

$$\theta_{i-1}^R = B \sin pt$$

$$M_{i-1}^R = GJ_i \frac{p}{a} A \sin pt$$

由上两式中得到 A 与 B 之值, 代回 (7.56) 和 (7.57) 式, 就得到 i 轴段在 x 处的传递关系

$$\theta = \theta_{i-1}^R \cos \frac{p}{a} x + M_{i-1}^R \frac{a}{GJ_i p} \sin \frac{p}{a} x$$

$$M_i = -\theta_{i-1}^R GJ_i \frac{p}{a} \sin \frac{p}{a} x + M_{i-1}^R \cos \frac{p}{a} x$$

将 $x=l$ 代入上两式, 即得该处的扭转角 θ_i^R 和扭矩 M_i^R 。写成矩阵形式得

$$\begin{bmatrix} \theta \\ M_i \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} \cos \frac{p}{a} l & \frac{a}{GJ_i p} \sin \frac{p}{a} l \\ -GJ_i \frac{p}{a} \sin \frac{p}{a} l & \cos \frac{p}{a} l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ M_i \end{bmatrix}_{i-1}^R \quad (7.58)$$

故 i 轴段的传递矩阵为

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{p}{a} l & \frac{a}{GJ_i p} \sin \frac{p}{a} l \\ -GJ_i \frac{p}{a} \sin \frac{p}{a} l & \cos \frac{p}{a} l \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

显然上式中 l 、 GJ_i 、 a 等均为 i 段的参数。不难验证当 $p \rightarrow 0$ 时, 即为上一章 6.11 节所述的无重量轴段的传递矩阵。

(2) 横向振动

设轴系以圆频率 p 作横向简谐振动, 忽略阻尼不计, 为了建立图 7-29 所示 i 段等直梁的传递矩阵, 可由 (7-28)

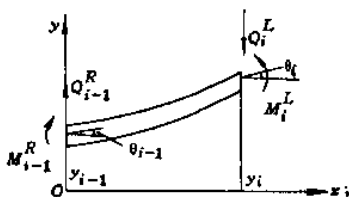


图 7-29

式写出适合偏微分方程 (7.26) 式的位移

$$y = [AS(kx) + BT(kx) + CU(kx) + DV(kx)] \sin pt \quad (7.60)$$

式中

$$S(kx) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} kx + \cos kx)$$

$$T(kx) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} kx + \sin kx)$$

$$U(kx) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} kx - \cos kx)$$

$$V(kx) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} kx - \sin kx)$$

$$k^4 = \frac{p^2}{a^2}$$

在给定 x 值时, $S(kx)$ 、 $T(kx)$ 、 $U(kx)$ 和 $V(kx)$ 可查表计算, 所以写成 (7.60) 式比较方便。由 (7.60) 式可写出梁的转角 θ 、弯矩 M 和剪力 Q 。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= [AkV(kx) + BkS(kx) + CkT(kx) + DkU(kx)] \sin pt \\ M &= [Ak^2EJU(kx) + Bk^2EJV(kx) + Ck^2EJS(kx) + Dk^2EJT(kx)] \sin pt \\ Q &= [Ak^3EJT(kx) + Bk^3EJU(kx) + Ck^3EJV(kx) + Dk^3EJS(kx)] \sin pt \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

式中 EJ 为梁 i 段的抗弯刚度, $a = \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$ 为 i 段的参数。 A 、 B 、 C 、 D 为待定常数, 由 $i-1$ 点右边的状态矢量决定。将 $x=0$ 处的位移 y_{i-1}^* 、转角 θ_{i-1}^* 、弯矩 M_{i-1}^* 和剪力 Q_{i-1}^* 代入以上各式得

$$y_{i-1}^* = A \sin pt$$

$$\theta_{i-1}^* = Bk \sin pt$$

$$M^* = Ck^2EJ \sin pt$$

$$Q_{i-1}^r = Dk^3 EJ \sin pt$$

利用以上四个关系, 即可消去 (7.60) 和 (7.61) 各式中的常数 A 、 B 、 C 、 D , 而得到 i 段在 x 处的传递关系

$$\begin{aligned} y &= y_{i-1}^r S(kx) + \theta_{i-1}^r \frac{1}{k} T(kx) \\ &\quad + M_{i-1}^r \frac{1}{EJk^2} U(kx) + Q_{i-1}^r \frac{1}{EJk^3} V(kx) \\ \theta &= y_{i-1}^r kV(kx) + \theta_{i-1}^r S(kx) \\ &\quad + M_{i-1}^r \frac{1}{EJk} T(kx) + Q_{i-1}^r \frac{1}{EJk^2} U(kx) \\ M &= y_{i-1}^r k^2 EJ U(kx) + \theta_{i-1}^r kEJV(kx) \\ &\quad + M_{i-1}^r S(kx) + Q_{i-1}^r \frac{1}{k} T(kx) \\ Q &= y_{i-1}^r k^3 EJT(kx) + \theta_{i-1}^r k^2 EJ U(kx) \\ &\quad + M_{i-1}^r kV(kx) + Q_{i-1}^r S(kx) \end{aligned}$$

将 $x = l$ 的位移 y_i^r 、转角 θ_i^r 、弯矩 M_i^r 和剪力 Q_i^r 代入以上各式, 写成矩阵形式得

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} L \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(kl) & \frac{1}{k} T(kl) & \frac{1}{EJk^2} U(kl) & \frac{1}{EJk^3} V(kl) \\ kV(kl) & S(kl) & \frac{1}{EJk} T(kl) & \frac{1}{EJk^2} U(kl) \\ k^2 EJ U(kl) & kEJV(kl) & S(kl) & \frac{1}{k} T(kl) \\ k^3 EJT(kl) & k^2 EJ U(kl) & kV(kl) & S(kl) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{i-1}^R$$

式中右边的方阵就是等直梁的场传递矩阵。若将 $\rho \rightarrow 0$ ，可将矩阵中各元素求 $k \rightarrow 0$ 的极限值，即得上一章 6.11 节的无重量梁的传递矩阵。

用以上建立起来的等直杆扭转振动和横向振动的传递矩阵代替 6.11 节无重量杆的传递矩阵，就可以计算包含有分布质量系统的固有频率和主振型。求得点状态矢量后，就可以求出杆振动的振型。

7.10 气柱振动

在管道内的气体介质，由于它具有连续分布的质量和弹性（可压缩性），而构成一个气柱的振动系统。管道振动除了由于机器动力不平衡性所引起外，多数情况是气流脉动所造成的。例如往复式压缩机管内气柱，由于压缩机周期性吸气或排气，使气柱受到周期性的激振而产生强迫振动。当激振频率和气柱的某一阶固有频率很接近时，气柱便发生对应于该阶频率的共振，从而使管道强烈振动。

气柱振动的微分方程和杆件纵向振动和扭转振动的方程一样是波动方程。导出方程时作了下列假设：1. 气体在管道内流动是一维流动；2. 气体的脉动是微振动，由此而引起的脉动速度、压力和密度的变化也都是微量；3. 气体除了脉动速度外本身没有流动速度；4. 忽略阻尼的影响，并认为气体的膨胀和压缩进行得很快，热量来不及向周围传播，因此是绝热过程。

气柱振动是与声波在管道中以气体为媒介进行传播密切联系的。声波在管道内传播时可看作平面波，气体脉动方向平行于声波的传播方向，如图 7-30 所示的 x 方向。垂直于 x 轴的同一截面上气体的运动都是相同的。当声波传播时，各截面上气体质点将相对其平衡位置作微振动。设距原点为 x 处截面上气体质点在 x 方向的位移为 $u(x, t)$ ，它是位置 x 和时间 t 的二元函数。当然这只是实际情况的一个近似描写，因为由于热运动，即使没有声波传播，气体质点也是不停地运动着，这里所说的位移是指

声波引起的气体质点的平均位移。由于我们假设气体在声波传播前没有速度，因此在 x 方向的平均速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 也就是由声波引起的脉动速度，记作 $v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}$ 。若气体原来的压强，即静平衡时的压强为 F_0 (常数)，声波所引起的脉动压强为 $F(x, t)$ ，它也是位置 x 和时间 t 的二元函数，则各截面处的总压强为 $F + F_0$ 。要得到用压强 F (或速度 v) 描述气柱振动的波动方程，需要综合三个方程：1. 表示质量守恒的连续方程；2. 牛顿运动方程；3. 表示气体热力学性质的状态方程。

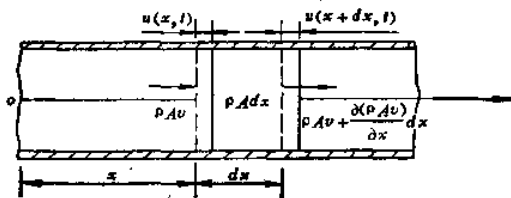


图 7-30

1. 连续方程 设气体密度为 ρ ，管道截面面积为 A ，脉动速度为 v ，则如图 7-30 所示，在某指定瞬时单位时间内由左边流入 x 处截面的气体质量为 $\rho A v$ ，而从 $x + dx$ 处流出的质量为 $\rho A v + \frac{\partial}{\partial x}(\rho A v) dx$ ，在两截面之间的质量为 $\rho A dx$ 。由于质量守恒，因而流出的净质量 $\frac{\partial}{\partial x}(\rho A v) dx$ 应该等于两截面之间质量的递减率，故有

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho A v) dx = - \frac{\partial}{\partial t}(\rho A dx)$$

对于等截面管， A 是常数，并略去二阶微小量 $v \frac{\partial \rho}{\partial x}$ ，使得连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (a)$$

2. 运动方程 分析 dx 微段气体所受的脉动力, 在 x 截面处的作用力为 FA , $x + dx$ 处的作用力为 $\left(F + \frac{\partial F}{\partial x} dx\right)A$, 两截面内气体受到的合力为 $-A \frac{\partial F}{\partial x} dx$, 根据牛顿运动定律得到运动方程

$$\rho A \frac{dv}{dt} dx = -A \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

式中 $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}$, 略去二阶微小量 $v \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{dv}{dt} \approx \frac{\partial v}{\partial t}$ 。因此上式可简化成

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (b)$$

3. 状态方程 理想气体的状态方程为

$$\frac{F + F_0}{\rho} = RT \quad (c)$$

式中 R 为气体常数, T 是以绝对温度 ($^{\circ}\text{K}$) 表示的气体温度。因假设气体脉动是绝热过程, 由热力学定律

$$\frac{F + F_0}{F_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \quad (d)$$

式中 ρ_0 为静平衡时的气体密度, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ 是定压比热 C_p 和定容比热 C_v 之比。

将 (d) 式对 t 求导后得

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \gamma \left(\frac{F + F_0}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (e)$$

由 (c) 式, $\gamma \left(\frac{F + F_0}{\rho} \right) = \gamma RT$, 它近似是一个常数, 以 a^2 表示之。 a 就是声速, 也可用下列关系表示。

$$a = \sqrt{\gamma RT} \approx \sqrt{\frac{\gamma F_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (f)$$

式中 $K = \gamma F_0$ 称为气体的体积弹性模量。将 a^2 代入 (e) 式得

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (g)$$

现在由 (a)、(h) 两式消去 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, 得

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (h)$$

再由 (b)、(i) 两式消去 v , 其中 $\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$ 等二阶微小量可略去不计, 便得气柱振动的波动方程

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (7.62)$$

设气柱以频率 p 作简谐振动, 可直接写出满足波动方程 (7.62) 式的脉动压强

$$F = \left(A \sin \frac{p}{a} x + B \cos \frac{p}{a} x \right) \sin pt \quad (7.63)$$

根据 (b) 式, 取 $\rho \approx \rho_0$, 可得脉动速度

$$v = \left(\frac{A}{\sqrt{\rho_0 K}} \cos \frac{p}{a} x - \frac{B}{\sqrt{\rho_0 K}} \sin \frac{p}{a} x \right) \cos pt \quad (7.64)$$

传递矩阵法已成功地被应用到计算管系的气柱振动问题, 它和扭转振动的计算十分相似, 借助于电子计算机可以计算单支和有分支的复杂管道系统的固有频率和压强振型。这对于避免管道的严重振动是十分必要的。下面即对传递矩阵法的应用作一简单介绍, 为此需建立一些基本管段的传递矩阵。

在气柱振动问题中习惯上以压强和速度作为气体运动的两个参数, 但从 (7.63) 和 (7.64) 式可以看到压强和速度不是相同的时间函数, 它们的时间函数之间有 90° 的相位差, 因此我们采用它们的幅值来建立传递矩阵。虽然这种关系并非对任何瞬时都成立, 但可以证明并不影响固有频率和压强振型的计算。

引入压强振型函数 $P(x)$ 和速度振型函数 $V(x)$

$$P = A \sin \frac{p}{a} x + B \cos \frac{p}{a} x \quad (7.65)$$

$$V = \frac{A}{\sqrt{\rho_0 K}} \cos \frac{p}{a} x - \frac{B}{\sqrt{\rho_0 K}} \sin \frac{p}{a} x \quad (7.66)$$

下面就利用 (7.65)、(7.66) 式来建立管道气柱振动的传递矩阵。

(1) 等截面管道的传递矩阵

如图 7-31, 设 $x = 0$ 处的脉动压强为 P_{i-1} , 脉动速度为 V_{i-1} , 在 $x = l$ 处的脉动压强为 P_i , 脉动速度为 V_i 。将 $x = 0$ 处的端点条件代入 (7.65) 和 (7.66) 式。得

$$P_{i-1} = B \quad (j)$$

$$V_{i-1} = \frac{A}{\sqrt{\rho_0 K}} \quad (k)$$

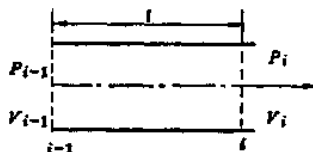


图 7-31

将 $x = l$ 处的端点条件代入 (7.65) 和 (7.66) 式, 并利用 (j) (k) 两式消去未知常数 A 和 B , 得

$$P_i = P_{i-1} \cos \frac{p}{a} l + V_{i-1} \sqrt{\rho_0 K} \sin \frac{p}{a} l$$

$$V_i = -P_{i-1} \frac{1}{\sqrt{\rho_0 K}} \sin \frac{p}{a} l + V_{i-1} \cos \frac{p}{a} l$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \cos \frac{p}{a} l & \sqrt{\rho_0 K} \sin \frac{p}{a} l \\ -\frac{1}{\sqrt{\rho_0 K}} \sin \frac{p}{a} l & \cos \frac{p}{a} l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{i-1} \quad (7.67)$$

故长度为 l 的管段的传递矩阵为

$$[M_p] = \begin{bmatrix} \cos \frac{p}{a} l & \sqrt{\rho_0 K} \sin \frac{p}{a} l \\ -\frac{1}{\sqrt{\rho_0 K}} \sin \frac{p}{a} l & \cos \frac{p}{a} l \end{bmatrix} \quad (7.68)$$

例7.12 试求管长为 l 的等截面管道内气柱振动的固有频率及压强振型。1. 一端为闭口, 另一端为开口; 2. 两端都是闭口。

解 1. 端点条件为左端闭口

$$x = 0, \quad V_1 = 0,$$

右端开口

$$x = l, \quad P_2 = 0$$

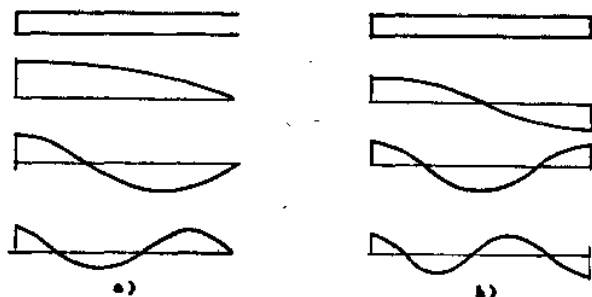


图 7-32

代入 (7.67) 式, 得

$$P_2 = P_1 \cos \frac{p}{a} l = 0$$

因 $P_1 \neq 0$, 故得频率方程

$$\cos \frac{p}{a} l = 0$$

固有频率为

$$P_n = \frac{(2n-1)\pi a}{2l} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

将端点条件代入 (7.66) 式可得 $A = 0$, 取任意常数 $B = 1$, 由 (7.65) 式即得压强振型函数

$$P_n(x) = \cos \frac{p_n x}{a} = \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

头三阶振型如图 7-32 a) 所示。

2. 端点条件为

$$x = 0, V_1 = 0$$

$$x = l, V_2 = 0$$

代入 (7.67) 式, 得

$$V_2 = -\frac{P_1}{\sqrt{\rho_0 K}} \sin \frac{p}{a} l = 0$$

因 $P_1 \neq 0$, 得频率方程

$$\sin \frac{p}{a} l = 0$$

固有频率为

$$P_n = \frac{n\pi a}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

同样可求得压强振型函数

$$P_n(x) = \cos \frac{p_n x}{a} = \cos \frac{n\pi x}{l}$$

前三阶振型如图 7-32 b)。

(2) 异径管道相接处的传

递矩阵

如图 7-33 由截面积为 A_{i-1} 变为 A_i 的管道连接处应满足连续方程

$$A_{i-1}v_{i-1} = A_i v_i$$

在相接处压强相等, $P_{i-1} = P_i$, 因此得

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{A_{i-1}}{A_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{i-1} \quad (7.69)$$

故异径管道相接处的传递矩阵为

$$[M_D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{A_{i-1}}{A_i} \end{bmatrix} \quad (7.70)$$

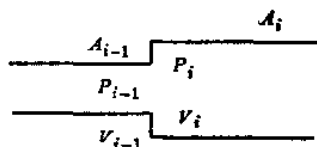


图 7-33

(3) 体积元件的传递矩阵

如图 7-34 表示管道中有一容器, 称为体积元件。它的体积为 U , 脉动压强为 $F = P \sin pt$, 同一瞬时

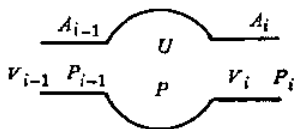


图 7-34

在容器内各点压强是相等的。

根据容器内质量守恒, 有连续方程

$$\rho (A_i v_i - A_{i-1} v_{i-1}) = -U \frac{\partial P}{\partial t}$$

由 (h) 式

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial F}{\partial t}$$

代入上式得

$$A_i v_i - A_{i-1} v_{i-1} = -\frac{U}{\rho a^2} \frac{\partial F}{\partial t}$$

注意到

$$\rho a^2 = K$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (P \sin pt) = P p \cos pt$$

$$v = V \cos pt$$

代入上式得

$$A_i V_i - A_{i-1} V_{i-1} = -\frac{U p}{K} P$$

同时, 由于同一瞬时容器内压强相等, 故

$$P_i = P_{i-1} = P$$

由此可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{U p}{K A_i} & \frac{A_{i-1}}{A_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{i-1} \quad (7.71)$$

故体积元件的传递矩阵为

$$[M_v] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{U p}{K A_i} & \frac{A_{i-1}}{A_i} \end{bmatrix} \quad (7.72)$$

根据以上传递矩阵, 我们即可按照上一章 6.11 节计算扭转振动的方法, 将管道系统按次序写出各段相应的传递矩阵, 借助于电子计算机, 便可方便地得到各阶固有频率和压强振型。

遇到有分支的系统, 如图 7-35 所示, 只要在分支点满足下列两个条件: 1. 压强相等

$$P_1 = P_2 = P_3$$

2. 质量守恒, 即满足连续方程

$$A_1 U_1 + A_2 U_2 = A_3 U_3$$

即可和扭振一样计算有分支系统的气柱振动。

例 7.13 图 7-36 所示为一声学系统亥姆霍兹 (Helmholtz) 共鸣器, 口径的面积为 A , 长度为 l , 容器的体积为 U 。试证明其频率方程为

$$\operatorname{tg} \frac{\rho l}{\alpha} = \frac{\alpha A}{\rho U}$$

式中 $\alpha = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$ 为声速。

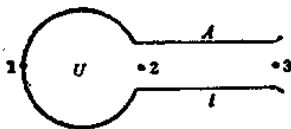


图 7-36

解 这是由体积元件和等截面管段组成的系统, 端点条件为 $V_1 = 0$, $P_3 = 0$ 。为了方便, 设 $P_1 = 1$ 。

由 (7.71), 代入 1 点的端点条件, 有

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{U\rho}{KA} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{U\rho}{KA} \end{bmatrix}$$

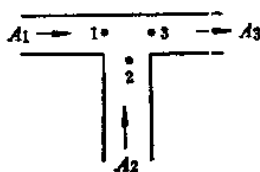


图 7-35

由 (7.68), 代入 3 点的端点条件, 有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ V_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \frac{pl}{a} & \sqrt{\rho_0 K} \sin \frac{pl}{a} \\ -\frac{1}{\sqrt{\rho_0 K}} \sin \frac{pl}{a} & \cos \frac{pl}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ V_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{pl}{a} & \sqrt{\rho_0 K} \sin \frac{pl}{a} \\ -\frac{1}{\sqrt{\rho_0 K}} \sin \frac{pl}{a} & \cos \frac{pl}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{Up}{KA} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由此得

$$\cos \frac{pl}{a} - \frac{Up}{KA} \sqrt{\rho_0 K} \sin \frac{pl}{a} = 0$$

代入 $a = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$, 即得

$$\operatorname{tg} \frac{pl}{a} = \frac{aA}{pU}$$

取 $\operatorname{tg} \frac{pl}{a} \approx \frac{pl}{a}$, 可求得第一阶固有频率的近似值为

$$p_1 = a \sqrt{\frac{A}{Ul}}$$

以上结果与声学理论中结果一致。^①

① 关于气柱振动的详细讨论可参考: 1. 往复式压缩机管系气柱固有频率的计算与讨论研究 (西安交通大学学报 1976 年第 3 期), 2. Study on pulsations of reciprocating piping systems (Bulletin of the JSME Vol. 16, No 91, January, No. 101, November, 1973)。

第八章 弹性体振动（下）

8.1 引言

在上一章里，我们重点讨论了杆件振动等简单的弹性体振动问题，根据牛顿运动定律建立振动微分方程，对于等直杆件在简单边界条件下得到了解析解，这对于了解弹性体振动的基本性质是很重要的，此外还介绍了工程上的近似解法。本章将主要介绍根据变分原理来建立弹性体振动微分方程及近似解法的一般方法。为了阐明这一方法，仍以梁的横向振动开始，并讨论较为复杂的梁的双向横振动、圆环振动以及二维问题的薄板振动。

在 5.6 节里介绍了哈密尔顿原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (8.1)$$

根据这一变分原理，可以从一切可能发生的运动中确定真实发生的运动。因此只需建立弹性体的能量表达式——动能 T 、势能 U 和虚功 δW ，就可以由 (8.1) 式建立振动微分方程，并得到力的边界条件。从数学方法上看来，作为近似求解，可将泛函极值问题化为多元函数的极值问题，因此应用变分方法可以得出振动问题的一些近似解法。从力学上来解释，这类近似解法就是将连续系统简化成离散系统的方法之一，也就是相当于把无限自由度系统离散化成有限自由度系统，这类方法包括了力学上常用的瑞雷——李兹法和伽辽金法。本章将结合各类问题介绍这些方法，而哈密尔顿变分原理将作为这些近似解法的共同基础。

8.2 梁的横向振动

（1）变分方法

本节以 7.5 节讨论过的发生在一个平面内的梁的横向振动为

例, 来说明应用变分方法建立振动微分方程并得到力的边界条件的一般方法。

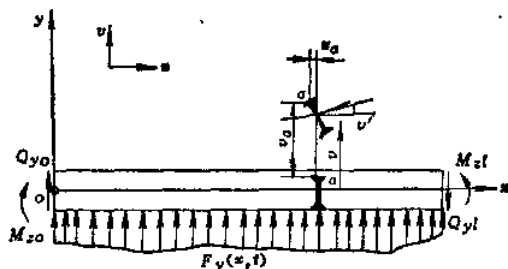


图 8-1

如图 8-1 所示, 梁在 xoy 平面内发生振动, 以变形前的弹性线取作 x 轴, 建立空间固定直角坐标系 xyz , 其中 z 轴垂直于纸面, 在图上未表示出来。梁上任意一点 a 的位置可由其未变形前的坐标 x, y, z 来确定。根据平面假设, 梁的弯曲变形可由弹性线的位移所完全确定, 若弹性线上各点的位移

$$v = v(x, t)$$

则梁上任意一点 a 沿 x 和 y 方向的位移分量分别为

$$u_a = -yv'$$

$$v_a = v$$

由此可得该点的轴向应变和应力为

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_a}{\partial x} = -yv''$$

$$\sigma_x = E\epsilon_x$$

得到以上关系后, 就可以计算动能 T 和势能 U 。由于截面转动而产生的 x 方向位移 u_a 比起挠度 v 小得多, 在计算动能时可略去与 \dot{u}_a 有关部分, 因此得 T 和 U 的表达式如下

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \dot{v}^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{v}^2 dx \quad (8.2)$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_x \epsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_x (v'')^2 dx \quad (8.3)$$

其中 A 为各截面的面积, J_z 为截面的惯性矩, 其计算公式分别为

$$A = \iint_A dA$$

$$J_z = \iint_A y^2 dA$$

现将 (8.2) (8.3) 式代入变分式 (8.1), 在计算中注意以下两点:

1. 变分和微分运算的可交换性。

2. 复合函数的求导关系 $(F_1 F_2)' = F_1' F_2 + F_1 F_2'$ 。

(8.1) 式中动能的变分为

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{v}^2 dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho A \dot{v} \delta \dot{v} dx dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho A \dot{v} \delta v dx dt + \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial}{\partial t} (\dot{v} \delta v) dt dx \quad (a) \end{aligned}$$

其中由于在 t_1, t_2 瞬时的运动已经给定, 因此

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{v} \delta v) dt = \dot{v} \delta v \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

(8.1) 式中势能的变分为

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^l EJ_z (v'')^2 dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EJ_z v'' \delta v'' dx dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (EJ_z v'')' \delta v' dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (EJ_z v'' \delta v')' dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (EJ_z v'')'' \delta v dx dt - \int_{t_1}^{t_2} (EJ_z v'')' \delta v \Big|_0^l dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} EJ_z v'' \delta v' \Big|_0^l dt \quad (b) \end{aligned}$$

(8.1) 式的第二部分为除弹性力以外的主动力的虚功, 其中包括

作用在杆上的分布载荷 $F(x, t)$ 在虚位移 δv 上的虚功

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l F \delta v dx dt \quad (c)$$

以及作用于梁的两端的弯矩 M_{x0}, M_{xl} 和剪力 Q_{y0}, Q_{yl} 在边界上对应的虚位移上的虚功

$$\int_{t_1}^{t_2} [Q_{y0} \delta v(0) - Q_{yl} \delta v(l) - M_{x0} \delta v'(0) + M_{xl} \delta v'(l)] dt \quad (d)$$

将 (a)(b)(c)(d) 代入 (8.1) 式得

$$\begin{aligned} & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l [(EJ_x v'')'' + \rho A \ddot{v} - F] \delta v dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} [(EJ_x v'')' |_{x=l} - Q_{yl}] \delta v(l) dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} [(EJ_x v'')' |_{x=0} - Q_{y0}] \delta v(0) dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} [EJ_x v'' |_{x=l} - M_{xl}] \delta v'(l) dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} [EJ_x v'' |_{x=0} - M_{x0}] \delta v'(0) dt = 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

由于在边界上变分 $\delta v(0), \delta v'(0), \dots$ 等对于位移边界条件是等于零的, 而对于力的边界条件则是任意的, 因此要使 (8.4) 式成立, 必须满足 (8.6) 各式, 同时也就必须满足 (8.5) 式。

$$\int_0^l [(EJ_x v'')'' + \rho A \ddot{v} - F] \delta v dx = 0 \quad (8.5)$$

$$[(EJ_x v'')' |_{x=0} - Q_{y0}] \delta v(0) = 0 \quad (8.6a)$$

$$[EJ_x v'' |_{x=0} - M_{x0}] \delta v'(0) = 0 \quad (8.6b)$$

$$[(EJ_x v'')' |_{x=l} - Q_{yl}] \delta v(l) = 0 \quad (8.6c)$$

$$[EJ_x v'' |_{x=l} - M_{xl}] \delta v'(l) = 0 \quad (8.6d)$$

由于变分 δv 在域内是任意的, 因此从 (8.5) 就可以得到梁的横向振动微分方程 (7.22)

$$(EJ_x v'')'' + \rho A \ddot{v} = F$$

从 (8.6) 则可以得到两端的力的边界条件。假如梁的一端 (以

$x=0$ 处为例) 位移 v 和转角 v' 没有给定, 由于 $\delta v(0)$, $\delta v'(0)$ 是任意的, 因此可得如下的力的边界条件

$$(EJ_x v'')' \big|_{x=0} = Q_y,$$

$$EJ_x v'' \big|_{x=0} = M_x.$$

如果该端无外力作用, 则得自由端的端点条件

$$(EJ_x v'')' \big|_{x=0} = 0$$

$$v''(0) = 0$$

假如该端点的位移 v 和转角 v' 已被给定, 例如固定端, 则端点条件是

$$v(0) = 0$$

$$v'(0) = 0$$

这时 $\delta v(0)$, $\delta v'(0)$ 必然等于零, 于是 (8.6 a) (8.6 b) 自动等于零。对于简支端的情况, 除了 $v(0) = 0$, 因而 $\delta v(0)$ 必然等于零而外, $\delta v'(0)$ 是任意的, 因此还必须满足如下条件

$$EJ_x v'' \big|_{x=0} = M_x.$$

当端部无弯矩作用即得

$$v''(0) = 0$$

通过以上讨论可以看到, 根据变分方法不仅得到了和 (7.22) 同样的横向振动方程, 同时还能得到力的边界条件, 对于位移边界条件也能了解到应该如何正确地给定。此外变分方法将作为近似解法的基础, 瑞雷法、李兹法是从 (8.1) 式出发建立方程, 因为哈密尔顿原理是从运动学上许可的, 亦即满足几何约束的运动中确定真正的运动, 所以选取的函数只要求满足几何边界条件。伽辽金法则从经变分后的 (8.5) 式出发建立方程, (8.5) 式和边界条件 (8.6) 结合在一起等价于 (8.1) 式, 因此必须在满足 (8.6) 式的前提下, 才能用 (8.5) 式求得较好的近似解, 而要满足 (8.6) 式, 则选择函数不仅要满足几何边界条件, 而且要满足力的边界条件。

(2) 近似解法

在 7.7 节中已经介绍过瑞雷-李兹法, 这种近似解法也可以按

能量变分方法 (8.1) 式得到, 我们将在 8.4 节薄板振动中作重点介绍, 读者不难根据这一方法的思路得到和 7.7 节中相同的结果。现在重点介绍伽辽金法, 这种方法也是建立在能量变分方法的基础上, 不过不是直接利用变分式 (8.1), 而是利用经过变分以后的 (8.5) 式。

将梁的自由振动解 $v = Y(x)e^{i\omega t}$ 代入 (8.5) 式后得

$$\int_0^l [(EJ_s Y'')'' - \rho A p^2 Y] \delta Y dx = 0 \quad (8.7)$$

如果选取满足梁的几何和力的边界条件的函数族 $Y_j(x)$, 那么作为近似解可令

$$Y(x) = \sum_{j=1}^n A_j Y_j(x) \quad (8.8)$$

其中 A_j 为待定系数, 由于 $Y_j(x)$ 已经满足全部边界条件, 因此自然满足 (8.6) 式。现将 (8.8) 求变分

$$\delta Y = \sum_{j=1}^n Y_j \delta A_j \quad (8.9)$$

将 (8.8) 和 (8.9) 代入 (8.7) 得

$$\int_0^l \left[\left(EJ_s \sum_{i=1}^n A_i Y_i'' \right)'' - \rho A p^2 \sum_{i=1}^n A_i Y_i \right] \sum_{j=1}^n Y_j \delta A_j dx = 0$$

整理后得

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (d_{ij} - p^2 m_{ij}) A_i \delta A_j = 0 \quad (8.10)$$

$$\text{其中} \quad d_{ij} = \int_0^l (EJ_s Y_i'')'' Y_j dx \quad (8.11)$$

$$m_{ij} = \int_0^l \rho A Y_i Y_j dx \quad (8.12)$$

因为 A_i 相当于独立的广义座标, 它的变分 δA_i 是任意的, 所以由 (8.10) 式可得下列 A_i 的线性代数方程组

$$\sum_{i=1}^n (d_{ij} - \rho^2 m_{ij}) A_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (8.13)$$

于是伽辽金法也是将无限自由度系统离散化为有限自由度系统。根据第六章的理论, 不难求得 (8.13) 的固有频率及主振型。

例 8.1 试用伽辽金法计算等直悬臂梁的前两阶固有频率值。

解 取均布载荷和三角载荷作用下的静挠度曲线

$$Y_1 = 6l^2 x^2 - 4lx^3 + x^4$$

$$Y_2 = 20l^3 x^2 - 10l^2 x^3 + x^5$$

作为近似解的两个已知函数, 不难验证它们分别满足 $x=0$ 处固定端的几何边界条件和 $x=l$ 处自由端的力的边界条件, 令

$$Y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2$$

求出下列导数

$$Y_1'' = 12(l - x)^2, \quad Y_1'''' = 24$$

$$Y_2'' = 20(2l^3 - 3l^2 x + x^3), \quad Y_2'''' = 120x$$

根据 (8.11) 和 (8.12) 式计算

$$d_{11} = EJ \int_0^l 24 (6l^2 x^2 - 4lx^3 + x^4) dx = \frac{144l^5}{5} EJ$$

$$d_{12} = d_{21} = EJ \int_0^l 24 (20l^3 x^2 - 10l^2 x^3 + x^5) dx = 104l^6 EJ$$

$$d_{22} = EJ \int_0^l 120x (20l^3 x^2 - 10l^2 x^3 + x^5) dx = \frac{2640l^7}{7} EJ$$

$$m_{11} = \rho A \int_0^l (6l^2 x^2 - 4lx^3 + x^4)^2 dx = \frac{104}{45} l^5 \rho A$$

$$\begin{aligned} m_{12} = m_{21} &= \rho A \int_0^l (6l^2 x^2 - 4lx^3 + x^4) (20l^3 x^2 \\ &\quad - 10l^2 x^3 + x^5) dx \\ &= \frac{2644}{315} l^5 \rho A \end{aligned}$$

$$m_{22} = \rho A \int_0^l (20l^3 x^2 - 10l^2 x^3 + x^5)^2 dx = \frac{21128l^{11}}{693} \rho A$$

根据方程组 (8.13), 可得频率方程

$$(d_{11} - p^2 m_{11})(d_{22} - p^2 m_{22}) - (d_{12} - p^2 m_{12})^2 = 0$$

将上列数值代入, 解之得

$$p_1 = \frac{3.517}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}, \quad p_2 = \frac{22.77}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

与准确解比较 p_1 已十分接近, p_2 的误差也只有 3.3%

例 8.2 试用伽辽金法计算例 7.8 变截面悬臂梁的固有频率。

解 已知 $A(x) = A_0 \frac{x}{l}$, $J(x) = J_0 \frac{x^3}{l^3}$, 选择函数 $Y_1 = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$, $Y_2 = \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$, $Y_3 = \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \dots$ 不难验证能满足全部边界条件

$$(EJY'')|_{x=0} = 0, \quad (EJY'')'|_{x=0} = 0$$

$$Y(l) = 0, \quad Y'(l) = 0$$

现在令

$$Y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2$$

$$\text{计算} \quad Y_1'' = \frac{2}{l^2}, \quad (EJY_1'')'' = 12EJ_0 \frac{x}{l^5}$$

$$Y_2'' = \frac{2}{l^2} \left(\frac{3x}{l} - 2 \right), \quad (EJY_2'')'' = 24EJ_0 \left(3 \frac{x}{l} - 1 \right) \frac{x}{l^5}$$

于是可求得

$$d_{11} = \frac{EJ_0}{l^3}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{2EJ_0}{5l^3}$$

$$d_{22} = \frac{2EJ_0}{5l^3}$$

与李兹法比较, 由于选择了相同的函数, 所以得到 $d_{ij} = h_{ij}$, 同样 m_{ij} 亦相同, 因之当李兹法选择函数满足全部边界条件时将 与伽辽金法得到一致的结果。

(3) 梁的双向横振动

前面讨论了梁的横向振动的最简单情况, 在振动过程中梁

的轴线(即弹性线)始终在同一平面内,简化到轴线上的外载荷也在这同一平面内。实际上要发生这种简单形式的振动对于杆件的截面几何性质是有条件的,它要求杆件各截面的主惯性轴互相平行。对于这种杆件如果外载荷在某一主惯性轴的平面内,那么就产生该平面的横向振动,可以把该平面取作如图 8.1 的 xoy 面。如果外载荷不在一个主惯性轴的平面内,则可以把它们分解到两个主方向去,分别讨论两个平面内的振动,然后叠加起来。对于自由振动情况,那么在两个主方向将有互相独立的主振动。

当杆件截面主方向随 x 改变时,情况就比较复杂了。杆件的轴线在振动过程中不再保持在同一平面内,对于每一组主振动都将包含有两个互相垂直的平面内的分量,也就是说两个方向的横振动互相耦合起来了,通常称为梁的双向横振动。

如图 8-2 所示,仍以变形前的弹性线取作 x 轴,建立空间固定的直角坐标系 xyz , 梁上任意一点 a 的位置由其在变形前的坐标 x, y, z 来确定。这里弹性线上各点的位移将有沿 y 和 z 两个方向的分量

$$v = v(x, t)$$

$$w = w(x, t)$$

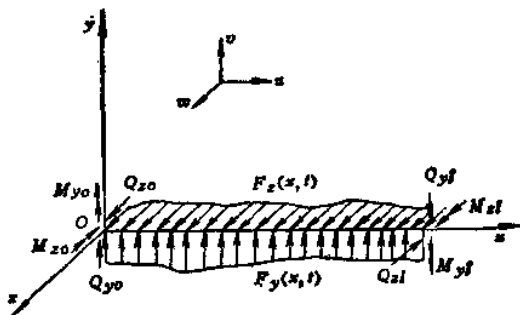


图 8-2

对于梁上任意一点 a 可以写出三个方向的位移分量分别为

$$u_a = -yv' - zw'$$

$$v_a = v$$

$$w_a = w$$

由此可得 a 点的轴向应变及应力为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -y v'' - z w'' \\ \sigma_x &= E \varepsilon_x \end{aligned}$$

于是可写出动能和势能的表达式如下

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_0^l [EJ_x (v'')^2 + 2EJ_{yz} v'' w'' \\ &\quad + EJ_y (w'')^2] dx \end{aligned} \quad (8.15)$$

其中 J_x , J_y 为截面对于 z 轴和 y 轴的惯性矩, J_{yz} 为相应的惯性积, 它们的计算公式分别为

$$\begin{aligned} J_x &= \iint_A y^2 dA \\ J_y &= \iint_A z^2 dA \\ J_{yz} &= \iint_A yz dA \end{aligned}$$

若作用在梁上的分布载荷为 $F_y(x, t)$ 、 $F_z(x, t)$, 作用于两端的弯矩和剪力为 Q_{y0} 、 Q_{y1} 、 M_{x0} 、 M_{x1} 、 Q_{y1} 、 \dots 等 (如图 8-2 所示), 则可得到主动力的虚功

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^l (F_y \delta v + F_z \delta w) dx \\ &\quad + Q_{y0} \delta v(0) - Q_{y1} \delta v(1) - M_{x0} \delta v'(0) + M_{x1} \delta v'(1) \\ &\quad + Q_{z0} \delta w(0) - Q_{z1} \delta w(1) - M_{y0} \delta w'(0) + M_{y1} \delta w'(1) \end{aligned} \quad (8.16)$$

将 (8.14) (8.15) (8.16) 代入变分式 (8.1) 即得

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^l [\rho A (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) - EJ_z (v'')^2 - 2EJ_{yz} v'' w'' \\ & \quad - EJ_y (w'')^2] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (F_y \delta v + F_z \delta w) dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} [Q_{y0} \delta v(0) - Q_{y1} \delta v(1) - M_{x0} \delta v'(0) + M_{x1} \delta v'(1) \\ & \quad + Q_{z0} \delta w(0) - Q_{z1} \delta w(1) - M_{y0} \delta w'(0) + M_{y1} \delta w'(1)] dt \\ & = 0 \end{aligned} \quad (8.17)$$

经运算后, 考虑到在边界上的变分 $\delta v(0)$ 、 $\delta v'(0)$ 、 \dots 等对于位移边界条件则等于零, 对于力的边界条件则是任意的, 因此要使 (8.17) 成立, 必须满足 (8.19) 各式, 同时由于域内 δv 、 δw 是任意的, 因此可得 (8.18) 式

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^l [(EJ_z v'' + EJ_{yz} w'')'' + \rho A \ddot{v} - F_y] \delta v dx = 0 \\ & \int_0^l [(EJ_{yz} v'' + EJ_y w'')'' + \rho A \ddot{w} - F_z] \delta w dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

$$\left. \begin{aligned} & [(EJ_z v'' + EJ_{yz} w'')' |_{x=0} - Q_{y0}] \delta v(0) = 0 \\ & [(EJ_{yz} v'' + EJ_y w'')' |_{x=0} - Q_{z0}] \delta w(0) = 0 \\ & [(EJ_z v'' + EJ_{yz} w'') |_{x=0} - M_{x0}] \delta v'(0) = 0 \\ & [(EJ_{yz} v'' + EJ_y w'') |_{x=0} - M_{y0}] \delta w'(0) = 0 \\ & [(EJ_z v'' + EJ_{yz} w'')' |_{x=l} - Q_{y1}] \delta v(1) = 0 \\ & [(EJ_{yz} v'' + EJ_y w'')' |_{x=l} - Q_{z1}] \delta w(1) = 0 \\ & [(EJ_z v'' + EJ_{yz} w'') |_{x=l} - M_{x1}] \delta v'(1) = 0 \\ & [(EJ_{yz} v'' + EJ_y w'') |_{x=l} - M_{y1}] \delta w'(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

由 (8.18) 可以得到梁的双向横振动微分方程

$$\left. \begin{aligned} & E(J_z v'' + J_{yz} w'')'' + \rho A \ddot{v} = F_y \\ & E(J_{yz} v'' + J_y w'')'' + \rho A \ddot{w} = F_z \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

这两个方程是互相耦合的。只有当杆件各截面的主惯性轴互相平行的情况下, 选取两个主惯性平面为 xoy 面及 xoz 面, 从而使各

截面的惯性积 $J_{yz} = 0$, 才能使 (8.20) 退化为不耦合的形式, 这样在两个平面内的振动将是各自独立的两组主振动, 于是问题又回到本节 (1) 讨论的问题。

由 (8.19) 可以得到相应于方程 (8.20) 的力的边界条件, 由于从 (8.19) 已经可以直观地看出这些条件的含意, 而有关讨论和本节 (1) 完全类似, 因此最后结果就留给读者作为练习。

(4) 有轴向力作用的杆件横向振动

在工程上经常遇到承受很大轴向力的杆件的横向振动问题, 这在 7.6 节中已讨论过了。这里简要介绍一下用变分方法将得到同样的结果, 并着重讨论承受巨大离心力的透平动叶片的横向振动。

首先讨论图 8-3 所示的两端承受轴向拉力 T 的直杆的简单情况。

对此情况, 为了应用变分式 (8.1), 除了考虑杆件的动能和弹性势能外, 还要考虑外加的轴向拉力在相

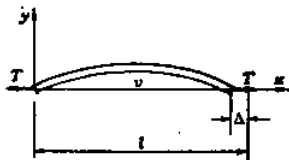


图 8-3

应位移上的功。如果杆件尚未产生横向位移时轴向力 T 的作用点之间距离为 l (杆长), 在产生横向位移 v 后, 作用点的间距缩短了, 变成 $(l - \Delta)$, 那么轴向力 T 在位移 Δ 上的功为

$$W = -T\Delta$$

由于弯曲变形时弹性线的长度保持不变, 因此不难得到

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l (v')^2 dx$$

于是可以计算轴向力 T 的虚功

$$\begin{aligned} \delta W &= -T \int_0^l v' \delta v' dx \\ &= T \int_0^l v'' \delta v dx - T v' \delta v \Big|_0^l \end{aligned}$$

把上式和动能势能的变分一起代入 (8.1) 式, 就可以得到有轴向拉力 T 作用的杆件横向振动方程

$$(EJ_z v'')'' - T v'' + \rho A \bar{v} = F \quad (8.21)$$

不难看出, 除自由端外, 边界条件仍与没有轴向力的相同。

透平动叶片随叶轮高速旋转时承受很大的离心力, 使其横向振动频率与叶轮静止时相比有明显的提高。工程上把随叶轮旋转时的固有频率称为“动频”, 而把当叶轮静止时的称为“静频”。叶片的动频计算是必须考虑沿杆件轴向作用力影响的一个重要实例。

当然这个问题比上述简单例子要复杂得多, 一方面由于叶片的形状复杂, 各截面主惯性轴不在一个平面内, 因此动能和势能的表达式必须根据双向横振动列出 (8.14) 和 (8.15), 另一方面这里的离心力是分布载荷并沿长度变化, 而不是作用于端点的集中力。

假如杆件 (即叶片) 固定在半径为 R 的叶轮上, 如图 8-4 所示。这里为了对 (8.14) 和 (8.15) 式不作变动起见, 把随叶轮一起旋转的直角坐标 xyz 的原点 O 仍放在杆件的根部 (固定端)。 y 轴与叶轮的转动轴 y_1 相平行, 而叶轮以角速度 Ω 绕 y_1 轴转动。

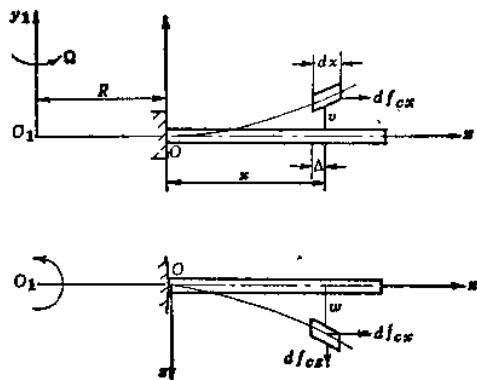


图 8-4

为了计算离心力的虚功, 首先要写出图 8-4 所示任一微段 dx 上的离心力。由于离心力的作用线始终通过转动轴, 因此当

轴线上各点产生沿 y, z 方向的位移 v, w 时, 微段上的离心力将有沿 x 轴和 z 轴两个方向的分量

$$df_{ex} = \rho \Omega^2 [(R+x) - \Delta] A dx$$

$$df_{ez} = \rho \Omega^2 w A dx$$

式中 Δ 为由横向位移引起的离心力作用点沿 x 方向缩短的距离。由于横向振动时弹性线的长度保持不变, 因此不难写出

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^x [(\dot{v}')^2 + (\dot{w}')^2] dx \quad (e)$$

现在可以计算离心力在横向振动引起的位移上所做功

$$W = \rho \Omega^2 \int_0^l \left[-(R+x) \Delta + \frac{\Delta^2}{2} + \frac{w^2}{2} \right] A dx$$

略去高阶小量, 并把 (e) 式的 Δ 代入, 上式即可改写成

$$W = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 \int_0^l \left\{ -(R+x) \int_0^x [(\dot{v}')^2 + (\dot{w}')^2] dx + w^2 \right\} A dx \quad (f)$$

现在利用下面变换两重积分次序的公式 (参看图 8-5)

$$\begin{aligned} & \int_0^l F(\xi) \int_0^\xi G(\eta) d\eta d\xi \\ &= \int_0^l G(\eta) \int_\eta^l F(\xi) d\xi d\eta \end{aligned}$$

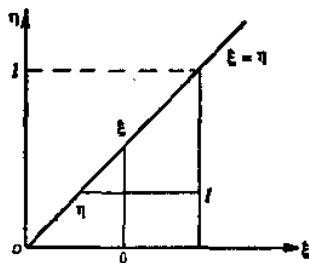


图 8-5

将 (f) 中有关两重积分的项改写为

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho \Omega^2}{2} \int_0^l (R+x) \int_0^x [(\dot{v}')^2 + (\dot{w}')^2] dx A dx \\ &= -\frac{\rho \Omega^2}{2} \int_0^l [(\dot{v}')^2 + (\dot{w}')^2] \int_x^l A(R+x) dx dx \\ &= -\frac{\rho \Omega^2}{2} \int_0^l v [(\dot{v}')^2 + (\dot{w}')^2] dx \quad (g) \end{aligned}$$

其中

$$v = \int_x^l A(R+x) dx \quad (8.21)$$

把 (g) 式代入 (f) 式, 可得离心力的功的表达式为

$$W = -\frac{1}{2} \rho \Omega^2 \int_0^l \{ v [(v')^2 + (w')^2] - A w^2 \} dx \quad (8.22)$$

将上式变分后得离心力的虚功, 和动能及势能的表达式 (8.14), (8.15) 一起代入变分式 (8.1), 经运算后就得到动叶片双向横振动的方程

$$\left. \begin{aligned} E (J_z v'' + J_{yz} w'')'' - \rho \Omega^2 (v v')' + \rho A \ddot{v} &= 0 \\ E (J_{yz} v'' + J_y w'')'' - \rho \Omega^2 [(v w')' + A w] + \rho A \ddot{w} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

对于根部固定顶端自由的情况, 两端的边界条件与不考虑离心力的情况相同, 即

$$\left. \begin{aligned} v(0) = w(0) &= 0 \\ v'(0) = w'(0) &= 0 \\ (J_z v'' + J_{yz} w'')|_{x=l} &= (J_{yz} v'' + J_y w'')|_{x=l} = 0 \\ (J_z v'' + J_{yz} w'')'|_{x=l} &= (J_{yz} v'' + J_y w'')'|_{x=l} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

列出了上面的方程和边界条件后, 就可按照与不考虑离心力的情况相同的方法去求解。本书第十章中将作简单介绍。

对于叶片振动而言, 在实际计算中除了考虑双向弯曲的耦合外, 还要考虑到弯曲与扭转之间的耦合等因素^①, 在此就不加详述了。

8.3 圆环振动

(1) 圆环变形分析

在旋转机械中经常可能遇到各种环形部件的振动问题, 因此本节将对环形部件的简化模型——圆环的几种典型振动型式进行讨论。在着手讨论振动问题之前, 先对圆环的变形状态进行简单的分析。

① 可参阅 J. Montoya, "Coupled Bending and Torsional Vibration in a Twisted Rotating Blade", Brown Boveri Review, Vol. 53 No. 3 1966。

清华大学工程力学系固体力学教研组编组, "汽轮机扭曲动叶片的新近分析" 清华大学学报, 1978年第一期。

所谓圆环，指的是如图 8-6 所示的旋转对称体，它的（子午面）截面形状不限，但显然是等截面的，而且假设它的截面尺寸比其平均半径 r 要小得多。

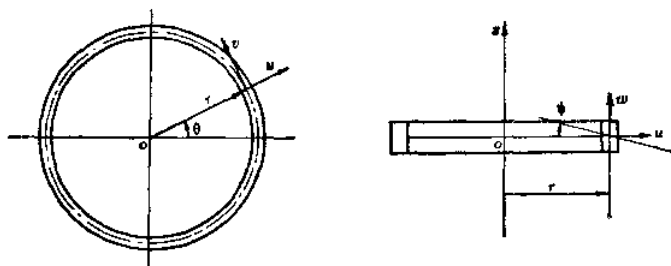


图 8-6

以圆环变形前各截面重心所在平面和对称轴的交点为坐标原点，以对称轴为 Z 轴，建立空间固定的柱坐标系 $R\theta Z$ 。环上任意点 a 的位置可以用它在变形前的坐标 R ， θ ， Z 来确定，而环的轴线（即截面重心连线）上各点的位置用坐标 θ 就可以确定。

根据平截面假设，圆环的截面在变形过程中仍保持平面，并且始终与当时的轴线相垂直，同时假设应力 σ_r ， σ_z ，以及 τ_{rz} 与 σ_θ 相比可以忽略。因此圆环的变形状态可以由轴线上各点沿当地的 R ， θ ， Z 三个方向的位移分量 u ， v ， w 以及截面绕轴线的转角 ψ 所完全确定， u ， v ， w 和 ψ 是 θ 和 t 的函数，它们的正方向如图 8-6 所示。

根据上述假设不难看出，当轴线上各点的位移及截面绕轴线的转角分别为 u ， v ， w ， ψ 时，如果略去高阶小量，环上任意一点 a 的位移将为

$$\left. \begin{aligned} u_a &= u + \psi Z \\ v_a &= v \frac{R}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} (r - R) - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} Z \\ w_a &= w + \psi (r - R) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

由此可得截面各点的轴向应变和应力为

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\theta} &= \frac{u_s}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_s}{\partial \theta} \\
 &= \frac{1}{R} (u + \psi Z) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{rR} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} (r - R) - \frac{1}{rR} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} Z \ominus \\
 &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left(\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) (r - R) \\
 &\quad + \left(\frac{\psi}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) Z + \cdots \quad (\text{高阶小量}) \quad (b)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta} = E \epsilon_{\theta} \quad (c)$$

于是可以求得圆环的与截面各点轴向应变有关的势能为

$$\begin{aligned}
 U_s &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\int_A \epsilon_{\theta} \sigma_{\theta} R dA d\theta \right] \\
 &= \frac{E}{2} r \int_0^{2\pi} \left[A \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 + J_z \left(\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)^2 \right. \\
 &\quad + J_r \left(\frac{\psi}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2J_z \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left(\frac{u}{r^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) - 2J_{rz} \left(\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\psi}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
 &\quad \left. + 2J_{rz} \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\psi}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] d\theta \quad (d)
 \end{aligned}$$

此式已经略去了高阶小量，式中 A 是截面面积， J_z 、 J_r 分别为截面对于通过形心面分别平行于 Z 轴和 R 轴的轴线的惯性矩， J_{rz} 则是相应的惯性积。

除此之外，根据 (a) 式还可以求出环上各点的剪应变和剪应力，它们分别为

⊖ 利用 $\frac{1}{R}$ 按台劳级数展开，即 $\frac{1}{R} = \frac{1}{r + (R - r)} = \frac{1}{r} + \frac{r - R}{r^2} + \cdots$

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_{r,\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial R} - \frac{v_\theta}{R} \\
 &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) Z + \dots \text{ (高阶小量)} \\
 \gamma_{\theta,z} &= \frac{1}{R} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial Z} \\
 &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) (r - R) + \dots \text{ (高阶小量)} \\
 \tau_{r,\theta} &= G \gamma_{r,\theta} \\
 \tau_{\theta,z} &= G \gamma_{\theta,z}
 \end{aligned} \right\} (e)$$

由于这是根据平截面假设得到的，因此只能适用于圆截面的圆环。对于非圆截面的情况将会产生截面翘曲，而且翘曲规律和相同截面直杆的扭转翘曲并不相同，因此，对于 $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \neq 0$ 的情况通常只给出了圆截面的结果，下面的讨论也只限于这个范围。

对于圆截面圆环，根据(e)式可以求出与剪应变有关的势能

$$\begin{aligned}
 U_\gamma &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_A (\gamma_{r,\theta} \tau_{r,\theta} + \gamma_{\theta,z} \tau_{\theta,z}) R dA d\theta \right. \\
 &= \frac{G}{2} r \int_0^{2\pi} J_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \quad (f)
 \end{aligned}$$

此式也已经略去了高阶小量，式中 J_p 是圆截面的极惯性矩。

由前面的(d)式可以看到，当惯性积 J_{rz} 不等于零时，与 u , v , w , ψ 有关的势能是互相耦合的，相应的振动型式也将比较复杂。而且只有对于 $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$ 的情况下保留 J_{rz} 才有意义，否则由于只能讨论圆截面， J_{rz} 一定为零。因此，下面仅限于讨论 $J_{rz} = 0$ 的比较简单情况。

现在，对于所讨论的范围，综合(d)，(f)两式，可以得到圆环的势能表达式为

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \left[EA \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 + EJ_z \left(\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)^2 \right. \\
 & + EJ_r \left(\frac{\psi}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2EJ_z \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left(\frac{u}{r^2} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + GJ_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta \quad (8.25)
 \end{aligned}$$

此外, 根据 (a) 式可以得到动能的表达式为

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\int_A \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) R dA d\theta \right. \\
 = & \frac{r}{2} \rho \int_0^{2\pi} \left[A (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + J_p \dot{\psi}^2 - 2J_z \frac{\dot{w}}{r} \dot{\psi} \right] d\theta \quad (8.26)
 \end{aligned}$$

其中也已略去了高阶小量项。

下面我们将着手分别讨论圆环振动的几种典型型式, 并且, 为简单起见, 仅限于讨论固有频率与主振型。

(2) 圆环在环面内的振动

由圆环的势能和动能表达式 (8.25), (8.26) 可以看到, 轴线的面内位移分量 u , v 和面外分量 w , ψ 在两式中都是互不耦合的, 所以可以把位移分成两组互相独立地来考虑。这里先讨论面内振动的情况。

把 (8.25), (8.26) 的有关部分代入 (8.1) 式, 同时考虑到没有外载作用, 可以得到

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \rho A (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) - E \left[A \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right. \right. \\
 + J_z \left(\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2J_z \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left(\frac{u}{r^2} \right. \\
 \left. \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \right] \right\} d\theta dt = 0 \quad (8.27)
 \end{aligned}$$

经过变分运算, 考虑到 δu , δv 是任意变分, 就可得到振动微分方程:

$$\left. \begin{aligned} EJ_z \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ + EA \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - EJ_z \frac{1}{r^3} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ + \rho A \ddot{u} = 0 \\ EA \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - EJ_z \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) - \rho A \ddot{v} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

第一个方程的 $EJ_z \frac{1}{r^2} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$ 相对于 $EA \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$

可以忽略不计 (因为 $J_z \ll Ar^2$), 而在第二个方程中加进一项高

阶小项 $EJ_z \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$, 显然这项比 $EA \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$

$\left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$ 小得多, 这样处理的结果可以把方程化为具有比

较直观解释的形式:

$$\left. \begin{aligned} EJ_z \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ + EA \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \rho A \ddot{u} = 0 \\ EA \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \times - EJ_z \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \rho A \ddot{v} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

不难看出, $EA \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$ 就是截面上的轴力, 而 $EJ_z \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right.$

$\left. - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$ 是截面上的弯矩。

由于根据圆环的基本假设其截面尺寸比 r 小得多, 因此 J_r 和 Ar^2 相比总是小得多; 对于轴线长度产生变化的伸缩振动而言, 当其周向波长与 r 同量级时 (即波数 n 不太大时) 面内弯曲刚度 EJ_r 的影响总是可以忽略。这时方程 (8.28) 可以进一步化简, 得到通常所说的圆环伸缩振动的微分方程:

$$\left. \begin{aligned} E \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \rho \ddot{u} &= 0 \\ E \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \rho \ddot{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

假设圆环作波数为 n 的伸缩振动时位移函数为

$$\left. \begin{aligned} u &= (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) e^{i p_n t} \\ v &= n (-A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) e^{i p_n t} \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

代入 (8.29) 的两式都能得到

$$p_n^2 = \frac{E}{\rho r^2} (1 + n^2) \quad (\text{h})$$

因此圆环伸缩振动的各阶固有频率为

$$f_n = \frac{p_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{E}{\rho} (1 + n^2)} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.31)$$

当波数 $n = 0$ 时, 圆环切向位移为零, 因此圆环作均匀的径向振动, 相应的频率就是圆环伸缩振动的基频 f_0 ,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{i})$$

可以指出, 这里对于伸缩振动的讨论与结果适用于任何截面形状的圆环, 包括 $J_r \neq 0$ 的情况。

圆环的面内振动除去伸缩振动之外还有一类面内弯曲振动。为了求解这种振动问题, 显然不能再在方程 (8.28) 中略去与 EJ_r 有关的项, 不能把方程降阶。由于 $J_r \ll Ar^2$, 又要使与 EJ_r 有关的项和与 EA 有关的项同量级, 那么只有 $\left| \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right| \ll \left| \frac{u}{r} \right|$, $\left| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|$ 才行。于是

$$u = -\frac{\partial v}{\partial \theta} + \dots \quad (\text{高阶小量}) \quad (j)$$

在得到了条件 (j) 之后, 我们不难用变分法来求解圆环的面内弯曲振动问题: 首先根据 (j) 式假设位移函数, 然后由 (8.1) 式对变分问题进行求解。

假设波数为 n 的面内弯曲振动的位移函数为

$$\left. \begin{aligned} v &= (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) e^{i p_n t} \\ u &= n (-A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) e^{i p_n t} \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

代入 (8.27) 式, 经过变分运算, 并考虑到

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta \\ \int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos n\theta d\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

最终可以求得

$$p_n^2 = \frac{EJ_z}{r^4 \rho A} \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{n^2 + 1} \quad (l)$$

因此圆环面内弯曲振动的固有频率为

$$f_n = \frac{1}{2\pi r^2} \sqrt{\frac{EJ_z}{\rho A} \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{n^2 + 1}} \quad n = 2, 3, \dots \quad (8.33)$$

当 $n = 0$ 时, $f_0 = 0$, $u = 0$, $v = B_0$, 显然这不是振动, 而只是圆环的刚体转动。当 $n = 1$ 时, f_1 也等于零, 这时

$$\left. \begin{aligned} u &= -A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta \\ v &= A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

不难验证, 这实际上是圆环作刚体移动。因此圆环的面内弯曲振动从 $n = 2$ 开始。

在此还值得指出的是, 对于面内弯曲振动而言必定满足条件 (j), 但这并不意味着振动时截面上的轴力为零, 实际上与截面上的轴力所对应的应力和与截面上的弯矩所对应的应力是同一量级的。截面上的轴力通过把解回代到方程 (8.28) 很容易求得。此外, 把 (8.31) 式和 (8.33) 式比较可知, 当波数 n 不太大时,

面内弯曲振动的频率比伸缩振动的频率要低得多。

(3) 圆环的扭转振动和面外弯曲振动

前面讨论了圆环的面内振动, 现在讨论与另外两个位移分量 w 和 ψ 有关的振动。把 (8.25), (8.26) 的有关部分代入 (8.1) 式, 同时考虑到没有外载作用, 可以得到

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \rho \left[A \dot{w}^2 + J_z \dot{\psi}^2 - 2J_z \frac{\dot{w}}{r} \dot{\psi} \right] - \left[EJ_r \left(\frac{\psi}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 + GJ_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} d\theta dt = 0 \quad (8.34)$$

经过变分运算, 考虑到 δw , $\delta \psi$ 是任意变分, 就可得到振动微分方程

$$\left. \begin{aligned} & EJ_r \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\psi}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + GJ_p \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \Big) - \rho A \ddot{w} + \rho J_z \frac{\ddot{\psi}}{r} = 0 \\ & GJ_p \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ & - EJ_r \frac{1}{r} \left(\frac{\psi}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \rho J_r \ddot{\psi} + \rho J_z \frac{\ddot{w}}{r} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.35)$$

由此方程可见, 圆环的扭转振动和面外弯曲振动是互相耦合的。

假设波数为 n 的扭转与面外弯曲耦合振动的位移函数为

$$\left. \begin{aligned} \psi &= (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) e^{i p_n t} \\ w &= (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) e^{i p_n t} \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

代入 (8.35) 式, 就可以得到频率方程式, 如果考虑到 $J_z \ll Ar^4$ 而略去了次要项 (相当于方程中略去与 J_z 有关的两项), 可以得到

$$\begin{aligned} p_n^4 \rho^2 A J_p - p_n^2 \rho A \left(G J_p \frac{n^2}{r^2} + E J_r \frac{1}{r^2} \right) \\ + G J_p E J_r \frac{n^2}{r^6} (n^2 - 1)^2 = 0 \end{aligned} \quad (n)$$

由此可以求得

$$\begin{aligned} p_n^2 = \frac{1}{\rho J_p r^2} \cdot \frac{1}{2} \left[E J_r + G J_p n^2 \right. \\ \left. \pm \sqrt{(E J_r + G J_p n^2)^2 - 4 G J_p E J_r \frac{J_p}{A r^2} n^2 (n^2 - 1)^2} \right] \quad (o) \end{aligned}$$

由于式中根号内的 $4 G J_p E J_r \frac{J_p}{A r^2} n^2 (n^2 - 1)^2 \ll (E J_r + G J_p n^2)^2$, 因此取正号的 p_n 比取负号的 p_n 大得多。从振型上又可以分成两类。其中频率较高的一类即通常所说的扭转振动,

$$p_n^2 = \frac{1}{\rho J_p r^2} (E J_r + G J_p n^2) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (p)$$

相应的各阶固有频率为

$$f_n = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{1}{\rho J_p} (E J_r + G J_p n^2)} \quad (8.37)$$

当 $n = 0$ 时可得扭转振动的基频为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{E J_r}{\rho J_p}} \quad (q)$$

由 (8.35) 和 (8.36) 可知, 相应的扭转振动位移函数为

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= B_0 e^{i p_0 t} \\ w_0 &= \frac{J_r}{A r} \psi_0 \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

可以指出, 对于这种振动尽管称为扭转振动, 但却没有截面上的剪应力而只有轴向正应力, 因此上述结果对于非圆截面 (只要 R 轴是截面的主惯性轴) 也都适用。把 (q) 式和 (i) 式比较可见, 圆环扭转振动的基频与伸缩振动的基频相差一个比例系数 $\sqrt{\frac{J_r}{J_p}}$ 。由于 J_r 总是小于 J_p , 因此扭转振动的基频低于伸缩振

动的基频。在此还应指出, 对于 n 不等于零的情况, 由于前面提到过的原因, (8.37) 式只能适用于圆截面。

由 (○) 式还可得到频率较低的一类面外弯曲和扭转耦合振动, 注意到只适用于圆截面, 可得

$$\rho_n^2 = \frac{EJ_r}{\rho A r^4} \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{n^2 + (EJ_r / GJ_\rho)} = \frac{EJ_r}{\rho A r^4} \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{n^2 + 1 + \mu} \quad (s)$$

相应的各阶固有频率为

$$f_n = \frac{1}{2\pi r^2} \sqrt{\frac{EJ_r}{\rho A} \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{n^2 + 1 + \mu}} \quad (8.38)$$

把它和 (8.33) 式比较可见, 对于圆截面的圆环而言, 面内弯曲振动的频率和面外弯曲振动的频率是相当接近的。

(4) 与圆环有关的其他振动问题

到此为止我们只考虑了整圆环的情况, 其实有些讨论不难推广到部分圆环。比如对于圆环的面内振动已经得到了振动微分方程 (8.28), 由于是整圆环, 所以前面没有给出边界条件, 只要求位移函数单值连续即可。对于图 8-7 所示的部分圆环, 只需在方程 (8.28) 之外加上 $\theta = \theta_0$ 和 $\theta = \theta_1$ 两端的边界条件。

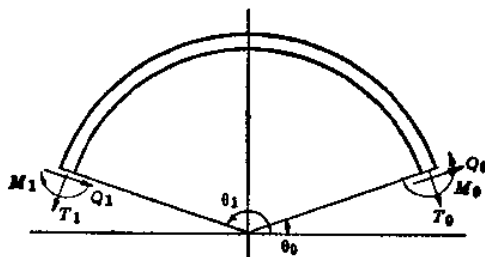


图 8-7

不难写出各种端点情况的边界条件分别为: 固定端

$$u|_{\theta=\theta_i} = 0$$

$$v|_{\theta=\theta_i} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}|_{\theta=\theta_i} = 0$$

固定铰支端

$$u|_{\theta=\theta_i} = 0$$

$$v|_{\theta=\theta_i} = 0$$

$$EJ_z \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\theta_i} = M_i$$

滑动铰支端

$$u|_{\theta=\theta_i} = 0$$

$$EA \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_i} = T_i$$

$$EJ_z \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\theta_i} = M_i$$

自由端

$$EJ_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\theta_i} = Q_i$$

$$EA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \Big|_{\theta=\theta_i} = T_i$$

$$EJ_z \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\theta_i} = M_i \quad (i = 0, 1) \quad (t)$$

其实这些边界条件可以和上节对梁的方法一样, 从类似 (8.27) 式的对于部分圆环的变分式变分得出, 有兴趣者可以作为练习加以验证。

在列出了方程和边界条件之后, 部分圆环的问题也就可以用与梁振动问题类似的解法去求解, 在此就不作详述了。

前面在整圆环 (无约束) 的振动问题的求解过程中总是把不同波数的振动分别加以考虑, 那里不同波数的三角函数恰好对应于不同的主振型。应该指出, 这种情况并不

是普遍的。如图 8-8 所示的支于两片板簧上的整圆环, 假设板簧的纵向刚度为 K_1 , 横向刚度为 K_2 。它与圆环之间的连接是铰支, 为简单起见铰支点恰好在圆环的一条直径上 ($\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$), 而且支在圆环截面的重心。当考虑该系统的面内振动问题时, 与

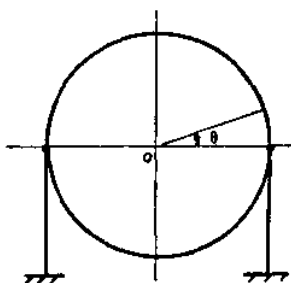


图 8-8

前面 (8.27) 式类似的变分式将写成

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{r}{2} \right\}_0^{2\pi} \left[\rho A (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) - EA \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ \left. - EJ_z \left(\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)^2 + 2EJ_z \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left(\frac{u}{r^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \right] d\theta - K_1 [v^2(0) + v^2(\pi)] \\ - K_2 [u^2(0) + u^2(\pi)] \Big\} dt \quad (u)$$

该问题在求解时假设的位移函数必须包含各个不同的波数，

即

$$\left. \begin{aligned} u &= \left[\sum_{m=0,1,2,\dots} (A_m^{(n)} \sin m\theta + B_m^{(n)} \cos m\theta) \right] e^{i p_n t} \\ v &= \left[\sum_{m=0,1,2,\dots} (C_m^{(n)} \cos m\theta + D_m^{(n)} \sin m\theta) \right] e^{i p_n t} \end{aligned} \right\} \quad (v)$$

如果限于考虑频率较低的面内弯曲振动，此式还可改写为

$$\left. \begin{aligned} v &= \left[\sum_{m=0,1,2,\dots} (C_m^{(n)} \sin m\theta + D_m^{(n)} \cos m\theta) \right] e^{i p_n t} \\ u &= \left[\sum_{m=1,2,\dots} m (-C_m^{(n)} \cos m\theta + D_m^{(n)} \sin m\theta) \right] e^{i p_n t} \end{aligned} \right\} \quad (w)$$

值得指出的是，尽管 $m=0,1$ 所对应的是自由圆环的刚体运动，但在这里通过板簧也耦合到各阶主振型中去了，因此不能随意略去。当通过假设位移函数用变分法求解时，一定要特别注意位移函数的完备性，即使求近似解也应注意不要丢失主要项，否则将得不到满意的结果（上述问题的具体求解就不在这里罗列了，有兴趣者可以作为练习自行求解）。

8.4 薄板的横向振动

(1) 基本方程式

在工程结构中板是经常遇到的一种基本构件，因此板的静力和动力问题很早就为人们所研究。

所谓薄板，指的是如图 8-9 所示的为上下表面和四周的侧面所围的变形体，在上下表面之间存在一个对称平面叫做板的中面。上下表面之间与中面垂直方向的距离叫做板的厚度，记作 h 。中面的形状可以不限，但是两个方向的尺寸都比 h 大得多。 h 不变的是等厚度薄板， h 沿中面缓慢变化的是变厚度薄板。此外还假设板的侧面和中面相垂直。

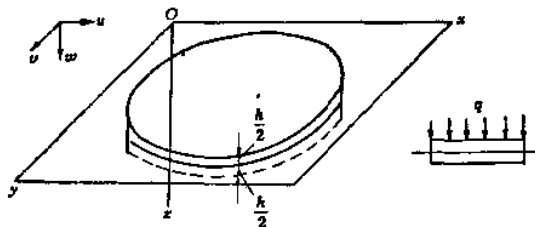


图 8-9

以板的变形前的中面为 xoy 平面，建立空间固定的直角坐标系 xyz 。板上任意点 σ 的位置可以用它在变形前的座标 x, y, z 来确定。

根据直法线假设，在变形前垂直于中面的法线在变形过程中始终垂直于当时的中面（相当于略去应变分量 γ_{xz} 和 γ_{yz} ）；同时假设 σ_z 与 σ_x, σ_y 相比可以忽略。因此薄板的变形状态可以由中面各点的位移所完全确定。对于小挠度的情况，即横向位移 w 比厚度 h 小得多的情况，板的弯曲即横向变形和面内变形是互相独立的，因此它的弯曲变形可以由中面各点的横向位移 w 所完全决定。

根据上述假设不难看出，当中面各点横向位移为 $w(x, y, t)$ 时，板上任意一点 $\sigma(x, y, z)$ 沿 x, y, z 三个方向的位移分量 u, v, w 分别为

$$\left. \begin{aligned} u_{\sigma} &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v_{\sigma} &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w_{\sigma} &= w + \cdots (\text{高阶小量}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由此根据应变与位移的几何关系可以求出各点的三个主要应变分量为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

虽然应变分量 ε_z 实际上也和 ε_x , ε_y 为同量级, 但是由于 $\sigma_z \ll \sigma_x$, σ_y , 在后面计算势能时 $\sigma_z \varepsilon_z$ 将被略去, 因此 ε_z 的公式在此 也就不必列出了。

由于 $\sigma_z \ll \sigma_x, \sigma_y$, 根据广义虎克定律就可以得到三个 主要应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

根据 (b), (c) 可以求得板的势能表达式为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint_D \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dz dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \right. \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[D \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} \right] dx dy \end{aligned} \quad (8.39)$$

其中 D 为板的弯曲刚度, ∇^2 为拉普拉斯算子,

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

根据 (a) 式可以计算板的动能, 如果略去与水平速度有关的部分等高阶小项, 可以得到板的动能表达式为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \iiint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \dot{w}^2 dz dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint \rho h \dot{w}^2 dx dy \end{aligned} \quad (8.40)$$

此外, 还可计算外力在相应虚位移上的虚功, 包括表面荷载的虚功和边界作用力的虚功。对于表面荷载 $q(x, y, t)$, 可以得到虚功的表达式为

$$\delta W_1 = \iint q \delta w dx dy \quad (8.41)$$

假如板的边界用中面的边界曲线表示的方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

其中 s 为曲线的弧长, 边界曲线的单位切线矢量和单位外法线矢量分别为 \vec{s} 和 \vec{n} , 如图 8-10 所示。在边界各点如果作用有弯矩 M_n , 横向力 Q_n 和

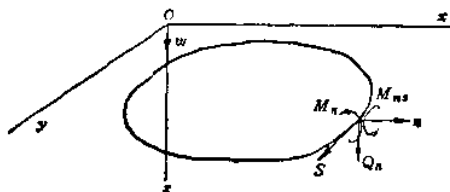


图 8-10

扭矩 M_{ns} , 那么不难得到边界力的虚功为

$$\delta W_2 = - \oint \left(M_n \delta \frac{\partial w}{\partial n} - Q_n \delta w - M_{ns} \delta \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds \quad (8.42)$$

其中 M_n , M_{ns} , Q_n 的正方向均如图8-10所示。

把上述对于 U , T , δW_1 和 δW_2 的表达式一起代入变分式(8.1)即可得到

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \iint \rho h \dot{w}^2 dx dy - \frac{1}{2} \iint \left[D \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\} dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[\iint q \delta w dx dy - \oint \left(M_n \delta \frac{\partial w}{\partial n} - Q_n \delta w - M_{ns} \delta \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds \right] dt \\ = 0 \end{aligned} \quad (f)$$

此式不仅适用于等厚度板, 而且适用于变厚度板。下面为简单起见, 仅限于对等厚情况进行推导。

将(f)式经过变分运算, 并利用将某些面积分化为线积分的格林公式 \ominus , 上式可以化为

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint \left[D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \ddot{w} - q \right] \delta w dx dy \right. \\ + \oint \left(D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin^2 \theta \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta \right] + M_n \right) \delta \frac{\partial w}{\partial n} ds \\ - \oint \left(D \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \sin \theta \right] \right. \\ \left. + D \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \theta \cos \theta - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \theta \cos \theta \right] \right. \\ \left. + (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right] + Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \Big) \delta w ds \Big\} dt \\ = 0 \end{aligned} \quad (g)$$

式中的 θ 是边界线的外法线和 x 轴之间的夹角。考虑到 δw 是任

$$\ominus \iint \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \oint (X dx + Y dy)$$

意变分, 而且在边界上 $\delta \frac{\partial w}{\partial n}$ 和 δw 是互相独立的, 因此由 (8) 式直接可以得出振动微分方程和动力边界条件, 即

$$D \left(-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \ddot{w} = q \quad (8.43)$$

和下列动力边界条件:

对于边界上未给定 $\frac{\partial w}{\partial n}$ 的点 (如简支边或自由边)

$$\begin{aligned} & -D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos^2 \theta + \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin^2 \theta \right. \\ & \quad \left. + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta \right] \\ & = M_n \end{aligned} \quad (8.44)$$

对于边界上未给定 w 的点 (如自由边)

$$\begin{aligned} & -D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \theta \right] \\ & - D \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \theta \cos \theta - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \theta \cos \theta \right. \\ & \quad \left. + (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right] \\ & = Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \end{aligned} \quad (8.45)$$

需要指出的是, 最后这个条件对于给定边界扭矩 M_{ns} 不等于零的情况要加以注意。当不给定 w 的边界有角点时, 对于角点应有专门的给定力的条件, 这里就不列出了 (在变分过程中注意到这种情况自然就能得出)。

显然相应的位移边界条件则是给定 $\frac{\partial w}{\partial n}$ (如固定边)

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (8.46)$$

或者给定 w (如简支边或固定边)

$$w = 0 \quad (8.47)$$

总之, 不论什么边界, 在每个边界点可以给定两个边界条件。在给定力的边界上弯矩、扭矩与横向力三个量也只能组合成两个条件, 这是由板的基本假设所决定的。同时边界条件的数目刚好和方程的阶次相适应。

(2) 矩形板振动

作为简单的例子, 讨论如图 8-11 所示边长为 a 、 b 的等厚度矩形薄板的自由振动。

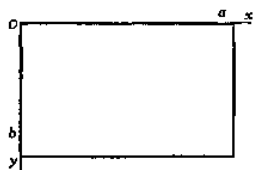


图 8-11

这时微分方程 (8.43) 可改写为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (8.48)$$

边界条件 (8.44)~(8.47) 根据图示的边界线外法线方向将 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 代入, 并考虑到边界无外力作用, 可以得到:

固定边

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{对于边界 } x = 0 \text{ 和 } x = a)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (\text{对于边界 } y = 0 \text{ 和 } y = b)$$

简支边

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{对于边界 } x = 0 \text{ 和 } x = a)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{对于边界 } y = 0 \text{ 和 } y = b)$$

自由边

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

(对于边界 $x = 0$ 和 $x = a$)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

(对于边界 $y = 0$ 和 $y = b$)

(8.49)

对于具体问题而言它的四边可以由上述三种情况任意组合, 例如四边简支, 两边简支两边固定, 或者一边固定三边自由……等, 最一般情况还包括同一边上部分为简支, 部分为固定或自由……等。

对于上述问题可以假设其解 (即位移函数) 为

$$w = Z(x, y) e^{ip^2 t} \quad (8.50)$$

其中 Z 只是位置 x, y 的函数, 称为振型函数, p 为固有频率。

将 (8.50) 代入方程 (8.48) 可以得到对于函数 Z 的方程:

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} - k^4 Z = 0 \quad (8.51)$$

$$\text{其中} \quad k^4 = \frac{\rho h}{D} p^2 \quad (8.52)$$

同时将 (8.50) 代入 (8.49), 可以得到相应的边界条件, 其形式上和 (8.49) 完全相同, 只要把其中的 w 全部改为 Z 就是, 因此这里就不再罗列了。显然对于不同的边界条件, 板也会有不同的振型函数及与之相应的固有频率。下面讨论几种简单边界条件下矩形板的自由振动解。

1. 四边简支矩形板

对于四边均为简支边的矩形板的横向振动, 可令振型函数为

$$Z_{m,n} = A_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (h)$$

可以验证, 当 m, n 为 $1, 2, \dots$ 等整数时, 边界条件总是能被满足。将 (h) 式代入方程 (8.51) 可得

$$\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - k^4 \right] A_{m,n} = 0 \quad (i)$$

显然, 如果方程 (i) 也能满足, 那么所设的 Z 才确实是对应于某一固有频率的振型函数。因此由 (i) 式可得如下的频率方程

$$k^4 = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \quad (j)$$

根据 (j) 和 (8.52) 式可以得到固有频率为

$$p_{m,n} = \frac{\pi^2}{a^2} \left(m^2 + \frac{a^2 n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (8.53)$$

对于正方板而言, 只要将 $a = b$ 代入 (8.53) 式就可得到它的固有频率。值得指出的是, 对于方板而言, 每个固有频率都是重根 ($m = n$ 的情况除外), 即 $p_{m,n} = p_{n,m}$ 。由于是重根, 就给方板的振动带来一些特殊的现象: 对于四边简支的矩形板, 一般说来共振时的节线总是与四边平行的 (不是平行于某一对边就是平行于另一对边), 而且对应于一个固有频率就有固定的节线位置; 而对于方板而言, 对于同一固有频率却可能出现不同的节线位置。实际上, 它的节线方程是

$$A_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} + A_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} = 0 \quad (k)$$

应该指出, 这一现象对于其他出现重根的场所也是普遍存在的。

总的说来, 对于四边简支矩形板的自由振动解还是相当简单的, 但是这在矩形板的振动问题中是唯一的可用简单公式来表达的精确解。

2. 两对边简支两对边任意的矩形板

若矩形板在 $x = 0$ 和 $x = a$ 处为简支, 则可假设振型函数为

$$Z_{m,n} = \sin \frac{m\pi x}{a} F_{m,n}(y) \quad \begin{matrix} (m = 1, 2, \dots) \\ (n = 1, 2, \dots) \end{matrix} \quad (1)$$

其中 $F_{m,n}(y)$ 为 y 的待定函数。

将 (1) 式代入方程 (8.51), 可得对于 $F_{m,n}(y)$ 的方程

$$F_{m,n}'''' - \frac{2m^2\pi^2}{a^2} F_{m,n}'' + \left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} - k_{m,n}^4 \right) F_{m,n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (m)$$

令 $F_{m,n} = e^{sy}$ 代入上式可得它的特征方程式

$$s^4 - \frac{2m^2\pi^2}{a^2} s^2 + \left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} - k_{m,n}^4 \right) = 0 \quad (n)$$

该方程的根为

$$\left. \begin{aligned} s_{1,3} &= \pm \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} - k_{m,n}^2} \\ s_{2,4} &= \pm \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + k_{m,n}^2} \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

不难看出, s_1, s_3 可能是实根也可能是虚根, 而 s_2, s_4 必定是实根。如果 s_1 和 s_3 是实根, 方程 (m) 的解可写成

$$\begin{aligned} F_{m,n}(y) &= A_{m,n} s h s_1 y + B_{m,n} c h s_1 y \\ &\quad + C_{m,n} s h s_2 y + D_{m,n} c h s_2 y \end{aligned} \quad (p)$$

如果 s_1 和 s_3 是虚根, 则

$$\begin{aligned} F_{m,n}(y) &= A_{m,n} \sin s_1 y + B_{m,n} \cos s_1 y \\ &\quad + C_{m,n} s h s_2 y + D_{m,n} c h s_2 y \end{aligned} \quad (q)$$

其中常数 $A_{m,n}, B_{m,n}, C_{m,n}, D_{m,n}$ 之间的比例以及特征值 $k_{m,n}$ 均应由板在 $y=0$ 和 $y=b$ 两边的边界条件来确定。显然, 一般情况下是得不到它们的解析解的, 下面只是以 $y=0$ 为简支边, $y=b$ 为固定边为例来求出它的频率方程。

如前所述, 根据 (8.49) 可以写出对于 Z 的边界条件为

$$\begin{aligned} Z(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \bigg|_{y=0} = 0 \\ Z(x, b) &= 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} \bigg|_{y=b} = 0 \end{aligned}$$

因此对于 $F_{m,n}$ 的边界条件为

$$\begin{aligned} F_{m,n}(0) &= 0, \quad F''_{m,n}(0) = 0 \\ F_{m,n}(b) &= 0, \quad F'_{m,n}(b) = 0 \end{aligned}$$

当前面所述的 s_1 和 s_3 为虚根时 (即 $k_{m,n} > \frac{m\pi}{a}$) 可将 (q) 式代入这里的四个边界条件, 得到如下对于四个待定常数的线性代数方程组:

$$\begin{aligned} B_{m,n} + D_{m,n} &= 0 \\ -s_1^2 B_{m,n} + s_2^2 D_{m,n} &= 0 \\ A_{m,n} \sin s_1 b + B_{m,n} \cos s_1 b + C_{m,n} s h s_2 b + D_{m,n} c h s_2 b &= 0 \end{aligned}$$

$$s_1 A_{m,n} \cos s_1 b - s_1 B_{m,n} \sin s_1 b + s_2 C_{m,n} c h s_2 b + s_2 D_{m,n} s h s_2 b = 0$$

由其中前两式可以解得 $B_{m,n} = D_{m,n} = 0$, 于是由后两式可得 $A_{m,n}$, $C_{m,n}$ 存在非零解的条件为

$$\begin{vmatrix} \sin s_1 b & s h s_2 b \\ s_1 \cos s_1 b & s_2 c h s_2 b \end{vmatrix} = 0$$

于是频率方程式可写成

$$\frac{1}{s_1} \tan s_1 b = \frac{1}{s_2} \tanh s_2 b$$

当 s_1 和 s_2 为实根时 (即 $k_{m,n} < \frac{m\pi}{a}$) 则类似可得频率方程为

$$\frac{1}{s_1} \tanh s_1 b = \frac{1}{s_2} \tanh s_2 b$$

但是可以验证, 在 $k_{m,n} < \frac{m\pi}{a}$ 的范围内此方程没有根。实际上对于四边简支的情况各阶频率都已经满足条件 $k_{m,n} > \frac{m\pi}{a}$, 而一边固支三边简支的情况频率比四边简支的相应阶频率提高, 因此 $k_{m,n} > \frac{m\pi}{a}$, s_1 和 s_2 必为虚根。

(3) 近似解法

上面所讨论的两对边简支的矩形板的振动问题, 是目前所知道完整地得到精确解的全部情况。对于其他情况, 计算固有频率和主振型, 都需要采用近似计算方法。这里将重点介绍瑞雷-李兹法, 这种方法实际上就是以能量变分原理为依据, 将泛函极值问题化为多元函数极值问题来求解。

将自由振动的解 $w = Z(x, y)e^{ipt}$ 代入势能和动能表达式 (8.39) 和 (8.40), 再代入变分式 (8.1), 然后对时间 t 进行积分, 可以得到

$$\delta(U_{max} - T_{max}) = 0 \quad (8.54)$$

其中

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \iint D \left\{ (\nabla^2 Z)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (8.55)$$

$$T_{\max} = \frac{\rho}{2} p^2 \iint h Z^2 dx dy \quad (8.56)$$

如果选取满足板的位移边界条件的已知函数族 $X_m(x)$, $Y_n(y)$, 那么作为近似解可令

$$Z(x, y) = \sum_{m=1}^q \sum_{n=1}^r A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (8.57)$$

其中函数 X_m , Y_n 称为基本函数, A_{mn} 为待定系数。将 (8.57) 代入 (8.55)、(8.56) 式, 可得 U_{\max} 和 T_{\max} 都是系数 A_{mn} 的二次齐次函数,

$$\begin{aligned} U_{\max} = & \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left[\nabla^2 \left(\sum_{m=1}^q \sum_{n=1}^r A_{mn} X_m Y_n \right) \right]^2 \right. \\ & - 2(1-\mu) \left[\left(\sum_{m=1}^q \sum_{n=1}^r A_{mn} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_n \right) \right. \\ & \times \left(\sum_{m=1}^q \sum_{n=1}^r A_{mn} X_m \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) \\ & \left. \left. - \left(\sum_{m=1}^q \sum_{n=1}^r A_{mn} \frac{d X_m}{dx} \frac{d Y_n}{dy} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (8.58) \end{aligned}$$

$$T_{\max} = \frac{\rho}{2} p^2 \iint h \left(\sum_{m=1}^q \sum_{n=1}^r A_{mn} X_m Y_n \right)^2 dx dy \quad (8.59)$$

其中 A_{mn} 就相当于独立的广义座标。于是变分式 (8.54) 可简化为多元函数的极值条件: $U_{\max} - T_{\max}$ 对系数 A_{mn} 中任意一个 A_{ij} 的偏导数均等于零, 即

$$\frac{\partial U_{\max}}{\partial A_{ij}} - \frac{\partial T_{\max}}{\partial A_{ij}} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, q \\ j = 1, 2, \dots, r \end{pmatrix} \quad (8.60)$$

将 (8.58), (8.59) 代入 (8.60), 整理后可得

$$\sum_{m=1}^q \sum_{n=1}^r [C_{mn}^{(ij)} - \lambda m_{mn}^{(ij)}] A_{mn} = 0 \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, q \\ j = 1, 2, \dots, r \end{matrix} \right) \quad (8.61)$$

$$\text{其中} \quad \lambda = p^2 \rho h_0 a^3 b / D_0 \quad (8.62)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{mn}^{(ij)} &= \frac{a^2}{D_0} \left\{ D \left[(\nabla^2 X_m Y_n) (\nabla^2 X_i Y_j) \right. \right. \\ &\quad - (1 - \mu) \left(-\frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_n X_i - \frac{d^2 Y_j}{dy^2} X_m Y_n \right. \\ &\quad + X_m - \frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \frac{d^2 X_i}{dx^2} Y_j \\ &\quad \left. \left. - 2 \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_n}{dy} - \frac{dY_n}{dy} \frac{dX_i}{dx} - \frac{dY_j}{dy} \frac{dX_m}{dx} \right) \right] dx dy \\ m_{mn}^{(ij)} &= \frac{1}{h_0 a b} \left\{ \int \int h X_m Y_n X_i Y_j dx dy \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8.63)$$

显然公式 (8.62), (8.63) 也可适用于变厚度板, 其中刚度 D 和厚度 h 作为积分中的权函数出现, 而 D_0 和 h_0 是某一指定点处的 D 和 h 。对于等厚度板而言, $D \equiv D_0$, $h \equiv h_0$, 因此可将 D 和 h 提到积分号外与 D_0 和 h_0 消去。

可以看出, 方程组 (8.61) 是系数 A_{mn} 的线性代数方程组, 它的个数等于 A_{mn} 的个数, 也就是李兹法近似计算选取的自由度数 ($q \times r$)。因此李兹法把无限自由度问题化成了多自由度问题, 可以求得 $q \times r$ 个固有频率和主振型。

对于等厚度矩形板的振动问题可以选取梁函数作基本函数:
固定—固定梁

$$\varphi_r = ch \frac{k_r x}{l} - \cos \frac{k_r x}{l} - \alpha_r \left(sh \frac{k_r x}{l} - \sin \frac{k_r x}{l} \right) \quad (r)$$

$$(r = 1, 2, 3, \dots)$$

固定—自由梁

$$\varphi_r = ch \frac{k_r x}{l} - \cos \frac{k_r x}{l} - \alpha_r \left(sh \frac{k_r x}{l} - \sin \frac{k_r x}{l} \right) \quad (s)$$

$$(r = 1, 2, 3, \dots)$$

自由—自由梁

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 1 \\ \varphi_2 &= \sqrt{3} (1 - 2x/l) \\ \varphi_r &= ch \frac{k_r x}{l} + \cos \frac{k_r x}{l} - \alpha_r \left(sh \frac{k_r x}{l} + \sin \frac{k_r x}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (t)$$

($r = 3, 4, 5, \dots$)

其中 k_r 和 α_r 都有表可查。显然除了自由—自由梁的两个函数 φ_1 和 φ_2 属于刚体运动外, φ_r 均满足梁的振动微分方程 $\frac{d^4 \varphi_r}{dx^4} = k_r^4 \varphi_r / l^4$ 。

如果取自由—自由梁的 $k_1 = k_2 = 0$, 则 φ_1, φ_2 也能满足上述关系。此外, 上述的三组 φ_r 每组都具有正交性, 并且已经正则化了, 即

$$\int_0^l \varphi_r \varphi_s dx = \begin{cases} l & (r = s) \\ 0 & (r \neq s) \end{cases} \quad (u)$$

它们的二阶导数也具有正交性, 即

$$\int_0^l \frac{d^2 \varphi_r}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_s}{dx^2} dx = \begin{cases} k_r^4 / l^8 & (r = s) \\ 0 & (r \neq s) \end{cases} \quad (v)$$

将函数族 X_n, Y_n 选取上述梁函数后, 就可以求出下列积分值:

$$\left. \begin{aligned} E_{mi} &= a \int_0^a X_m \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx \\ E_{im} &= a \int_0^a X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \\ F_{ni} &= b \int_0^b Y_n \frac{d^2 Y_i}{dy^2} dy \\ F_{in} &= b \int_0^b Y_i \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy \\ H_{mi} &= a \int_0^a \frac{dX_m}{dx} \frac{dX_i}{dx} dx \\ K_{ni} &= b \int_0^b \frac{dY_n}{dy} \frac{dY_i}{dy} dy \end{aligned} \right\} \quad (w)$$

对于各种梁函数的这些积分值也都有表可查。于是 (8.63) 式可改写为

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } mn \neq ij \text{ 时} \\ &C_{mn}^{(ij)} = \mu \frac{a}{b} (E_{mi} F_{jn} + E_{mj} F_{ni}) + 2(1 - \mu) \frac{a}{b} H_{mi} K_{nj} \\ &\text{当 } mn = ij \text{ 时} \\ &C_{mn}^{(mn)} = \frac{b}{a} k_m^4 + \frac{a^3}{b^3} k_n^4 + 2\mu \frac{a}{b} E_{mn} F_{nn} \\ &\quad + 2(1 - \mu) \frac{a}{b} H_{mn} K_{nn} \\ &m_{mn}^{(ij)} = \begin{cases} 1 & (mn = ij) \\ 0 & (mn \neq ij) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (x)$$

根据板的边界条件, 由表查出积分值 E_{mi}, \dots 等, 按照 (x) 式求得系数 $C_{mn}^{(ij)}$ 和 $m_{mn}^{(ij)}$ 的值, 就可由线性代数方程组 (8.61) 求解特征值 λ 和特征矢量, 从而求出固有频率和主振型。

下面以方板为例给出一些结果[⊖]。

表 8.1 为对于悬臂方板的系数 $C_{mn}^{(ij)}$ 数值表, 表 8.2 为悬臂方板的前五阶固有频率与主振型。表 8.3 和表 8.4 分别是四边固定和两邻边固定两邻边自由的方板的前几阶固有频率与主振型(这里 μ 都取 0.3)。

最后还可指出, 如果选取的基本函数系是正交完备的, 那么得到的就是精确解, 对于实际计算而言, 只要取足够多的主要项, 就能达到任何要求的精度。当然, 取的项愈多计算量就愈大, 有时权衡精确与简便两方面的要求, 往往也采

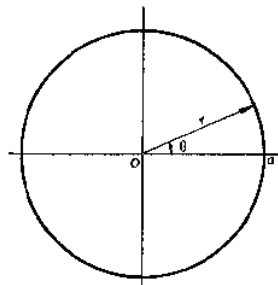


图 8-12

⊖ 引自 Dana Young, "Vibration of rectangular plates by the Ritz method", J. Appl. Mech. Vol. 17 pp. 448-453 (1950).

表 8.1

i	k	$C_{11}^{(i,k)}$	$C_{13}^{(i,k)}$	$C_{16}^{(i,k)}$	$C_{21}^{(i,k)}$	$C_{23}^{(i,k)}$	$C_{26}^{(i,k)}$	$C_{31}^{(i,k)}$	$C_{33}^{(i,k)}$	$C_{36}^{(i,k)}$
1	1	12.36	4.79	11.33	0	10.95	24.72	0	8.72	20.64
1	3	4.79	828.51	244.21	-65.49	-474.80	-342.30	153.10	165.95	234.73
1	5	11.33	244.21	15794.99	-154.94	-549.75	-1637.83	362.23	629.15	170.16
2	1	0	-65.49	-154.94	485.52	-74.14	-175.41	0	18.01	42.61
2	3	10.45	-474.80	-549.75	-74.14	3329.87	1388.69	-50.43	-1526.98	-1061.02
2	5	24.72	-342.30	-1637.83	-175.41	1388.69	24372.88	-119.31	-1247.98	-5675.23
3	1	0	153.10	362.23	0	-50.43	-119.31	3806.55	-256.00	-605.67
3	3	8.72	165.95	629.15	18.01	-1526.98	-1247.98	-256.00	10000.69	3079.54
3	5	20.64	234.73	170.16	42.61	-1061.02	-5675.23	-605.67	3079.54	41370.70

表 8.2






阶 次	一 阶	二 阶	三 阶	四 阶	五 阶
$\rho a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$	3.494	8.547	21.44	27.46	31.17
幅 度 系 数	$A_{11} = 1.0000$	$A_{12} = 1.0000$	$A_{11} = 0.0054$	$A_{11} = 0.0090$	$A_{12} = -0.1201$
	$A_{13} = -0.0087$	$A_{14} = -0.0134$	$A_{13} = 0.2731$	$A_{13} = 1.0000$	$A_{14} = 0.0627$
	$A_{15} = -0.0008$	$A_{16} = -0.0011$	$A_{15} = 0.0092$	$A_{16} = -0.0120$	$A_{16} = 0.0080$
	$A_{21} = -0.0026$	$A_{22} = 0.1212$	$A_{21} = 1.0000$	$A_{21} = -0.2866$	$A_{22} = 1.0000$
	$A_{23} = -0.0050$	$A_{24} = 0.0044$	$A_{23} = 0.0713$	$A_{23} = 0.1736$	$A_{24} = -0.0388$
系 数	$A_{25} = -0.0011$	$A_{26} = 0.0006$	$A_{25} = 0.0079$	$A_{25} = 0.0009$	$A_{26} = -0.0013$
	$A_{31} = 0.0001$	$A_{32} = -0.0020$	$A_{31} = -0.0118$	$A_{31} = -0.0451$	$A_{32} = 0.0776$
	$A_{33} = -0.0014$	$A_{34} = -0.0011$	$A_{33} = 0.0050$	$A_{33} = 0.0125$	$A_{34} = 0.0086$
	$A_{35} = -0.0006$	$A_{36} = -0.0006$	$A_{35} = -0.0003$	$A_{35} = -0.0023$	$A_{36} = 0.0024$
节 线					

表 8.3

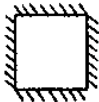
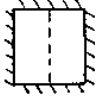
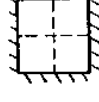

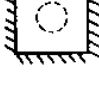






阶次	一阶	二阶	三阶	四阶	五阶	六阶
$pa^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$	35.99	73.41	108.27	131.64	132.25	165.15
幅 度 系 数	$A_{111} = 1.0000$	$A_{112} = 1.0000$	$A_{222} = 1.0000$	$A_{113} = 1.0000$	$A_{111} = -0.0280$	$A_{112} = -0.0406$
	$A_{113} = 0.0142$	$A_{114} = 0.0101$	$A_{224} = 0.0326$	$A_{115} = 0.0085$	$A_{113} = 1.0000$	$A_{114} = -0.0105$
	$A_{116} = 0.0020$	$A_{116} = 0.0020$	$A_{226} = 0.0073$	$A_{331} = -1.0000$	$A_{116} = 0.0055$	$A_{116} = -0.0017$
	$A_{311} = 0.0142$	$A_{32} = 0.0406$	$A_{42} = 0.0526$	$A_{335} = -0.0141$	$A_{311} = 1.0000$	$A_{32} = 1.0000$
	$A_{333} = -0.0031$	$A_{334} = -0.0022$	$A_{44} = -0.0019$	$A_{411} = -0.0085$	$A_{335} = 0.1267$	$A_{34} = 0.0560$
	$A_{335} = -0.0009$	$A_{336} = -0.0007$	$A_{46} = -0.0010$	$A_{611} = 0.0141$	$A_{336} = 0.0118$	$A_{336} = 0.0141$
	$A_{611} = 0.0020$	$A_{62} = 0.0070$	$A_{62} = 0.0073$		$A_{311} = 0.0055$	$A_{62} = 0.0238$
	$A_{63} = -0.0009$	$A_{64} = -0.0011$	$A_{64} = -0.0010$		$A_{63} = 0.0118$	$A_{64} = -0.0011$
	$A_{65} = -0.0004$	$A_{66} = -0.0005$	$A_{66} = -0.0006$		$A_{65} = -0.0018$	$A_{66} = -0.0009$
节线						

表 8.4

阶 次	一 阶	二 阶	三 阶	四 阶	五 阶
$\rho a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$	6.958	24.08	26.80	48.05	63.14
幅 度 系 数	$A_{11} = 1.0000$	$A_{11} = 0$	$A_{11} = -0.1172$	$A_{11} = 0.0286$	$A_{11} = 0$
	$A_{12} = 0.0604$	$A_{12} = 1.0000$	$A_{12} = 1.0600$	$A_{12} = -0.1566$	$A_{12} = 0.0030$
	$A_{13} = -0.0030$	$A_{13} = 0.00003$	$A_{13} = 0.0553$	$A_{13} = -0.0825$	$A_{13} = 1.0000$
	$A_{21} = 0.0604$	$A_{21} = -1.0000$	$A_{21} = 1.0000$	$A_{21} = -0.1566$	$A_{21} = -0.0030$
	$A_{22} = -0.0101$	$A_{22} = 0$	$A_{22} = 0.3223$	$A_{22} = 1.0000$	$A_{22} = 0$
	$A_{23} = -0.0003$	$A_{23} = -0.0221$	$A_{23} = 0.0111$	$A_{23} = 0.1458$	$A_{23} = 0.1350$
	$A_{31} = -0.0030$	$A_{31} = -0.00003$	$A_{31} = 0.0553$	$A_{31} = -0.0825$	$A_{31} = -1.0000$
	$A_{32} = -0.0003$	$A_{32} = 0.0221$	$A_{32} = 0.0111$	$A_{32} = 0.1458$	$A_{32} = -0.1350$
	$A_{33} = -0.0017$	$A_{33} = 0$	$A_{33} = 0.0022$	$A_{33} = -0.0019$	$A_{33} = 0$
节 线					

用只取一项的估算办法。

(4) 圆板振动

对于圆板可以建立极坐标系 $r\theta$ ，如图 8-12 所示。它和直角坐标系之间的算子转换关系为：

一阶算子

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (8.64)$$

二阶算子

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos 2\theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{\cos 2\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \right\} \quad (8.65)$$

按照这些转换关系可以毫无困难地把前面在直角坐标系内推出的基本关系转换到适于解圆板的极坐标。例如，对于等厚度板的振动微分方程 (8.43) 可以化为

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w + \rho h \ddot{w} = q(r, \theta, t) \quad (8.66)$$

相应的边界条件则可以由 (8.44)~(8.47) 转换得到，对于 $r = a$ 边界上未给定 $\frac{\partial w}{\partial r}$ 的点（如简支边或自由边）

$$-D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] = M_r \quad (8.67)$$

对于 $r = a$ 边界上未给定 w 的点 (如自由边)

$$\begin{aligned} & -D \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (1 - \mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \\ & = Q - \frac{1}{r} \frac{\partial M_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (8.68)$$

对于 $r = a$ 边界上给定 $\frac{\partial w}{\partial r}$ 或 w 的点的边界条件则为

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (8.69)$$

$$w = 0 \quad (8.70)$$

具体问题的边界条件可以由 (8.67) ~ (8.70) 组合得到每点两个条件。

下面作为简单例子讨论实心圆板的自由振动问题。令自由振动解的极坐标形式为

$$w = R(r) \cos(n\theta) e^{i p t} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.71)$$

代入 (8.66) 式, 可以得到对于 $R(r)$ 的微分方程为

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) R - k^4 R = 0 \quad (8.72)$$

$$\text{其中} \quad k^4 = p^2 \frac{\rho h}{D} \quad (8.73)$$

由 (8.72) 可以得到如下两个二阶常微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} (r^2 k^2 - n^2) R &= 0 \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{r^2} (r^2 k^2 + n^2) R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.74)$$

前一个称为 n 阶贝塞尔方程, 它的解是

$$R_n(r) = A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr) \quad (Y)$$

后一个方程称为 n 阶修正贝塞尔方程^①，其解为

$$R_n(r) = C_n I_n(kr) + D_n K_n(kr) \quad (z) \quad (8.73)$$

因此微分方程 (8.74) 的通解为

$$R_n(r) = A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr) + C_n I_n(kr) + D_n K_n(kr) \quad (8.75)$$

对于实心圆板，根据圆心处 ($r = 0$) 的 w 与 $\frac{dw}{dr}$ 为有限值的条件可知 B_n, D_n 必须为零，而把其余两项代入 $r = a$ 处的边界条件即可得到频率方程。对于 R 的在 $r = a$ 处的边界条件只要将 (8.71) 代入 (8.67)~(8.70) 即可得到。下面列出几种简单情况的边界条件：

固定边

$$R(a) = 0, \quad \left. \frac{dR}{dr} \right|_{r=a} = 0$$

简支边

$$R(a) = 0, \quad \left. \frac{d^2 R}{dr^2} \right|_{r=a} = 0$$

自由边

$$\left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) R \right] \Big|_{r=a} = 0$$

$$\left[\frac{d}{dr} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) + \frac{(1-\mu)n^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr} \right) \right] R \Big|_{r=a} = 0 \quad (8.76)$$

如果把圆板的固有频率表示为

$$p = \frac{\beta}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}} \quad (8.77)$$

μ 取 0.3，那么对应于各种边界条件的频率系数 β 可由表 8.5 查出。

① T. V. 卡曼、M. A. 比奥《工程中的数学方法》科学出版社 (1961)。

表 8.5

n (节径) s (节圆)	0	1	2	3
周 边 固 定				
0	10.21	21.26	34.88	51.04
1	39.78	60.82	84.58	111.00
2	89.10	120.07	153.81	190.30
3	158.13	199.07	242.73	289.17
自 由				
0			5.253	12.23
1	9.084	21.43	35.25	52.91
2	38.55	59.81	83.91	111.30
3	87.80	110.03	154.01	192.10
周 边 简 支				
0	4.977	13.94	25.65	
1	29.76	48.51	70.14	
2	74.20	102.80	134.33	
中 心 固 定				
s n	0	1	2	3
0	3.75	20.91	60.68	119.7

限于篇幅,关于板的振动的其他方面这里都不讨论了,对于壳的振动也不再介绍,感兴趣者可直接查阅有关的文献与手册^①。

① В. С. ГОНТКЕВИЧ «СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК, СПРАВОЧНИК» КИЕВ НАУКОВА ДУМКА (1964).

第九章 有限单元法

9.1 引言

有限单元法是近二十年来，随着电子计算机的发展，首先在固体力学领域蓬勃发展起来的一种很有效的数值计算方法。

有限单元法的基本思想是将一个连续体看成是若干个基本元素（单元）在结点彼此相联结的组合物，从而使一个连续体的力学问题变成一个有限自由度的力学问题，它使得问题有可能借助于线性代数方程组进行求解，并以此与传统的连续体力学必须借助于微分方程进行求解相区别。

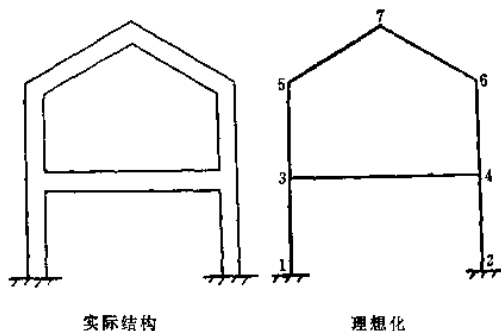


图 9-1

如图 9-1 所示，“单元的组合”这概念用于通常的刚架结构是十分自然的。对于这一情况，采用的单元综合有受轴向力杆和受横向弯曲梁的两种作用，它们彼此在端点联结起来。这样的联结点称为结点，在图 9-1 上分别用 1、2、…、7 标明其编号。当然从有限单元法离散化的角度来看，还可将载荷作用点，以及其他某种需要所确定的点做为结点，将单元划分得更小一些。不管

怎样, 所采用的单元在力学上是属于一维的, 所以在理想化的结构图上可简化为一直线。

将有限单元法推广到一般情况, 是用二维或三维单元的组合物体来表示实际的连续体。图 9-2 所示是用有限个在顶点彼此联结起来的三角形平面单元的组合物体来表示的水坝模型。这种形状的二维单元还可用来表示平板或壳体组成的结构。类似地还有其他二维或三维单元用来表示二维或三维的连续体。

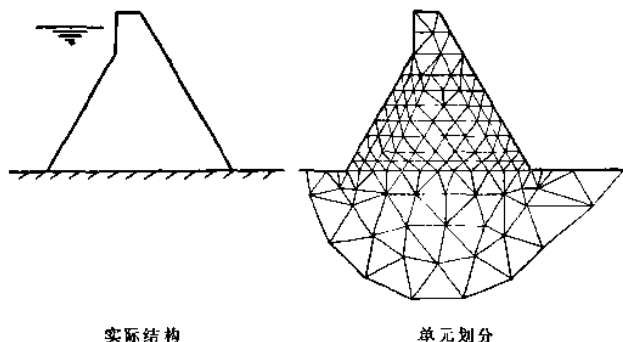


图 9-2

有限单元法的分析方法通常是采用位移法, 即以结点处的位移作为基本未知量, 单元以至整个结构的一切参数, 包括位移、应变、应力等都通过结点位移表示出来。从振动问题来看, 最后是将一个连续体的振动问题变成了一个以有限个结点的位移为广义坐标的多自由度系统的振动问题。

从上可见, 有限单元法提供了适应性很强的统一的数值分析方法。适应性强是指它通过合理选择单元的形状和大小能够适用于各种不同结构特点并且包括不规则边界的问题。统一的方法是指它对于各种问题通过标准的步骤最后都导致求解一组线性代数方程, 所以特别适合于编制程序在计算机上进行计算。

随着电子计算机的发展, 现在已经能借助于它求解几百几千以至上万个自由度的问题, 必要时进行整个结构的力学分析。而

有限单元法本身的研究也得到很大的发展,成为一门专门的学科。限于本书的篇幅和任务,本章的目的是向未学习过有限单元法的读者介绍它的基本概念和分析步骤,为进一步学习有限单元法和参看这方面的比较简单的技术资料提供一个入门的知识。

本章重点叙述了平面刚架结构振动问题的有限单元法分析,因为通过这种一维构件所组成的结构形式可较方便地阐明有限单元法的基本概念和分析步骤。为了说明二维、三维结构的特点,本章对平面问题的三角形单元和薄板的矩形单元也做了扼要的介绍。

有限单元法分析中所处理的矩阵一般具有的特点是阶数很高,元素分布为稀疏、带状,求解这类矩阵的特征值问题近年来已发展了不少适宜于电子计算机上求解的有效方法。有关内容在第十章中加以介绍,本章就不涉及了。

9.2 平面刚架结构的振动

结构的有限单元法分析,基本上可分为结构的离散化、单元特性分析、结构的综合分析三个步骤,本节的目的是通过平面刚架结构的振动问题来阐明这几个步骤中所涉及的概念和方法。

(1) 结构的离散化

现以图 9-3 所示平面刚架为例,它是由七根杆件所组成,通过 1、2 两点固定支承在基础上,杆件之间通过刚结点 3、4、5、6、7 相互联结起来,在某些结点或杆件上受有作用在刚架平面内的激振力。所以我们可以把问题归结为研究此刚架结构在平面内的响应。

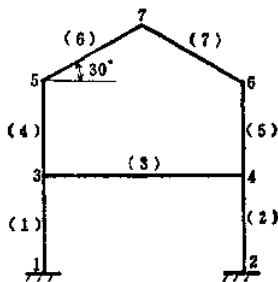


图 9-3

结构离散化就是将结构分成若干个性质相同的单元。在现在的例子中,为简单起见,假定按结构本身的自然结点分为七个单

元，在图上分别以 (1)、(2)、…、(7) 标明单元的编号。这些单元相互之间以及它们和基础的联结点称为结点。在现在的情况下，结点就是结构的自然结点，它们的编号分别是 1、2、…、7。结点 1、2 和基础固定联结，它们完全不能运动，称为固定结点；其余的结点是可以运动的，称为可动结点。在以后的分析中将可看到，可动结点的数目乘以每个结点的基本未知量的数目就是整个结构的自由度数。结构划分的单元数目愈多，则结构的自由度数愈多，因之计算的结果就愈有可能趋于精确解，但是计算工作量也就愈大，所以在结构离散化的过程中，应综合考虑精确性和计算量两方面的因素。

(2) 单元特性分析

在一般情况下，平面刚架结构中所采用的单元的动力性质将是承受轴向激振力而作纵向振动的杆和承受横向激振力而作横向振动的梁这两种性质的综合。在线弹性范围内，这两种性质是可以简单叠加的，即它们之间是不相耦合的。取一代表性单元(e)，把它表示在图 9-4 上。让坐标原点放在单元的左端， x 轴沿单元的轴线，这种和单元相联结的坐标系称为局部坐标系，这是为了使单元特性分析比较简单而采用的。单元(e)的左端和右端结点编号分别用 i 、 j 表示，单元长度是 l ，截面积是 $A(x)$ ，惯性矩是 $J(x)$ ，单位长度的质量是 $m(x)$ ，材料的弹性常数和泊桑比分别是 E 和 μ 。

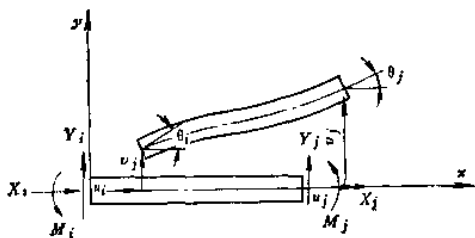


图 9-4

在纵向振动和横向振动同时存在的情况下，每个结点的广义位移是轴向位移 $u(t)$ 、横向位移 $v(t)$ 和转角 $\theta(t)$ ，相应的广义力是轴向力 $X(t)$ 、横向力 $Y(t)$ 和弯矩 $M(t)$ 。每个结点的广义位移和广义力分别表示在图 9-4 上，用矩阵符号表示如下

$$\{q^e\} = \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}, \quad \{F^e\} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

其中

$$\{q_i\} = [u_i, v_i, \theta_i]^T, \quad \{q_j\} = [u_j, v_j, \theta_j]^T \\ \{F_i\} = [X_i, Y_i, M_i]^T, \quad \{F_j\} = [X_j, Y_j, M_j]^T$$

在有限单元法的分析中通常是将结点位移作为基本未知量，而结点力可以表示为结点位移的函数。单元特性分析的目的就是研究如何得到结点力和结点位移之间的关系，这是有限单元法分析当中关键的步骤。为叙述方便起见，我们先分别研究只发生纵向振动和只发生横向振动的杆单元的特性，然后再把它们叠加起来，从而得到这两种振动同时发生的一般情况下杆单元的特性。

1. 纵向振动杆单元的特性分析

插值函数矩阵 $[N]$

我们从第七章已知杆件作纵向振动时的基本未知函数是每个截面的轴向位移 $u(x, t)$ ，在有限单元法的位移法分析中，纵向振动杆单元的基本未知量是结点位移 u_i 和 u_j ，所以 $u(x, t)$ 应利用其端点值 u_i 和 u_j 进行插值而得到，插值公式可表示为

$$u(x, t) = N_{iu}(x)u_i(t) + N_{ju}(x)u_j(t) \quad (9.2)$$

或写成矩阵形式

$$u(x, t) = [N_{iu}(x) \quad N_{ju}(x)] \begin{bmatrix} u_i(t) \\ u_j(t) \end{bmatrix} = [N] \{q^e\}$$

其中 $N_{iu}(x)$ 、 $N_{ju}(x)$ 是位移插值函数，简称插值函数， $[N]$ 称为插值函数矩阵。从(9.2)式可以看到插值函数应满足以下条件

$$\left. \begin{aligned} N_{iu}(0) &= 1, \quad N_{iu}(l) = 0 \\ N_{ju}(0) &= 0, \quad N_{ju}(l) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

在有限单元法的分析中插值函数通常采用幂多项式的形式，而且为了能描写单元发生刚体位移和常应变的情况，总是按常数项、一次项、…的次序来增加项次，所以对于现在只有两个端点条件可供利用的情况， $N_{iu}(x)$, $N_{ju}(x)$ 只能取成 x 的线性函数，如 $N_{iu}(x)$ 应采用以下形式

$$N_{iu}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

利用端点条件 (9.3) 式，可以确定

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{l}$$

这样就得到

$$N_{iu}(x) = 1 - \frac{x}{l}$$

类似地可以得到

$$N_{ju}(x) = \frac{x}{l}$$

将以上结果代回 (9.2) 式，则得

$$u(x, t) = [N] \{q^e\} = \left[1 - \frac{x}{l} \quad \frac{x}{l} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

应变位移关系矩阵 $[B]$

在有限单元法分析中，单元内部仍保持原来结构在几何和物理方面的性质，所以应变和位移关系是

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} &= \left[\frac{\partial N_{iu}}{\partial x} \quad \frac{\partial N_{ju}}{\partial x} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \\ &= [B_{iu} \quad B_{ju}] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = [B] \{q^e\} \end{aligned} \quad (9.5)$$

其中 $[B]$ 称为应变位移关系矩阵，利用它可以从结点位移计算单元内各处的应变。对于现在的情况，由于位移插值函数是线性函数，所以应变是常数，这种单元称为常应变单元，在有限单元法中这是一种最简单的单元。

应力应变关系矩阵〔D〕、应力位移关系矩阵〔S〕

对于现在的情况，应力应变关系保持单向受力的形式

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

为今后方便起见，取轴向力 X 为广义应力，则

$$X = \sigma_x A = EA\varepsilon_x = D[B]\{q^*\} = [S]\{q^*\} \quad (9.6)$$

其中 $D = EA$ ，它表示广义应力和应变之间的关系，对于广义应力、应变是一个列阵的一般情况，它将是—个方阵，称为**应力应变关系矩阵**，用〔D〕表示。〔S〕=〔D〕〔B〕表示应力和结点位移之间的关系，称为**应力位移关系矩阵**。

单元的弹性势能 U^e 、单元刚度矩阵〔K e 〕

单元的势能在现在的情况下是

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \int_0^l \varepsilon_x X dx = \frac{1}{2} \{q^*\}^T \int_0^l [B]^T [D] [B] dx \{q^*\} \\ &= \frac{1}{2} \{q^*\}^T [K^e] \{q^*\} \end{aligned} \quad (9.7)$$

上式将单元的弹性势能表示为结点位移 $\{q^*\}$ 的二次型，其中

$$[K^e] = \int_0^l [B]^T [D] [B] dx \quad (9.8)$$

称为**单元刚度矩阵**。如果 $A(x) = A$ 为常数，即杆单元是等截面的，可得纵向振动杆单元刚度矩阵

$$[K^e] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

从上式还可看到〔K e 〕的行列式等于零，即〔K e 〕是半正定的，这是由于单元上未加以任何位移约束的结果。

单元的动能 T^e 、单元质量矩阵〔M e 〕

在现在的情况下，单元的动能

$$\begin{aligned} T^e &= \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{u}^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l m \{\dot{q}^*\}^T [N]^T [N] \{\dot{q}^*\} dx \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{q}^*\}^T \int_0^l m [N]^T [N] dx \{\dot{q}^*\} \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{q}^*\}^T [M^e] \{\dot{q}^*\} \end{aligned} \quad (9.10)$$

其中 \dot{u} 表示位移 u 对时间 t 的导数, $\{\dot{q}^e\}$ 是结点速度列阵,

$$\{\dot{q}^e\} = [\dot{u}_i \quad \dot{u}_j]^T \quad (9.11)$$

m 是单位长度的质量, $[M^e]$ 称为**单元质量矩阵**,

$$[M^e] = \int_0^l m [N]^T [N] dx \quad (9.12)$$

如果 $m(x) = m = \text{常数}$, 则可得纵向振动杆单元质量矩阵

$$[M^e] = \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

需要补充指出的是现在求得的单元质量矩阵 $[M^e]$ 称为**一致质量矩阵**, 它是通过将

$$u(x, t) = [N] \{q^e\}$$

代入单元动能表达式, 并进一步将动能表示为结点速度 $\{\dot{q}^e\}$ 的二次型而得到的。这和得到单元刚度矩阵 $[K^e]$ 的方法是一致的, 可以较好地保持真实的质量分布。如果在结构离散化过程中, 结构的几何形状未作进一步简化, 则在位移插值函数满足协调条件的情况下, 最后的解答将给出固有频率的上界。但在实际分析中还常常采用另一种质量矩阵, 它称为**聚缩质量矩阵**。单元的质量用较简单的方法集中到结点上, 如现在所讨论的情况, 可简单地将各 $1/2$ 的单元质量集中到端部结点 i 、 j 上, 这样就使得 $[M^e]$ 成为一对角矩阵如下

$$[M^e] = \frac{ml}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

并且最后得到的结构质量矩阵 $[\bar{M}]$ 也是对角的, 从而简化了计算, 这是采用聚缩质量矩阵的优点。

单元阻尼矩阵 $[C^e]$ 、激振力列阵 $\{F^e\}$

作用于单元的外力, 除了代表其他相邻单元与之相互作用的结点力 $\{F^e\}$ 而外, 一般情况下还有分布的激振力 $R_x(x, t)$ 和阻尼力。对于现在的情况

$$\{F^e\} = [X_i \quad X_j]^T$$

如果限于讨论粘性阻尼, 则阻尼力可表示为

$$-r\dot{u} = -r[N]\{\dot{q}^*\}$$

其中 r 是阻尼系数, 它等于单位速度情况下作用于单位长度的阻尼力。

当发生虚位移 $\delta\{q^*\}$ 时, 作用于单元的所有外力在虚位移上的虚功是

$$\begin{aligned}\delta W &= \delta\{q^*\}^T \{F^*\} + \int_0^l \delta u R_x dx - \int_0^l r \delta u [N] \{\dot{q}^*\} dx \\ &= \delta\{q^*\}^T \{F^*\} + \delta\{q^*\}^T \int_0^l [N]^T R_x dx \\ &\quad - \delta\{q^*\}^T \int_0^l r [N]^T [N] dx \{\dot{q}^*\}\end{aligned}\quad (9.14)$$

将上式改写成

$$\delta W = Q_i \delta u_i + Q_j \delta u_j$$

就得到非保守的广义力 Q_i 和 Q_j , 再把它们集成矩阵形式, 则得到非保守的广义力列阵

$$\begin{aligned}\{Q^*\} &= \begin{bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{bmatrix} = \{F^*\} + \int_0^l [N]^T R_x dx - \int_0^l r [N]^T [N] dx \{\dot{q}^*\} \\ &= \{F^*\} + \{R^*\} - [C^*] \{\dot{q}^*\}\end{aligned}\quad (9.15)$$

实际上 $\{Q^*\}$ 可直接从虚功的矩阵表达式 (9.14) 中 $\delta\{q^*\}^T$ 的系数得到, 今后如无必要我们就不先求广义力的各个分量, 然后再集成矩阵形式, 而是直接从虚功的矩阵表达式得到广义力列阵 (9.15) 式。上式右端第一项代表相邻单元的作用, 第二项代表分布激励力的作用, 第三项代表阻尼力的作用, 其中引入了**单元阻尼矩阵**

$$[C^*] = \int_0^l r [N]^T [N] dx \quad (9.16)$$

比较 (9.16) 式和 (9.12) 式可见, 在 m 、 r 都是常数的情况下, $[M^*]$ 和 $[C^*]$ 的各个元素是相同的, 只是系数 m 和 r 不同。

$$\{R^*\} = \int_0^l [N]^T R_x dx = \int_0^l [N_{1n} \ N_{2n}]^T R_x dx \quad (9.17)$$

是单元激振力列阵, 它的两个元素分别为

$$\left. \begin{aligned} R_i^e &= \int_0^l N_{i,u} R_x dx = \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right) R_x dx \\ R_j^e &= \int_0^l N_{j,u} R_x dx = \int_0^l \frac{x}{l} R_x dx \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

当 $R_x(x, t)$ 已知时, 通过上式可以计算出 $\{R^e\}$, 例如 $R_x = CP(t)$, 则

$$R_i^e = R_j^e = -\frac{Cl}{2} P(t)$$

实际上对于 R_x 不是分布的, 而是集中力的情况, 同样可利用 (9.17) 式计算 $\{R^e\}$ 。

单元的运动方程式

在利用拉格朗日方程建立单元的运动方程式以前, 先将 $[K^e]$ 、 $[M^e]$ 和 $[C^e]$ 写成展开的形式

$$\left. \begin{aligned} [K^e] &= \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \\ [M^e] &= \begin{bmatrix} M_{ii}^e & M_{ij}^e \\ M_{ji}^e & M_{jj}^e \end{bmatrix} \\ [C^e] &= \begin{bmatrix} C_{ii}^e & C_{ij}^e \\ C_{ji}^e & C_{jj}^e \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} K_{rs}^e &= \int_0^l B_r D B_s dx \\ M_{rs}^e &= \int_0^l m N_{r,u} N_{s,u} dx \\ C_{rs}^e &= \int_0^l r N_{r,u} N_{s,u} dx \end{aligned} \right\} \quad (r, s = i, j) \quad (9.20)$$

将 $\{R^e\}$ 也写成展开的形式

$$\{R^e\} = \begin{bmatrix} R_i^e \\ R_j^e \end{bmatrix} \quad (9.21)$$

其中
$$R_r^e = \int_0^l N_{r,u} R_u dx \quad (r = i, j) \quad (9.22)$$

因为单元的广义位移是 u_i 和 u_j , 所以利用拉格朗日方程可以建立两个方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^e}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T^e}{\partial u_i} + \frac{\partial U^e}{\partial u_i} &= Q_i, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^e}{\partial \dot{u}_j} \right) - \frac{\partial T^e}{\partial u_j} + \frac{\partial U^e}{\partial u_j} &= Q_j, \end{aligned}$$

将 T^e 、 U^e 、 Q_i 、 Q_j 等的表达式代入上式, 并注意到 $[K^e]$ 、 $[M^e]$ 、 $[C^e]$ 等的展开形式, 可以得到

$$\left. \begin{aligned} M_{ii}^e \ddot{u}_i + M_{ij}^e \ddot{u}_j + C_{ii}^e \dot{u}_i + C_{ij}^e \dot{u}_j + K_{ii}^e u_i + K_{ij}^e u_j \\ = F_i^e + R_i^e \\ M_{ji}^e \ddot{u}_i + M_{jj}^e \ddot{u}_j + C_{ji}^e \dot{u}_i + C_{jj}^e \dot{u}_j + K_{ji}^e u_i + K_{jj}^e u_j \\ = F_j^e + R_j^e \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

这就是单元的运动方程式, 它是二元联立的二阶常微分方程组, 如进一步将它写成矩阵形式, 就得到

$$[M^e]\{\ddot{q}^e\} + [C^e]\{\dot{q}^e\} + [K^e]\{q^e\} = \{F^e\} + \{R^e\} \quad (9.24)$$

实际上上式可直接从

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^e}{\partial \{\dot{q}^e\}} \right) - \frac{\partial T^e}{\partial \{q^e\}} + \frac{\partial U^e}{\partial \{q^e\}} = \{Q^e\} \quad (9.25)$$

得到, 今后我们将方便地利用这种矩阵形式的拉格朗日方程。

对于现在所讨论的情况, 单元的运动方程式是

$$\begin{aligned} & \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{bmatrix} + \frac{rI}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{bmatrix} + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_i^e \\ R_j^e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

应指出的是 (9.24) 式作为单元运动方程式的矩阵形式完全是一般的, 它表达了结点广义位移和结点广义力之间关系的一般形式, 对于不同形式的单元, 只是 $\{q^e\}$ 中包含的广义位移数目和

意义以及 $[M']$ 、 $[C']$ 和 $[K']$ 的阶数和各个元素的具体表达式有所不同。

顺便指出,在第七章中我们已经看到杆件扭转振动和杆件纵向振动方程的相似性,在现在的分析中,如将杆件纵向振动各个方程中的单位长度的质量 m 换为单位长度的转动惯量 ρJ_p ,截面的轴向刚度 EA 换为截面的扭转刚度 GJ_t ,轴向位移 u 换为截面绕轴线的转角 φ ,轴向力 X 换为扭矩 M_t ,就得到杆件扭转振动的各个相应的方程。

2. 横向振动杆单元的特性分析

分析步骤以及公式的矩阵形式和纵向振动杆单元完全相同,我们用类比的方法,很方便地得到相应的结果。

位移的插值函数矩阵 $[N]$

横向振动杆的未知位移函数是横向位移 $v(x, t)$,它的插值公式仍如(9.2)式,即

$$v(x, t) = [N] \{q^e\} \quad (9.26)$$

但现在

$$\{q^e\} = \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}, \quad \{q_s\} = \begin{bmatrix} v_s \\ \theta_s \end{bmatrix} \quad (s = i, j) \quad (9.27)$$

所以插值函数矩阵 $[N]$ 应是四元的行矩阵,即

$$[N] = [N_i \ N_j] = [N_{iv}(x) \ N_{i\theta}(x) \ N_{jv}(x) \ N_{j\theta}(x)] \quad (9.28)$$

将(9.27)、(9.28)式代入(9.26)式,就得到

$$\begin{aligned} v(x, t) = & N_{iv}(x) v_i(t) + N_{i\theta}(x) \theta_i(t) \\ & + N_{jv}(x) v_j(t) + N_{j\theta}(x) \theta_j(t) \end{aligned} \quad (9.29)$$

上式对 x 求偏导数,得到

$$\begin{aligned} v' = & N'_{iv}(x) v_i(t) + N'_{i\theta}(x) \theta_i(t) \\ & + N'_{jv}(x) v_j(t) + N'_{j\theta}(x) \theta_j(t) \end{aligned} \quad (9.30)$$

其中“'”表示函数对 x 的偏导数。

$v(x, t)$ 应满足的端点条件为

$$\left. \begin{aligned} v(0, t) &= v_i(t) & v(l, t) &= v_j(t) \\ v'(0, t) &= \theta_i(t) & v'(l, t) &= \theta_j(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.31)$$

从上式进一步得到各个插值函数的端点条件为

$$\left. \begin{aligned} N_{iv}(0) &= 1, N'_{iv}(0) = 0, N_{iv}(l) = 0, N'_{iv}(l) = 0; \\ N_{i\theta}(0) &= 0, N'_{i\theta}(0) = 1, N_{i\theta}(l) = 0, N'_{i\theta}(l) = 0; \\ N_{jv}(0) &= 0, N'_{jv}(0) = 0, N_{jv}(l) = 1, N'_{jv}(l) = 0; \\ N_{j\theta}(0) &= 0, N'_{j\theta}(0) = 0, N_{j\theta}(l) = 0, N'_{j\theta}(l) = 1; \end{aligned} \right\} \quad (9.32)$$

因为对于每一个插值函数有四个端点条件，所以每一个插值函数应是 x 的三次多项式，如

$$N_{iv}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

利用(9.32)式的条件可以确定 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 ，从而也就确定了

$$N_{iv}(x) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \quad (9.33)$$

类似地可以确定

$$\left. \begin{aligned} N_{i\theta}(x) &= x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ N_{jv}(x) &= 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \\ N_{j\theta}(x) &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

这样就完全确定了插值函数矩阵 $[N]$ 。

应变位移关系矩阵 $[B]$

对于作横向往振动的杆，只要一个参数，即曲率 χ 就足以表征其内部各点的应变，它与位移 v 的关系是

$$\chi = v''$$

将(9.29)式代入上式，就得到

$$\chi = [B] \{q^e\} \quad (9.35)$$

其中 $[B] = [B_1 \ B_2] = [B_{iv} \ B_{i\theta} \ B_{jv} \ B_{j\theta}]$

而

$$B_{iv} = N''_{iv} = -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}$$

$$B_{i\theta} = N''_{i\theta} = -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2}$$

$$B_{iv} = N_{iv}'' = \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}$$

$$B_{j3} = N_{j3}'' = -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2}$$

应力应变关系矩阵 $[D]$ ，**应力位移关系矩阵** $[S]$

横向振动杆的广义应力是弯矩 M ，它和广义应变、广义位移的关系是

$$M = EJ\chi = D\chi = D[B]\{q'\} = [S]\{q'\} \quad (9.36)$$

和纵向振动杆单元比较， D 代表的不是 EA ，而是 EJ ，但 $[S] = D[B]$ 的形式不变。

单元的刚度矩阵 $[K^*]$ 、**质量矩阵** $[M^*]$ 、**阻尼矩阵** $[C^*]$

动能 T^* 、弹性势能 U^* 以及 $[K^*]$ 、 $[M^*]$ 、 $[C^*]$ 的矩阵形式和纵向振动杆单元的完全相同，只是现在的结点位移参数不是2个而是4个，所以 $[K^*]$ 、 $[M^*]$ 和 $[C^*]$ 应是 4×4 方阵，如仍写成展开形式

$$[K^*] = \begin{bmatrix} K_{ii}^* & K_{ij}^* \\ K_{ji}^* & K_{jj}^* \end{bmatrix} \quad [M^*] = \begin{bmatrix} M_{ii}^* & M_{ij}^* \\ M_{ji}^* & M_{jj}^* \end{bmatrix}$$

$$[C^*] = \begin{bmatrix} C_{ii}^* & C_{ij}^* \\ C_{ji}^* & C_{jj}^* \end{bmatrix}$$

则其中每一元素不是一个简单的数，而是 2×2 的子矩阵，它们的表达式仍和以前引出的相似，但积分号内的每一符号也是一个子矩阵，所以应该写成

$$\left. \begin{aligned} [K_{rs}^*] &= \int_0^l [B_r]^T [D] [B_s] dx \\ [M_{rs}^*] &= \int_0^l m [N_r]^T [N_s] dx \\ [C_{rs}^*] &= \int_0^l r [N_r]^T [N_s] dx \end{aligned} \right\} (r, s = i, j) \quad (9.37)$$

对于等截面杆的情况, 通过计算可以得到

$$\left. \begin{aligned} [K^*] &= \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & \\ & 6l & 4l^2 & & & \\ -12 & -6l & 12 & & & \\ & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 & \end{bmatrix} \\ [M^*] &= \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & & & & & \\ & 22l & 4l^2 & & & \\ & 54 & 13l & 156 & & \\ -13l & -3l & -22l & 4l^2 & & \end{bmatrix} \\ [C^*] &= \frac{rl}{420} \begin{bmatrix} 156 & & & & & \\ & 22l & 4l^2 & & & \\ & 54 & 13l & 156 & & \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 & & \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (9.38)$$

至于激振力列阵 $\{R^*\}$ 也应包含 4 个元素

$$\{R^*\} = \int_0^l [N]^T R_y dx = \int_0^l [N_{i,v} \ N_{i,\theta} \ N_{j,v} \ N_{j,\theta}]^T R_y dx \quad (9.39)$$

例如 $R_y = CP(t)$, 则通过上式算出 $\{R^*\}$ 如下

$$\{R^*\} = \begin{Bmatrix} R_{i,v}^* \\ R_{i,\theta}^* \\ R_{j,v}^* \\ R_{j,\theta}^* \end{Bmatrix} = \frac{Cl}{2} P(t) \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{l}{6} \\ 1 \\ -\frac{l}{6} \end{Bmatrix}$$

利用拉格朗日方程求得的单元运动方程式如写成矩阵形式, 仍和以前求得的 (9.24) 式一样, 但现在的基本未知量有 4 个, 即 $v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$, 所以矩阵方程式所代表的是四元联立的二阶常微分方程组。

在线弹性范围内, 只要将以上分别对于纵向振动和横向振动杆单元求得的各个矩阵和方程简单叠加就可得到两种振动同时发生的一般情况下的杆单元的矩阵和方程。首先以插值函数矩阵 $[N]$ 为例来说明如何叠加。

一般情况下, 杆单元的未知位移函数是 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$, 因为它们互不耦合, 则可引用前面的结果

$$\begin{aligned} u &= N_{iu}u_i + N_{ju}u_j \\ v &= N_{iv}v_i + N_{i\theta}\theta_i + N_{jv}v_j + N_{j\theta}\theta_j \end{aligned}$$

将它们写成矩阵形式, 并引入位移函数列阵 $\{f\}$, 则

$$\{f\} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{iu} & 0 & 0 & N_{ju} & 0 & 0 \\ 0 & N_{iv} & N_{i\theta} & 0 & N_{jv} & N_{j\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (9.40)$$

如仍写成标准形式

$$\{f\} = [N_i \quad N_j] \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} = [N] \{q^*\} \quad (9.41)$$

和以前不同的是 $[N]$ 、 $\{q^*\}$ 或 $[N_i]$ 、 $[N_j]$ 、 $\{q_i\}$ 、 $\{q_j\}$ 的行数和列数扩大了。

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_{iu} & 0 & 0 \\ 0 & N_{iv} & N_{i\theta} \end{bmatrix} \quad \{q_i\} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad (s = i, j) \quad (9.42)$$

$[N_i]$ 的行数和列数是以前两种情况 $[N_s]$ 行数和列数的叠加, 而扩大后的 $[N_s]$ 中, 除原来的元素 N_{iu} 、 N_{iv} 、 $N_{i\theta}$ 而外, 其他元素都是 0。至于结点位移列阵 $\{q_s\}$ 仍保持一列, 只是把前两种的结点位移列阵的元素简单叠加起来。

经过类似的分析,可以得到叠加两种简单情况后的杆单元的有关方程。

应变位移关系仍表示为

$$\{\epsilon\} = [B]\{q^*\}$$

但应变列阵

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \chi \end{bmatrix} \quad (9.43)$$

应变位移关系矩阵仍表示为 $[B] = [B_i \ B_j]$

但

$$[B_s] = \begin{bmatrix} B_{su} & 0 & 0 \\ 0 & B_{sv} & B_{s\theta} \end{bmatrix} \quad (s = i, j) \quad (9.44)$$

应力应变关系仍表示为

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$$

但应力列阵

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} X \\ M \end{bmatrix} \quad (9.45)$$

应力应变关系矩阵

$$[D] = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EJ \end{bmatrix} \quad (9.46)$$

运动方程式仍表示为

$$[M^*]\{\ddot{q}^*\} + [C^*]\{\dot{q}^*\} + [K^*]\{q^*\} = \{F^*\} + \{R^*\}$$

但 $[M^*]$ 、 $[C^*]$ 、 $[K^*]$ 都是 6×6 矩阵, 它们的子矩阵都是 3×3 矩阵, 以 $[K^*]$ 为例

$$[K_{rs}^*] = \begin{bmatrix} K_{rs}^{(l)} & 0 \\ 0 & K_{rs}^{(t)} \end{bmatrix} \quad (r, s = i, j) \quad (9.47)$$

其中上标 (l) 表示是纵向振动杆单元刚度矩阵的元素, (t) 表示是横向振动杆单元刚度矩阵的子矩阵。

对于等截面杆, 两种情况叠加后,

$$\begin{aligned}
 [M^*] &= \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 140 & & & & & & \\ 0 & 156 & & & & & \\ 0 & 22l & 4l^2 & & & & \\ 70 & 0 & 0 & 140 & & & \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & & \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 & \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{对} \\ \text{称} \end{array} \right\} \\
 [K^*] &= \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{J} & & & & & & \\ 0 & 12 & & & & & \\ 0 & 6l & 4l^2 & & & & \\ -\frac{Al^2}{J} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{J} & & & \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & & \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 & \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{对} \\ \text{称} \end{array} \right\} \quad (9.48)
 \end{aligned}$$

$[C^*]$ 和 $[M^*]$ 相同，只是系数 m 换为 r 。

$$\text{另外} \quad \{F^s\} = \begin{bmatrix} F_i^s \\ F_j^s \end{bmatrix} \quad \{F_s^s\} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ M_s \end{bmatrix} \quad (s = i, j) \quad (9.49)$$

$$\{R^s\} = \begin{bmatrix} R_i^s \\ R_j^s \end{bmatrix} \quad \{R_s^s\}_{s \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [N_s]^T \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} dx \quad (s = i, j) \quad (9.50)$$

(3) 座标转换

在将单元的运动方程集成结构的运动方程进行求解以前，我们需要考虑座标的转换。因为在单元特性分析的步骤中，为了方便，使用了与单元相联结的局部座标系（在现在讨论的杆单元中是把座标原点放在单元左端， x 轴沿着杆单元的轴线），显然这样的局部座标系对于不同单元是不同的，所以在进行结构分析之

前, 必须将表征单元特性的各个方程转换到和整个结构系统联结的总体坐标系。

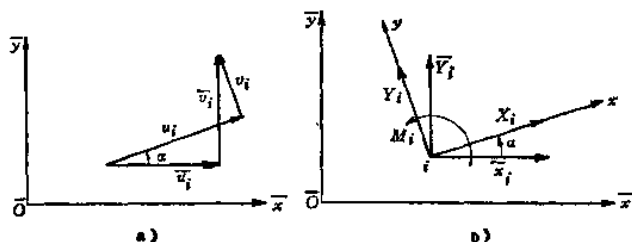


图 9-5

假定局部坐标系 xOy 和总体坐标系 $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ 的关系如图 9-5 所示, 则对于在平面内作一般运动的杆单元, 两个坐标系中结点位移有如下关系

$$\begin{aligned} \{q_i\} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \end{bmatrix} \\ &= [I] \{\bar{q}_i\} \end{aligned} \quad (9.51)$$

矩阵 $[I]$ 称为座标转换矩阵。 $\{q_i\}$ 和 $\{\bar{q}_i\}$ 之间有同样的关系, 所以 $\{q^e\}$ 和 $\{\bar{q}^e\}$ 之间的关系如下

$$\{q^e\} = \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [I] \end{bmatrix} \{\bar{q}^e\} = [L] \{\bar{q}^e\} \quad (9.52)$$

其中 0 是 3×3 的零矩阵。

将上式代入单元的动能表达式

$$\begin{aligned} T^e &= \frac{1}{2} \{\dot{q}^e\}^T [M^e] \{\dot{q}^e\} = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{q}}^e\}^T [L]^T [M^e] [L] \{\dot{\bar{q}}^e\} \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{\bar{q}}^e\}^T [\bar{M}^e] \{\dot{\bar{q}}^e\} \end{aligned} \quad (9.53)$$

这样我们就得到了总体坐标系中的单元动能表达式。总体坐标系

中的单元质量矩阵 $[\bar{M}^e]$ 和局部坐标系中的单元质量矩阵 $[M^e]$ 之间的关系如下:

$$[\bar{M}^e] = [L]^T [M^e] [L] \quad (9.54)$$

类似地可以得到总体坐标系中的单元弹性势能表达式

$$U^e = \frac{1}{2} \{\bar{q}^e\}^T [\bar{K}^e] \{\bar{q}^e\} \quad (9.55)$$

其中

$$[\bar{K}^e] = [L]^T [K^e] [L]$$

经类似的步骤可得总体坐标系中的广义力

$$\{\bar{Q}^e\} = \{\bar{F}^e\} + \{\bar{R}^e\} - \{\bar{C}^e\} \{\bar{q}^e\} \quad (9.56)$$

其中

$$\{\bar{R}^e\} = [L]^T \{R^e\}$$

$$\{\bar{F}^e\} = [L]^T \{F^e\}$$

$$[\bar{C}^e] = [L]^T [C^e] [L]$$

将 (9.53)、(9.55)、(9.56) 等式代入拉格朗日方程式, 就可得到总体坐标系中的单元运动方程式

$$\begin{aligned} & [\bar{M}^e] \{\bar{\ddot{q}}^e\} + [\bar{C}^e] \{\bar{\dot{q}}^e\} + [\bar{K}^e] \{\bar{q}^e\} \\ &= \{\bar{F}^e\} + \{\bar{R}^e\} \end{aligned} \quad (9.57)$$

上式和局部坐标系中的单元运动方程式在形式上是完全相同的, 只需按 (9.54)、(9.55)、(9.56) 等式将 $[M^e]$ 、 $[C^e]$ 、 $[K^e]$ 、 $\{F^e\}$ 和 $\{R^e\}$ 转换到总体坐标系即可。

以下以图 9-3 所示结构的单元 (1)、(2)、(4)、(5) 为例, 写出它们的转换矩阵 $[L]$ 和总体坐标系中的 $[\bar{M}^e]$ 、 $[\bar{C}^e]$ 和 $[\bar{K}^e]$ 。

对于单元 (1)、(2)、(4)、(5), 局部坐标系的原点分别放在结点 1、2、3、4, 则它们的转换矩阵是相同的,

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按 (9.54) 式计算 $[\bar{M}^e]$

$$[\bar{M}^e] = [L]^T [M^e] [L]$$

$$= \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 140 & & & & & \\ 0 & 156 & & & & \\ 0 & 22l & 4l^2 & & & \\ 70 & 0 & 0 & 140 & & \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & & & & & \\ 0 & 140 & & & & \\ -22l & 0 & 4l^2 & & & \\ 54 & 0 & -13l & 156 & & \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 140 & \\ 13l & 0 & -3l^2 & 22l & 0 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

同样按 (9.55) 式计算得到

$$[\bar{K}^e] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & \\ 0 & \frac{Al^2}{J} & & & & \\ -6l & 0 & 4l^2 & & & \\ -12 & 0 & 6l & 12 & & \\ 0 & -\frac{Al^2}{J} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{J} & \\ -6l & 0 & 2l^2 & 6l & 0 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$[C^e]$ 和 $[M^e]$ 相同,只是系数 m 换为 ν 。

为了下一步进行结构分析的需要,还可将(9.57)式写成子矩阵的形式

$$\left. \begin{aligned} & [M_{ii}^e]\{\ddot{q}_i\} + [M_{ij}^e]\{\ddot{q}_j\} + [C_{ii}^e]\{\dot{q}_i\} + [C_{ij}^e]\{\dot{q}_j\} \\ & \quad + [\bar{K}_{ii}^e]\{\bar{q}_i\} + [\bar{K}_{ij}^e]\{\bar{q}_j\} \\ & = \{\bar{F}_i^e\} + \{\bar{R}_i^e\} \\ & [M_{ji}^e]\{\ddot{q}_i\} + [M_{jj}^e]\{\ddot{q}_j\} + [C_{ji}^e]\{\dot{q}_i\} + [C_{jj}^e]\{\dot{q}_j\} \\ & \quad + [\bar{K}_{ji}^e]\{\bar{q}_i\} + [\bar{K}_{jj}^e]\{\bar{q}_j\} \\ & = \{\bar{F}_j^e\} + \{\bar{R}_j^e\} \end{aligned} \right\} \quad (9.58)$$

(4) 结构的综合分析

在进行单元组合体的结构系统的综合分析以前,还需要做一项准备工作,即建立起单元系统中的结点编号和结构系统中的结点编号之间的对应关系。对于图9-3所示结构,这种关系如表

表 9.1

单元编号	结 点	编 号
	单元系统	结构系统
(1)	i	1
	j	3
(2)	i	2
	j	4
(3)	i	3
	j	4
(4)	i	3
	j	5
(5)	i	4
	j	6
(6)	i	5
	j	7
(7)	i	7
	j	6

9.1, 以单元 (7) 为例, 表中记明单元系统中的结点 i 和结点 j 在结构系统中的编号分别是 7 和 6, 另一方面以结构系统中的结点 3 为例, 表中记明它是单元 (1) 的结点 i , 单元 (3) 的结点 j 和单元 (4) 的结点 i 的联结点。所以建立了表 9.1, 就清楚地记明了单元系统和结构系统之间结点编号的对应关系。

建立结构系统的运动方程式仍是运用拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}_i\}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \{q_i\}} + \frac{\partial U}{\partial \{q_i\}} = \{Q_i\}$$

$$(s = s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_d) \quad (9.59)$$

其中 T 是结构系统的总动能

$$T = \sum_{e=1}^m T^{(e)} \quad (9.60)$$

U 是结构系统的总弹性势能

$$U = \sum_{e=1}^m U^{(e)} \quad (9.61)$$

d 是结构的可动结点总数, s_i 是可动结点的编号, m 是结构的单元总数。以 $s_1 = 3$ 为例, (9.59) 式的展开形式如下

$$\begin{aligned} & [\bar{M}_{ij}^{(1)}] \{\ddot{q}_1\} + ([\bar{M}_{ij}^{(2)}] + [\bar{M}_{ij}^{(3)}] + [\bar{M}_{ij}^{(4)}]) \{\ddot{q}_3\} \\ & + [\bar{M}_{ij}^{(5)}] \{\ddot{q}_4\} + [\bar{M}_{ij}^{(6)}] \{\ddot{q}_6\} + [\bar{C}_{ij}^{(1)}] \{\dot{q}_1\} + ([\bar{C}_{ij}^{(2)}] \\ & + [\bar{C}_{ij}^{(3)}] + [\bar{C}_{ij}^{(4)}]) \{\dot{q}_3\} + [\bar{C}_{ij}^{(5)}] \{\dot{q}_4\} + [\bar{C}_{ij}^{(6)}] \{\dot{q}_6\} \\ & + [\bar{K}_{ij}^{(1)}] \{q_1\} + ([\bar{K}_{ij}^{(2)}] + [\bar{K}_{ij}^{(3)}] + [\bar{K}_{ij}^{(4)}]) \{q_3\} \\ & + [\bar{K}_{ij}^{(5)}] \{q_4\} + [\bar{K}_{ij}^{(6)}] \{q_6\} \\ & = \{\bar{R}_{ij}^{(1)}\} + \{\bar{R}_{ij}^{(2)}\} + \{\bar{R}_{ij}^{(3)}\} \end{aligned} \quad (9.62)$$

因为 $\{\bar{F}^e\}$ 、 $\{\bar{F}\}$ 对于结构来说是内力, 所以在结构运动方程式中不出现。从上式可以看到 $\{\ddot{q}_3\}$ 、 $\{\dot{q}_3\}$ 、和 $\{q_3\}$ 前的系数和项数决定于与结点 3 相关的单元数, 右端激振力列阵的项数也决定于与结点 3 相关的单元数, 从表 9.1 可查到与结点 3 相关的单元是 (1)、(3)、(4), 它们和结点 3 相联结的结点在单元系统中

分别是 j 、 i 和 i ，所以 $\{\bar{q}_3\}$ 前是 $[\bar{M}'']$ 、 $[\bar{M}']$ 和 $[\bar{M}]$ 三项， $\{\bar{q}_1\}$ 、 $\{\bar{q}_2\}$ 前的项同理可以写出。进入此方程的其他结点位移 $\{\bar{q}_1\}$ 、 $\{\bar{q}_2\}$ 、 $\{\bar{q}_3\}$ 及其对时间的一阶、二阶导数是决定于与结点 3 相关的结点，从表 9.1 可以查到通过单元 (1)、(3)、(4) 和结点 3 相关的结点分别是 1、4、5，并且这些结点在各自的单元系统中的编号分别是 i 、 j 、 j ，所以 $[\bar{M}'']\{\bar{q}_1\}$ 、 $[\bar{M}']\{\bar{q}_1\}$ 、 $[\bar{M}]\{\bar{q}_1\}$ 、 $[\bar{C}']\{\bar{q}_1\}$ 、 \dots 、 $[\bar{K}']\{\bar{q}_1\}$ 进入了此方程。

对于 $s_i = 4, 5, 6, 7$ 可以得到类似下 (9.62) 式的运动方程。因为结点 1、2 是固定结点，因之 $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 0$ ，所以还应从各个方程中消去包含有 \bar{q}_1 、 \bar{q}_2 及其对时间的一阶、二阶导数的各项。最后将所得的各个方程集合在一起，写成矩阵的形式，就是结构系统的运动方程式，亦即 (9.59) 式的矩阵形式

$$[\bar{M}]\{\ddot{\bar{q}}\} + [\bar{C}]\{\dot{\bar{q}}\} + [\bar{K}]\{\bar{q}\} = \{\bar{R}\} \quad (9.63)$$

其中 $[\bar{M}]$ 是结构的质量矩阵， $[\bar{C}]$ 是结构的阻尼矩阵， $[\bar{K}]$ 是结构的刚度矩阵， $\{\bar{R}\}$ 是结构的激振力列阵。如可动结点数是 d ，每个结点的广义位移数是 n_i ，则结构的总自由度数 $n = d \times n_i$ ，(对于图 9-3 示例， $d = 5$ ， $n_i = 3$ ， $n = 15$) $[\bar{M}]$ 、 $[\bar{C}]$ 和 $[\bar{K}]$ 也就都是 $n \times n$ 方阵， $\{\bar{R}\}$ 是 n 阶列阵。

另一方面还可以认为 $[\bar{M}]$ 、 $[\bar{C}]$ 、 $[\bar{K}]$ 和 $\{\bar{R}\}$ 是由每一单元的 $[\bar{M}^e]$ 、 $[\bar{C}^e]$ 、 $[\bar{K}^e]$ 和 $\{\bar{R}^e\}$ ($e = 1, 2, \dots, m$) 集成的，以单元 (4) 的质量矩阵 $[\bar{M}^{(4)}]$ 为例，从表 9.1 可以查到，单元 (4) 的结点 i 、 j 在结构系统中的编号是 3、5，所以 $[\bar{M}^{(4)}]$ 对于 $[\bar{M}]$ 的贡献是将 $[\bar{M}^{(4)}]$ 加到 $[\bar{M}]$ 的第 3 行第 3 列， $[\bar{M}^{(4)}]$ 加到 $[\bar{M}]$ 的第 3 行第 5 列， $[\bar{M}^{(4)}]$ 加到 $[\bar{M}]$ 的第 5 行第 3 列， $[\bar{M}^{(4)}]$ 加到 $[\bar{M}]$ 的第 5 行第 5 列。类似地可以将其他单元的 $[\bar{M}^e]$ 加到 $[\bar{M}]$ 上，在求解前划去和固定结点 1、2 相对应的第 1、2 行和 1、2 列，这样就得到最后用于求解的结构运动方程中的 $[\bar{M}]$ 如下

$$\{\bar{M}\} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{11}^{(1)} + \bar{M}_{12}^{(3)} + \bar{M}_{11}^{(4)} & \bar{M}_{12}^{(3)} & \bar{M}_{12}^{(4)} & 0 & 0 \\ \bar{M}_{21}^{(3)} & \bar{M}_{12}^{(2)} + \bar{M}_{12}^{(3)} + \bar{M}_{11}^{(2)} & 0 & \bar{M}_{12}^{(5)} & 0 \\ \bar{M}_{21}^{(4)} & 0 & \bar{M}_{12}^{(4)} + \bar{M}_{11}^{(6)} & 0 & \bar{M}_{12}^{(6)} \\ 0 & \bar{M}_{12}^{(5)} & 0 & \bar{M}_{12}^{(5)} + \bar{M}_{12}^{(7)} & \bar{M}_{12}^{(7)} \\ 0 & 0 & \bar{M}_{12}^{(6)} & \bar{M}_{12}^{(7)} & \bar{M}_{12}^{(6)} + \bar{M}_{12}^{(7)} \end{bmatrix}$$

以上所说的行和列，都是指分块矩阵形式的行和列，在现在讨论的情况，每一行实际是三行，每一列实际也是三列。

用同样的方法，可以形成 $[\bar{C}]$ 、 $[\bar{K}]$ 和 $\{\bar{R}\}$ ，实际上 $[\bar{C}]$ 、 $[\bar{K}]$ 的形式和 $[\bar{M}]$ 相同，只要在式中将字母 M 换为 \bar{C} 和 \bar{K} ，就是矩阵 $[\bar{C}]$ 和 $[\bar{K}]$ 。

到此为止，我们通过一个平面刚架的例子，完成了有限单元法分析的各个步骤和一些基本概念的叙述。这些概念和分析步骤对于其他结构系统的振动问题也是适用的。其特殊和关键之处仅在于单元形式和位移插值函数的选择，这将在以后各节中进一步看到。从以上分析中还可看到，因为有限单元法的实质是将一个连续体的振动问题离散化为一个有限自由度系统的振动问题，最后得到的结构系统的运动方程式(9.63)和第六章的多自由度系统的运动方程式是完全一致的。所以第六章关于多自由度系统振动性质的讨论，固有频率和主振型以及在激振力作用下结构响应的求解方法等对于现在的情况也是完全适用的。例如对于结构系统求解固有频率和主振型的问题经过和第六章中相同的分析步骤也是归结为求解以下的方程

$$[\bar{K}]\{A\} = p^2[\bar{M}]\{A\} \quad (9.64)$$

其中 $\{A\}$ 是位移列阵 $\{\bar{q}\}$ 的振幅列阵，即主振型， p 是固有频率。

因为有限单元法所处理的问题中，一般情况下矩阵具有大型、稀疏、带状的特点，所以需要引入一些适宜于电子计算机上求解的有效的计算方法，在下一章中我们将对常用的矩阵反迭代法和子空间迭代法进行简要的介绍，并附有这两种方法的标准过程。

例 9.1 图 9-3 所示平面刚架结构，给定各个单元的参数如下：各单元的截面尺寸、材料弹性模量，单位长度的质量均相同， $A = 2 \times 2 \text{ cm}^2$ ， $E = 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ， $m = 0.32616 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}^2$ ，各单元的长度分别是： $l_1 = l_2 = l_4 = l_5 = 20 \text{ cm}$ ， $l_3 = 40 \text{ cm}$ ， $l_6 = l_7 = 23.094 \text{ cm}$ 。

按以上各节所述步骤形成结构系统的运动方程 (9.64) 式以后, 采用 G-H 方法 (见第十章 10.2 (3) 节) 在电子计算机上算得各阶频率如下:

113.7, 398.8, 440.4, 872.0, 1221.8, 1660.4, 1930.3, 2842.4, 2943.5, 4055.5, 4117.8, 5041.4, 6785.3, 8767.9, 10448 (Hz), 在图 9-6 上表示出前 6 阶主振型的示意图。

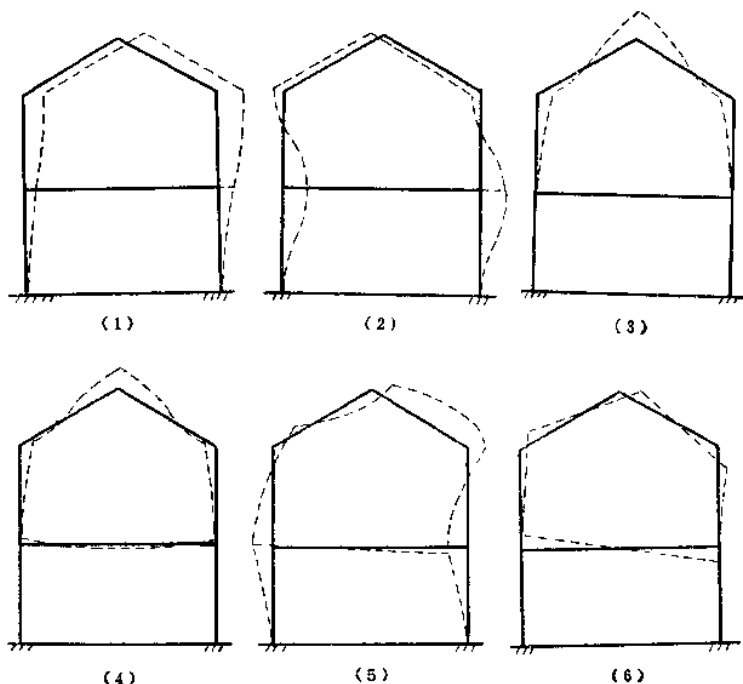


图 9-6

9.3 平面内振动问题

在本章开始就曾指出一个平面的弹性连续体的单元划分, 不像杆件系统那样自然, 它可以采用不同形式的单元, 最通常也是最简单的是三结点的三角形单元。图 9-2 所示是一水坝及其截面

的单元划分图。在三角形的每一顶点放置一结点，通过结点将各单元联结起来。

现取一个代表性的单元 i 、 j 、 m 为例（见图 9-7）进行单元的特性分析。

首先是确定插值函数矩阵 $[N]$ ，因为单元内任一点的位移 u 、 v 是分别由它在三个结点的数值确定的，所以 u 、 v 的插值公式可表示成

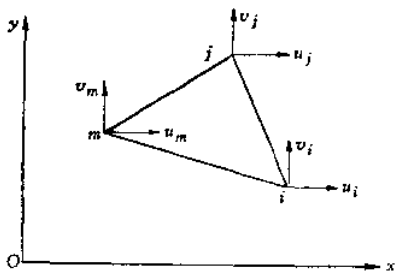


图 9-7

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= N_i(x, y)u_i(t) + N_j(x, y)u_j(t) \\ &\quad + N_m(x, y)u_m(t) \\ v(x, y, t) &= N_i(x, y)v_i(t) + N_j(x, y)v_j(t) \\ &\quad + N_m(x, y)v_m(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.65)$$

以 $N_i(x, y)$ 为例显然应满足以下条件

$$\left. \begin{aligned} N_i(x_i, y_i) &= 1 \\ N_i(x_j, y_j) &= 0 \\ N_i(x_m, y_m) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.66)$$

如果 $N_i(x, y)$ 仍采用幂多项式的形式，因为 $N_i(x, y)$ 是 x 、 y 的函数，所以 $N_i(x, y)$ 只能取为 x 、 y 的一次式，即

$$N_i(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (9.67)$$

对上式运用条件 (9.66)，就得到

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i &= 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m &= 0 \end{aligned}$$

解上列联立方程，可得

$$\alpha_1 = a_i/2\Delta, \quad \alpha_2 = b_i/2\Delta, \quad \alpha_3 = c_i/2\Delta \quad (9.68)$$

其中

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = y_j - y_m$$

$$c_i = x_m - x_j$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \text{三角形 } ijm \text{ 的面积}$$

将 α_1 、 α_2 、 α_3 代入原式 (9.67)，则得到

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (9.69)$$

类似地可以求得

$$\begin{aligned} N_j(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) \\ N_m(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_m + b_m x + c_m y) \end{aligned} \quad (9.70)$$

其中 a_i 、 b_i 、 c_i 、 a_m 、 b_m 、 c_m 可用轮换 (9.68) 式下标的方法得到。将求到的 $N_i(x, y)$ 、 $N_j(x, y)$ 、 $N_m(x, y)$ 代回 (9.65) 式，并进一步将它们写成标准的矩阵形式如下

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N, I \quad N_j I \quad N_m I] \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_m \end{Bmatrix} = [N]\{q^e\} \quad (9.71)$$

其中 I 是 2×2 的单位矩阵

$$\{q_s\} = \begin{Bmatrix} u_s \\ v_s \end{Bmatrix} \quad (s = i, j, m)$$

其次是确定应变位移关系矩阵 $[B]$ 和应力应变关系矩阵 $[D]$ 。

平面问题的应变位移关系是

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (9.72)$$

将 (9.71) 式代入上式, 就得到

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q^e\} \quad (9.73)$$

其中

$$[B] = [B_i \quad B_j \quad B_m]$$

$$\text{而} \quad [B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}$$

B_j 、 B_m 可用轮换下标得到。

对于平面问题, 应力应变关系可表示为

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} \quad (9.74)$$

其中应力应变关系矩阵 $[D]$ 对于平面应力问题是

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (9.75)$$

对于平面应变问题, 只需将上式中 E 换成 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu}$, 就可得到相应的应力应变关系矩阵。

在求得 $[N]$ 、 $[B]$ 和 $[D]$ 以后, 我们就可利用标准化的公式计算 $[K^e]$ 、 $[C^e]$ 、 $[M^e]$ 和 $\{R^e\}$ 。因为单元的结点参数是 6 个,

所以它们分别是 6×6 矩阵和 6×1 列阵。例如

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix} = t\Delta [B]^T [D] [B] \quad (9.76)$$

其中 t 是单元厚度, 对于平面应变问题 t 可取为 1, 每一个二阶子矩阵

$$[K_{rs}^e] = [B_r]^T [D] [B_s] t\Delta \quad (r, s = i, j, m)$$

如将它写成展开形式, 则对于平面应力问题

$$[K_{rs}^e] = \frac{Et}{4(1-\mu^2)\Delta} \times \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\mu}{2} c_r c_s & \mu b_r c_s + \frac{1-\mu}{2} c_r b_s \\ \mu c_r b_s + \frac{1-\mu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s \end{bmatrix} \quad (9.77)$$

$$(r, s = i, j, m)$$

对于平面应变问题, 则将上式中的 E 、 μ 换成 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 、 $\frac{\mu}{1-\mu^2}$ 。

如将 $[C^e]$ 、 $[M^e]$ 也写成如 $[K^e]$ 那样的分块形式, 则它们的子矩阵是

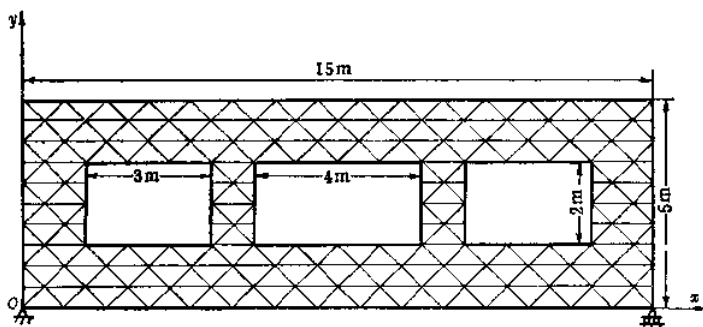
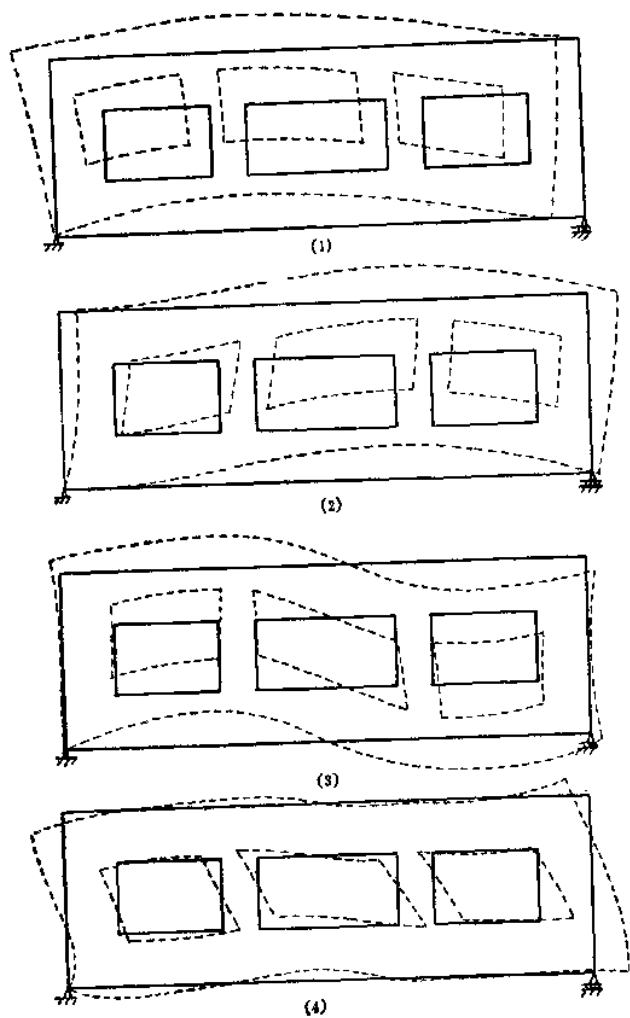
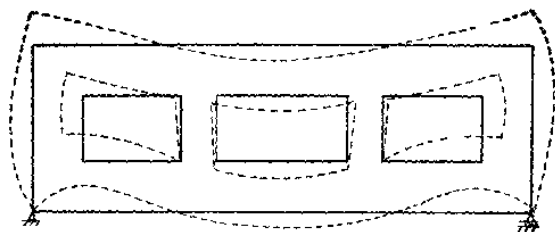


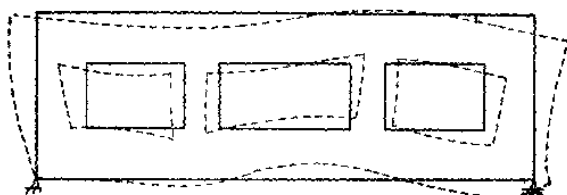
图 9-8



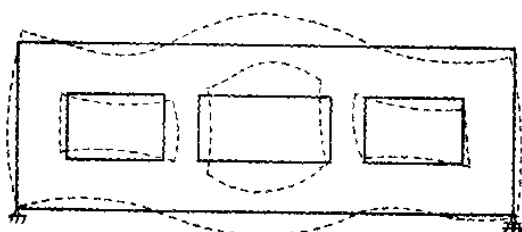
图



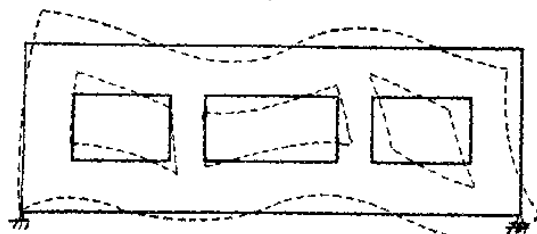
(6)



(6)



(7)



(8)

$$\begin{aligned} [C_{r,s}^*] &= \rho t [I] \left\{ \iint N_r N_s dx dy \right\} \\ [M_{r,s}^*] &= \rho t [I] \left\{ \iint N_r N_s dx dy \right\} \end{aligned} \quad (9.78)$$

其中 r 是单位速度情况下作用于单位体积上的阻尼力, ρ 是单位体积的质量。上式中插值函数的积分

$$\iint N_r N_s dx dy = \begin{cases} \frac{1}{12} \Delta & (\text{当 } r \neq s) \\ \frac{1}{6} \Delta & (\text{当 } r = s) \end{cases} \quad (9.79)$$

如用 M 表示单元的质量, 即 $M = \rho t \Delta$, 则可得到单元的质量矩阵

$$[M^*] = \frac{M}{12} \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 0 & 2 & & & \\ & 1 & 0 & 2 & & \\ & 0 & 1 & 0 & 2 & \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

对
称

类似地可写出 $[C^*]$ 的展开形式。至于 $\{R^*\}$ 应按具体给定的 $\{R\} = [R_x \ R_y]^T$ 由下式计算得到

$$\{R^*\} = \left\{ \iint [N]^T \{R\} dx dy \right\} \quad (9.80)$$

如在单元的 ij 边上作用有法向的激振力 $CP(t)$ (指向单元内部为正), 则按 (9.80) 式算得单元的激振力列阵

$$\{R^*\} = \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_m \end{Bmatrix} = \frac{CP(t)}{2} \begin{Bmatrix} y_i - y_j \\ x_j - x_i \\ y_i - y_j \\ x_j - x_i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

因为平面问题不必引入局部坐标, 同样可以方便地进行单元特性分析, 所以在 $[K^*]$ 、 $[M^*]$ 、 $[C^*]$ 和 $\{R^*\}$ 求得以后, 不必进行坐标转换, 就直接进入结构系统的综合分析。

例 9.2 图 9-8 所示是一平面构件的单元划分图, 共有 166 个结点, 242 个单元, 构件尺寸如图所示, 材料弹性模量 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = 0.3$, $\rho = 7.95109 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}^4$ 。在形成结构的运动方程式以后, 用矩阵反迭代法和子空间迭代法 (见第十章 10.2 (4) 和 (5) 节) 两种方法求解广义特征值问题, 求得了前 8 阶的频率和主振型, 在 6912 电子计算机上两种方法分别用了 25 分钟和 20 分钟。前 8 阶的频率为 32.96, 49.74, 94.19, 123.2, 150.7, 170.0, 191.7, 194.2 (Hz), 前 8 阶主振型的示意图表示在图 9-9 上。

9.4 薄板的横向振动

在薄板横向振动问题中, 通常是采用四边形或三角形的单元, 它们在角点相互联结。因为相邻单元之间有垂直于薄板中面的横向力和力矩作用, 所以应将每个结点看作刚结点。在图 9-10 上表示了薄板的矩形单元划分, 每个结点广义位移是三个, 即挠度 w , 绕 x 轴的转角 θ_x 和绕 y 轴的转角 θ_y 。在图 9-11 上表示出结点位移和相应的结点力的正方向。由几何关系得到 $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ 和

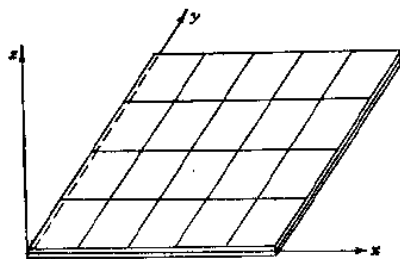


图 9-10

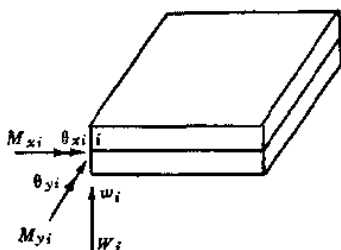


图 9-11

$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$ ，因此对于一个结点，它的位移可表示为

$$\{q_i\} = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{bmatrix} \quad (9.81)$$

相应的结点力为

$$\{F_i\} = \begin{bmatrix} W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{bmatrix} \quad (9.82)$$

在单元特性分析中，采用局部座标系如图 9-12 所示。单元的结点位移列阵为

$$\{q^e\} = [w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj}, w_m, \theta_{xm}, \theta_{ym}, w_p, \theta_{xp}, \theta_{yp}]^T$$

现以另一种方式确定其位移插值函数矩阵 $[N]$ ，因为单元内的任一点的挠度 w 应由这单元的 12 个结点位移确定，所以 w 必须包含 12 个参数，通常采用以下已被证明是较好的形式

$$\begin{aligned} w(x, y, z) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \\ & + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 \\ & + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \end{aligned} \quad (9.83)$$

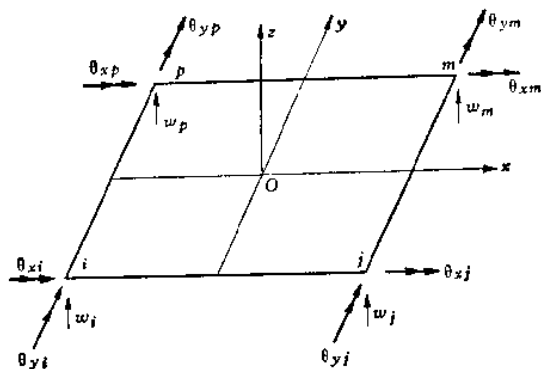


图 9-12

因此

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= -\frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy \\ &\quad + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2 \\ \theta_y &= -\frac{\partial w}{\partial x} = -\alpha_2 - 2\alpha_4 x - \alpha_6 y - 3\alpha_7 x^2 \\ &\quad - 2\alpha_8 xy - \alpha_9 y^2 - 3\alpha_{11} x^2 y - \alpha_{12} y^3 \end{aligned} \right\} \quad (9.84)$$

式中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{12}$ 都仅是时间 t 的函数，用各结点的座标值代入 (9.83)、(9.84) 式右端，则左端应是结点位移的数值，从这样得到的 12 个方程可以解出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{12}$ 。再回到 (9.83) 式并进一步整理可以得到以下的标准形式

$$w = [N]\{q^e\} \quad (9.85)$$

其中

$$[N] = [N, N_x, N_y, \dots, N_{y^3}]$$

式中的插值函数 $N, N_x, N_y, \dots, N_{y^3}$ 都是 x, y 的四次多项式，

$$\begin{aligned}
[N, N_{x_i}, N_{y_i}] &= \frac{X_1 Y_1}{16} [X_1 Y_1 - X_2 Y_2 + 2 X_1 X_2 \\
&\quad + 2 Y_1 Y_2 - 2 b Y_1 Y_2 - 2 a X_1 X_2] \\
[N, N_{x_i}, N_{y_i}] &= \frac{X_2 Y_1}{16} [X_2 Y_1 - X_1 Y_2 + 2 X_1 X_2 \\
&\quad + 2 Y_1 Y_2 - 2 b Y_1 Y_2 - 2 a X_1 X_2] \\
[N_m, N_{x_m}, N_{y_m}] &= \frac{X_2 Y_2}{16} [X_2 Y_2 - X_1 Y_1 + 2 X_1 X_2 \\
&\quad + 2 Y_1 Y_2 - 2 b Y_1 Y_2 - 2 a X_1 X_2] \\
[N_p, N_{x_p}, N_{y_p}] &= -\frac{X_1 Y_2}{16} [X_1 Y_2 - X_2 Y_1 + 2 X_1 X_2 \\
&\quad + 2 Y_1 Y_2 - 2 b Y_1 Y_2 - 2 a X_1 X_2]
\end{aligned} \quad (9.86)$$

其中 $X_1 = 1 - \frac{x}{a}, \quad X_2 = 1 + \frac{x}{a}$

$$Y_1 = 1 - \frac{y}{b}, \quad Y_2 = 1 + \frac{y}{b}$$

薄板的广义应变位移关系是

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (9.87)$$

将(9.85)式代入上式, 就可以得到

$$\{\epsilon\} = [B] \{q\} \quad (9.88)$$

其中

$$[B] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{x_i}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{y_i}}{\partial x^2} \dots & \frac{\partial^2 N_{y_p}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{x_i}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{y_i}}{\partial y^2} \dots & \frac{\partial^2 N_{y_p}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{x_i}}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{y_i}}{\partial x \partial y} \dots & 2\frac{\partial^2 N_{y_p}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

薄板的应力应变关系是

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

$$= [D]\{\epsilon\} \quad (9.89)$$

其中 $[D]$ 是薄板的应力应变关系矩阵

$$[D] = -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (9.90)$$

在求得 $[N]$ 、 $[B]$ 、 $[D]$ 以后,和以前一样,就可以利用标准化的公式求 $[K^e]$ 、 $[M^e]$ 、 $[C^e]$ 和 $\{R^e\}$ 等,其展开形式都比较冗长,这里就不列出了。

例 9.3 一悬臂矩形薄板,其长度 $l = 5.08\text{cm}$, 宽度 $b = 2.54\text{cm}$, 厚度 $t = 0.254\text{cm}$, $E = 2.10922 \times 10^8 \text{kg/cm}^2$, $\mu = 0.3$, 重度 $\gamma = 7.83344 \text{g/cm}^3$

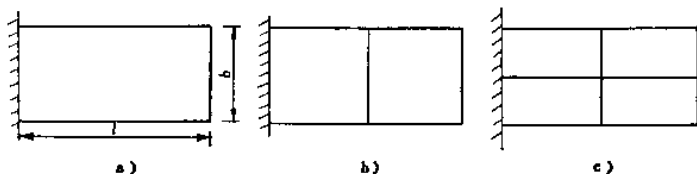


图 9-13

用两种方案计算横向振动的固有频率,一是将薄板划分成两个矩形单元,另一是将薄板划分成四个矩形单元(见图 9-13)。

计算所得的前四阶固有频率与准确值比较见表 9.2。

从上式可见,划分少量的单元,就能得到相当满意的结果。

① 上海复旦大学数学系应用数学教研组:《有限元法续讲(讲义)》(1972)。

若分成两个单元，在前四阶固有频率中计算值和准确值比较，最大偏差为 1.8%。而分成四个单元，最大偏差仅为 1.3%。

表 9.2

单位: Hz

频率阶数	准确值	有限单元法计算值	
		分成两个单元	分成四个单元
1	846	836	843
2	3638	3650	3648
3	5266	5252	5337
4	11870	12088	12049

由于矩形单元只能用于边界形状规则的问题，为了适应任意形状问题的需要，最好采用三角形单元，通常采用的也是三结点的三角形单元。由于每个结点有三个广义位移，则挠度 w 应是包含 9 个参数的多项式，但作为 x 、 y 的完整三次式却一共有 10 项，即

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3$$

从有限单元法的理论中可以知道，为保证解的收敛性，作为代表单元刚体位移的前三项和代表常曲率变化的次三项是必须保持的，但删去任何一个三次项，都将失去 x 和 y 的对称性，所以在插值函数的选择上发生了困难。采用面积坐标可以解决这个问题，如有需要可参看有关有限单元法的书籍^①。

① 华东水利学院：《弹性力学问题的有限单元法（修订版）》水利电力出版社（1978）。

第十章 用电子计算机解振动问题

10.1 引 言

就像固体力学的其他领域一样,随着电子计算机的广泛应用,有关振动计算的整个面貌已经焕然一新。原来,只有极其少量的典型结构元件能通过解析解计算出它们的振动特性,许多比较复杂一些的结构元件只能大加简化,再用近似方法求出比较粗糙的近似解。即使如此,对于并不十分复杂的结构,采用数值计算方法借助于电动计算机计算,其工作量往往就要以若干人月来计。如今,由于电子计算机的广泛应用,以及伴随着的适用于电子计算机的计算方法和计算机软件的发展,不仅可以计算各种形状复杂的结构元件的振动特性,能在计算时采用较少的简化,考虑较多的因素,以达到较高的精度,而且已经可以计算整个复杂的结构的振动特性,以及各种激振条件下的动力响应。以往用电动计算机需要若干人月完成的计算,用编好的程序在电子计算机上往往几十分钟甚至几分钟就能得到正确的结果。总之,用了电子计算机,解决问题的范围更广了,精度更高了,速度更快了。同时,也正是赖于电子计算机才使振动理论计算有可能更普遍地深入到工程实践中去。

由于上述原因,与电子计算机的应用有关的内容(包括有关的计算方法,有限元,标准程序等)已经成为近年新版的振动理论书籍的重要组成部分。而使用已有的程序,乃至编制某些不太复杂的程序去解决有关的振动问题将成为从事与振动理论分析有关工作的人员都应掌握的一种基本功。

限于本书的篇幅和任务,本章的目的只能是在读者初步掌握算法语言的基础上,提供一些入门的知识;使读者了解一些常用的振动计算程序的结构,涉及的常用计算方法;了解如何使用附

录中提供的常用过程去解决振动问题。在掌握这两方面的基本内容的基础上,使读者有可能参考有关资料对程序的某些部分进行修改,解决其他类似问题。

本书的程序一律采用ALGOL60算法语言,为了便于读者上机试算起见,本章还给出了计算实例。

10.2 用线性代数计算方法求解固有频率和主振型[⊖]

(1) 概述

前面第六章对于多自由度系统把求解固有频率与主振型的问题归结为求解如下的线性代数方程组

$$[K]\{A\} = p^2[M]\{A\} \quad (10.1)$$

其中 $[K]$ 为刚度矩阵, $[M]$ 为质量矩阵,前者对称,后者对称正定, $\{A\}$ 为位移列阵, p 为固有频率。这是一个线性代数方程组的广义特征值问题,也可以称作矩阵 $[K]$ 和 $[M]$ 的广义特征值问题。如前所述,这个问题还可化成矩阵 $[D]$ 的特征值问题

$$[D]\{A\} = \frac{1}{p^2}\{A\} \quad (10.2)$$

其中 $[D]$ 为动力矩阵。

此外,对于连续体的振动第八章通过李兹法,第九章通过有限元分析也化成了与(10.1)相同的问题。

由此可见,有关的线性代数计算方法对于振动计算具有极其重要的意义。从另一方面来看,由于线性代数已经提供了许多有效的计算方法,并且已经编制了相应的标准过程,因此对于振动计算而言只要建立了方程组,或者说形成了系数矩阵,就可借助于相应的标准过程进行求解。

用线性代数计算方法求解固有频率与主振型的计算程序的框图如图10-1所示。其中第一框,形成系数矩阵,通常需要根据具体问题自行编制。对于一些简单的多自由度问题可将系数矩阵作为原始数据输入,而对于有限元法计算的程序这部分将包括单

[⊖] 本节的(4)、(5)部分由本校郁吉仁同志完成的。

元刚度矩阵单元质量矩阵的计算与结构总刚度矩阵总质量矩阵的集成。由于这部分程序很难标准化,但是不涉及复杂的算法,所以在此不加详述,读者在掌握算法语言的基础上即可自行编制。

对于图中的第二框,解特征值问题,已有许多适用于不同问题的有效的算法,以及相应的标准过程可以选用。比如对于几个自由度到十几个自由度的系统可用矩阵迭代法求解(10.2),得到前几阶频率和主振型;对于几十个自由度的系统可将广义特征值问题(10.1)化为对称阵的特征值问题,然后用吉文斯-豪斯霍尔德方法(简称G-H法)求解全部或部分特

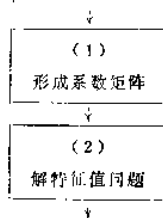


图 10-1

征系(即特征值和特征矢量);对于用有限元法得到的自由度数更多的系统的广义特征值问题可以用矩阵反迭代法或子空间迭代法……等。为了便于读者在解决不太复杂的问题时引用起见,本书的附录中给出了矩阵迭代法的过程(MAIT),用G-H法解广义特征值问题的四个过程(TRED2, TQL2, REDUC1, REBAK4)⊖,矩阵反迭代法的过程(MAIT1)以及子空间迭代法的过程(SMIT),下面对此分别作简单的介绍。有关的其他方法可参看专门的文献资料或参考书。

(2) 矩阵迭代法

矩阵迭代法是解特征值问题的算法中比较简单易懂的一种,它的原理在前面第六章已经作了相当详细的介绍,这里只是把有关计算公式归纳整理一下,便于读者和附录中的程序相对照。

对于(10.2)式所示的矩阵特征值问题

$$[D]\{A\} = \frac{1}{p^2}\{A\} \quad (a)$$

其中 $[D]$ 是 $n \times n$ 的动力矩阵, $\{A\}$ 是 $n \times 1$ 的位移列阵,如果假设了一个迭代起始列阵 $\{A\}_i$,那么就可以按照如下迭代公式进行计算

⊖ 这四个过程基本上引自[5]。

$$\{B\}_k = [D]\{A\}_k$$

$$\{A\}_{k+1} = \frac{1}{B_{n,k}} \{B\}_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (10.3)$$

其中 $B_{n,k}$ 是 $\{B\}_k$ 中的最后一个元素。同时在每次迭代中计算 $p_{(k)}^2 = \frac{1}{B_{n,k}}$ ，并把它和 $p_{(k-1)}^2$ 进行比较（为了在 $k=1$ 时进行比较起见不妨令 $p_{(0)}^2 = 0$ ），一旦达到了误差要求，即 $|p_{(k)}^2 - p_{(k-1)}^2| / p_{(k)}^2 < \delta$ ，则可以停止迭代。这时的 $\{A\}_{k+1}$ 就是求得的一个主振型，而固有频率则为

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{p_{(k)}^2} \quad (\text{Hz}) \quad (10.4)$$

如果上述计算中的 $[D]$ 是系统原始的动力矩阵，那么这里得到的是最低阶（第一阶）固有频率和相应的主振型。

当迭代结束算出了某一阶的固有频率与主振型之后，从动力矩阵 $[D]$ 中清除与上面算出的主振型有关的部分，就可以得到用于计算下一阶固有频率和主振型的动力矩阵 $[D^*]$ ，

$$[D^*] = [D] - \frac{1}{M_1 p_{(k)}^2} \{A\}_{k+1} \{A\}_{k+1}^T [M] \quad (10.5)$$

$$\text{其中} \quad M_1 = \{A\}_{k+1}^T [M] \{A\}_{k+1} \quad (10.6)$$

这些式子中的 $\{A\}_{k+1}$ ， $p_{(k)}^2$ 指的是上述迭代结束时算出的量， $[M]$ 是质量矩阵， $[D]$ 是前面用于迭代计算的动力矩阵。如果前面算出的是第一阶，它就是原始的动力矩阵，否则它已经是清除了与更低阶主振型有关的量之后的 $[D^*]$ 。

当得到了 $[D^*]$ 之后，如果再假设一个迭代起始列阵 $\{A\}_1$ ，并且以 $[D^*]$ 作为 $[D]$ ，然后重复从 (10.3) 式开始的过程，那么就可以得到下一阶固有频率和相应的主振型，并为更下一阶的计算准备好 $[D^*]$ 。

过程 *MAIT* 每调用一次就像上面所述的一样算出一阶固有频率和相应的主振型，并为下一阶的计算准备好 $[D^*]$ 。

在此需要指出的是，对于整个系统允许刚体运动的情况，刚度矩阵 $[K]$ 是半正定的，无法求逆，也就不能直接形成动力矩阵

$[D]$ ，于是不能直接使用上述算法。但是，如果把(10.1)式改为

$$([K] + \alpha [M])\{A\} = (p^2 + \alpha)[M]\{A\} \quad (b)$$

其中 α 为任意正数， $([K] + \alpha [M])$ 就是正定矩阵。若令

$$[D] = ([K] + \alpha [M])^{-1}[M] \quad (c)$$

把原问题改为

$$[D]\{A\} = \frac{1}{p^2 + \alpha}\{A\} \quad (10.7)$$

那么这一问题的特征矢量与原问题完全相同，只是把原问题中的 p^2 改为 $p^2 + \alpha$ ，这样的问题就不难用上述算法求解了。 α 的数值一般以取得比系统估计的最低固有频率的平方 p^2 略小一些为宜。在调用过程 *MAIT* 时，只要给定了 α 的数值，得到的就直接是原问题的固有频率。

此外还需指出，迭代起始列阵 $\{A\}_1$ 的给定不包含在过程 *MAIT* 之内，这样留给使用者自由选择的余地。如果使用者对此没有什么特殊的考虑，那么对于第一阶总是可以假设 $\{A\}_1$ 的所有元素全等于 1，其余各阶 $\{A\}_i$ 的元素可由 1 和 -1 组成，相应于每提高一阶使系统增加一个节点。

下面举两个计算实例：

例10.1 (即例6.1)

已知质量矩阵和刚度矩阵分别为

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

求该系统的各阶固有频率与主振型。

求解时首先要形成动力矩阵 $[D]$ ，由于该系统不允许刚体位移，因此可令 $\alpha = 0$ 。实际计算中矩阵求逆可借助于主元消去法解线性代数方程组过程 *ALG* 来进行（过程及说明见附录）。在 $[D]$ 形成之后，就可通过过程 *MAIT* 按上述方法求解。对于第一、二、三阶的迭代起始列阵 $\{A\}_i$ 分别可取 $[1 \ 1 \ 1]^T$ ，

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ 。具体计算程序可以列出如下:

```

begin
  array  M, K, D, AO[1:3, 1:3], S[1:3, 1:6], A, B[1:3];
  integer i, j, n; real  hz, g;
  procedure MAIT(n, dt, al, A, D, M, hz);
  .....          (MAIT 过程说明)
  end;
  procedure ALG(D, n, nn, g);
  .....          (ALG 过程说明)
  end;
  read(M, K, AO);
  for i := 1 step 1 until 3 do
  for j := 1 step 1 until 3 do
  begin
    S[i, j] := K[i, j];
    S[i, j + 3] := if i = j then 1 else 0
  end;
  ALG(S, 3, 3, g);
  for i := 1 step 1 until 3 do
  for j := 1 step 1 until 3 do
  begin
    D[i, j] := 0;
    for n := 1 step 1 until 3 do
      D[i, j] := D[i, j] + S[i, n + 3] × M[n, j]
    end;
  print(D);
  for n := 1 step 1 until 3 do
  begin
    for i := 1 step 1 until 3 do A[i] := AO[i, n];
    MAIT(3, 10 - 10, 0, A, D, M, hz);
  end;
end;

```

```
print(hz, A)
```

```
end end.
```

计算得到的各阶固有频率及主振型列于下面的表 10.1。

表 10.1

阶 次		1	2	3
固 有 频 率		0.0943511498	0.2017315804	0.2995301182
主 振 型	1	0.3018499536	-0.6789771753	2.434627518
	2	0.6485352722	-0.6065990923	-2.541936177
	3	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000

例10.2 一个柴油机动装置经简化为如图 10-2 所示的轴盘扭振系统[⊖],



图 10-2

其中盘的转动惯量 (单位为 $\text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2$) 为

$$I_1 = 35.52$$

$$I_2 = I_3 = \dots = I_6 = 18.92$$

$$I_{10} = 6.35, \quad I_{11} = 312.87$$

$$I_{12} = 10.77, \quad I_{13} = 157.05$$

轴段的柔度 (单位为 $1/\text{kg} \cdot 1/\text{cm}$) 为

$$e_{1,2} = 7.46 \times 10^{-9}$$

$$e_{2,3} = e_{3,4} = \dots = e_{8,9} = 9.16 \times 10^{-9}$$

$$e_{9,10} = 6.88 \times 10^{-9}, \quad e_{10,11} = 7.04 \times 10^{-9}$$

$$e_{11,12} = 25.51 \times 10^{-9}, \quad e_{12,13} = 926.56 \times 10^{-9}$$

⊖ 此例引自“应用电子计算机计算柴油机轴系扭振”上海柴油机厂, 上海计算中心, 复旦大学, 上海内燃机研究所, 1973.10。

求该系统的前七阶固有频率及主振型。

这个问题的质量矩阵、刚度矩阵和动力矩阵都是 13×13 的矩阵。由于该系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{13} I_i \dot{\varphi}_i^2$$

因此质量矩阵中所有非主对角元素均为零，而主对角元素则为

$$m_{ii} = I_i \quad (i = 1, 2, \dots, 13)$$

该系统的弹性势能为

$$U = \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{2e_{i,i+1}} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2$$

由此可知刚度矩阵的大部分元素也为零，其中的非零元素为

$$k_{ii} = \frac{1}{e_{i-1,i}} + \frac{1}{e_{i,i+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, 13)$$

$$k_{i+1,i} = k_{i,i+1} = -\frac{1}{e_{i,i+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, 12)$$

上面式中令 $-\frac{1}{e_{0,1}} = \frac{1}{e_{13,14}} = 0$ 。

由于该系统对于刚体转动没有约束，因此(c)式中的 α 不能取零，如果考虑到它的最低固有频率大约是十赫兹以上，不妨令 $\alpha = 1000$ 。由于这时算出的第一阶实际上是刚体转动，因此需要算八阶才能得到原系统的前七阶固有频率及主振型。

考虑到该系统的 $e_{12,13}$ 特别大， I_{13} 也比较大，不妨假设原系统一至七阶(即实际计算中二至八阶)的迭代起始列阵分别如下：

第一阶

$$\{A\}_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1]^T$$

第二阶

$$\{A\}_2 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1]^T$$

第三阶

$$\{A\}_3 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1]^T$$

第四阶

$$\{A\}_4 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1]^T$$

第五阶

$$\{A\}_5 = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1]^T$$

第六阶

$$\{A\}_6 = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1]^T$$

第七阶

$$\{A\}_7 = [1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T$$

计算所得结果列于表 10.2。

表 10.2

阶次	1	2	3	4	5	6	7
固有频率	14.8269	67.0926	171.899	283.525	313.213	394.690	498.461
主振型	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	2	0.9977	0.9529	0.6909	0.1591	-0.0262	-0.6296
	3	0.9934	0.8637	0.1717	-0.9610	-1.2687	-1.9595
	4	0.9876	0.7519	-0.3823	-1.5525	-1.6596	-1.2009
	5	0.9803	0.6149	-0.8589	-1.2901	-0.9366	0.8377
	6	0.9715	0.4590	-1.1619	-0.3182	0.4151	1.9834
	7	0.9612	0.2889	-1.2300	0.8287	1.4882	1.0152
	8	0.9496	0.1100	-1.0494	1.5199	1.5624	-1.0351
	9	0.9364	-0.0724	-0.6567	1.3751	0.5879	-1.9821
	10	0.9255	-0.2077	-0.2620	0.6983	-0.4404	-1.1067
	11	0.9140	-0.3444	0.1556	-0.0933	-1.4164	0.0934
	12	0.8090	-0.3515	0.2200	-0.5991	38.8290	-0.1410
	13	-3.0769	0.0141	-0.0013	0.0013	-0.0690	0.0002

(3) 吉文斯-豪斯霍尔德法 (G-H法)

G-H法原来是用于计算实对称矩阵的特征值问题的,它包括用豪斯霍尔德方法把矩阵化为三对角形式,求解三对角矩阵的特征值与特征矢量,以及由三对角阵的特征矢量求原实对称阵的特征矢量。但是由于在振动问题中常常直接得到如(10.1)式所示的

广义特征值问题

$$[K]\{A\} = p^2[M]\{A\} \quad (d)$$

因此这里把从广义特征值问题(d)化为实对称阵的特征值问题, 以及从实对称阵的特征矢量求原问题(d)的特征矢量的有关算法一起包括在内。

于是图 10-1 所示框图中的第二框又可分成图 10-3 所示的五框。其中每一框可以针对不同场合不同要求选用不同的程序, 比如对于满矩阵存贮或稀疏矩阵的带状存贮, 对于只求特征值或同时求特征值特征矢量, 对于求部分特征系或全部特征系, 都可选择不同的程序。

本书附录所引的四个过程是针对较少自由度系统满矩阵存贮求全部特征系的(其他有关过程可查阅本节前面所引资料)。过程 *REDUC1*, *TRED2*, *REBAKA*

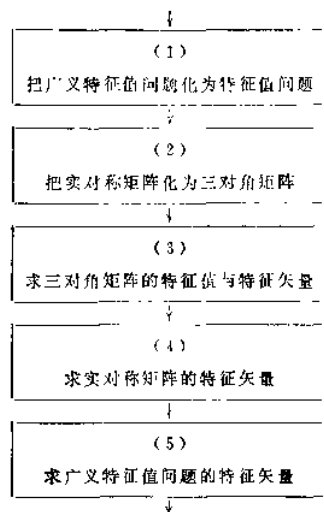


图 10-3

分别对应于图 10-3 的第 1, 2, 5 框, 而 *TQL2* 对应于第 3, 4 框。这些算法涉及许多线性代数的基本知识, 如果读者对此尚不熟悉可参看有关书籍^①。下面只是通过把有关计算公式归纳整理对算法作一简单介绍, 并便于读者和附录中的程序相对照。

把广义特征值问题化为特征值问题

对于(10.1)式所示的广义特征值问题, 由于其中 $[M]$ 为对称正定阵, 因此可以作如下的三角分解

$$[M] = [L][L]^T \quad (10.8)$$

这里的 $[L]$ 是下三角矩阵

① 可参看 Murdoch, D. C. 《Linear Algebra》, 1970;
Wilkinson, J. H. 《The Algebraic Eigenvalues Problem》1965.

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

它的各元素可以通过下列递推公式由 $[M]$ 的元素求得

$$\left. \begin{aligned} l_{ii} &= \sqrt{\left(m_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)} \\ l_{ji} &= \left(m_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} \right) / l_{ii} \\ &\quad (j = i+1, i+2, \dots, n) \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n) \quad (e)$$

将(10.1)式两端左乘 $[L]^{-1}$ ，并考虑到 $([L]^{-1})^T [L]^T = [L]^{-1} [L] = [I]$ ($[I]$ 为单位矩阵)，可以得到

$$[L]^{-1} [K] ([L]^{-1})^T [L]^T \{A\} = p^2 [L]^T \{A\} \quad (10.10)$$

于是原问题可化为如下矩阵 $[R]$ 的特征值问题

$$[R] \{X\} = \lambda \{X\} \quad (10.11)$$

$$\text{其中} \quad \lambda = p^2 \quad (10.12)$$

$$[R] = [L]^{-1} [K] ([L]^{-1})^T \quad (10.13)$$

$$\{X\} = [L]^T \{A\} \quad (10.14)$$

由于 $[K]$ 是实对称阵，不难证明通过(10.13)式变换得到的 $[R]$ 也是实对称阵，它的各元素可以由 $[K]$ 及 $[L]$ 的元素求得（详见附录中过程 REDUC1 的说明）。

把实对称矩阵化为三对角矩阵

把 n 阶实对称矩阵 $[R]$ 化为实对称三对角矩阵的豪斯霍尔德方法就是对 $[R]$ 进行如下 $n-2$ 次正交变换 \odot ：

$$[R]_{i+1} = [P]_i [R]_i [P]_i^T \quad (i = 1, 2, \dots, n-2) \quad (10.15)$$

\odot 若矩阵 $[P]$ 满足条件 $[P][P]^T = [I]$ ，即 $[P]^{-1} = [P]^T$ ，则称 $[P]$ 为正交矩阵，将一矩阵两端分别乘以 $[P]$ 、 $[P]^T$ 称为正交变换，例如(10.15)式所示。

其中 $[R]_i = [R]$, $[R]_{n-1}$ 即所得三对角阵,

$$\left. \begin{aligned} [P]_i &= [P]^T_i = [I] - \{u\}_i \{u\}_i^T / h_i \\ h_i &= \frac{1}{2} \{u\}_i^T \{u\}_i \\ \{u\}_i^T &= [r_{l,i,1}^{(i)}, r_{l,i,2}^{(i)}, \dots, r_{l,i,l-2}^{(i)}, r_{l,i,l-1}^{(i)} + \sigma_i, 0, \dots, 0] \\ &\quad (l = n - i + 1) \end{aligned} \right\} \quad (10.16)$$

这里 $r_{l,i,1}^{(i)}, \dots$ 等是 $[R]_i$ 的元素

$$\sigma_i = \pm \sqrt{(r_{l,i,1}^{(i)})^2 + (r_{l,i,2}^{(i)})^2 + \dots + (r_{l,i,l-1}^{(i)})^2} \quad (10.17)$$

σ_i 的符号从计算的稳定性考虑取得与 $r_{l,i,l-1}^{(i)}$ 的符号相同。

若令

$$\left. \begin{aligned} \{p\}_i &= [R]_i \{u\}_i / h_i \\ h_i &= \{u\}_i^T \{p\}_i / 2 \\ \{S\}_i &= \{p\}_i - h_i \{u\}_i \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

则可以得到

$$[R]_{i+1} = [R]_i - \{u\}_i \{S\}_i^T - \{S\}_i \{u\}_i^T \quad (10.19)$$

不难验证, 按上所述每作一次变换就能使矩阵的第 l 行和 l 列除主对角及次对角元素外都变为零。

由(10.15), (10.16)式可知

$$\begin{aligned} [R]_{n-1} &= [P]_{n-1} [P]_{n-2} \cdots [P]_1 [R] [P]_1 \cdots [P]_{n-2} \\ &= [P]^T [R] [P] \end{aligned} \quad (f)$$

$$\text{其中 } [P] = [P]_1 [P]_2 \cdots [P]_{n-2} \quad (10.20)$$

显然它也是正交矩阵。把(10.11)式两端左乘 $[P]^T$, 并考虑到 $[P][P]^T = [I]$, 可得

$$[P]^T [R] [P] [P]^T \{X\} = \lambda [P]^T \{X\} \quad (g)$$

$$\text{若令 } [P]^T \{X\} = \{Y\} \quad (10.21)$$

则(g)式可改写成

$$[R]_{n-1} \{Y\} = \lambda \{Y\} \quad (10.22)$$

于是实对称阵 $[R]$ 的特征值问题(10.11)又化成了实对称三对角阵的特征值问题(10.22)。具体计算步骤可见附录中过程 TRED2

的说明。

求三对角矩阵的特征值与特征向量

对于实对称三对角阵求特征值采用了带原点移动的 QL 法。

把前面得到的三对角阵 $[R]_{n-1}$ 记作 $[\bar{R}]_1$, 如果进行如下变换

$$\left. \begin{aligned} [Q]_s ([\bar{R}]_s - k_s [I]) &= [L]_s \\ [\bar{R}]_{s+1} &= [L]_s [Q]_s^T \quad (s = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

其中 $[Q]_s$ 为正交矩阵, $[L]_s$ 为下三角阵, 那么由 (10.22), (10.23) 式不难得到

$$\begin{aligned} & [\bar{R}]_{s+1} [Q]_s [Q]_{s-1} \cdots [Q]_1 \{Y\} \\ &= \left(\lambda - \sum_{i=1}^s k_i \right) [Q]_s [Q]_{s-1} \cdots [Q]_1 \{Y\} \quad (h) \end{aligned}$$

或者改写成

$$[\bar{R}]_{s+1} \{Y\}_s = \left(\lambda - \sum_{i=1}^s k_i \right) \{Y\}_s, \quad (10.24)$$

$$\text{其中} \quad \{Y\}_s = [Q]_s [Q]_{s-1} \cdots [Q]_1 \{Y\} \quad (10.25)$$

就是说, 矩阵序列 $\{[\bar{R}]_{s+1}\}$ 与 $[\bar{R}]_1 - \sum_{i=1}^s k_i [I]$ 的特征值相同。

作为 $[Q]_s$ 可以由如下所示正交矩阵的乘积来表示

$$[Q]_s = [\bar{Q}]_1^{(s)} [\bar{Q}]_2^{(s)} \cdots [\bar{Q}]_{n-1}^{(s)} \quad (10.26)$$

其中 $[\bar{Q}]_i^{(s)}$ 可按 $i = n-1, n-2, \dots, 1$ 的次序确定, 它是为了消去 $[\bar{Q}]_{i+1}^{(s)} [\bar{Q}]_i^{(s)} \cdots [\bar{Q}]_{n-1}^{(s)} ([\bar{R}]_i - k_i [I])$ 的 $(i, i+1)$ 元素而作的 $(i, i+1)$ 平面上的旋转变换, 即

$$[\bar{Q}]_i^{(s)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & C^{(s)} - S^{(s)} & & \\ & & S^{(s)} C^{(s)} & & \\ & 0 & & 1 & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdots \text{第 } i \text{ 行} \\ \cdots \text{第 } i+1 \text{ 行} \end{matrix} \quad (10.27)$$

不难验证, 如上确定的 $[Q]_s$ 满足 (10.23) 式的要求, 而且当进行上述变换后 $[\bar{R}]_{i+1}$ 仍为实对称阵, 它的非零元素仍只出现在三对角之内。

从 $[\bar{R}]_1$ 开始, 一般说来, 经过若干次变换之后 $[\bar{R}]_{s_{i+1}}$ 将变为如下形式:

$$[\bar{R}]_{s_{i+1}} = \begin{bmatrix} d_1^{(s_{i+1})} & 0 & & & \\ 0 & d_2^{(s_{i+1})} & e_2^{(s_{i+1})} & 0 & \\ & e_3^{(s_{i+1})} & d_3^{(s_{i+1})} & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & d_s^{(s_{i+1})} & 0 \end{bmatrix} \quad (i)$$

其中 $d_i^{(s_{i+1})}$, $e_i^{(s_{i+1})}$ 分别为 $[\bar{R}]_{s_{i+1}}$ 的第 i 个主对角与次对角元素, $e_1^{(s_{i+1})} = 0$ 。把 (i) 代入 (10.24) 式可以得到

$$\lambda_1 = d_1^{(s_{i+1})} + \sum_{i=1}^{s_1} k_i \quad (j)$$

相应的非零解为

$$\{Y\}_{s_1} = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]^T \quad (k)$$

这里的 λ_1 即求得的第一特征值, 也就是最小特征值。根据 (k) 和 (10.25) 可以求得相应的特征矢量 $\{Y\}_{(1)}$

$$\{Y\}_{(1)} = [Q]_1^T [Q]_2^T \cdots [Q]_{s_1}^T \{Y\}_{s_1} \quad (1)$$

接着可以从 $[\bar{R}]_{s_{i+1}}$ 开始, 继续进行前述变换 (实际上只需处理从第二行第二列开始的子矩阵), 直到使 $e_2^{(s_{i+1})} = 0$, 从而求得 λ_2 和 $\{Y\}_{(2)} \cdots$, 依次类推, 一般说来可以得到特征值问题 (10.22) 的从小到大的全部特征值与相应的特征矢量

$$\left. \begin{aligned} \lambda_j &= d_j^{(s_{i+1})} + \sum_{i=1}^{s_j} k_i \\ \{Y\}_{(j)} &= [Q]_1^T [Q]_2^T \cdots [Q]_{s_j}^T \{Y\}_{s_j} \\ &\quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \right\} \quad (10.28)$$

其中 $\{Y\}_{s_j}$ 除第 j 个元素等于 1 外其余元素均为零。

显然这里并没有介绍上述迭代过程收敛性的证明,对此有兴趣者可参看专门文献^①。具体计算过程,包括原点移动量 k 的选取等均可参看附录中过程TQL2的说明。

求实对称矩阵的特征矢量

由三对角阵的特征矢量求原来的实对称阵 $[R]$ 的特征矢量是不困难的。将(10.21)式两端分别左乘 $[P]$ 就可得到

$$\{X\} = [P]\{Y\} \quad (10.29)$$

因此只要保留豪斯霍尔德变换过程中的正交矩阵 $[P]$,就可由 $\{Y\}_{(j)}$ 直接求得 $[R]$ 的特征矢量 $\{X\}_{(j)}$ (这部分计算也归在过程TQL2之内)。

求广义特征值问题的特征矢量

由实对称矩阵 $[R]$ 的特征矢量 $\{X\}$ 求原广义特征值问题的特征矢量 $\{A\}$ 也比较简单,只要将(10.14)式对 $\{A\}$ 解出即可(具体公式见附录中过程REBAKA的说明)。

到此以(10.1)式的形式提出的振动问题基本上已得到解,它的各阶固有频率为

$$f_j = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_j} \quad (10.30)$$

而相应的振型可以根据不同问题的要求进行规格化。

为了说明有关过程的具体使用方法,下面举两个计算实例。

例10.3^②

$$[K]\{A\} = \lambda[M]\{A\}$$

其中 $[K] = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 12 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 11 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 15 \end{bmatrix}$

① 可参看H. Bowdler and others, "The QR and QL algorithms for symmetric matrices", Numer. Math., vol. 11, 1968, 293-306.

② 此例引自[5]。

$$[M] = \begin{bmatrix} 12 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 14 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 16 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 12 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

求全部特征系(该例供程序试算用,并非振动问题实例)。

利用上述四个过程求解的具体程序可以列出如下

```
begin
  array K, M, AA[1:5, 1:5], D, E, DL[1:5];
  procedure REDUC1 (n, K, M, DL);
  ..... (REDUC1 过程说明)
  end;
  procedure TRED2 (n, tol, R, D, E, P);
  ..... (TRED2 过程说明)
  end;
  procedure TQL2 (n, ep, D, E, P);
  ..... (TQL2 过程说明)
  end;
  procedure REBAKA (n, n1, n2, M, DL, X);
  ..... (REBAKA 过程说明)
  end;
  read(K, M);      print(K, M);
  REDUC1 (5, K, M, DL);
  TRED2 (5, 10-10, K, D, E, AA);
  TQL2 (5, 10-10, D, E, AA);
  REBAKA (5, 1, 5, M, DL, AA); print(D, AA)
end
```

计算得到的特征值与特征矢量列于表 10.3。

表 10.3

阶 次	1	2	3	4	5
特 征 值	0.4327872110 ₁₀ 00	0.6636627484 ₁₀ 00	0.9438590047 ₁₀ 00	0.1109284540 ₁₀ 01	0.1492353233 ₁₀ 01
特 征 矢 量	1	0.1345905740 ₁₀ 00	0.8291980649 ₁₀ -01	0.1420119559 ₁₀ 00	-0.7638671788 ₁₀ -01
	2	-0.6129472247 ₁₀ -01	0.1531483957 ₁₀ 00	0.1424199505 ₁₀ 00	0.1709800187 ₁₀ -01
	3	-0.1579025622 ₁₀ 00	-0.1186036679 ₁₀ 00	-0.7483907094 ₁₀ -01	-0.5666453367 ₁₀ -01
	4	0.1094657877 ₁₀ 00	-0.1928130418 ₁₀ 00	0.1255310152 ₁₀ 00	-0.8604800931 ₁₀ -01
	5	-0.4147301180 ₁₀ -01	0.3561720369 ₁₀ -02	-0.889778235 ₁₀ -01	0.7692207282 ₁₀ -02

例10.4 为了便于和别的方法比较起见, 这里也以例10.2的问题为例。本来这个问题由于质量阵非对角元素为零, 刚度阵为三对角阵, 因此计算可以简化, 但这里对此不作讨论, 只是列出计算结果(见表10.4, 由于第一阶为刚体转动, 接着七阶与表10.2完全相同, 因此这里只列出后五阶的计算结果)。

表 10.4

阶次 \ominus	8	9	10	11	12
固有频率	590.365	565.731	720.865	753.808	1129.27
主 振 型	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	2	-2.6460	-3.6363	-4.4360	-4.9142
	3	-0.8132	1.6573	4.6609	6.9788
	4	2.9587	1.8642	-2.8135	-8.2301
	5	-0.3248	-3.6423	-0.2849	8.5576
	6	-2.8338	1.8759	3.2566	-7.9244
	7	1.4147	1.7058	-4.7804	6.4018
	8	2.2897	-3.6368	4.1787	-4.1606
	9	-2.2954	2.0485	-1.7191	1.4523
	10	-1.6280	1.6531	-1.5582	1.4273
	11	0.0563	-0.0445	0.0355	-0.0297
	12	-0.0204	0.0118	-0.0077	0.0058
	13	0.00001	-0.000005	0.000003	-0.000002

由例10.2, 10.4的计算可以看到, G-H法是解特征值问题的有效方法, 利用上述四个过程不难求得广义特征值问题的完全特征系, 而原理简单易懂的矩阵迭代法对于十几个自由度系统的前几阶频率与振型也可得同样精确的结果。

(4) 矩阵反迭代法

矩阵反迭代法适合用于求解大型、稀疏、带状矩阵的少数特征系的问题。

在有限元法处理的动力学问题中, 一般情况下 $[K]$ 、 $[M]$ 是对称、稀疏、带状的矩阵, 如按矩阵迭代法形成 $[D]$, 将失去对称、稀疏、带状的特点, 从而大大增加计算机的贮存, 所以采用

\ominus 表中阶次未把刚体转动计算在内。

矩阵迭代法是不适宜的。

矩阵反迭代法则不必先形成动力矩阵, 而是直接对方程

$$[K]\{A\} = p^2 [M]\{A\} \quad (10.1)$$

进行求解, 它的迭代方程是

$$[K]\{B\}_k = [M]\{A\}_k \quad (10.31)$$

$$\{A\}_{k+1} = \frac{1}{B_{n,k}} \{B\}_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (10.32)$$

具体计算步骤可阐述如下:

首先对 $[K]$ 进行三角分解

$$[K] = [L]^T [L_0] [L] \quad (10.33)$$

其中 $[L]$ 为上三角矩阵, $[L_0]$ 为对角矩阵, $[L]^T$ 为 $[L]$ 的转置矩阵, $[L]$ 的元素 l_{ij} 由下列公式确定

$$l_{ij} = \begin{cases} k_{ij} & (i = 1) \\ k_{ij} - \sum_{m=1}^{i-1} (l_{mi} \times l_{mj} / l_{mm}) & (i \leq j) \\ 0 & (i > j) \end{cases} \quad (10.34)$$

对角矩阵 $[L_0]$ 的元素 $l_{0,ii}$ 由下式确定

$$l_{0,ii} = 1/l_{ii} \quad (10.35)$$

以上分解对于 $[K]$ 是正定的情况总是可行的。对于 $[K]$ 是半正定的情况, 可用10.2(2)节中介绍的方法处理。

通过检查可以验证: 对 $[K]$ 分解得到的 $[L]$ 仍保持 $[K]$ 带状的特点, 并且每列的宽度不变。当不需要对最后的解进行修正时, $[K]$ 分解完毕就不再需要了, 所以 $[L]$ 可仍存于 $[K]$ 的位置, 而不增加额外的贮存。

$[K]$ 分解后迭代方程(10.31)式变为

$$[L]^T [L_0] [L] \{B\}_k = [M] \{A\}_k \quad (10.36)$$

现在令

$$[L]^T [L_0] = [F] \quad (10.37)$$

$$[L] \{B\}_k = \{\bar{B}\}_k \quad (10.38)$$

$$[M]\{A\}_k = \{\bar{A}\}_k \quad (10.39)$$

则方程(10.36)进一步变成

$$[F]\{\bar{B}\}_k = \{\bar{A}\}_k \quad (10.40)$$

其中 $[F]$ 的元素 f_{ij} 由下式确定

$$f_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ l_{ii}/l_{ij} & (i > j) \\ 0 & (i < j) \end{cases} \quad (10.41)$$

因为 $[F]$ 是下三角矩阵, 所以从(10.40)式很容易地求解 $\{\bar{B}\}_k$, 它的元素 $\bar{b}_{i,k}$ 可按下式顺序决定

$$\begin{aligned} \bar{b}_{i,k} &= \bar{a}_{i,k} - \sum_{m=1}^{i-1} f_{im} \bar{b}_{m,k} \\ &= \bar{a}_{i,k} - \sum_{m=1}^{i-1} \frac{l_{mi}}{l_{mm}} \bar{b}_{m,k} \end{aligned} \quad (10.42)$$

在求得 $\{\bar{B}\}_k$ 以后, 再通过(10.38)式求解 $\{B\}_k$, 它的元素 $b_{i,k}$ 由下式确定

$$b_{i,k} = \begin{cases} \bar{b}_{n,k}/l_{nn} \\ (\bar{b}_{i,k} - \sum_{m=i+1}^n l_{im} b_{m,k})/l_{ii} \end{cases} \quad (10.43)$$

其中 n 是方程的阶数。

和矩阵迭代法一样, 每次迭代中可计算 $p_k^2 = \frac{1}{b_{n,k}}$ 并将它和 p_{k-1}^2 进行比较, 一旦达到精度要求, 即 $|p_k^2 - p_{k-1}^2|/p_k^2 < \delta$ 则可停止迭代, 这时 $\{A\}_{k+1}$ 就是求得的一个主振型, 而固有频率则为

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{p_k^2} \quad (\text{Hz}) \quad (10.44)$$

当求解二阶及其以后各阶频率和主振型时, 需要利用正交条件将低阶的振型成分清除掉, 然后再进行同以上完全相同的迭代步骤。这里清除低阶振型的具体方法和矩阵迭代法略有不同, 例

如求第二阶频率和主振型时, 在任取一组起始振型或每迭代一次算出近似振型 $\{A^{(2)}\}_{k+1}$ 准备下一次迭代时, 应使 $\{A^{(2)}\}_{k+1}$ 中某一个不为 0 的元素由下列正交方程

$$\{A^{(1)}\}[M]\{A^{(2)}\}_{k+1} = 0 \quad (10.45)$$

加以确定, 其中 $\{A^{(1)}\}$ 是已算得的第一阶主振型。

再如求第三阶频率和主振型时, 应使第三阶主振型各次迭代的近似值 $\{A^{(3)}\}_{k+1}$ 中某两个不为 0 的元素由下列正交方程组

$$\begin{cases} \{A^{(1)}\}[M]\{A^{(3)}\}_{k+1} = 0 \\ \{A^{(2)}\}[M]\{A^{(3)}\}_{k+1} = 0 \end{cases} \quad (10.46)$$

加以确定, 其中 $\{A^{(1)}\}$ 、 $\{A^{(2)}\}$ 是已算得的第一阶、第二阶主振型。

余此类推, 直到求出所需要的某一阶频率和主振型为止, 从而结束矩阵反迭代法的整个计算过程。

本章附录中给出了矩阵反迭代法的过程 (MAITI)。

(5) 子空间迭代法

子空间迭代法又称同时迭代法, 它是求解大型、稀疏、带状矩阵特征值问题的有效方法之一, 适合于求解部分特征系, 现在广泛地用于结构动力学问题的有限元分析中。

子空间迭代法是假设 r 个起始矢量同时进行迭代以求得矩阵的前 S ($S < r$) 个特征值和特征矢量, 正如在第六章中已指出的, 它一方面可以看成是李兹法的反复运用, 另一方面可以看成是矩阵迭代法的推广。

和李兹法比较, 因为子空间迭代法从 r 个起始矢量出发要进行多次迭代, 所以起始矢量基本上可以任意假设, 而李兹法的最后结果与所假设的起始矢量很有关系, 同时误差也难于估计, 实际上对于比较复杂的连续体, 要假设较好的起始矢量也是不易做到的。

和矩阵迭代法比较, 子空间迭代法适宜求解较多的特征系, 而且一般情况下计算速度也较快, 这是因为矩阵迭代法每求一特征系都要受到已求得的前几阶特征系误差的影响, 这样一来误差

就不断积累, 所以它不适用于求解较多特征系的情况, 另一方面用矩阵迭代法求解计算工作量也较大, 特别是在相邻的两个特征值很接近的情况, 解的收敛性很差。

为了子空间迭代法论述的需要, 先将矩阵广义特征值问题的原方程

$$[K]\{A\} = p^2 [M]\{A\}$$

变换一个形式, 上式所列广义特征值问题有特征值 $p_1^2 < p_2^2 < \dots < p_n^2$, 相应的特征矢量是 $\{A^{(1)}\}, \{A^{(2)}\} \dots \{A^{(n)}\}$, 它们分别满足方程:

$$[K]\{A^{(i)}\} = p_i^2 [M]\{A^{(i)}\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10.47)$$

如引入特征值矩阵

$$[p^2] = \begin{bmatrix} p_1^2 & & & \\ & p_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n^2 \end{bmatrix} \quad (10.48)$$

特征矢量矩阵

$$[A] = [\{A^{(1)}\} \quad \{A^{(2)}\} \dots \{A^{(n)}\}] \quad (10.49)$$

则(10.47)式可以写成紧凑形式

$$[K][A] = [M][A][p^2] \quad (10.50)$$

上式还可以改写成

$$[K][A][\lambda] = [M][A] \quad (10.51)$$

其中

$$[\lambda] = [p^2]^{-1}$$

或

$$\lambda_i = 1/p_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

用子空间迭代法求解广义特征值问题的具体步骤可用以下框图表示:

现将子空间迭代法的各个步骤具体阐述如下:

选取起始矢量矩阵 $[X]_0$, 并形成矩阵 $[Y]$

对应于第(1)框, 求解的开始是同时假设 r 个起始矢量, 组成起始矢量矩阵

$$[X]_0 = [\{X^{(1)}\}_0, \{X^{(2)}\}_0, \dots, \{X^{(r)}\}_0] \quad (10.52)$$

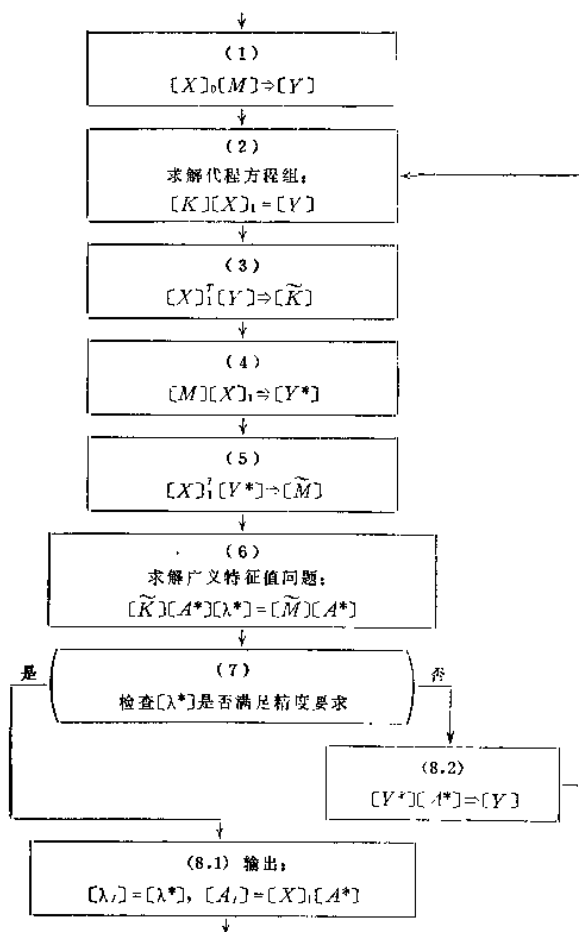


图 10-4

其中起始矢量的个数 r 可按以下方法确定：如果问题要求得到前 S 个特征值和与之相应的特征矢量，则 r 可取 $2 \times S$ 和 $S + 8$ 中较小的数。

关于起始矢量矩阵 $[X]_0$ ，原则上可以任意选取，只要它不和要求的前 S 个特征矢量中任一个正交。通常可将 $[M][X]_0$ 的第一列元素全取为 1；其他各列的元素依次在 M_{ii}/K_{ii} 最大的行号上取为 1，余下的元素全取为零。

因为任何矢量均可用特征矢量（在振动问题中即主振型） $\{A^{(1)}\}$ 、 $\{A^{(2)}\}$ 、 \dots 、 $\{A^{(r)}\}$ 的线性组合表示，即按特征矢量将它展开，所以 $[X]_0$ 可表示为

$$[X]_0 = [A][\phi] \quad (10.53)$$

其中 $[\phi]$ 是 $n \times r$ 矩阵，它的每一个元素 ϕ_{ij} 代表 $\{X^{(i)}\}$ 中所包含 $\{A^{(j)}\}$ 的分量，所以 $[\phi]$ 的 j 列元素 ϕ_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$) 实际上就是 $\{X^{(i)}\}$ 的主座标，或者称为 $\{X^{(i)}\}$ 在各个特征矢量 $\{A^{(j)}\}$ ($j = 1, 2, \dots, r$) 上的投影。

在选定 $[X]_0$ 以后，令

$$[Y] = [M][X]_0 \quad (10.54)$$

作为下一步骤求解方程组的右端项。

为了以后讨论方便起见，现将 $[A]$ 和 $[\phi]$ 表示成分块矩阵的形式

$$[A] = [A_I \quad A_{II}] \quad (10.55)$$

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_{II} \end{bmatrix} \quad (10.56)$$

其中 $[A_I] = [\{A^{(1)}\} \quad \{A^{(2)}\} \quad \dots \quad \{A^{(r)}\}]$
 $[A_{II}] = [\{A^{(r+1)}\} \quad \{A^{(r+2)}\} \quad \dots \quad \{A^{(n)}\}]$

$[\phi_I]$ 是 $r \times r$ 矩阵

$[\phi_{II}]$ 是 $(n - r) \times r$ 矩阵

这样一来，(10.53)式可写成

$$[X]_0 = [A_I][\phi_I] + [A_{II}][\phi_{II}] \quad (10.57)$$

从上式进一步可见 $[X]_1$ 和 $[X]_2$ 分别代表 $[X]_0$ 中所包含的 $[A_1]$ 和 $[A_2]$ 的分量。

求解代数方程组 $[K][X]_1 = [Y]$

对应于第(2)框, 求解上列方程实际上是对方程

$$[K]\{X^{(i)}\}_1 = [M]\{X^{(i)}\}_0 \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (10.58)$$

分别进行一次反迭代运算。

现在来分析反迭代得到的矢量矩阵 $[X]_1$ 和起始矢量矩阵 $[X]_0$ 相比有什么变化。利用(10.53)式和(10.51)式可见

$$[K][X]_1 = [M][X]_0 = [M][A][\phi] = [K][A][\lambda][\phi]$$

两端同乘以 $[K]^{-1}$, 于是得到

$$\begin{aligned} [X]_1 &= [A][\lambda][\phi] = [A_1 A_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_r \end{bmatrix} \\ &= [A_1][\lambda_1][\phi_1] + [A_2][\lambda_2][\phi_2] \end{aligned} \quad (10.59)$$

$$\text{其中} \quad [\lambda_1] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{bmatrix} \quad [\lambda_2] = \begin{bmatrix} \lambda_{r+1} & & & \\ & \lambda_{r+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

和(10.57)式比较可以看到, $[X]_1$ 中 $[A_1]$ 的分量增加了。这是由于 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ 的结果。

如果继续进行反迭代, 并在每一步迭代以前, 对矢量矩阵中的各个矢量进行正交处理, 可以得到 $[X]_2, [X]_3, \dots$, 它们当中 $[A_1]$ 的分量将不断增加, 并最后趋近于 $[A_1]$, 这样做基本上就是用矩阵反迭代法求特征系的原理。但是因为 $[K]$ 、 $[M]$ 和 $[X]$ 的阶数较高, 每次迭代运算工作量较大, 所以在得到 $[X]_1$ 以后, 先不再进行迭代, 而是从 $[X]_1$ 出发设法先找到 $[A_1]$ 的近似值, 并以它作为新的起始矢量矩阵再进行迭代, 和直接用 $[X]_1$ 继续迭代比较将较快地达到计算的目的。

形成计算 $[A_1]$ 和 $[\lambda_1]$ 的近似值的矩阵方程 $[\tilde{K}][A^*][\lambda^*] = [\tilde{M}][A^*]$

相应于第(3)、(4)、(5)框, 实际上是将矩阵 $[K]$ 和 $[M]$

转换到 $[X]_1$ 中各个矢量所张开的子空间, 得到

$$[\tilde{K}] = [X]_1^T [Y] = [X]_1^T [K] [X]_1 \quad (10.60)$$

$$[\tilde{M}] = [X]_1^T [Y^*] = [X]_1^T [M] [X]_1 \quad (10.61)$$

引出 $[Y^*]$ 是为了以后计算的方便, 将 $[\tilde{K}]$ 和 $[\tilde{M}]$ 组成特征值问题

$$[\tilde{K}] [A^*] [\lambda^*] = [\tilde{M}] [A^*] \quad (10.62)$$

可以证明上列特征值问题的特征值 $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_r^*$ 就是原特征值问题 (10.51) 式的前 r 个特征值的近似值, 它的特征矢量矩阵 $[A^*]$ 就是原特征值问题的前 r 个特征矢量在 $[X]_1$ 中各个矢量上投影值所组成的矩阵的近似值, 即

$$[\lambda^*] \approx [\lambda_1] \quad (10.63)$$

$$[A^*] \approx [\phi_1]^{-1} \quad (10.64)$$

现证明如下

首先从 (10.59) 式可以看到, 由于迭代后得到的 $[X]_1$ 中 $[A_1]$ 的分量增加了, 所以存在以下近似式

$$[X]_1 = [A] [\lambda] [\phi] \approx [A_1] [\lambda_1] [\phi_1] \quad (10.65)$$

随着迭代次数的增加, 以上近似式愈来愈精确地成立。为方便起见, $[X]_1$ 中 $[A]$ 和 $[A_1]$ 的系数仍用 $[\phi]$ 和 $[\phi_1]$ 表示, 即上式仍写成

$$[X]_1 = [A] [\phi] \approx [A_1] [\phi_1] \quad (10.66)$$

上式两端都后乘以 $[\phi_1]^{-1}$, 则得到

$$[A_1] \approx [X]_1 [\phi_1]^{-1} \quad (10.67)$$

其次从 (10.53) 式和 (10.51) 式, 可得

$$\begin{aligned} [\tilde{M}] &= [X]_1^T [M] [X]_1 = [X]_1^T [M] [A] [\phi] \\ &= [X]_1^T [K] [A] [\lambda] [\phi] \end{aligned} \quad (10.68)$$

注意到 (10.65)、(10.67) 和 (10.60) 等式, 则从上式进一步可得

$$\begin{aligned}
 [\tilde{M}] &\approx [X]^T [K] [A_1] [\lambda_1] [\phi_1] \\
 &\approx [X]^T [K] [X]_i [\phi_1]^{-1} [\lambda_1] [\phi_1] \\
 &= [\tilde{K}] [\phi_1]^{-1} [\lambda_1] [\phi_1]
 \end{aligned}$$

上式两端都后乘以 $[\phi_1]^{-1}$ ，就得到

$$[\tilde{M}] [\phi_1]^{-1} \approx [\tilde{K}] [\phi_1]^{-1} [\lambda_1] \quad (10.69)$$

或 $[\tilde{K}] [\phi_1]^{-1} [\lambda_1] \approx [\tilde{M}] [\phi_1]^{-1}$

将上式和(10.62)式比较可见，两式都表示 了 关于 $[\tilde{K}]$ 和 $[\tilde{M}]$ 的广义特征值问题，应当解得相同的特征值和特征矢量，考虑(10.69)式是近似地成立，所以就证明了(10.63)式和(10.64)式，即

$$[\lambda^*] \approx [\lambda_1], \quad [A^*] \approx [\phi_1]^{-1}$$

求解广义特征值问题 $[\tilde{K}][A^*][\lambda^*] = [\tilde{M}][A^*]$

从形式上看：对应于第(6)框求解的广义特征值问题和原广义特征值问题(10.51)式是相同的。实际上是有所不同。因为将 $[K]$ 和 $[M]$ 投影到 $[X]_i$ 中各个矢量所张开的子空间，虽然得到的 $[\tilde{K}]$ 和 $[\tilde{M}]$ 不再具有稀疏、带状的特点，但是矩阵的阶数大大降低了，所以求解的计算工作量也大大减少了。求解这类阶数较低的广义特征值问题有不少有效的方法，如广义雅可比法、吉文斯-豪斯霍尔德法（简称G-H法），列入本章附录中的子空间迭代法标准过程（SMIT）是调用了G-H法的四个标准过程，即采用了G-H法求解缩小了尺寸的广义特征值问题(10.62)式。

计算原特征值问题前 r 个特征矢量的矩阵 $[A_1]$ 的近似值，并检查前 S 个特征值是否满足精度要求。

从第(6)框得到了 $[\lambda^*]$ 和 $[A^*]$ ，利用(10.63)、(10.67)和(10.64)等式，就可得到原特征值问题的前 r 个特征值和相应的特征矢量的近似值

$$\left. \begin{aligned}
 [\lambda_1] &\approx [\lambda^*] \\
 [A_1] &\approx [X]_i [\phi_1]^{-1} \approx [X]_i [A^*] \end{aligned} \right\} \quad (10.70)$$

第(7)框是检查前 S 个特征值是否满足精度要求, 如未满足则执行第(8.2)框, 即以得到的 $[A_1]$ 的近似值 $[X]_1[A^*]$ 作为新的起始矢量矩阵, 并形成新的 $[Y]$,

$$[Y] = [M][X]_1[A^*] = [Y^*][A^*] \quad (10.71)$$

然后回到第(2)框, 执行新的迭代; 如前 S 个特征值已满足精度要求则执行第(8.1)框, 输出广义特征值问题(10.51)式的前 r 个特征值和相应的特征矢量, 其中前 S 个是满足精度要求的。至此结束子空间迭代法的整个计算过程。

本章附录中给出了子空间迭代法的过程 (SMIT)。

10.3 有阻尼系统对初始条件和简谐激振力的响应

(1) 概述

前面第六章曾经讨论过带有粘性阻尼的多自由度系统, 得到的振动方程为

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{P\} \quad (10.72)$$

其中 $[M]$ 为质量矩阵, $[K]$ 为刚度矩阵, $\{X\}$ 为位移列阵, $[C]$ 为阻尼矩阵, $\{P\}$ 为激振力列阵。阻尼矩阵一般是正定或半正定的对称矩阵。

如果激振力是简谐力, 可以不失一般性地假设

$$\{P\} = \{\overline{P}\} \sin \omega t \quad (10.73)$$

这时系统的响应为

$$\{X\} = \{A_s\} \sin \omega t + \{A_c\} \cos \omega t \quad (10.74)$$

代入方程 (10.72), 可以得到

$$\begin{bmatrix} K & -\omega \cdot C \\ \omega \cdot C & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_s \\ A_c \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_s \\ A_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{P} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.75)$$

于是求解具有 n 个自由度的系统对简谐激振力的响应可归结为求解 $2n$ 阶的线性代数方程组。对于自由度数不太多的情况当形成系数矩阵后可用附录中的主元消去法过程 ALG 求解, 较多自由度的可选用其他有效的线性代数算法。

如果没有激励力, 即 $\{P\} = 0$, 那么 (10.72) 变成齐次方程

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = 0 \quad (10.76)$$

由于 $[M]$ 对称正定, 上式可化为

$$\{\ddot{X}\} + [M]^{-1}[C]\{\dot{X}\} + [M]^{-1}[K]\{X\} = 0 \quad (a)$$

若令

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} X \\ \dot{X} \end{Bmatrix} \quad (b)$$

(a) 式就可以化为

$$\{\dot{Y}\} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ M^{-1}K & M^{-1}C \end{bmatrix} \{Y\} = 0 \quad (c)$$

作为自由振动解假设

$$\{Y\} = \{\bar{A}\}e^{-\lambda t} \quad (d)$$

其中 $\lambda = \bar{n} + ip$

于是 (c) 又可化为具有复特征值的矩阵特征值问题

$$\begin{bmatrix} 0 & -I \\ M^{-1}K & M^{-1}C \end{bmatrix} \{\bar{A}\} = \lambda \{\bar{A}\} \quad (e)$$

解此问题的算法可以参看有关资料^①。

由于 (e) 中的系数矩阵是实矩阵, 因此得到的复特征值总是以共轭复数成对出现, 相应的特征矢量也是共轭的。固有频率即 λ 的虚部, 但是只需取正值, 因此有 n 个固有频率。作为自由振动问题 (10.76) 的解可令

$$\{X\} = \sum_{r=1}^n e^{-n_r t} (A_r \{R\}_r \sin p_r t + B_r \{I\}_r \cos p_r t) \quad (f)$$

其中 $\{R\}_r$, $\{I\}_r$ 分别为对应于固有频率 p_r 的特征矢量 $\{Y\}_r$ 前半部 (即 $\{X\}_r$) 的实部和虚部, A_r , B_r 是待定常数。如果系统的初始条件为

① 例如可参看 [5] 的“求实矩阵的特征值及特征向量”一节 (PP. 279-293)。

$$\left. \begin{aligned} \{X\}_{t=0} &= \{X_0\} \\ \{\dot{X}\}_{t=0} &= \{\dot{X}_0\} \end{aligned} \right\} \quad (10.77)$$

那么把(1)代入(10.77)式就得到对于 A_r , B_r 共 $2n$ 个待定常数的 $2n$ 个线性代数方程, 由此定出 A_r , B_r , 也就确定了系统对初始条件的响应。

上面介绍的求解有阻尼系统对简谐激励力和初始条件的响应的方法都是对有阻尼系统直接求解, 只要已知系统的质量矩阵、刚度矩阵与阻尼矩阵, 就可借助于成熟而有效的线性代数算法得到问题的解答。同时这些讨论不仅适用于第六章讨论的多自由度系统, 而且也适用于无限自由度的弹性构件和结构, 只要通过第八章介绍的李兹法或第九章介绍的有限元法得到了与(10.72)或(10.76)相同的方程, 就可用同样的方法求解。

但是, 如第六章所述, 值得注意的是, 由于系统阻尼的机理比较复杂, 对于大量的实际问题往往还难于通过理论分析写出系统的阻尼矩阵。系统的阻尼特性常常主要借助于试验的方法来确定, 而试验的方法也并不能直接确定系统的阻尼矩阵, 只能得到系统对于主要的主振型的振型阻尼^①。鉴于这种状况, 下面将着重讨论用振型阻尼来表示系统阻尼特性的振型叠加法, 并用这种方法来求解系统对于简谐激励力和初始条件的响应。

采用振型叠加法计算的程序粗框图如图 10-5 所示。其中第一框就是上一节

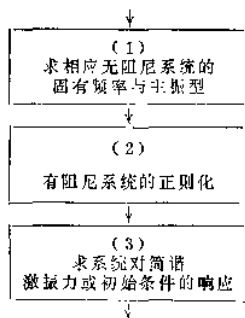


图 10-5

所介绍的求无阻尼系统的固有频率和主振型。第二框是有阻尼多自由度系统的正则化, 包括求出正则振型矩阵, 以及在正则座标

① 比如目前最有效的结构动力学试验方法——模态分析法利用配有电子计算机的模态分析系统能直接得到实际系统的各阶固有频率, 振型阻尼和相应的主振型。可参看 K. A. Ramsey, "Effective Measurements for Structural Dynamics", Sound and Vibration Nov. 1975 和 April 1976.

下的阻尼矩阵（即求得振型阻尼）等。如果振型阻尼根据试验确定，那么在此可以直接输入振型阻尼，而不是输入原坐标下的阻尼矩阵 $[C]$ 。第三框是求系统对简谐激振力或初始条件的响应。

为了便于读者引用起见，对应于第二框附录中给出了过程 *NOM*，对于第三框对初始条件和简谐力分别给出了过程 *RESP1* 和 *RESP2*。下面对二、三两框分别作简单的介绍。

（2）有阻尼多自由度系统的正则化

对于有阻尼多自由度系统的正则化前面第六章已经作了详细介绍，这里只是对有关公式简单整理一下，便于读者和附录中的程序相对照。

如果用 $[A_p]$ 表示系统的振型矩阵，那么它的每一列就是一个主振型，可用主振型列阵 $\{A^{(i)}\}$ 来表示，对于 n 个自由度的系统 $\{A^{(i)}\}$ 有 n 个元素。如果 $[A_p]$ 表示全部主振型，那么它是 $n \times n$ 的矩阵，如果 $[A_p]$ 表示前 n_1 个主要主振型，则是 $n \times n_1$ 的截断振型矩阵。

第六章给出的正则振型列阵 $\{A^{(i)}_n\}$ 和 $\{A^{(i)}\}$ 之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \{A^{(i)}_n\} &= \frac{1}{C_i} \{A^{(i)}\} \\ C_i &= \pm \sqrt{M_i} \\ M_i &= \{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} \end{aligned} \right\} \quad (10.78)$$

其中

把正则振型列阵按其固有频率从小到大的次序排列就可组成 $n \times n$ 的正则振型矩阵或 $n \times n_1$ 的截断正则振型矩阵，记作 $[A_n]$ 。因此

$$[A_n] = [A^{(1)}_n A^{(2)}_n \cdots] \quad (10.79)$$

引进正则坐标列阵 $\{X_n\}$ ，它和原坐标下的位移列阵 $\{X\}$ 的关系为

$$\{X\} = [A_n] \{X_n\} \quad (10.80)$$

显然，当 $[A_n]$ 为完备的正则振型矩阵时 $\{X_n\}$ 是 $n \times 1$ 的列阵，而当 $[A_n]$ 为前 n_1 阶振型的截断正则振型矩阵时 $\{X_n\}$ 是 $n_1 \times 1$ 的

列阵。

把 (10.80) 式代入 (10.72) 式, 并在两端左乘 $[A_N]^T$, 可以得到正则坐标下的振动方程

$$[I]\{\ddot{X}_N\} + [C_N]\{\dot{X}_N\} + [K_N]\{X_N\} = \{P_N\} \quad (10.81)$$

其中 $[C_N]$, $[K_N]$ 和 $\{P_N\}$ 分别为正则坐标下的 阻尼矩阵、刚度矩阵和激振力列阵,

$$[C_N] = [A_N]^T [C] [A_N] \quad (10.82)$$

$$[K_N] = [A_N]^T [K] [A_N]$$

$$= \begin{bmatrix} p_1^2 & & \\ & p_2^2 & 0 \\ 0 & & \ddots \\ & & & p_h^2 \end{bmatrix} \quad (h = n \text{ 或 } n_1) \quad (10.83)$$

$$\{P_N\} = [A_N]^T \{P\} \quad (10.84)$$

对于通常遇到的系统, 如果给定的阻尼矩阵 $[C]$ 是合理的, 那么 $[C_N]$ 中的非主对角元素通常总是比主对角元素小, 一般不会出现比主对角元素大得多的情况, 因此在后面计算系统的响应时可以考虑主对角元素, 即只考虑振型阻尼。在 $[C_N]$ 中略去非对角元素就得到振型阻尼矩阵 $[C_N]$,

$$[C_N] = \begin{bmatrix} C_{N1,1} & & 0 \\ & C_{N2,2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & C_{Nh,h} \end{bmatrix} \quad (h = n \text{ 或 } n_1) \quad (10.85)$$

其中 $C_{Nr,r} = 2\zeta_r p_r$, ζ_r 为对第 r 阶主振型的振型阻尼系数。

附录中提供的过程 *NOM* 可以按 (10.78), (10.79) 式计算 $[A_N]$, 并按 (10.82) 式计算 $[C_N]$, 其中的对角元素可供响应计算使用, 而输出的 $[C_N]$ 可供比较对角元素与次对角元素之用。如果非对角元素不比主对角元素大得多, 则说明用振型叠加法计算响应是合适的。

有些情况下从试验得到了振型阻尼, 也就是给定了 $[C_N]$, 这种场合下过程 *NOM* 除去确定 $[A_N]$ 之外, 还可由 $[C_N]$ 反求阻尼矩阵 $[C]$, 以便和理论分析得到的阻尼矩阵进行比较, 或者帮助

建立系统阻尼的力学模型。根据 $[C_N]$ 求 $[C]$ 的计算公式为

$$[C] = [M][A_N][C_N][A_N]^T[M] \quad (10.86)$$

其中 $[M]$ 为质量矩阵。

此外, 为了过程简洁起见, *NOM* 过程中调用了矩阵乘法过程 *MATM* (详见附录)。

下面举两个计算实例。

例10.5 对于例 10.1 的系统, 如果其阻尼矩阵为

$$[C] = a[M] + b[K]$$

a, b 为两个参数, 求该系统的正则振型矩阵 $[A_N]$ 及正则坐标下的阻尼矩阵 $[C_N]$ 。

又如该系统对于各阶主振型的振型阻尼系数分别为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 试求该系统的阻尼矩阵 $[C]$ 。

对于问题的第一部分, 显然其解为

$$[C_N] = a[C_N]_1 + b[C_N]_2$$

只要分别求出 $[C_N]_1$ 和 $[C_N]_2$ 即可。对于问题的第二部分 则可令其解为

$$[C] = \xi_1 p_1 [C]_1 + \xi_2 p_2 [C]_2 + \xi_3 p_3 [C]_3$$

然后分别求出 $[C]_1, [C]_2$ 和 $[C]_3$ (这里 ξ_1, ξ_2, ξ_3 也看成三个参数, 而不是给定的一组常数)。

具体计算程序可以列出如下:

```
begin
  array M, AA, C, MM, K[1:3, 1:3], CN[1:3];
  integer i;
  procedure NOM(n, n1, AA, M, C, CN, S);
  .....
                                (NOM 过程说明)
  end;
  procedure MATM(A, n1, n2, t1, B, n3, n4, t2, C);
  .....
                                (MATM 过程说明)
  end;
  read(M, AA, MM, K);
```

```

NOM(3, 3, AA, M, MM, CN, 1);
print(AA, CN);
NOM(3, 3, AA, M, K, CN, 0);
print(CN);
for i := 1, 2, 3 do
begin
  CN := 0;
  CN[i] := 2;
  NOM(3, 3, AA, M, C, CN, 3);
  print(C)
end end

```

得到的计算结果列于表 10.5。

表 10.5

矩 阵	元 素		
$[C_N]_1$	1.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	1.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	1.00000
$[C_N]_2$	0.35146	0.00000	0.00000
	0.00000	1.60659	0.00000
	0.00000	0.00000	3.54193
$[C]_1$	0.40202	0.64781	0.66592
	0.64781	1.04388	1.07306
	0.66592	1.07306	1.10306
$[C]_2$	1.49075	0.99888	-1.09779
	0.99888	0.66931	-0.73558
	-1.09779	-0.73558	0.80842
$[C]_3$	2.10723	1.64669	0.43187
	-1.64669	1.28680	-0.33748
	0.43187	-0.33748	0.08851

由此算例的结果可以看到，当阻尼矩阵可以表示为质量矩阵和刚度矩阵的线性组合时，正则座标下的阻尼矩阵的非对角元素

全等于零。其实，这是可以证明的普遍结论。

例10.6 对于例 10.2 的柴油机动力装置考虑系统的阻尼 \ominus ，阻尼矩阵的非零元素为

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= 0.989 \times 10^4 & C_{1,2} &= C_{2,1} = -0.989 \times 10^4 \\ C_{2,2} &= 1.1026 \times 10^4 & C_{3,3} &= 1.136 \times 10^3 \\ C_{4,4} &= C_{5,5} = C_{6,6} = C_{7,7} = C_{8,8} &= 1.136 \times 10^3 \\ C_{9,9} &= 1.1866 \times 10^4 & C_{9,10} &= C_{10,9} = -1.073 \times 10^4 \\ C_{10,10} &= 2.121 \times 10^4 & C_{10,11} &= C_{11,10} = -1.048 \times 10^4 \\ C_{11,11} &= 1.337 \times 10^4 & C_{11,12} &= C_{12,11} = -0.289 \times 10^4 \\ C_{12,12} &= 2.9696 \times 10^3 & C_{12,13} &= C_{13,12} = -0.796 \times 10^3 \\ C_{13,13} &= 2.55796 \times 10^4 & (\text{单位为 } \text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}) \end{aligned}$$

求正则振型矩阵 $[A_n]$ 及正则坐标下的阻尼矩阵 $[C_n]$ 。

又如果在求得的 $[C_n]$ 中只取刚体转动以及各阶主振型的振型阻尼，反过来求原坐标下的阻尼矩阵 $[C]$ 。

计算结果分别列于表 10.6-表 10.8；表 10.6 为 (10.78) 式中的系数 $C_i \ominus$ ，表 10.7 为 $[C_n]$ ，表 10.8 是阻尼矩阵 $[C]$ 。

表 10.6

i	1	2	3	4	5	6	7
C_i	25.960	44.036	11.375	12.391	15.318	130.78	18.854

i	8	9	10	11	12	13
C_i	22.873	27.470	33.580	44.780	80.192	0.80371 ₁₀₈

(3) 系统对初始条件和简谐激振力的响应

用振型叠加法求解系统对初始条件和简谐激振力的响应在第六章已经作过介绍，为了便于和程序对照起见，这里简单地重复一下。

\ominus 实际系统的阻尼与频率有关，这里所引数值实际是在一定频率下的值，但作为算例对此不作深究。

\ominus 该表中把刚体转动作为第一阶处理。

表 10.7

$[C_n]$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	51.32	-60.90	16.50	-15.91	-0.00	-0.46	-6.89	-2.30	-3.58	-2.22	-1.89	-1.02	3.01
2	-60.90	129.55	6.51	-8.80	-0.54	0.96	-4.17	-1.10	-2.23	-1.09	-1.15	-0.52	1.85
3	16.50	6.51	28.90	-15.13	-1.61	-0.75	-18.05	8.30	-11.47	7.54	-3.95	2.94	9.61
4	-15.91	-8.80	-15.13	71.86	-29.34	-0.54	58.79	-14.47	55.44	7.79	39.42	9.86	-25.50
5	-0.60	-0.54	-1.61	-29.34	130.49	-13.00	-14.33	107.47	23.78	102.62	42.61	48.10	17.83
6	-0.46	0.96	-0.75	-0.54	-13.00	283.34	-11.92	20.05	0.84	16.40	5.26	7.33	5.71
7	-6.89	-4.17	-18.05	58.79	-14.33	-11.92	192.16	30.75	160.92	76.23	125.95	50.09	16.99
8	-2.30	-1.10	8.30	-14.47	107.47	20.05	30.75	243.28	94.88	191.01	109.05	94.44	-68.82
9	-3.58	-2.23	11.47	55.44	23.78	0.84	160.92	94.88	275.77	144.52	180.61	84.99	114.80
10	-2.22	-1.09	7.54	7.79	102.62	16.40	76.23	191.01	144.52	274.00	145.70	109.75	-134.53
11	-1.89	-1.15	-3.95	39.42	42.61	5.26	125.95	109.05	180.61	145.70	217.66	81.85	117.38
12	-1.02	-0.52	2.94	9.86	48.10	7.33	50.09	94.44	84.99	109.75	81.85	117.39	-67.28
13	3.01	1.85	9.61	-25.50	17.83	5.71	16.99	-68.82	114.80	-134.53	117.38	-67.28	3654.4

表 10.8

[C]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	3971.6	-1840.8	-949.9	86.7	-122.2	71.4	37.4	66.2	60.0	19.6	978.2	154.2	-709.5
2	-1840.8	3701.4	-387.3	-988.1	262.7	-147.4	71.1	6.8	35.1	13.1	582.1	17.3	-375.1
3	-949.9	-387.3	3266.3	-402.0	-975.8	253.5	-148.8	64.5	15.9	6.2	650.5	-61.3	-370.8
4	86.7	-968.1	-402.0	3258.7	-411.2	-977.2	247.0	-139.7	48.6	24.0	657.7	-86.3	-387.1
5	-122.2	262.7	-975.8	-411.2	3257.2	-417.8	-958.1	231.0	-	30.0	627.6	-41.5	-384.5
6	71.4	-147.4	253.5	-977.2	-417.8	3266.3	-433.7	-904.9	88.6	99.1	391.8	43.4	-382.2
7	37.4	71.1	-148.8	247.0	-968.1	-433.7	3329.6	-576.1	-464.6	-400.4	528.2	108.2	-358.8
8	66.2	6.8	64.5	-139.7	231.0	-904.9	-576.1	3769.8	-2098.9	1663.5	-872.2	114.0	-353.0
9	60.0	35.1	15.9	48.6	-76.5	88.6	-464.6	-2098.9	11529.0	-12183.8	4335.8	26.5	-344.8
10	19.6	13.1	6.2	24.0	-30.0	99.1	-400.4	1663.5	-12183.8	20466.2	-9244.3	6.1	-113.4
11	978.2	582.1	660.5	657.7	627.6	391.8	528.2	-872.2	4335.8	-9244.3	25321.8	-2439.4	-5470.3
12	154.2	17.3	-61.3	-86.3	-41.5	43.4	108.2	114.0	26.5	6.1	-2439.4	2341.9	-230.4
13	-709.5	-375.1	-370.8	-367.1	-364.5	-362.2	-358.8	-353.0	-344.8	-113.4	-5470.3	-230.4	17480.3

前面 (10.81) 式给出了系统在正则座标下的振动方程, 如果略去 $[C_N]$ 的非对角元素, 就得到

$$[I]\{\ddot{X}_N\} + [C_N]\{\dot{X}_N\} + [K_N]\{X_N\} = \{P_N\} \quad (g)$$

由于其中 $[I]$, $[C_N]$, $[K_N]$ 都只有主对角元素, 因此可以改写成

$$\ddot{X}_{Nr} + 2\xi_r p_r \dot{X}_{Nr} + p_r^2 X_{Nr} = P_{Nr} \quad (10.87)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n \text{ 或 } n_1)$$

其中 n 为系统的自由度数, n_1 为截断振型矩阵所取主要振型数。

如果激振力为零, (10.87) 式就可以写成

$$\ddot{X}_{Nr} + 2\xi_r p_r \dot{X}_{Nr} + p_r^2 X_{Nr} = 0 \quad (10.88)$$

根据初始条件 (10.77), 和 $\{X\}$ 与 $\{X_N\}$ 之间的关系式 (10.80), 可以得到相应于方程 (10.88) 的初始条件

$$\left. \begin{aligned} X_{Nr} |_{t=0} &= X_{Nr0} \\ \dot{X}_{Nr} |_{t=0} &= \dot{X}_{Nr0} \end{aligned} \right\} \quad (10.89)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{Nr0} &= \{A^{(r)}\}^T [M] \{X_0\} \\ \dot{X}_{Nr0} &= \{A^{(r)}\}^T [M] \{\dot{X}_0\} \end{aligned} \right\} \quad (10.90)$$

其中

方程 (10.88) 的解为

$$X_{Nr} = e^{-\xi_r p_r t} (C_{1r} \cos p_r' t + C_{2r} \sin p_r' t) \quad (10.91)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n \text{ 或 } n_1)$$

$$\text{其中 } p_r' = p_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (10.92)$$

系数 C_{1r} , C_{2r} 可以由初始条件 (10.89) 来确定,

$$\left. \begin{aligned} C_{1r} &= X_{Nr0} \\ C_{2r} &= \frac{1}{p_r'} (\dot{X}_{Nr0} + \xi_r p_r X_{Nr0}) \end{aligned} \right\} \quad (10.93)$$

如果解仍用原座标来表示, 则可按 (10.80) 式, 即

$$\{X\} = [A_N] \{X_N\} \quad (h)$$

这里需要指出的是, 当 $\{X_N\}$ 为完备的正则座标时, 得到的解能精确满足给定的初始条件, 而当采用截断振型法时, 如上所

述得到的解并不能精确满足初始条件 (10.77)。因此这里使用截断振型法需要多加小心, 必须考虑所有在初始条件中具有较大分量的振型才能达到一定精度。

过程 *RESP1* 就是按 (10.90)、(10.92)、(10.93) 式求解的。

对于有简谐激振力作用的情况, 可以求解方程 (10.87), 其中 P_{nr} 可以根据 (10.73)、(10.84) 式确定, 因此也可以把 (10.87) 式改写成

$$\ddot{X}_{nr} + 2\xi_r p_r \dot{X}_{nr} + p_r^2 X_{nr} = \overline{P}_{nr} \sin \omega t \quad (10.94)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n \text{ 或 } n_1)$$

$$\text{其中} \quad \overline{P}_{nr} = \{A_{nr}^{(i)}\}^T \{F\} \quad (10.95)$$

方程 (10.94) 的解为

$$X_{nr} = \frac{\overline{P}_{nr}}{p_r^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p_r}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi_r \left(\frac{\omega}{p_r}\right)\right]^2}} \sin(\omega t - \psi_r) \quad (10.96)$$

$$\text{其中} \quad \psi_r = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi_r \frac{\omega}{p_r}}{1 - \left(\frac{\omega}{p_r}\right)^2} \right) \quad (10.97)$$

这个解还可以根据 (h) 式化回原座标, 得到

$$X_i = \sum_{r=1}^h A_{nir} X_{nr}$$

$$= X_i \sin(\omega t - \varphi_i) \quad \left(\begin{array}{l} h = n \text{ 或 } n_1 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right) \quad (10.98)$$

过程 *RESP2* 就是按照 (10.95)–(10.98) 式求解系统对简谐激振力的响应的, 同时该过程还能处理作用于各点的激振力相位不同的问题。当作用于各点的激振力相位不同时, 可以把 $\{f\}$ 分解为两个分量之和

$$\begin{aligned}\{f\} &= \{f\}_1 + \{f\}_2 \\ &= \{F\}_1 \sin \omega t + \{F\}_2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (i)\end{aligned}$$

对两个分量分别如上所述进行求解，最后对原座标下的解进行合成，于是得到

$$\begin{aligned}x_i &= X_{1i} \sin(\omega t - \varphi_{1i}) + X_{2i} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi_{2i} \right) \\ &= X_i \sin(\omega t - \varphi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (j)\end{aligned}$$

这里同样可以指出，当正则座标完备时解精确满足方程(10.72)，而当采用截断振型法时，则仅仅是方程(10.72)的近似解。但是只要考虑到了包括其固有频率与激振力频率相近的振型在内的前几阶主要振型，得到的解就有足够的精度。

下面举两个计算实例。

例10.7 对于例10.6的系统，用完备的正则座标求其对下列13组初始条件的响应：

$$\begin{aligned}X_i^{(n)} &= \begin{cases} 1 & (i = n) \\ 0 & (i \neq n) \end{cases} \\ \dot{X}_i^{(n)} &= 0\end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \dots, 13; \quad n = 1, 2, \dots, 13)$$

如果除质量矩阵 $[M]$ 外，正则振型矩阵 $[A_n]$ ，振型阻尼矩阵的主对角元素和各阶固有频率也一起作为原始数据输入，那么具体计算程序可以列出如下：

```
begin
  array M, AN[1:13, 1:13], XX, XN[1:13, 1:2], CN,
    P, P1[1:13];
  integer i;
  procedure RESP1 (n, h, M, AN, CN, P, P1, XX,
    XN);
    .....
  end;
```

(RESP1 过程说明)

```

procedure MATM(A, n1, n2, t1, B, n3, n4, t2, C);
.....
(MATM 过程说明)
end;
read(M, AN, CN, P);
for i := 1 step 1 until 13 do
begin
    XX := 0; XX[i, 1] := 1;
    RESP1(13, 13, M, AN, CN, P, P1, XX, XN);
    print(XN)
end;
print(P1)
end

```

计算结果列于表 10.9。表中 $r = 1$ 是响应的刚体运动分量， $C_{11}^{(r)}$ 为常数项， $C_{21}^{(r)}$ 是指数衰减项的系数。

例 10.8 对于例 10.6 的系统，作用有简谐激振力 $P_i = \overline{P}_i \cdot \sin(\omega t - \alpha_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 13$)

$$\omega = 360 \text{ 弧度/秒}$$

$$\overline{P}_1 = \overline{P}_{1c} = \overline{P}_{11} = \overline{P}_{12} = \overline{P}_{13} = 0$$

$$\overline{P}_2 = \overline{P}_5 = \overline{P}_6 = \overline{P}_9 = 55106 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$\overline{P}_3 = \overline{P}_4 = \overline{P}_7 = \overline{P}_8 = 53687 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$\alpha_2 = 0^\circ \quad \alpha_3 = 187^\circ$$

$$\alpha_4 = 142^\circ \quad \alpha_5 = 315^\circ$$

$$\alpha_6 = 135^\circ \quad \alpha_7 = 322^\circ$$

$$\alpha_8 = 7^\circ \quad \alpha_9 = 180^\circ$$

求该系统的响应（分别考虑完备的正则座标及前三阶的截断振型求解并作比较）。

如果原始数据按照过程 RESP2 的要求输入，具体计算程序可以列出如下：

```

begin

```

表

r		1	2	3	4	5	6	7
p'		—	66.99	421.31	1079.5	1780.2	1962.9	2478.0
$C_{1r}^{(n)}$	1	1.368	0.807	3.123	2.867	2.319	0.272	1.884
	2	0.728	0.429	1.585	1.055	0.196	-0.0038	-0.632
	3	0.728	0.427	1.440	0.262	-1.187	-0.183	-1.966
	4	0.728	0.424	1.251	-0.584	-1.918	-0.240	-1.205
	5	0.728	0.421	1.023	-1.312	-1.593	-0.135	0.841
	6	0.728	0.417	0.763	-1.774	-0.393	0.060	1.990
	7	0.728	0.413	0.481	-1.878	1.024	0.215	1.019
	8	0.728	0.408	0.183	-1.602	1.877	0.226	-1.039
	9	0.728	0.402	-0.120	-1.003	1.698	0.085	-1.989
	10	0.245	0.133	-0.116	-0.134	0.289	-0.021	-0.373
	11	12.052	6.494	-9.474	3.929	-1.905	-3.388	1.549
	12	0.415	0.198	-0.333	0.191	-0.421	3.198	-0.081
	13	6.049	-10.973	0.195	-0.017	0.013	-0.982	0.001
$C_{2r}^{(n)}$	1	0.000	0.780	0.107	0.095	0.085	0.020	0.073
	2	0.000	0.414	0.054	0.035	0.007	-0.0003	-0.024
	3	0.000	0.413	0.049	0.008	-0.014	-0.013	-0.076
	4	0.000	0.410	0.043	-0.019	-0.070	-0.017	-0.047
	5	0.000	0.407	0.035	-0.044	-0.058	-0.010	0.033
	6	0.000	0.404	0.026	-0.059	-0.014	0.004	0.077
	7	0.000	0.399	0.016	-0.063	0.038	0.016	0.039
	8	0.000	0.394	0.006	-0.053	0.069	0.016	-0.040
	9	0.000	0.389	-0.004	-0.033	0.062	0.006	-0.077
	10	0.000	0.129	-0.004	-0.004	0.011	-0.002	-0.014
	11	0.000	6.279	-0.325	0.130	-0.070	-0.245	0.060
	12	0.000	0.191	-0.011	0.006	-0.015	0.231	-0.003
	13	0.000	-10.610	0.007	-0.0006	0.0005	-0.006	0.00005

10.9

8	9	10	11	12	13
3129.6	3706.8	4180.7	4528.0	4736.0	6856.2
1.553	1.293	1.058	0.793	0.443	0.000
-1.323	-1.822	-2.049	-1.874	-1.167	-0.000003
-1.714	-0.560	0.956	1.969	1.647	0.00002
0.809	2.038	1.061	-1.188	-1.942	-0.00012
1.957	-0.224	-2.052	-0.120	2.019	0.0008
-0.221	-1.952	1.056	1.376	-1.870	-0.005
-2.023	0.974	0.961	-2.019	1.510	0.035
-0.386	1.577	-2.049	1.766	-0.982	-0.228
1.907	-1.581	1.154	-0.726	0.343	1.498
0.401	-0.376	0.313	-0.220	0.113	-2.357
-0.979	0.641	-0.414	0.248	-0.116	1.060
0.020	-0.008	0.003	-0.002	0.0008	-0.003
0.0002	0.00006	-0.00002	0.000009	-0.000003	0.000006
0.060	0.048	0.035	0.019	0.005	0.000
-0.051	-0.068	-0.067	-0.045	-0.014	-0.000001
-0.066	-0.020	0.031	0.047	0.020	0.000005
0.032	0.076	0.035	-0.029	-0.024	-0.000033
0.076	-0.008	-0.067	-0.003	0.025	0.0002
-0.008	-0.072	0.035	0.033	-0.023	-0.001
-0.079	0.036	0.031	-0.049	0.019	0.009
-0.015	0.058	-0.067	0.042	-0.012	-0.061
0.074	-0.058	0.038	-0.017	0.004	0.399
0.016	-0.014	0.010	-0.005	0.001	-0.623
-0.038	0.024	-0.014	0.006	-0.001	0.282
0.0008	-0.0002	0.0001	-0.00005	0.00001	-0.0008
0.000008	0.000002	-0.000001	0.0000	-0.0000	0.000002

```

array AN[1:13, 1:13], F, X[1:13, 1:2], XN[1:13, 1:3],
      CN[1:13], P[0:13];
procedure RESP2(n, h, AN, CN, P, F, XN, X, S);
.....
      (RESP2 过程说明)
end;
read(AN, CN, P, F);
RESP2(13, 13, AN, CN, P, F, XN, X, 2);
print(X, XN); read(F);
RESP2(13, 4, AN, CN, P, F, XN, X, 2);
print(X, XN)
end

```

计算结果列于表 10.10 和表 10.11。

表 10.10

方 法	截 断 振 型		完 备 正 则 座 标 振 型 叠 加				精 确 解①	
i	X_i	φ_i	X_i	φ_i	X_i/X_2	$\varphi_i - \varphi_2$	X_i/X_2	$\varphi_i - \varphi_2$
1	0.000818	77.18°	0.000852	63.56°	1.0369	0.21°	1.0355	0.06°
2	0.000772	75.17°	0.000821	63.36°	1.0000	0.00°	1.0000	0.00°
3	0.000693	71.23°	0.000698	103.00°	0.8485	39.65°	0.8337	39.67°
4	0.000596	65.82°	0.000700	105.66°	0.8524	42.31°	0.8377	42.55°
5	0.000488	58.95°	0.000394	63.99°	0.4799	0.63°	0.4837	0.13°
6	0.000372	50.34°	0.000420	65.54°	0.5114	2.18°	0.5120	1.69°
7	0.000251	38.33°	0.000531	4.90°	0.6468	-58.46°	0.6606	-57.39°
8	0.000134	13.31°	0.000485	0.72°	0.5900	-62.64°	0.6030	-61.55°
9	0.000096	-63.16°	0.000115	238.70°	0.1400	175.34°	0.1363	176.06°
10	0.000170	259.52°	0.000193	242.73°	0.2349	179.37°	0.2329	174.27°
11	0.000272	246.55°	0.000273	244.62°	0.3329	178.73°	0.3306	173.52°
12	0.000277	245.18°	0.000274	244.64°	0.3335	178.72°	0.3427	173.45°
13	0.000009	-89.17°	0.000009	-89.39°	0.0109	207.25°	0.0000	82.23°
			X_2	0.00082	(弧度)		0.00083	(弧度)

① 此解引自例10.2所引资料。

由上列几个算例可见，尽管所讨论的系统在正则坐标下的阻尼矩阵 $[C_N]$ 的非对角元素与对角线元素相比并不小得很多（见表

表 10.11

r	X_{Nr+1}	X_{Nr+2}	ψ_r
1	0.000000	0.000000	—
2	0.000047	-0.000042	-0.3681
3	0.004851	-0.007648	0.2130
4	-0.001157	-0.000640	0.0249
5	0.002746	0.000528	0.0154
6	0.000403	0.000067	0.0272
7	0.001523	0.000199	0.0115
8	-0.000776	-0.000095	0.0090
9	0.000477	0.000071	0.0073
10	-0.001406	-0.000319	0.0057
11	-0.000434	-0.000219	0.0038
12	0.000176	0.000670	0.0019
13	-0.000098	0.000003	0.0262

10.7), 但是略去所有非对角元素按完备正则座标振型叠加法得到的对简谐激振力的响应与精确解相比还是具有满意的精度 (见表10.10)。至于截断振型法, 由于例 10.8 的激振力分布中相应于高阶振型的成分较大, 因此尽管激振力频率较低, 还是激起了不小的与高阶振型相应的响应 (见表10.11), 只考虑前三阶主振型的截断振型法的结果还不够令人满意。同理, 例 10.7 中的初始条件包含的与高阶振型相应的成分也较高, 因此响应中相应于高阶振型的分量也较大。但是, 如果激振力分布中相应于高阶振型的成分较小, 激振力频率较低 (对于初始条件而言其相应于高阶振型的成分较小), 则截断振型法还是可以得到满意的结果, 这里就不专门举例了。

10.4 用传递矩阵法解链状结构的振动问题

(1) 概述

传递矩阵法是求解链状结构振动问题的一种有效的方法, 在前面第六章和第七章都曾作过比较详细的介绍, 这里主要围绕应用电子计算机具体求解作一些简单的介绍。

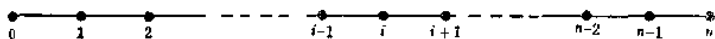


图 10-6

图 10.6 所示为最简单的链状结构的计算模型。该系统的状态通过图示 $n + 1$ 个点的状态矢量来确定，而作为状态矢量的元素应包括该点的独立的广义位移和相应的广义力，如果把状态矢量记作 $\{V\}_i$ ，作为一般情况可以表示为

$$\{V\}_i = [x_1, x_2, \dots, x_m, X_1, X_2, \dots, X_m]^T \quad (a)$$

其中 x_1, x_2, \dots, x_m 为广义位移， X_1, X_2, \dots, X_m 为广义力， m 为链上各点的自由度数。

考虑到链的相邻两点之间的弹性与惯性，还有作用于该段链上的外力（包括激振力和阻尼力），就可以建立两点的状态矢量之间的关系

$$\{V\}_{i+1} = [T]_{i,i+1} \{V\}_i + \{\Delta V\}_{i,i+1} \quad (b)$$

其中 $[T]_{i,i+1}$ 叫做从 i 点到 $i + 1$ 点的传递矩阵，而列阵 $\{\Delta V\}_{i,i+1}$ 是由激振力产生的。这个关系有时可直接从弹性构件振动方程的解析解得到，有时则从集聚质量的离散化模型来得出。当 $[T]_{i,i+1}$ 中具有较多零元素，或各元素之间有类似因子时，往往还归纳成一组递推公式来代替它，作为递推公式的一般形式可写成

$$v_j^{(i+1)} = T_j(v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \dots, v_{2m}^{(i)}, v_1^{(i+1)}, \dots, v_{i-1}^{(i+1)}) + \Delta v_j \\ (j = 1, 2, \dots, 2m) \quad (c)$$

其中 Δv_j 和 $\{\Delta V\}_{i,i+1}$ 相对应。

如果要解系统在简谐激振力作用下的响应，那么，只要从一个端点（比如 0 点）起算。起算点的状态矢量 $\{V\}_0$ 有 $2m$ 个元素，由于要满足 m 个端点条件，因此只有 m 个待定参数，通常叫做初参数。在考虑阻尼的情况下每个初参数是具有幅度和相角的简谐量（或表示成复数），在不考虑阻尼时就是一个实数。一般情况下可把初参数记作 v_k^0 ($k = k_1, k_2, \dots, k_m$)，显然 k 的编号一

般和 j 的编号不一定一致, k_1, k_2, \dots, k_m 为 $1, 2, \dots, 2m$ 中某 m 个数。

接着就可以借助于传递矩阵或递推公式进行计算。整个计算过程可以分解成 $m+1$ 次从 0 到 n 的扫描: 第一次扫描令所有初参数均为零, 但在扫描过程中考虑 $\{\Delta V\}_{i,i+1}$ 或 Δv_j ; 其余各次每次令一个初参数为 1, 其余均为零, 从而确定每次扫描的起始矢量 $\{V\}_0^{(k)}$ ($k = k_1, k_2, \dots, k_m$) ($\{v\}_0^{(k)}$ 相应于 $v_k^0 = 1$)。然后按照 (b) 或 (c) 进行从 0 到 n 的传递或递推, 在这 m 次扫描过程中都必须令 $\{\Delta V\}_{i,i+1}$ 或 Δv_j 为零。

当如上计算得到了 $\{V\}_n^{(k)}$ ($k = 0, k_1, k_2, \dots, k_m$) 之后, 不难看出, 状态矢量 $\{V\}_n$ 可以表示为初参数的线性函数, 即

$$\{V\}_n = \sum_{k=k_1, k_2, \dots, k_m} v_k^0 \{V\}_n^{(k)} + \{V\}_n^{(0)} \quad (d)$$

于是根据计算末端 n 处的 m 个端点条件可以得到对于初参数 v_k^0 的 m 个线性代数方程, 由这些方程将 v_k^0 解出, 就得到了问题的解, 即

$$\{V\}_i = \sum_{k=k_1, k_2, \dots, k_m} v_k^0 \{V\}_i^{(k)} + \{V\}_i^{(0)} \quad (e)$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

对于经常遇到的求无阻尼系统固有频率与主振型的问题, 计算过程和上面所述略有差别, 计算程序的粗框图如图 10-7 所示。第一框是根据固有频率的大致范围选定一个起算频率。第二框试算递推过程和上面解简谐激振力作用下的响应的计算过程大致相同, 不同的只是: 这里激振力为零, 因此只要作 m 次扫描, 计算时考虑的频率不是激振力的频率而是试算频率; 根据计算末端端点条件得到的是对于初参数的齐次线性代数方程。为了便于计算起见, 在程序中往往给定某一初参数为固定值, 同时使 m 个齐次方程的 $m-1$ 个得到满足, 从而解出其余 $m-1$ 个初参数。于是剩下的一个齐次方程一般情况下将不能满足, 由此可以算出剩余量。第三框是余量比较。当剩余量等于零时, 由于所有端点条件都得

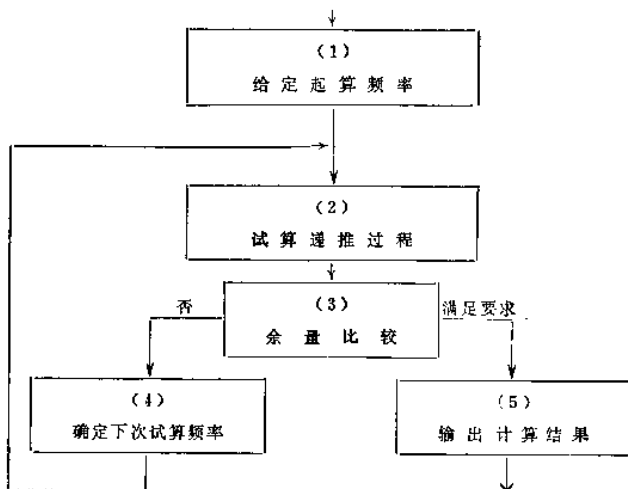


图 10-7

到满足，不难证明这时的试算频率就是一个固有频率。实际计算中只要余量小到满足要求，或者经过一系列试算后试算频率逐渐收敛于固有频率，使频率误差满足了一定要求，那么就可以认为求得了一个固有频率，于是可转到第五框输出计算结果（包括固有频率和主振型）。如果余量或频率误差还不满足要求，则转到第四框按一定方法确定下次试算的频率。

对于这里的三、四两框，附录中给出了二分法试根过程 *FREQ*，可供读者选用。二分法试根的原理如图 10.8 所示。

图中纵座标为余量 R ，横座标为试算频率 p ，曲线为客观存在但并未求出的余量随 p 的变化规律，它和横轴的交点就是要求的一个固有频率。对于起算频率 p_0 得到的余量记为 R_0 ，第二次试算频率取为 $p_1 = p_0 + \Delta p$ ， Δp 为试算频率增量。只要每次试算所得 R_i 还始终和 R_0 的符号相同，那么下次试算频率就取 $p_{i+1} = p_i + \Delta p$ 。如果一直算到 p_s ，其余量 R_s 第一次和 R_0 符号相反，那么在这之后，下一次试算频率将取得符号相反的余量的最靠

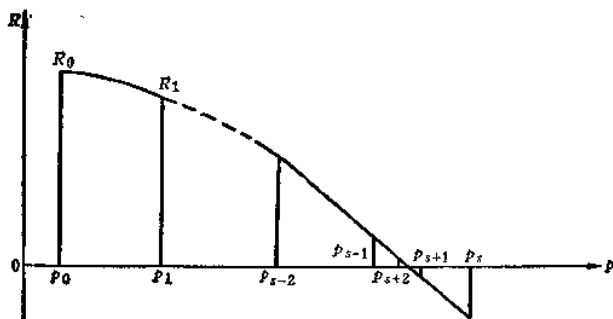


图 10-8

近的两已试算频率的平均值, 例如 $p_{s+1} = \frac{1}{2}(p_s + p_{s-1})$, $p_{s+2} = \frac{1}{2}(p_{s-1} + p_{s+1})$, ... 显然, 试算频率将收敛于所求的固有频率(当然不一定单调收敛)。实际计算中当两次得到符号相反的余量的试算频率之差小于允许误差时就以最后一次试算的频率作为固有频率的计算值(详见过程 *FREQ*)。

图 10-7 中的第二框应针对具体问题选用或编制不同的过程。为便于读者选用起见附录中提供了过程 *HOLZ* 和 *PROL*。前者可用于求解无阻尼轴盘扭振系统的固有频率与主振型, 它不仅适用于单支系统, 而且也适用于具有一个分支点的多支系统。过程 *PROL* 则用于求无阻尼轴系横振动的固有频率和主振型, 它适用于单跨或多跨, 弹性支座或刚性支座, 有外伸端或没有外伸端等各种情况。在忽略回转效应等影响的情况下, 该过程也可以用来计算轴系的临界转速。

限于篇幅, 下面仅就上述两个过程作些简单介绍。对于求其他链状结构的固有频率与主振型, 或对于前面提到过的有阻尼的链状结构对简谐激振力的响应, 读者可根据其原理, 参照有关过程自行编制, 只要把递推公式列清楚了, 程序编制上没有太大的困难。

(2) 轴盘系统的扭转振动

对于轴盘系统的扭转振动，第六章曾经作过较详细的讨论，这里仅把要点简单重复一下，并直接和过程 *HOLZ* 联系起来。

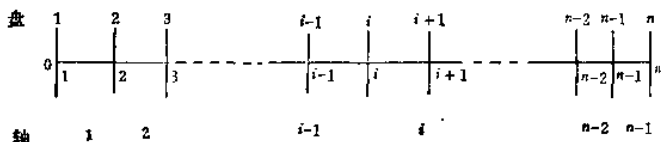


图 10-9

由 n 个盘和 $n-1$ 个轴段所组成的轴盘系统如图 10-9 所示。作为链状结构的链上各点 $(0, 1, 2, \dots, n)$ 的位置也在图上示出。可以看到，除 0 点取在 1 号盘的左侧之外，其他各点均取在相应盘号的盘的右侧。作为各点的状态矢量，可以取

$$\{V\}_i = [\theta \quad M]^T \quad (f)$$

在写出传递矩阵之前可以注意到对于系统的基本假设：对于盘只考虑它的转动惯量而略去其弹性，对于轴段略去其惯性而只计其弹性（通常用柔度来表示）。于是通过传递矩阵建立的关系不难写出如下：

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i &= [T]_{0,i-1} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ I_1 p^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_0 \\ \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_{i+1} &= [T]_{i,i+1} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & -F_i \\ I_{i+1} p^2 & 1 - I_{i+1} F_i p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i \end{aligned} \right\} \quad (10.99)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1)$$

其中 I_i 为第 i 个盘的转动惯量， F_i 为第 i 个轴段的柔度， p 为试算频率。

为了编制程序方便起见，可以把 (10.99) 改写成如下的递推公式：

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta_0 \\ M_1 &= I_1 \theta_1 p^2 + M_0 \\ \theta_{i+1} &= \theta_i - F_i M_i \\ M_{i+1} &= I_{i+1} \theta_{i+1} p^2 + M_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \quad (10.100)$$

由于此问题每点只有一个自由度,因此总共只有一个初参数,整个试算过程只要从 0 到 n 递推一次。因为在 0, n 两端均无扭矩作用,因此起算点的初参数可取为 0° ,且可取为某一常数,而递推到末端得到的 M_n 即为剩余量,在这里具体说是剩余扭矩。

根据上述试算过程很容易编制如下简单的程序段:

```

A[1]:=A[0];
M[1]:=I[1]×A[1]×pp+M[0];
for i:=1 step 1 until n-1 do
begin
  A[i+1]:=A[i]-F[i]×M[i];
  M[i+1]:=I[i+1]×A[i+1]×pp+M[i];
end;
r:=M[n];

```

显然,程序段中的语句和公式 (10.100) 有着明显的对应关系(最后一句是把 n 点的扭矩作为剩余量)。因此读者在处理类似问题时,只要把递推公式等有关公式整理清楚,自编有关程序也并不是很困难的。把这段程序和过程 *HOLZ* 比较可以看到,它和其中的一个小过程 *HO* 的语句是十分相近的,只是 *HO* 还考虑了其他一些因素因此稍稍复杂一些。

下面以图 10-10 所示的系统为例来说明具有一个分支点的轴盘系统的试算过程。其中主支有 1, 2, ..., n_1 共 n_1 个盘,分支点在第 k 个盘右侧,共有两个分支,第一分支为 n_1+1 —— n_1+n_2 共 n_2 个盘,第二分支为 n_1+n_2+1 —— $n=n_1+n_2+n_3$ 共 n_3 个盘。在主支中除 0 点外链上各点都取在同号数的盘的右侧,而 i 与 $i+1$ 点之间的轴段编号为 i ; 在分支中除 O_1, O_2 点外链上各点都取在同号数的盘的左侧,而 i 与 $i+1$ 点之间的轴段编

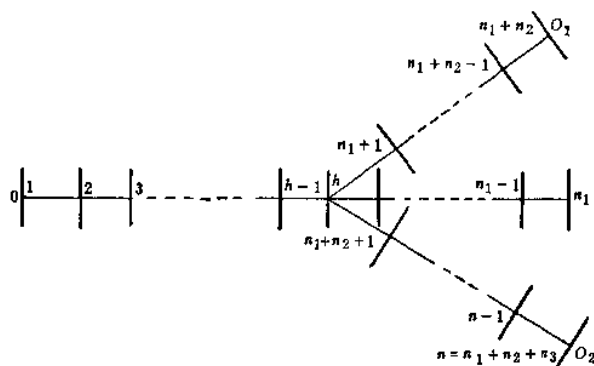


图 10-10

号为 $i+1$ 。

对于主支，计算过程中从编号小的点向编号大的点递推，递推公式即 (10.100)，而对于分支，分别从 O_1 、 O_2 起算，递推公式为

$$\left. \begin{aligned} \theta_{n_1+n_2} &= \theta_{01} \\ M_{n_1+n_2} &= M_{01} - I_{n_1+n_2} \theta_{n_1+n_2} p^2 \\ \theta_n &= \theta_{02} \\ M_n &= M_{02} - I_n \theta_n p^2 \\ \theta_{i-1} &= \theta_i + F_i M_i \\ M_{i-1} &= M_i - I_{i-1} \theta_{i-1} p^2 \end{aligned} \right\} \quad (10.101)$$

$$\left(\begin{array}{c} i = n_1 + n_2, n_1 + n_2 - 1, \dots, n_1 + 2, \\ n, n - 1, \dots, n_1 + n_2 + 2 \end{array} \right)$$

由于对于分支增加了新的起算点 O_1 、 O_2 ，相应地也就引进了新的初参数 θ^{01} 和 θ^{02} ，而通过分支点的连续条件可以建立 θ^{01} 、 θ^{02} 和 θ^0 之间的关系，因此独立的初参数还是只有一个，不妨还取 θ^0 ，而且可取为某一常数。分支点的连续条件为

$$\left. \begin{aligned} \theta_{n_1+1} + F_{n_1+1} M_{n_1+1} &= \theta_h \\ \theta_{n_1+n_2+1} + F_{n_1+n_2+1} M_{n_1+n_2+1} &= \theta_h \end{aligned} \right\} \quad (10.102)$$

$$M_h = M_{h-1} + I_h \theta_h p^2 - M_{n_1+1} - M_{n_1+n_2+1} \quad (10.103)$$

于是整个试算递推过程可按如下次序进行: 主支给定初参数 θ^0 , 从 0 递推到 h ; 第一分支暂定初参数 θ^{01} , 从 O_1 递推到 $n_1 + 1$, 根据 (10.102) 定出 θ^{01} ; 第二分支暂定初参数 θ^{02} , 从 O_2 递推到 $n_1 + n_2 + 1$, 根据 (10.102) 定出 θ^{02} ; 根据 (10.103) 式确定 M_h , 再对主支从 h 递推到 n_1 , 得到剩余扭矩 $R = M_{n_1}$ 。(详见过程 HOLZ 及说明)

下面举两个计算实例

例10.9 对于例 10.2 的轴盘扭振系统, 求其各阶固有频率及主振型。

对此问题利用附录中的过程进行计算时应该注意到: 由于过程 HOLZ 是无参过程, *FREQ* 也只有一个换名形参, 但是过程中许多量是非局部量, 因此在主程序中一定要根据过程说明的要求对所有非局部量一一加以说明 (这两个过程没有把非局部量换成形参的原因是为使过程 *FREQ* 适用于多种不同类型的问题)。

具体计算程序可以列出如下:

```
begin
  array I, F, A, M[1:13];
  integer array BH[0:1];
  real p, pp, dp, er, r, a0, hz;
  integer nb, h, n, j;
  procedure HOLZ;
  ..... (HOLZ 过程说明)
end;
procedure FREQ (PROC);
..... (FREQ 过程说明)
end;
read (I, F);
nb := 0; h := 13;
p := 60; dp := 60; er := 0.005; a0 := 10-10;
for n := 1 step 1 until 12 do
```


表 10.12

阶 次	1	2	3	4	5	6
固有频率	14.8272	67.0920	171.898	283.524	313.212	394.690
主 振 型	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	2	0.9977	0.9529	0.6909	0.1591	-0.6296
	3	0.9934	0.8657	0.1717	-0.9610	-1.2687
	4	0.9876	0.7519	-0.3823	-1.5525	-1.6596
	5	0.9803	0.6149	-0.8589	-1.2901	-0.9366
	6	0.9715	0.4590	-1.1619	-0.3182	0.4151
	7	0.9612	0.2889	-1.2300	0.8287	1.4882
	8	0.9496	0.1100	-1.0494	1.5199	1.5624
	9	0.9364	-0.0724	-0.6567	1.3751	0.5879
	10	0.9255	-0.2077	-0.2620	0.6983	-0.4404
	11	0.9140	-0.3444	0.1556	-0.0933	-1.4164
	12	0.8089	-0.3516	0.2201	-0.5995	38.8284
	13	-3.0770	0.6140	0.0025	-0.0018	-0.0652

阶 次	7	8	9	10	11	12
固有频率	498.459	590.365	665.731	720.867	753.808	1129.27
主 振 型	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	2	-1.5992	-2.6460	-3.6363	-4.4360	-4.9442
	3	-2.0721	-0.8132	1.6973	4.6609	6.9788
	4	0.9774	2.9587	1.8842	-2.8136	-8.2301
	5	2.3654	-0.3248	-3.6423	-0.2848	8.5575
	6	-0.2677	-2.8338	1.8758	3.2565	-7.9243
	7	-2.4457	1.4148	1.7059	-4.7804	6.4015
	8	-0.4661	2.2897	-3.6368	4.1788	-4.1602
	9	2.3059	-2.2954	2.0485	-1.7193	1.4519
	10	1.4437	-1.6280	1.6532	-1.5581	1.4275
	11	-0.0716	0.0563	-0.0444	0.0358	-0.0291
	12	0.0387	-0.0262	0.0095	-0.0508	-0.0988
	13	0.2519	0.5760	0.3143	7.2071	19.480

```

begin
   $FREQ (HOLZ)$ ;
   $hz := p / 6.283185306$ ;
  for  $j := 13$  step  $-1$  until  $1$  do  $A[j] := A[j] / A[1]$ ;
  print ( $n, hz, A$ )
end end

```

计算结果列于表 10.12。

这一结果和前面 $G-H$ 法的结果比较可见, 用两种方法得到的固有频率是完全一致的, 但是这里算出的振型在第 13 点有较大的误差。不过, 如果把频率误差要求从 0.001Hz 提高到 10^{-8}Hz , 则得到的振型也能和 $G-H$ 法完全一致。当然, 如果不要求得到高阶振型, 那就不必对频率误差提那么高的要求。

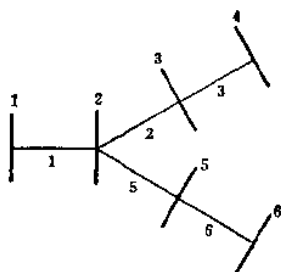


图 10-11

例 10.10 具有六个盘的带分支轴盘系统如图 10-11 所示, 轴段与盘的编号也在图上示出。

系统的参数为 (I : $\text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2$, F : $1/\text{kg} \cdot 1/\text{cm}$):

$$I_1 = 4.16 \times 10^5 \quad F_1 = 0.141 \times 10^{-7}$$

$$I_2 = 3.45 \times 10^5 \quad F_2 = 0.191 \times 10^{-9}$$

$$I_3 = 1.029 \times 10^6 \quad F_3 = 0.155 \times 10^{-11}$$

$$I_4 = 7.24 \times 10^5$$

$$I_5 = 1.085 \times 10^6 \quad F_5 = 0.191 \times 10^{-9}$$

$$I_6 = 4.7 \times 10^5 \quad F_6 = 0.42 \times 10^{-11}$$

求其前四阶频率与主振型。

计算程序与上例差别不大, 可按附录中过程说明参考上例编制。计算结果列于表 10.13。

⊙ 此例引自 Den Hartog, J. P. "Mechanical Vibrations", 4th ed., 1956.

表 10.13

阶 次		1	2	3	4
固 有 频 率		2.110	7.005	28.681	135.11
主 振 型	1	-30.277	-0.0408	0.0437	0.00048
	2	0.9474	0.4224	-8.2777	-2.0078
	3	1.3072	0.1991	0.1094	91.7240
	4	1.3098	0.2035	0.1718	-12.9431
	5	0.9996	0.9962	0.9359	-0.4226
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(3) 轴系的横振动

关于轴系的横振动用传递矩阵法求解,第六章也曾作过介绍,这里仅仅围绕过程 *PROL* 作些简单说明。

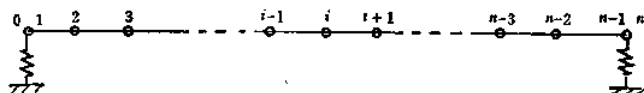


图 10-12

这里两端简支的单跨轴的计算模型如图 10-12 所示,链上各点位置也在图上示出。为使计算简化,这里采用了集聚质量简化模型,把每一轴段质量分别集聚到两端,集中质量(共 $n-1$ 个)除最后一个外都在链上同序号点的左侧,而 $n-1$ 、 n 两点则分别在最后一个质量的左右两侧。从左到右可见: 0 与 1 之间仅包含一个弹性支座(刚度 k_0)与集中质量 m_1 , $i-1$ 与 i 之间($i=2, 3, \dots, n-2$)则包括一段轴段(长 l_i , 抗弯刚度 EJ_i)和一个集中质量 m_i , $n-2$ 与 $n-1$ 之间只有一个轴段(l_{n-1} , EJ_{n-1}), $n-1$ 与 n 之间则又只有一个弹性支座(刚度 k_1)和一个集中质量 m_n 。

对于横振动,作为状态矢量可取

$$\{V\}_i = [Y \ \theta \ M \ Q]^T \quad (8)$$

于是通过传递矩阵建立的关系不难写出如下:

$$\begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_0 + m_1 p^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_0 \quad (10.104)$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & l_i & -\frac{l_i^3}{2EJ_i} & \frac{l_i^3}{6EJ_i} \\ 0 & 1 & -\frac{l_i}{EJ_i} & \frac{l_i^2}{2EJ_i} \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ p^2 m_i & p^2 m_i l_i & \frac{p^2 m_i l_i^2}{2EJ_i} & 1 + p^2 m_i \frac{l_i^3}{6EJ_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{i-1} \quad (10.105)$$

(i = 2, 3, \dots, n-2)

$$\begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & l_{n-1} & -\frac{l_{n-1}^3}{2EJ_{n-1}} & \frac{l_{n-1}^3}{6EJ_{n-1}} \\ 0 & 1 & -\frac{l_{n-1}}{EJ_{n-1}} & \frac{l_{n-1}^2}{2EJ_{n-1}} \\ 0 & 0 & 1 & l_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{n-2} \quad (10.106)$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_1 + m_n p^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{n-1} \quad (10.107)$$

其中 (10.104), (10.107) 适用于弹性支座处, (10.105) 适用于中间段, (10.106) 适用于支座前无质量段。

为了编制程序方便起见, 可把上列各式改写成递推公式。如 (10.105) 式可改写成:

$$\left. \begin{aligned}
 l_0 &= l, & l_1 &= l_0/EJ, \\
 l_2 &= l_1 \times l_0/2, & l_3 &= l_2 \times l_0/3 \\
 Y_i &= Y_{i-1} + l_0 \times \theta_{i-1} + l_2 \times M_{i-1} + l_3 \times Q_{i-1} \\
 \theta_i &= \theta_{i-1} + l_1 \times M_{i-1} + l_2 \times Q_{i-1} \\
 M_i &= M_{i-1} + l_0 \times Q_{i-1} \\
 Q_i &= p^2 m_i (Y_{i-1} + l_0 \times \theta_{i-1} + l_2 \times M_{i-1} \\
 &\quad + l_3 \times Q_{i-1}) + Q_{i-1}
 \end{aligned} \right\} \quad (10.108)$$

这些公式很容易和过程 *PROL* 中的语句相对照。

由于此问题每点有两个自由度，因此可取两个初参数，例如对于弹性支座情况可取 Y^0 和 θ^0 ，每次试算过程要从 0 到 n 递推两次，第一次可令 $Y_0^{(1)} = 1$ ， $\theta_0^{(1)} = M_0^{(1)} = Q_0^{(1)} = 0$ ，第二次则令 $\theta_0^{(2)} = 1$ ， $Y_0^{(2)} = M_0^{(2)} = Q_0^{(2)} = 0$ 。在计算末端的端点条件为

$$\left. \begin{aligned}
 Y^n M_n^{(1)} + \theta^n M_n^{(2)} &= 0 \\
 Y^n Q_n^{(1)} + \theta^n Q_n^{(2)} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (10.109)$$

由此第二式可以解出

$$\theta^0 = -\frac{Q_n^{(1)}}{Q_n^{(2)}} Y^0 \quad (h)$$

于是可得剩余弯矩为

$$M_n = Y^0 M_n^{(1)} - \frac{Q_n^{(1)}}{Q_n^{(2)}} Y^0 M_n^{(2)} \quad (i)$$

令 Y^0 为一给定值，可取余量 R 为

$$R = M_n^{(1)} - \frac{Q_n^{(1)}}{Q_n^{(2)}} M_n^{(2)} \quad (10.110)$$

对于弹性支座的单跨轴，过程 *PROL* 基本上就是按照上述公式进行试算的，只是为了和刚性支座统一起见改从 1 点起算，第一次递推令 $Q_1^{(1)} = 1$ ， $Y_1^{(1)} = 1/(-k_0 + p^2 m_1)$ ， $\theta_1^{(1)} = M_1^{(1)} = 0$ ，第二次令 $\theta_1^{(2)} = 1$ ， $Y_1^{(2)} = M_1^{(2)} = Q_1^{(2)} = 0$ 。实际计算中 (10.110) 式仍然可用。

过程 *PROL* 除去计算单跨轴之外，还可用于计算多跨轴系。图 10-13 所示为多跨轴的计算模型。链上各点从 0 开始顺序排列，

0 和 1 之间为 0 支座, 1, 2, 3, …直到 $n_1 - 1$ 是第一跨的中间段, $n_1 - 1$ 和 n_1 之间是 1 支座前的无质量段, n_1 和 $n_1 + 1$ 之间是 1 支座, …依次类推, 直到 n_m 和 n 之间是 m 支座。

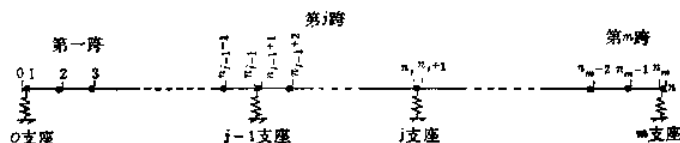


图 10-13

如果支座都是弹性支座, 那么计算顺序和单跨情况很相似, 先对第一跨从 1 递推到 1 支座后的 $n_1 + 1$, 接着对第二跨从 $n_1 + 1$ 递推到 2 支座后的 $n_2 + 1$, …直到最后一跨一直递推到 n , 所用递推关系和 (10.104)~(10.107) 以及 (10.108) 相似 (根据具体情况分别用弹性支座处, 中间段及支座前无质量段的递推公式)。试算过程从 1 到 n 扫描两次, 每次的起始矢量与单跨相同, 最后也一样得到剩余弯矩作为余量。

如果第一跨或最后一跨是外伸端, 那么只要将相应支座的刚度取 0, 支座处质量仅仅取集聚简化来的一部分轴段质量。当起算点为自由端时第一次递推的起始状态矢量 $\{V\}_1^{(1)}$ 应该从 $[1 / (-k_0 + p^2 m_1) \ 0 \ 0 \ 1]^T$ 改为 $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 。

对于刚性支座, 情况与弹性支座有些不同。如果 0 支座是刚性支座, 那么作为初参数可取 θ^0 与 Q^0 , 这时必须从 1 点起算。如果递推过程中遇到 j 支座为刚性支座, 那么以 $\{V\}_1^{(1)} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ 和 $\{V\}_1^{(2)} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ 为起算矢量的两次扫描都只能先递推到 j 支座前的 n_j 点为止。根据刚性支座的支承条件可得

$$Q^0 Y_{n_j}^{(1)} + \theta^0 Y_{n_j}^{(2)} = 0 \quad (10.111)$$

由此可以解出

$$\theta^0 = - \frac{Y_{n_j}^{(1)}}{Y_{n_j}^{(2)}} Q^0 \quad (10.112)$$

根据支座前后的连续条件可知

$$\left. \begin{aligned} Y_{n_j+1} &= 0 \\ \theta_{n_j+1} &= \theta_{n_j} - \left(\theta_{n_j}^{(1)} - \frac{Y_{n_j}^{(1)}}{Y_{n_j}^{(2)}} \theta_{n_j}^{(2)} \right) Q^0 \\ M_{n_j+1} &= M_{n_j} - \left(M_{n_j}^{(1)} - \frac{Y_{n_j}^{(1)}}{Y_{n_j}^{(2)}} M_{n_j}^{(2)} \right) Q^0 \\ Q_{n_j+1} &= Q_{n_j} + Q^{0j} = \left(Q_{n_j}^{(1)} - \frac{Y_{n_j}^{(1)}}{Y_{n_j}^{(2)}} Q_{n_j}^{(2)} \right) Q^0 + Q^{0j} \end{aligned} \right\} \quad (10.113)$$

在 $n_j + 1$ 开始的递推过程中, Q^{0j} 就代替 θ^0 作为一个初参数, 以 $\{V\}_{n_j+1}^{(1)} = \left[0 \left(\theta_{n_j}^{(1)} - \frac{Y_{n_j}^{(1)}}{Y_{n_j}^{(2)}} \theta_{n_j}^{(2)} \right) \left(M_{n_j}^{(1)} - \frac{Y_{n_j}^{(1)}}{Y_{n_j}^{(2)}} M_{n_j}^{(2)} \right) \left(Q_{n_j}^{(1)} - \frac{Y_{n_j}^{(1)}}{Y_{n_j}^{(2)}} Q_{n_j}^{(2)} \right) \right]^T$ 和 $\{V\}_{n_j+1}^{(2)} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ 作为起算矢量进行两次扫描。

如果再遇中间支座是刚性支座则作同样处理。一直递推算到末支座, 如果它还是刚性支座, 那么根据与 (10.102) 式类似的关系将 Q^{0j} (即末支座前一个刚性支座的剪力参数) 对 Q^0 解出, 就可算出末端的剩余弯矩。令 Q^0 为一给定值, 则可得余量 R 为

$$R = M_{n-1}^{(1)} - \frac{Y_{n-1}^{(1)}}{Y_{n-1}^{(2)}} M_{n-1}^{(2)} \quad (j)$$

下面举两个计算实例:

例 10.11 某汽轮机单跨转子如图 10-14 所示, 共有 11 个台阶段, 每段的质量 (包括叶轮等的质量) 均集聚到该段的中点, 但为了和前面所述模型一致起见, 每个台阶段又分成两个轴段, 如此形成的中间段有的带有集聚质量, 有的集聚质量为零, 彼此相间。此例 $nc = 23$, 各段的原始数据 (包括抗弯刚度, 质量, 长度, 即三个数组 $EJ, MM, L[1:nc]$) 列于表 10.14。支座按刚性支座计算, 支座处点号为 0 与 23。求该单跨转子横振动的前

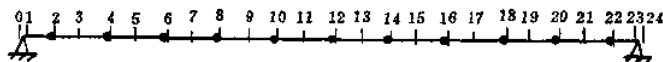


图 10-14

五阶固有频率与主振型。

表 10.14

	1	2	3	4	5
<i>EJ</i>	0.3924 ₁₀₁₁	0.3924 ₁₀₁₁	0.3924 ₁₀₁₁	0.1071 ₁₀₁₂	0.1071 ₁₀₁₂
<i>MM</i>	0	0.05363	0	0.07528	0
<i>L</i>	0	8.15	8.15	6.50	6.50
	6	7	8	9	10
<i>EJ</i>	0.3514 ₁₀₁₂	0.3514 ₁₀₁₂	0.1206 ₁₀₁₃	0.1206 ₁₀₁₃	0.1118 ₁₀₁₃
<i>MM</i>	0.4823	0	0.9650	0	0.1893
<i>L</i>	22.00	22.00	23.15	23.15	4.50
	11	12	13	14	15
<i>EJ</i>	0.1118 ₁₀₁₃	0.1118 ₁₀₁₃	0.1118 ₁₀₁₃	0.1118 ₁₀₁₃	0.1118 ₁₀₁₃
<i>MM</i>	0	1.0382	0	0.8816	0
<i>L</i>	4.50	20.00	20.00	13.10	13.10
	16	17	18	19	20
<i>EJ</i>	0.1118 ₁₀₁₃	0.1118 ₁₀₁₃	0.3514 ₁₀₁₂	0.3514 ₁₀₁₂	0.1071 ₁₀₁₂
<i>MM</i>	1.0390	0	0.5700	0	0.07528
<i>L</i>	16.35	16.35	26.00	26.00	6.5
	21	22	23		
<i>EJ</i>	0.1071 ₁₀₁₂	0.4607 ₁₀₁₁	0.4607 ₁₀₁₁		
<i>MM</i>	0	0.05884	0		
<i>L</i>	6.5	8.15	8.15		

具体计算程序可以列出如下：

```

begin
  integer nc, ni, s, n, i;
  real p, dp, er, r, x1, x2, x3, hz;

```



```

read (nc, ni, p, dp, er);
begin
array SK, SM[0:ni], EJ, MM, L[1:nc], Y, O,
      M, Q[1:2, 0:nc];
integer array SI[0:ni];
procedure FREQ (PROC);
..... (FREQ 过程说明)
end;
procedure PROL;
..... (PROL 过程说明)
end;
x1:=x2:=x3:=1;
read (SI, SK, SM, EJ, MM, L);
for n:=1 step 1 until 5 do
begin
s:=0;
FREQ (PROL);
s:=1; PROL;
for i:=1 step 1 until nc do
if abs (Y[1, I])>abs (Y[1, 0]) then
Y[1, 0]:=Y[1, I];
for i:=1 step 1 until nc do
Y[1, I]:=Y[1, I]/Y[1, 0];
hz:=p/6.283185306;
print (n, hz, Y)
end end end

```

计算结果列于表 10.15。

例 10.12 ⊙ 一个两跨轴系如图 10-15 所示。 $I_1 = 19.68$, $I_2 =$

⊙ 此例引自《Matrix methods in elastomechanics》E. C. Pestel, F. A. Leckie, McGraw-Hill Book Company, Inc (1963) 原单位单位为英制, 因所求为无量纲量, 因此这里未化为公制, 且未注明单位, 直接将其数值按公制处理。

表 10.15

阶次		1	2	3	4	5
固有频率		93.224	343.58	820.49	1532.5	2343.9
主 振 型	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.2292	0.5100	0.7166	0.8497	0.9305
	5	0.3771	0.7611	0.9640	1.0000	0.9455
	7	0.7392	1.0000	0.6838	0.0960	-0.3155
	9	0.9401	0.5862	-0.2555	-0.5211	-0.1120
	11	0.9633	0.4698	-0.3967	-0.4735	0.1051
	13	1.0000	-0.1174	-0.5422	0.1701	0.3460
	15	0.9581	-0.4890	-0.1828	0.4531	-0.1770
	17	0.8393	-0.8417	0.5287	0.0900	-0.3965
	19	0.4043	-0.6677	0.9384	-0.9814	0.8620
	21	0.2436	-0.4407	0.7866	-0.8066	0.8121
	23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

9.84, 第一跨分为 10 等分, 质量集聚到每段中点, 为 113.5, 第二跨分为 5 等分, 集聚到每段中点的质量为 58.2, 第一跨各段的抗弯刚度为 4.91×10^9 , 第二跨各段为 1.285×10^9 。支座分别按刚性支座及弹性支座 (三个支座的刚度均取油膜刚度 1.345×10^8 , 不计支座附加质量) 计算, 求此轴系的前五阶横振动固有频率及相应的主振型。

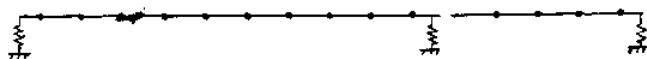


图 10-15

计算时为了和过程 *PROL* 采用的中间段模型一致起见, 第一跨的十等分段改为在上述集聚质量右侧处分割成十一段, 第十一段集聚质量为零, 第二跨也同样处理。于是 $nc = 19$, $ni = 2$, 三个支座所在点号分别为 0, 12, 19。

计算程序与上例基本相同, 下面仅仅列出计算的结果, 见表 10.16。

由表可见, 支座弹性对于轴系振动有显著的影响。

表 10.16

支 座		刚 性					弹 性					支 座				
阶 次	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
固 有 频 率																
1	41.685	136.136	176.687	344.841	509.405	36.665	91.313	115.123	185.329	259.203						
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.144	-0.230	0.690	1.000	0.876						
3	0.163	0.141	-0.184	0.461	0.125	0.282	-0.269	0.730	0.869	0.584						
4	0.473	0.376	-0.470	0.995	0.226	0.544	-0.326	0.769	0.538	0.165						
5	0.732	0.480	-0.545	0.690	0.055	0.764	-0.330	0.664	0.123	-0.212						
6	0.914	0.417	-0.373	-0.197	-0.182	0.921	-0.267	0.416	-0.265	-0.387						
7	1.000	0.212	-0.032	-0.917	-0.199	1.000	-0.142	0.077	-0.486	-0.285						
8	0.983	-0.064	0.330	-0.863	0.023	0.994	0.024	-0.265	-0.453	0.011						
9	0.867	-0.311	0.557	-0.078	0.221	0.906	0.205	-0.513	-0.189	0.299						
10	0.668	-0.437	0.558	0.730	0.162	0.748	0.373	-0.594	0.185	0.383						
11	0.413	-0.389	0.357	1.000	-0.064	0.539	0.514	-0.479	0.509	0.189						
12	0.135	-0.165	0.092	0.427	-0.224	0.310	0.637	-0.193	0.765	-0.197						
13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.196	0.700	-0.005	0.672	-0.410						
14	-0.114	0.217	0.048	-0.317	0.353	0.098	0.784	0.219	0.600	-0.594						
15	-0.244	0.716	0.539	-0.328	1.000	-0.031	0.960	0.698	0.161	-0.621						
16	-0.262	1.000	1.000	0.184	0.388	-0.085	1.000	1.000	-0.414	-0.132						
17	-0.194	0.864	0.975	0.535	-0.824	-0.085	0.819	0.969	-0.781	0.530						
18	-0.071	0.340	0.403	0.287	-0.594	-0.052	0.444	0.622	-0.774	0.829						
19	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.030	0.217	0.382	-0.568	1.000						

10.5 用常微分方程数值积分法 解弹性体振动的一维问题

(1) 概述

上一节讨论了链状结构的振动问题, 本节将要讨论弹性体振动的一维问题, 二者实际上没有什么本质的差别。前者往往由一些简单的一维结构元件所组成, 对其每个构件来说直接可以得到振动方程的解析解, 或者经过集聚质量等某些简化后可得简化模型的解析解, 因此很容易用传递矩阵法进行求解。本节讨论的方法则主要适用于形状复杂的弹性体振动的一维问题, 例如变截面杆件的扭转振动, 变截面杆的双向横振动, 变截面扭曲杆件的弯扭耦合振动, 轴对称变厚度圆盘的横向振动……等。它们的一维化的振动方程还比较容易基于某些简化假设 (或者还要通过分离变量) 建立起来, 但是这些常微分方程往往是变系数的, 一般得不到解析解, 因此通过常微分方程的数值积分求解往往比别的方法更直接更方便。

当用常微分方程的数值积分法求解时, 首先把振动微分方程化为一阶常微分方程组

$$\begin{aligned} Y'_i &= f_i(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ (i &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (a)$$

(a) 式所示为便于数值积分的规格形式, 其中 x 为自变量, Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是 x 的未知函数。它与系统的独立的广义位移和广义力有关, 但并不一定就是广义力或广义位移。 n 是常微分方程组的阶数, 它等于给定 x 值下的自由度数 m 的两倍。方程右端的 f_i 叫做右端函数, 如果把 Y_i 和 x 一样作为独立的自变量看待, 那么它是 x 和 Y_i 的已知函数。

如果用 R_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 表示独立的广义位移和广义力, 那么它和 Y_i 之间就有如下的关系

$$R_j = \varphi_j(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad (b)$$

在 $x = 0$ 和 $x = l$ 两端各有 m 个端点条件

$$\left. \begin{aligned} R_j(0) &= \varphi_j(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)|_{x=0} = R_{j0} \\ (j &= 1, 2, \dots, m) \\ R_k(1) &= \varphi_k(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)|_{x=1} = R_{k1} \\ (k &= k_1, k_2, \dots, k_m) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

这里为方便起见把与 $x = 0$ 端端点条件有关的广义位移和广义力排在前 m 个 (因此不一定将广义位移与广义力分开排列), 但是一般说来 k 的编号次序和 j 不一定一致, k_1, k_2, \dots, k_m 为 1 到 n 之内的 m 个不同的数。 R_{j0}, R_{k1} 为给定值。(a) 和 (c) 就构成了充分的定解条件。

由于对于线性的振动问题 f_i, φ_i 是 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 的线性函数, 因此可以采用叠加原理, 令

$$Y_i = \sum_{s=1}^m \alpha_s Y_i^{(s)} + Y_i^{(0)} \quad (d)$$

其中 $Y_i^{(0)}$ 是考虑激振力的非齐次方程的一个特解, 在 $(0, 1)$ 上满足方程 (a), 在 $x = 0$ 处满足 (c) 式中的非齐次端点条件, 且

$$R_j^{(0)}(0) = 0 \quad (j = m+1, m+2, \dots, n) \quad (e)$$

$Y_i^{(s)}$ 是对应齐次方程的 m 个互相独立的特解, 在 $(0, 1)$ 上都满足 (a) 的对应的齐次方程, 在 $x = 0$ 处满足与条件 (c) 对应的齐次端点条件, 而未被端点条件限制的广义位移和广义力中每次取一个为 1 其余为 0, 即

$$\left. \begin{aligned} R_j^{(s)}(0) &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ R_j^{(s)}(0) &= \begin{cases} 1 & (j = m+s) \\ 0 & (j = m+1, \dots, n, \text{但 } j \neq m+s) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

α_s ($s = 1, 2, \dots, m$) 是独立的初参数。 $Y_i^{(0)}$ 和 $Y_i^{(s)}$ 作为一阶常微分方程组初值问题的解很容易用数值积分法求得。①

根据 $x = 1$ 端的端点条件可以得到 m 个对于 α_s 的线性代数

① 可参看(美)A.拉尔斯登 H. S. 维尔夫著徐献瑜等译《数字计算机上用的数学方法》上海科学技术出版社 1963。

方程。对于有激振力的非齐次问题而言,可以直接由这些方程解出 α_s , 从而得到问题的解(当然,对有阻尼系统来说,非齐次项 $Y_i^{(0)}$, $Y_i^{(1)}$ 和 α_s 一般都是带有幅值和相位的简谐量,或者用复数来表示,但解题方法和上面所述没有本质差别)。

下面,和上一节一样,把注意力集中于求无阻尼系统的固有频率和主振型的问题,计算过程和上面所述略有不同,而计算程序的粗框图和上一节图 10-7 所示完全相同。其中给定起算频率与输出计算结果两框无须多加说明,第三、四两框可以和上节一样采用过程 *FREQ* 用二分法试根。唯一不同的是图中的第二框,对于传递矩阵法是试算递推过程,对于常微分方程数值积分法是试算积分过程。

试算积分的计算过程和上面对非齐次方程所述基本相同,差别仅仅在于如下几点:首先,由于方程(a)中没有非齐次的激振力项,端点条件(c)中的非齐次项 R_{ji} 也都为零,因此(d)式中的 $Y_i^{(0)}$ 恒等于零,整个计算过程中只要从 0 到 l 积分 m 次,而不必 $m+1$ 次;其次由于端点条件(c)中的 R_{ji} 也都为零,因此得到对于初参数 α_s 的线性齐次代数方程,对于一般的试算频率方程无非零解,不能直接将 α_s 解出,而只能给定 α_s 中某一初参数为给定值,从 $m-1$ 个方程中将其余 α_s 解出,最后从剩下的未被满足的关于广义力的一个端点条件得到该广义力的剩余量(或者直接求出齐次方程组的系数行列式值作为剩余量)。该剩余量在下一框进行余量比较,这和传递矩阵法所述完全相同。

显然,试算积分过程也需对于各类具体问题分别编制程序。为了便于参考和引用起见,附录中提供了对于变截面杆扭转振动的过程 *TV* 和对于变截面杆双向横振动的过程 *BBV*。其中关于对方程数值积分的部分采用了常用的定步长龙格-库塔方法,通过重复调用过程 *RKA* 来实现。过程 *RKA* 中要求调用右端函数过程,则又需对于各类问题专门编制,附录中提供了与 *TV* 联用的扭转右端函数过程 *FT*, 以及与 *BBV* 联用的双向横振动右端函数过程 *FBB*。

附录中提供的龙格—库塔法过程 $RK4$ 每调用一次可以对方程积分一个步长 h , 如果已知 $Y_i(\bar{x})$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 调用一次 $RK4$ 就可得到 $Y_i(\bar{x} + h)$ 。所用计算公式为如下的龙格公式:

$$\left. \begin{aligned} Y_i(\bar{x} + h) &= Y_i(\bar{x}) + \frac{h}{6}(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (10.114)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} k_{1i} &= f_i(\bar{x}, Y_1(\bar{x}), Y_2(\bar{x}), \dots, Y_n(\bar{x})) \\ k_{2i} &= f_i\left(\bar{x} + \frac{h}{2}, Y_1(\bar{x}) + \frac{h}{2}k_{11}, \dots, Y_n(\bar{x}) + \frac{h}{2}k_{1n}\right) \\ k_{3i} &= f_i\left(\bar{x} + \frac{h}{2}, Y_1(\bar{x}) + \frac{h}{2}k_{21}, \dots, Y_n(\bar{x}) + \frac{h}{2}k_{2n}\right) \\ k_{4i} &= f_i(\bar{x} + h, Y_1(\bar{x}) + hk_{31}, \dots, Y_n(\bar{x}) + hk_{3n}) \end{aligned} \right\}$$

其中的 k_{1i}, k_{2i}, \dots 通过调用右端函数过程来计算。关于该计算方法的详细讨论可参看有关参考书(如本节前面所引一书)。

下面通过对于杆的扭转振动和双向横振动两个比较简单的问题为例进行较具体的讨论。如果通过例子对原理和方法能有正确的理解, 那么对于遇到的其他问题, 只要列出了类似(a)~(c)的方程和端点条件, 就不难自行编制类似的过程。

(2) 变截面杆的扭转振动

前面第七章对于杆的扭转振动得到的振动微分方程为

$$G \frac{d}{dx} \left(J_t \frac{d\theta}{dx} \right) + \rho p^2 I_r \theta = 0 \quad (10.115)$$

其中 θ 为扭转角, $GJ_t(x)$ 是截面的抗扭刚度, ρ 为密度, $I_r(x)$ 是截面对于重心的极惯性矩。这个方程是二阶常微分方程, 广义位移就是未知函数 θ , 相应的广义力是扭矩 $M_t = GJ_t \frac{d\theta}{dx}$ 。

在着手把方程化为一阶方程组之前, 往往先把方程化为无量纲形式。如果杆长为 l , 引进无量纲长度座标 $x^* = x/l$, 并把

$\frac{d}{dx^*}$ 记作“'”，那么(10.115)式不难写成如下无量纲形式：

$$(\gamma\theta')' + p^2\lambda\theta = 0 \quad (10.116)$$

$$\text{其中} \quad \left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{J_t(x^*)}{J_t(0)} \\ \lambda &= \frac{\rho J_p l^2}{G J_t(0)} \end{aligned} \right\} \quad (10.117)$$

(严格说来 λ 还是有量纲的，量纲是 s)

对于方程(10.116)很容易化为一阶方程组。只要引进辅助变量 T

$$T = \gamma\theta' \quad (10.118)$$

(10.116) 就可改写成

$$T' + p^2\lambda\theta = 0 \quad (10.119)$$

如果写成 (a) 式那样的规格形式，就得到

$$\left. \begin{aligned} \theta' &= T/\gamma \\ T' &= -p^2\lambda\theta \end{aligned} \right\} \quad (10.120)$$

如果杆在 $x = 0$ 处固定， $x = l$ 处自由，那么端点条件为

$$\theta(0) = 0 \quad (10.121)$$

$$M_t(l) = G J_t(l) \cdot \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \quad (g)$$

把 (g) 式改写成与 (10.120) 相应的形式，就是

$$T(1) = 0 \quad (10.122)$$

这里 $T(1)$ 代表 $T(x^*)|_{x^*=1}$ ，如果把 (10.121) 也作同样的解释，那么 (10.121)，(10.122) 就是相应于 (10.120) 的端点条件 (相当于 (c) 式)。

对于这个问题要进行求解，当然首先要计算方程中的系数 γ 和 λ ，它们是 x 的函数，也就是 x^* 的函数，对于数值积分来说并不需要用到所有 x^* 值下的函数值，如果在 $x^* = 0$ 和 1 之间准备用 n 步等步长龙格—库塔积分，那么就只需要所有 $n_s = 2n$ 等分处的函数值，可以把它们存放在一个二维数组 $C[0:n_s, 1:2]$ 。

考虑到过程 RKA 的要求, 应该把未知函数按 Y_i 编号, 得

$$\theta = Y_1, \quad T = Y_2 \quad (h)$$

由于对于一个给定的 x^* 值系统只有一个自由度, 因此在给定的试算频率下只要从 $x^* = 0$ 到 1 积分一次 (如上所述, 可用定步长龙格-库塔法分 $n_s/2$ 步积分), $x^* = 0$ 处的起始条件为

$$\left. \begin{aligned} Y_1(0) &= 0 \\ Y_2(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

该式相当于前面一般情况讨论时的 (f) 式。按此起始条件一直积分到 $x^* = 1$, 得到的 $Y_2(1)$ 就可作为剩余量。

这一简单的计算过程很容易编成如下的程序语句:

```
Y[1] := 0; Y[2] := 1;
for n := 0 step 2 until ns do
begin
  A[n/2] := Y[1]; M[n/2] := Y[2];
  if n ≠ ns then RKA(Y, 2/ns, 2, FT, n)
end;
r := Y[2];
```

这些语句也就是附录中的过程 TV 的语句部分。其中龙格-库塔积分过程 RKA 中调用的右端函数过程 FT 也不难编制, 它的语句部分就是

$$\begin{aligned} F[1] &:= Y[2]/C[m, 1]; \\ F[2] &:= -pp \times C[m, 2] \times Y[1]; \end{aligned}$$

这和公式 (10.120) 很容易对照起来。

下面举一个计算实例。

例10.13 一汽轮机叶片, 长度为 85 厘米, 材料的剪切模量 $G = 0.833 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, 比重为 $7.75 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$, 沿长度 20 等分处各截面的抗扭常数 J_k 及惯性矩 J_y, J_z 列于表 10.17。试求它的前三阶扭转振动固有频率和主振型。

对于此例如果不考虑初始扭曲对抗扭刚度的影响以及弯扭耦

表 10.17

x^*	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
J_h	44.90	18.54	12.65	10.62	9.16	6.92	5.59	4.40	3.43	2.68	2.17
J_y	41.87	31.04	34.36	42.77	48.18	53.22	55.50	55.77	56.08	55.21	53.97
J_z	553.6	342.2	268.4	233.6	195.9	171.3	144.1	123.3	105.0	87.05	70.99

x^*	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	单位
J_h	1.71	3.72	1.20	1.09	1.01	0.893	2.088	0.583	0.470	0.296	cm ⁴
J_y	55.98	68.75	61.01	64.83	66.70	69.10	97.43	64.69	63.00	58.05	cm ⁴
J_z	61.82	63.06	43.49	37.78	31.50	26.10	28.93	16.24	12.69	9.041	cm ⁴

合等因素, 就可用过程 TV 及 FT 求解, 具体程序可以列出如下:

begin

integer ns, n, i ; real p, dp, er, r, hz ;

read (ns, p, dp, er);

begin

array $C[0:ns, 1:2], A[0:ns/2]$;

procedure $FREQ(PROC)$;

..... ($FREQ$ 过程说明)

end;

procedure $RKA(Y, h, n, F, m)$;

..... (RKA 过程说明)

end;

procedure TV ;

..... (TV 过程说明)

end;

procedure $FT(Y, F, m)$;

..... (FT 过程说明)

end;

begin

```

real gm, gg, l;
array JK, JY, JZ[0:ns];
read (gm, gg, l, JK, JY, JZ);
for i := 0 step 1 until ns do
begin
  C[i, 1] := JK[i]/JK[0];
  C[i, 2] := gm × l × l × (JY[i] + JZ[i]) / (980
    × gg × JK[0])
end end;
for n := 1 step 1 until 3 do
begin
  FREQ (TV); hz := p / 6.283185306;
  for i := 0 step 1 until ns / 2 do
    A[i] := A[i] / A[ns / 2];
  print (n, hz, A)
end end end

```

计算所得结果列于表 10.18。

表 10.18

阶 次		1	2	3
固 有 频 率		181.19	428.33	674.35
主 振 型	0	0.000	0.000	0.000
	0.1	0.021	-0.088	0.113
	0.2	0.059	-0.231	0.273
	0.3	0.115	-0.409	0.401
	0.4	0.199	-0.600	0.384
	0.5	0.325	-0.733	0.095
	0.6	0.480	-0.698	-0.371
	0.7	0.666	-0.324	-0.626
	0.8	0.855	0.304	-0.290
	0.9	0.936	0.665	0.251
	1.0	1.000	1.000	1.000

(3) 变截面杆的双向横振动

前面第八章对于梁的双向横振动得到的振动微分方程为

$$\left. \begin{aligned} E \frac{d^2}{dx^2} \left(J_z \frac{d^2 v}{dx^2} + J_{yz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - p^2 \rho A v &= 0 \\ E \frac{d^2}{dx^2} \left(J_{yz} \frac{d^2 v}{dx^2} + J_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - p^2 \rho A w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.123)$$

其中 E , ρ 为材料的弹性模量和密度, A 为截面面积, J_y , J_z , J_{yz} 分别为截面的惯性矩和惯性积。未知函数 v , w 是沿着截面的两个互相垂直的方向 (y , z 方向) 的位移。方程 (10.123) 总的阶数是 8, 对于给定的 x 值系统的自由度数是 4, 因此除去 v , w 之外还有两个独立的广义位移, 即

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{dv}{dx} \\ \theta_2 &= \frac{dw}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (10.124)$$

相应的广义力也有四个, 即

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= EJ_z \frac{d^2 v}{dx^2} + EJ_{yz} \frac{d^2 w}{dx^2} \\ M_2 &= EJ_{yz} \frac{d^2 v}{dx^2} + EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} \\ Q_1 &= \frac{dM_1}{dx} \\ Q_2 &= \frac{dM_2}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (10.125)$$

在着手把 (10.123) 化为一阶方程组之前, 还是先把它化成无量纲形式, 为此引进无量纲长度 $x^* = x/l$ 和无量纲位移

$$V = v/l, \quad W = w/l \quad (10.126)$$

并把 $\frac{d}{dx^*}$ 记为 $'$, 就可以得到

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\gamma}V'' + \bar{\beta}W'')'' - p^2 \mu V &= 0 \\ (\bar{\beta}V'' + \bar{\alpha}W'')'' - p^2 \mu W &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.127)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma} &= \frac{J_z(x^*)}{J_y(0)} \\ \bar{\beta} &= \frac{J_{yz}(x^*)}{J_y(0)} \\ \bar{\alpha} &= \frac{J_y(x^*)}{J_y(0)} \\ \mu &= \frac{\rho I^2 A(x^*)}{E J_y(0)} \end{aligned} \right\} \quad (10.128)$$

(严格说来, μ 也是有量纲的, 量纲为 s)

对于方程 (10.127) 化为一阶方程组是很容易的, 只要引进辅助变量

$$\left. \begin{aligned} K &= V' \\ L &= W' \\ M &= \bar{\gamma} K' + \bar{\beta} L' \\ N &= \bar{\beta} K' + \bar{\alpha} L' \\ R &= M' \\ S &= N' \end{aligned} \right\} \quad (10.129)$$

其中对于 M, N 的两式可对 K', L' 解出, 得到

$$\left. \begin{aligned} K' &= \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}\bar{\gamma} - \bar{\beta}^2} M - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}\bar{\gamma} - \bar{\beta}^2} N = \alpha M - \beta N \\ L' &= \frac{-\bar{\beta}}{\bar{\alpha}\bar{\gamma} - \bar{\beta}^2} M + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}\bar{\gamma} - \bar{\beta}^2} N = -\beta M + \gamma N \end{aligned} \right\} \quad (10.130)$$

于是可以得到如下规格形式的一阶方程组:

$$\left. \begin{aligned} V' &= K \\ W' &= L \\ K' &= \alpha M - \beta N \\ L' &= -\beta M + \gamma N \\ M' &= R \\ N' &= S \\ R' &= \rho^2 \mu V \\ S' &= \rho^2 \mu W \end{aligned} \right\} \quad (10.131)$$

如果端点条件为一端固定，一端自由，与 (10.123) 相应的端点条件为

$$\left. \begin{aligned} v|_{x=0} = w|_{x=0} = 0 \\ \theta_1|_{x=0} = \theta_2|_{x=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.132)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1|_{x=l} = M_3|_{x=l} = 0 \\ Q_1|_{x=l} = Q_2|_{x=l} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.133)$$

把它改写为与 (10.131) 相应的形式为

$$V(0) = W(0) = K(0) = L(0) = 0 \quad (10.134)$$

$$M(1) = N(1) = R(1) = S(1) = 0 \quad (10.135)$$

在编制程序之前，先对 V, W, \dots 按 Y 编号，

$$\left. \begin{aligned} V = Y_1, W = Y_2, K = Y_3, L = Y_4 \\ M = Y_5, N = Y_6, R = Y_7, S = Y_8 \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

显然，这个问题每个频率试算过程中要从 $x^* = 0$ 到 1 积分 4 次，每次的起始条件为

$$Y_i^{(s)} = \begin{cases} 1 & (i = 4 + s) \\ 0 & (i \neq 4 + s) \end{cases} \quad (10.136)$$

$$(s = 1, 2, 3, 4; i = 1, 2, \dots, 8)$$

根据 $x^* = 1$ 处的端点条件可得

$$\sum_{s=1}^4 Y_i^{(s)} \alpha_s = 0 \quad (i = 5, 6, 7, 8) \quad (10.137)$$

其中 α_s 为四个初参数，(10.137) 是对于 α_s 的线性齐次方程。当试算频率不是固有频率时它的系数行列式不等于零，可以把它作为余量。

上述计算过程不难和过程 BBV 及过程 FBB 对照起来，因此不必再一次像前面对杆件扭振那样详述了。

下面举一个计算实例。

例 10.14 例 10.13 的汽轮机叶片，材料的弹性模量为 $2.228 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ ，沿长度 20 等分点截面的面积及惯性积列于表 10.19。求此叶片前三阶双向横振动的固有频率和主振型。

表 10.19

x^*	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
A	32.61	23.16	19.93	18.60	17.30	15.64	14.35	13.14	12.01	10.89	9.94
J_{y_2}	36.03	43.60	57.38	71.09	74.87	79.24	76.58	72.40	68.87	63.38	57.38

x^*	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	单位
A	9.22	11.61	8.22	7.925	7.690	7.402	9.957	6.324	5.910	5.123	cm ⁴
J_{y_2}	55.30	62.77	49.53	47.90	44.70	41.74	52.25	32.14	28.09	22.80	cm ⁴

程序形式与上例相似，在此不再罗列，下面仅仅给出计算结果，列于表 10.20。

表 10.20

阶 次		1		2		3	
固有频率		53.762		134.88		292.71	
主 振 型	x^*	V	W	V	W	V	W
	0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.1	0.002	-0.010	-0.0003	0.017	-0.010	-0.018
	0.2	0.010	-0.046	-0.003	0.067	-0.050	-0.043
	0.3	0.030	-0.109	-0.009	0.137	-0.138	-0.033
	0.4	0.067	-0.203	-0.012	0.215	-0.238	0.031
	0.5	0.128	-0.330	-0.002	0.285	-0.495	0.137
	0.6	0.223	-0.497	0.037	0.426	-0.718	0.233
	0.7	0.357	-0.701	0.135	0.319	-0.844	0.226
	0.8	0.536	-0.939	0.326	0.244	-0.683	-0.004
	0.9	0.756	-1.203	0.622	0.105	-0.063	-0.520
	1.0	1.000	-1.479	1.000	-0.074	1.000	-1.258

以上对于用电子计算机解线性系统振动问题的几类最常见的方法作了简单的介绍，附录中还提供了一些比较简单的过程，供

读者解决不太复杂的问题时选用。对于比较复杂的系统的求解，或者一些专门问题的各种有效的算法，请读者查阅有关的文献资料。本章只是给初学者提供一些入门的知识，同时希望这些知识对于读者理解较复杂的算法和程序系统也能有些帮助。但是限于编者的水平，缺点在所难免。附录中所提供的过程虽经实际计算考验，也不见得是最好用的，读者通过工作实践可以根据各自的实际要求加以改进。

至于与瞬态、随机、非线性振动等有关的计算方法将在下册再作介绍。

附 录

I 复 数

1. 复数及复数的各种表示法

设 a 与 b 为两任意实数, 以 i 表示 $\sqrt{-1}$, 则称

$$a + ib$$

为复数。如以两个实变数 x 与 y 分别代替 a 和 b , 则所得式子 $x + iy$ 称为复变数, 并记作 z , 即

$$z = x + iy$$

在一般的情况下, 复数和复变数一律称为复数。

上式中, x 称为复数 z 的实部, y 称作 z 的虚部, 分别记作

$$\operatorname{Re}(z) = x$$

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

复数 $z = x + iy$ 有下面几种表示方法

(i) 坐标表示法

$z = x + iy$ 可以用直角坐标表示如图 I-1。在该直角坐标平面上, 每一点都代表一个复数。因此, 图 I-1 所示 xOy 平面又叫做复平面或 z 平面; x 轴叫做实轴, y 轴叫做虚轴。

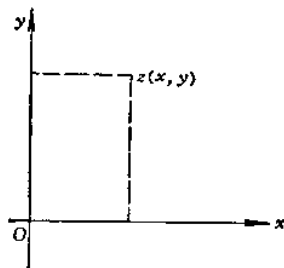


图 I-1

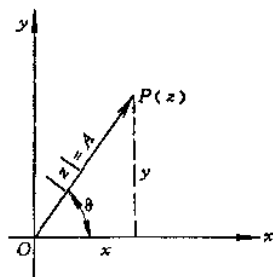


图 I-2

两个复数，只有它们的实部和虚部分别相等时，才能认为这两个复数是相等的。

(ii) 矢量表示法

如果我们将 x 和 y 看作是矢量 \vec{OP} 在 x 轴和 y 轴上的投影如图 I-2，则复数 $z = x + iy$ 可以用矢量 \vec{OP} 来表示。矢量 \vec{OP} 的长度 A 称为 z 的模，即

$$A = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

\vec{OP} 和 x 轴的夹角 θ 称为 z 的辐角，记为 $\arg z$ ，即

$$\arg z = \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}$$

(iii) 三角表示法

由图 I-2 可以看出， $z = x + iy$ 的实部和虚部可以表示如下

$$\operatorname{Re}(z) = x = A \cos \theta$$

$$\operatorname{Im}(z) = y = A \sin \theta$$

所以 z 又可以写成

$$z = A(\cos \theta + i \sin \theta)$$

这就是复数的三角表示法。

(iv) 指数表示法

根据欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

所以复数 z 又可以表示为

$$z = Ae^{i\theta}$$

2. 共轭复数

在复平面上，相对于实轴与 $z = x + iy$ 相对称的点(图 I-3)

$$z^* = x - iy$$

称为 z 的共轭复数。

若用指数表示法，则 $z = Ae^{i\theta}$ ， $z^* = Ae^{-i\theta}$ 。显然，两个复数共轭是相对的， z^* 是 z 的共轭复数， z 也是 z^* 的共轭复数。

根据定义显然有

$$2\operatorname{Re}(z) = 2x = z + z^*$$

$$2i\operatorname{Im}(z) = 2iy = z - z^*$$

3. 用复数矢量法表示 简谐振动

若复数 z 的模 A 为常数, 幅角 $\theta = \omega t$, ω 为常数, t 为时间, 则

$$z = A \cos \omega t + iA \sin \omega t$$

可以表示成一个旋转复数矢量, 它的实部和虚部相当于点 z 以角速度 ω 在以 A 为半径的圆周上逆时针运动时, 在水平轴和铅垂轴上的投影

$$\operatorname{Re}(z) = A \cos \omega t$$

$$\operatorname{Im}(z) = A \sin \omega t$$

因此, 简谐运动可以用复数旋转矢量的投影来表示 (如图 I-4)。

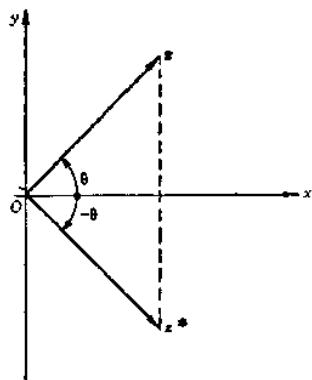


图 I-3

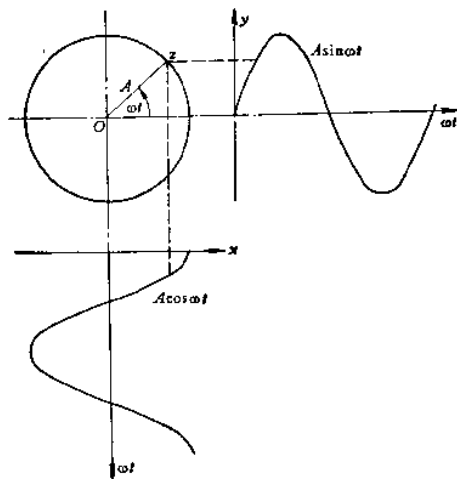


图 I-4

所以，在简谐运动中， ω 又称为圆频率。

4. 复数的运算

加：

复数既然可以用复数矢量来表示，因此，两复数的相加也可以按矢量的加法进行。

若有两个同频复数旋转矢量

$$z_1 = A_1 e^{i\omega t}$$

$$z_2 = A_2 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

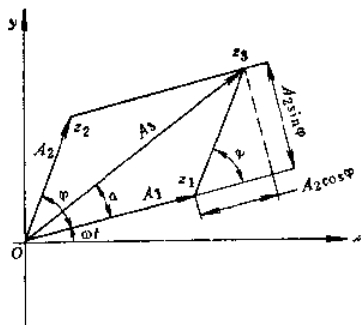


图 I-5

根据矢量相加的原理（见图 I-5），它们的和 z_3 为

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 + z_2 = [(A_1 + A_2 \cos \varphi) + A_2 \sin \varphi] e^{i\omega t} \\ &= A_3 e^{i(\omega t + \alpha)} \end{aligned}$$

式中

$$A_3 = \sqrt{(A_1 + A_2 \cos \varphi)^2 + (A_2 \sin \varphi)^2}$$

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{A_2 \sin \varphi}{A_1 + A_2 \cos \varphi}$$

乘：

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 \cdot z_2 = A_1 e^{i\omega t} \cdot A_2 e^{i(\omega t + \varphi)} \\ &= A_1 A_2 e^{i(2\omega t + \varphi)} \end{aligned}$$

幂：

$$z_1^n = (A_1 e^{i\omega t})^n = A_1^n e^{in\omega t}$$

求导：

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{d}{dt} (A_1 e^{i\omega t}) = i\omega A_1 e^{i\omega t} = i\omega z_1$$

$$\frac{d^n z_1}{dt^n} = (i\omega)^n z_1$$

II 矩阵基础知识

1. 基本定义

$m \times n$ 个数 (实数或复数) 有次序地排列成 m 行 n 列的表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做矩阵, 也可以简记作

$$[a_{ij}]_{m \times n}$$

在不致混淆的场合, 甚至可以用一个字母来代表一个指定的矩阵。为了和本书所用符号一致, 我们常常采用带方括号的字母来代表矩阵。例如

$$[A] = [a_{ij}]_{m \times n}$$

矩阵中的任一个数 a_{ij} , 称为该矩阵的一个元素。

一个矩阵 $[A] = [a_{ij}]_{m \times n}$ 和另一个矩阵 $[B] = [b_{ij}]_{m \times n}$ 相等, 是指它们的对应的元素都相等

$$a_{ij} = b_{ij}$$

应注意将矩阵与行列式相区别:

(a) 矩阵是一个数表, 而行列式是一个数值。例如 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

是矩阵, 而行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$, 是一个数值。

(b) 矩阵的行数和列数不一定相等, 但行列式的行数和列数一定要相等。

但在矩阵的运算中, 却常和行列式有关。为此, 将定义所谓“矩阵的行列式”的概念。

矩阵 $[A]$ 的行列式记作 $|A|$, 是指这样的行列式: 该行列式的各元素的数值及排列次序, 都和矩阵 $[A]$ 的相应元素相同。

例如

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

它的行列式则为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

显然，只有行数和列数相等的矩阵，方可定义它的行列式。

2. 若干特殊矩阵

(i) 方阵

行数与列数相同的矩阵，称为方阵； n 行 n 列的方阵

$$[a_{ij}]_{n \times n}$$

称为 n 阶方阵。

(ii) 对称矩阵

矩阵对于对角线对称，即 $a_{ij} = a_{ji}$ ，称为对称矩阵。例如下列矩阵即为对称矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -6 \\ -2 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & -6 & 3 & 17 \end{bmatrix}$$

对称矩阵一定是方阵。

迹：方阵的对角线元素的和，称为迹。例如，上例的迹是

$$1 + 2 + 9 + 17 = 29$$

记作

$$\text{Trace}[A] = 29$$

(iii) 奇异矩阵

若矩阵 $[A]$ 的行列式 $|A|$ 为0, 则称该矩阵为奇异矩阵。例如

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-1) = 0$$

(iv) 行矩阵

只有一行的矩阵, 称为行矩阵。例如

$$[B] = [b_1 \quad b_2 \cdots b_n]$$

(v) 列矩阵

只有一列的矩阵, 称为列矩阵。例如

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix}$$

列矩阵(或行矩阵)常常用来代表向量, 此时, c_1 、 c_2 等为向量的各分量。

(vi) 零矩阵

所有的元素皆为0的矩阵, 称为零矩阵。例如

$$[O] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(vii) 单位矩阵

单位矩阵是一方阵, 其对角线上各元素皆为1, 其余各元素皆为0。例

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(viii) 对角矩阵

对角矩阵是一方阵, 除对角线各元素外, 其他各元素皆为 0。

例

$$[a_{ii}] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

(ix) 转置矩阵

矩阵 $[A]$ 的转置矩阵 $[A]^T$, 它的行顺次为 $[A]$ 的列。例

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

因此, 列矩阵的转置矩阵就是行矩阵

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \{X\}^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$$

显然, 对于对称矩阵, $[A] = [A]^T$ 。

3. 矩阵的运算规定

(i) 加、减

只有行数、列数分别相等的两矩阵方可相加减。两矩阵相加减时, 将其对应元素分别相加减。例

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(ii) 数乘矩阵

一个数值 k 与矩阵 $[A]$ 相乘, 应将该数乘 $[A]$ 的每一个元

素。即

$$k[A] = [C], \quad c_{ij} = ka_{ij}$$

(iii) 矩阵相乘

两矩阵 $[A]$ 及 $[B]$ 的乘积 $[AB]$ 是另一个矩阵 $[C]$, $[C]$ 的元素 c_{ij} 由 $[A]$ 的 i 行元素及 $[B]$ 的 j 列元素按下面的公式确定

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

例

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & [B] &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ [C] = [A][B] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 0 \\ 11 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

显然, 矩阵 $[A]$ 的列数必须等于矩阵 $[B]$ 的行数, 这两个矩阵才能相乘。同时, 根据矩阵乘法的定义可以推断, 一般情况下

$$[A][B] \neq [B][A]$$

即矩阵相乘一般不服从交换律。

一矩阵被一个列矩阵后乘, 得到一个列矩阵。例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 20 \\ 11 \end{Bmatrix}$$

一个矩阵被一个行矩阵前乘, 得到一个行矩阵。例如

$$[1 \ 3 \ 2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = [8 \ 18 \ 13]$$

矩阵 $[A]$ 、 $[B]$ 的积 $[C]$ 的转置矩阵 $[C]^T$ ，服从下面的规律

$$[A][B] = [C], \quad [C]^T = [B]^T[A]^T$$

例

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [A][B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[C]^T = [B]^T[A]^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(iv) 矩阵的幂

矩阵的幂 $[A]^n$ 的意义是 n 个 $[A]$ 相乘

$$\underbrace{[A] \cdot [A] \cdot [A] \cdots [A]}_{n \text{ 个}} = [A]^n$$

显然，幂只能对方阵来定义。

4. 矩阵的求逆

(i) 逆矩阵的定义及其意义

由于矩阵的乘法不服从交换律，在矩阵代数中，一般说， $[B]/[A]$ 是没有意义的。除法的类似过程要用一种称为求逆的方法来进行。

考虑一个矩阵方程为

$$[A][B] = [C] \quad (a)$$

如果上式中 $[B]$ 是未知矩阵，而 $[A]$ 和 $[C]$ 是已知的，则 $[B]$ 应当是 $[A]$ 和 $[C]$ 的函数。

为了确定 $[B]$ ，我们再假设另一矩阵 $[A]^{-1}$ ，使满足下式关

系

$$[A]^{-1}[A] = [I] \quad (b)$$

上式中 $[I]$ 为单位矩阵, $[A]^{-1}$ 称为 $[A]$ 的逆矩阵。

有了 $[A]^{-1}$, 我们可以对(a)式作如下运算

$$[A]^{-1}[A][B] = [A]^{-1}[C] \quad (c)$$

由于(b)式, (c)式可变为

$$[I][B] = [A]^{-1}[C] \quad (d)$$

$[I][B] = [B]$, 所以

$$[B] = [A]^{-1}[C] \quad (e)$$

注意: 1, 只有方阵才有逆矩阵; 2, 矩阵的相乘一般不服从交换律, 但是, 矩阵和其逆矩阵相乘时例外, 即有

$$[A]^{-1}[A] = [A][A]^{-1} = [I]$$

(ii) 用克兰姆法则求逆矩阵

下列方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= y_3 \end{aligned} \right\}$$

可以写成如下矩阵形式

$$[A]\{X\} = \{Y\}$$

式中

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

根据逆矩阵的定义, 应有

$$[A]^{-1}[A]\{X\} = [A]^{-1}\{Y\}$$

即

$$\{X\} = [A]^{-1}\{Y\}$$

上式说明, $[A]^{-1}$ 与求解线性方程组有密切关系。如果我们用其他方法解得了线性方程组, $[A]^{-1}$ 也就相应地求了出来。

求解线性方程组, 可用行列式理论中所熟知的克兰姆则。根据该法, 若矩阵 $[A]$ 是非奇异矩阵, 即

$$|A| \neq 0$$

则未知数 x_i 可按式求得

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ y_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} \left\{ y_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + y_2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. + y_3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{|A|} \{y_1 C_{11} + y_2 C_{21} + y_3 C_{31}\} \end{aligned}$$

此处 $|A|$ 为矩阵 $[A]$ 的行列式, 也就是线性方程组的系数行列式; C_{11} 、 C_{21} 、 C_{31} 分别为该行列式的元素 a_{11} 、 a_{21} 、 a_{31} 的代数余子式。

同理可得

$$x_2 = \frac{1}{|A|} \{y_1 C_{12} + y_2 C_{22} + y_3 C_{32}\}$$

$$x_3 = \frac{1}{|A|} \{y_1 C_{13} + y_2 C_{23} + y_3 C_{33}\}$$

全部解集合在一起, 可写成矩阵形式如下

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

或简写成

$$\{X\} = \frac{1}{|A|} [C_{ij}] \{Y\} = \frac{1}{|A|} (adj[A]) \{Y\}$$

式中

$$\text{adj}[A] = [C_{ji}]$$

称为矩阵 $[A]$ 的伴随矩阵。 $[C_{ji}]$ 是矩阵 $[A]$ 的代数余子式矩阵的转置矩阵,

$$[C_{ji}] = [C_{ij}]^T$$

前面已经说明, 根据逆矩阵的定义应有

$$\{X\} = [A]^{-1}\{Y\}$$

将该式与上面导得的 $\{X\}$ 的表达式相比较, 可见

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} [\text{adj}[A]]$$

例 找下面矩阵的逆矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

解

(a) $[A]$ 的行列式 $|A| = 3$

(b) $[A]$ 的各元素的代数余子式为

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{21} = -3 \quad C_{22} = 2 \quad C_{23} = 1$$

$$C_{31} = 0 \quad C_{32} = -1 \quad C_{33} = 1$$

(c) 代数余子式矩阵为

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) 伴随矩阵

$$\text{adj}[A] = [C_{ij}]^T = [C_{ji}]$$

(e) A 的逆矩阵为

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}[A] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(f) 结果复核

$$\begin{aligned} [A]^{-1}[A] &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \end{aligned}$$

(iii) 用初等变换法求逆矩阵

下述的矩阵变换称为矩阵的初等变换

(a) 倍法变换: 矩阵的某一行的每个元素, 都乘上一个不为 0 的数 α ;

(b) 消去变换: 矩阵的某一行的每个元素都乘上一个不为 0 的数 α 后, 加到另一行相应的元素上去, 使某个元素化为 0;

(c) 互换变换: 矩阵的两行互换位置。

一个矩阵 $[A]$ 的求逆过程, 可以借助于初等变换来完成。

我们可以回忆一下代数方程组的求解过程。原方程组可用矩阵形式表示如下

$$[A]\{X\} = \{Y\} = [I]\{Y\} \quad (a)$$

其解可写成

$$\{X\} = [I]\{X\} = [A]^{-1}\{Y\} \quad (b)$$

应用消去法的求解过程, 实际上是对方程 (a) 中的矩阵 $[A]$ 及单位矩阵 $[I]$ 同时进行相同的初等变换, 最后使 $[A]$ 变为 $[I]$,

而相应地, $[I]$ 就变成了 $[A]^{-1}$ 。这就是可以用初等变换法求取逆矩阵的根据。

例 求下列矩阵的逆矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

为了求 $[A]^{-1}$, 可先将 $[A]$ 及 $[I]$ 并列写出

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将第二行除以 2, 然后从第二行及第三行中减去第一行得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第二行乘以 2, 然后将第三行加到第二行得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第一行中减去第三行得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

先将第二行乘以 2, 然后从第一行中减去它, 原第二行不变, 得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第三行除以 2, 得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \quad \begin{bmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = [A]^{-1}$$

验算

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iv) 矩阵乘积的逆矩阵

令

$$[C] = [A][B]$$

则

$$[A]^{-1}[C] = [B]$$

$$[B]^{-1}[A]^{-1}[C] = [B]^{-1}[B] = [I]$$

将上式两边再后乘 $[C]^{-1}$, 得

$$[B]^{-1}[A]^{-1} = [C]^{-1} = ([A][B])^{-1}$$

所以

$$([A][B])^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1}$$

由此可以推断

$$([A][B][C][D])^{-1} = [D]^{-1}[C]^{-1}[B]^{-1}[A]^{-1}$$

5. 正交矩阵

(i) 正交矩阵及正交变换

矩阵 $[P]$ 如果满足下式, 称为正交矩阵:

$$[P]^{-1} = [P]^T$$

正交矩阵的行列式

$$|P| = \pm 1$$

证: 根据定义

$$[P]^T[P] = [P]^{-1}[P] = [I]$$

而根据行列式的性质及矩阵相乘的规定可以得出

$$| [A][B] | = | A | | B |$$

$$| A | = | A^T |$$

所以

$$| (P)^T (P) | = | P^T | | P | = | P | | P | = | P |^2 = | I | = 1$$

即

$$| P | = \pm 1$$

例 在进行下图所示的坐标转换时, 可得如下转轴方程

$$x_1 = x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta$$

$$y_1 = x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta$$

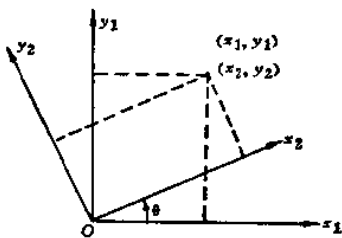


图 I-1

写成矩阵形式便是

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

同理可得

$$x_2 = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta$$

$$y_2 = -x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta$$

或写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}$$

令

$$[B] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

则上述转轴方程的矩阵形式是

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = [B]^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{b})$$

可见

$$[B]^{-1} = [B]^T$$

因此，此处 $[B]$ 是正交矩阵。方程 (a) 或 (b) 则称为正交变换。

(ii) 向量正交的定义，单位向量

设有两个向量

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad \{C\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix}$$

若满足

$$\begin{aligned} \{B\}^T \{C\} &= [b_1 \ b_2 \cdots b_n] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n b_i c_i = 0 \end{aligned}$$

则称这两个向量是互相正交的。

若向量

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

满足

$$\{B\}^T\{B\} = \sum_{i=1}^n b_i^2 = 1$$

则称该向量为单位向量。

有了单位向量和向量正交的概念，可以推断，正交矩阵的各个行是单位向量并且彼此正交，各列也是单位向量且彼此正交。

(iii) 任一对称矩阵 $[A]$ ，必能经过一个正交矩阵 $[P]$ ，化为对角线矩阵

$$[P]^{-1}[A][P] = [P]^T[A][P] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

式中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 是矩阵 $[A]$ 的特征值。特征值的定义见本附录第7点。

这一结论的证明较烦琐，可在专门书籍中找到。

6. 分块矩阵

一个矩阵可以如下例所示用一根水平线和一根垂直线分成几个子矩阵（或称子块）：

$$[a_{ij}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = [A_{\alpha\beta}]_{2 \times 2}$$

该例中分出的四个子矩阵是

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad [A_{12}] = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \quad [A_{21}] = [a_{41} \ a_{42}]$$

$$[A_{22}] = [a_{43}]$$

(i) 分块矩阵的运算

分块矩阵的加、减、乘的运算规律和一般矩阵一样,运算时,将其子矩阵当作一般元素看待。

(a) 数乘法

设 k 为一数, $[A] = [A_{\alpha\beta}]_{s \times t}$

则

$$k[A] = [kA_{\alpha\beta}]_{s \times t}$$

即 k 应乘每一子块。

(b) 加减法

设

$$[A] = [A_{\alpha\beta}]_{s \times t}, \quad [B] = [B_{\alpha\beta}]_{s \times t}$$

则

$$[A] \pm [B] = [A_{\alpha\beta} \pm B_{\alpha\beta}]_{s \times t}$$

两分块矩阵相加,就是两矩阵的相应的子块相加。注意,相加的两矩阵,不但要求子块数相等(相同的行数和列数),而且要求相应的子块也有相同的行数和列数。

(c) 转置

设

$$[A] = [A_{\alpha\beta}]$$

则

$$[A]^T = [A_{\alpha\beta}]^T = [A_{\beta\alpha}^T]$$

例

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T \\ & = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d) 乘法

设

$$[A] = [A_{\alpha\beta}]_{i \times t}, \quad [B] = [B_{\beta\gamma}]_{t \times u}$$

则

$$[A][B] = [A_{\alpha\beta}]_{i \times t} [B_{\beta\gamma}]_{t \times u} = [C_{\alpha\gamma}]_{i \times u}$$

式中

$$C_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^t A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma}$$

(ii) 分块矩阵的求逆公式

设 $[A]$ 为 n 阶方阵 (只有方阵才有逆矩阵), 并可写成一种分块矩阵的形式

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $[A_{11}]$ 为 r 阶有逆方阵。设 $[A]$ 的逆矩阵为下式形式的分块矩阵

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

可以证明

$$[B_{22}] = ([A_{22}] - [A_{21}][A_{11}]^{-1}[A_{12}])^{-1}$$

$$[B_{12}] = -[A_{11}]^{-1}[A_{12}][B_{22}]$$

$$[B_{21}] = -[B_{22}][A_{21}][A_{11}]^{-1}$$

$$[B_{11}] = [A_{11}]^{-1}([I_r] - [A_{12}][B_{21}])$$

上述结论成立的条件是 $([A_{22}] - [A_{21}][A_{11}]^{-1}[A_{12}])$ 为 $(n-r)$ 阶有逆矩阵。式中 $[I_r]$ 为 r 阶单位矩阵。

上列公式提供了一个降阶求逆的方法: 先求 r 阶矩阵 $[A_{11}]$ 的逆矩阵 $[A_{11}]^{-1}$, 再求一个 $(n-r)$ 阶的逆矩阵 $[B_{22}]$, 然后, 通过加、减、乘三种运算求出 $[B_{12}]$ 、 $[B_{21}]$ 、 $[B_{11}]$, 从而得到 $[A]^{-1}$ 。

7. 特征值和特征向量

(i) 向量的线性变换

一般地说,

$$\{Y\} = [A]\{X\}$$

称为向量的线性变换。式中

$$[A] = [a_{ij}]_{n \times n} \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$[A]$ 称为算子, $\{X\}$ 为原向量, $\{Y\}$ 为变换所得向量。

(ii) 特征值和特征向量

定义: 设有一矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为 n 阶方阵; 若存在一非 0 的列向量

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

和一个常数 λ , 使得

$$[A]\{X\} = \lambda\{X\}$$

成立, 则称 λ 为矩阵 $[A]$ 的特征值, $\{X\}$ 称为 $[A]$ 的属于 λ 的特征向量。

根据这一定义, 上述矩阵 $[A]$ 的特征值和特征向量的求取方法如下。

$[A]\{X\} = \lambda\{X\}$ 的相应的代数方程为

同理可得相应于 $\lambda = 3$ 的特征向量为

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = k_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

式中 k_1, k_2 为任意常数。

因为变换 $[A]\{X\} = \lambda\{X\}$ 也可以写成如下形式

$$[A - \lambda I]\{X\} = [0]$$

所以特征方程也可以写成

$$|A - \lambda I| = 0$$

$[A - \lambda I]$ 称为特征矩阵。

(iii) 由 $[A - \lambda_i I]$ 的伴随矩阵求特征向量 $\{X_i\}$

设 λ_i 是 $[A]$ 的某一特征值, 属于该特征值的特征向量 $\{X_i\}$, 就是 $[A - \lambda_i I]$ 的伴随矩阵 $\text{adj}[A - \lambda_i I]$ 中的任一列 (所差仅为一常数)。

现证明如下。

设

$$[B] = [A] - \lambda[I]$$

则

$$[B]^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj}[B]$$

将上式等号两边均乘以 $|B|$, 得

$$|B|[I] = [B]\text{adj}[B]$$

再将 $[B]$ 的表达式代进上式, 得

$$|A - \lambda I|[I] = [A - \lambda I]\text{adj}[A - \lambda I]$$

此时, 将 $\lambda = \lambda_i$ 代进上式, 由于方程式左端的行列式等于 0, 于是可得

$$[0] = [A - \lambda_i I]\text{adj}[A - \lambda_i I]$$

但是, 属于 λ_i 的特征向量 X_i 服从下式

$$[A - \lambda_i I]\{X_i\} = \{0\}$$

比较以上二式, 可见 $\text{adj}[A - \lambda_i I]$ 中的任一列都是特征向量 (相

差仅为一常数)。

(iv) 对称矩阵的特征向量互相正交

设 $[A]$ 为对称矩阵, $\{X_i\}$ 及 $\{X_j\}$ 分别为属于特征值 λ_i 及 λ_j 的特征向量。于是

$$[A]\{X_i\} = \lambda_i\{X_i\} \quad [A]\{X_j\} = \lambda_j\{X_j\}$$

根据以上关系, 可以组成以下两式

$$\{X_j\}^T [A] \{X_i\} = \lambda_i \{X_j\}^T \{X_i\} \quad (a)$$

$$\{X_i\}^T [A] \{X_j\} = \lambda_j \{X_i\}^T \{X_j\} \quad (b)$$

将以上两式相减得

$$\begin{aligned} & \{X_j\}^T [A] \{X_i\} - \{X_i\}^T [A] \{X_j\} \\ &= \lambda_i \{X_j\}^T \{X_i\} - \lambda_j \{X_i\}^T \{X_j\} \end{aligned} \quad (c)$$

由于 A 为对称矩阵, 故有

$$\{X_j\}^T [A] \{X_i\} = \{X_i\}^T [A] \{X_j\}$$

同时考虑到

$$\{X_j\}^T \{X_i\} = \{X_i\}^T \{X_j\}$$

(c) 式变为

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j) \{X_i\}^T \{X_j\}$$

当 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 时

$$\{X_i\}^T \{X_j\} = 0 \quad (d)$$

(d) 式说明, 对称矩阵的属于相异特征值的特征向量相互正交。

8. 矩阵的秩与线性方程组的解

(i) 矩阵的秩

从矩阵 $[A]$ 中任选 r 行及 r 列, 位于这些行列相交处的元素构成的 r 阶行列式, 称为矩阵 $[A]$ 的 r 阶子行列式。若矩阵 $[A]$ 中有一个不为 0 的 r 阶子行列式, 而所有高于 r 阶的子行列式都为 0, 则称该矩阵 $[A]$ 的秩为 r 。换句话说, 矩阵 $[A]$ 中不为 0 的子行列式的最高阶数, 称为该矩阵的秩。

例如, 有一矩阵为

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

我们如果计算该矩阵的所有可能组成的子行列式的值，可以发现它的一切三阶子行列式都是 0，但

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

所以 $[A]$ 的秩为 2。

对矩阵施行初等变换，不会改变矩阵的秩。这是关于矩阵的秩的一个重要特性。

根据上述特性，我们可以先对矩阵施行初等变换，把它化为含 0 元素尽可能多的形式，这样就有利于求出矩阵的秩。

例

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 8 & -7 \\ 2 & 14 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{①行} - 4 \times \text{②行} \\ \text{③行} + \text{②行} \\ \text{④行} - 2 \times \text{②行}}} \begin{bmatrix} 0 & -10 & 9 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -9 \\ 0 & 10 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{③行} + \text{①行} \\ \text{④行} - \text{①行}}} \begin{bmatrix} 0 & -10 & 9 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从变换得到的最后一个矩阵可以很容易地看出 $[A]$ 的秩为 2。

(ii) 矩阵的秩与线性方程组的解

设有线性方程组

$$[A]\{X\} = \{C\}$$

此处

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \{C\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

用消元法去解上述线性方程组时，实际上就是将增广矩阵

$$[B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

化为阶梯形矩阵

$$[B_1] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1r} \cdots c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} \cdots c_{2r} \cdots c_{2n} & d_2 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ 0 & 0 \cdots c_{rr} \cdots c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 \cdots 0 \cdots 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 \cdots 0 \cdots 0 & 0 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ 0 & 0 \cdots 0 \cdots 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, r$, $1 \leq r \leq n$ 。由该式可见， $[A]$ 的秩为 r ；若 $d_{r+1} \neq 0$ ，则 B 的秩为 $r+1$ 。

根据上述增广矩阵的最后形式，线性方程组可写成如下矩阵方程

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1r} \cdots c_{1n} \\ 0 & c_{22} \cdots c_{2r} \cdots c_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ 0 & 0 \cdots c_{rr} \cdots c_{rn} \\ 0 & 0 \cdots 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 \cdots 0 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ 0 & 0 \cdots 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ d_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

由上式可见,

- (a) 当 $d_{r+1} \neq 0$, 线性方程组无解;
- (b) 当 $d_{r+1} = 0$, 且 $r = n$ 时, 方程有唯一解;
- (c) 当 $d_{r+1} = 0$, 而 $r < n$ 时, 方程有无穷多组解。

由此可以得出结论: 线性方程组有解的充分和必要的条件是它的系数矩阵与增广矩阵有相同的秩。

9. 二次型及矩阵的正定性概念

(i) 二次型及二次型的秩

含有 n 个变数 x_1, x_2, \dots, x_n 的如下形式之和

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

或缩写作

$$f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

称为二次型。式中 $a_{ij} = a_{ji}$, 且为实数。

二次型可写成矩阵型式如下

$$f = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

或缩写作

$$f = \{X\}^T [A] \{X\}$$

式中 $[A]$ 为对称方阵, 即 $a_{ij} = a_{ji}$, 该方阵称为二次型的方阵, 它的秩也称为二次型的秩。

(ii) 化二次型为法式

前已说明, 任一对称矩阵 $[A]$, 必能经过一个正交矩阵 $[P]$, 化为对角线矩阵

$$[P]^{-1}[A][P] = [P]^T[A][P] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

因此, 对于一个一般二次型

$$f = \{X\}^T [A] \{X\} \quad ([A]^T = [A])$$

可以找到一个正交矩阵 $[P]$, 通过如下变换

$$\{X\} = [P]\{Y\}$$

使该二次型变为如下形式

$$\begin{aligned} f &= ([P]\{Y\})^T [A] ([P]\{Y\}) \\ &= \{Y\}^T ([P]^T [A] [P]) \{Y\} \\ &= \{Y\}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \{Y\} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \end{aligned}$$

式中

$$\{Y\} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

上述形式的二次型, 称为二次型的法式。此处 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 就是对称矩阵 $[A]$ 的特征值, 且为实数。

(iii) 正定二次型和正定矩阵

定义: 二次型

$$\begin{aligned} f &= f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}) \end{aligned}$$

如果对于任一组不全为 0 的实数 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 恒有

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) > 0$$

则称此二次型为正定二次型。

由于二次型可以表为矩阵型式

$$\begin{aligned} f &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \\ &= \{X\}^T [A] \{X\} \end{aligned}$$

同时，我们也说明了二次型可以化为标准型式

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

此处 λ_i 就是 $[A]$ 的特征值，可见，正定二次型要求矩阵 $[A]$ 的所有特征值都是正实数。我们把具有这样的性质（即其所有的特征值都是正实数）的矩阵称为正定矩阵。

于是，判定一个矩阵是否正定，则应求出它的所有的特征值。这样做，是很麻烦的。实用上，确定一个矩阵是否正定，可用其主子式来判别。

设有一对称矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

则下列各行列式

$$|a_{11}|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分别称为 $[A]$ 的1阶、2阶、…、 k 阶、…、 n 阶主子式。

可以证明,若上列各阶主子式都大于0,则二次型

$$f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

必然是正定二次型,从而矩阵 $[A]$ 也是正定的。因此我们可得到结论:若对称矩阵 $[A]$ 的各阶主子式都大于0,则矩阵 $[A]$ 是正定的。

在实际问题中,经常有若干特征值为0的情况。若矩阵 $[A]$ 的所有的特征值中,有一个以上为0,而其他的都为非0正实数,则称之为半正定的。

习 题

第 一 章

1.1 用一加速度计测得某结构按频率 25Hz 作简谐振动时的最大加速度为 $5g$ ($g = 980\text{cm/s}^2$)。求此结构的振幅和最大速度。

1.2 测得一机器作简谐振动的频率为 10Hz, 最大速度为 45cm/s 。试计算其振幅、最大加速度和周期。

1.3 已知一仪器的振动规律为 $x = 0.35 \cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ 。试分别用 $x-t$ 、 $\dot{x}-t$ 、 $\ddot{x}-t$ 坐标作出运动图、速度图和加速度图, 并在图上标出: 振幅、周期、最大速度、最大加速度和初相位之值。

1.4 已知某机器振动规律为 $x = 0.5\sin\omega t + 0.3\cos\omega t$, 单位为 cm , $\omega = 10\pi \text{ 1/s}$ 。问此振动是否简谐振动? 振幅多大? 最大速度和最大加速度多大? 并用旋转矢量表示出它们之间的关系。

1.5 设有两个简谐振动, 分别以 $3e^{i(5\pi t)}$ 和 $5e^{i\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$ 表示。试用复数旋转矢量合成, 并写出在实轴和虚轴上的投影。

1.6 某机器的振动规律为 $x = a\sin\omega t + 3a\sin 3\omega t$ 。问此振动是否简谐振动? 试用 $x-t$ 坐标作出运动图。

1.7 将图 T1-7 所示方波展开成富氏级数。

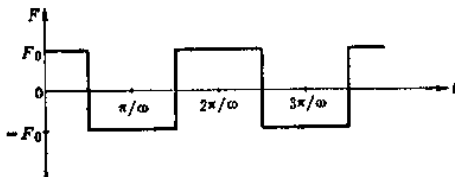


图 T1-7

1.8 将图 T1-8 所示齿波展开成富氏级数。

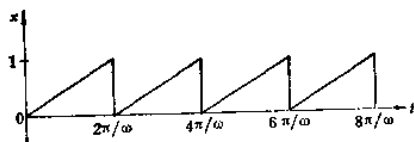


图 T 1-8

第 二 章

2.1 一弹簧质量系统沿光滑斜面作自由振动, 如图 T 2-1 所示。试列出振动微分方程, 并求出其固有频率。

2.2 一重块 $W = 100\text{kg}$, 支承在平台上, 如图 T 2-2 所示。重块下联结两个弹簧, 其刚度均为 $K = 20\text{kg/cm}$ 。在图示位置时, 每个弹簧中已有初压力 $F_0 = 10\text{kg}$ 。设将平台突然撤去, 重块将下落多少距离?

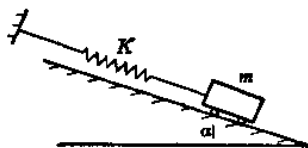


图 T 2-1

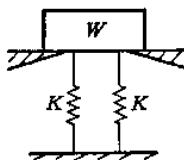


图 T 2-2

2.3 一小车 P 在斜面上自高 h 处滑下, 与缓冲器相撞后, 随同缓冲器弹簧一起作自由振动。弹簧刚度为 K , 斜面倾角为 α , 小车与斜面之间的摩擦力忽略不计。求小车的振动周期和振幅。

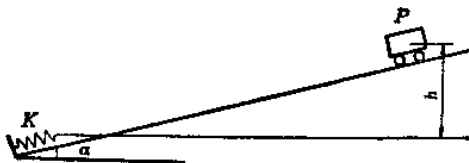


图 T 2-3

2.4 一比重计重 0.0115kg ，用以测定某液体的比重，如图 T2-4 所示。比重计伸出液面部分的玻璃管直径为 0.8cm 。液体比重为 1.02 。现将比重计轻轻地垂直向下按一下，比重计将作上下自由振动，试求其振动周期。

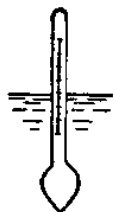


图 T2-4

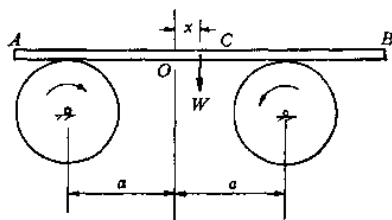


图 T2-5

2.6 求图 T2-6 所示轴系扭转振动的固有频率。轴的直径为 d ，两端固定。圆盘的转动惯量为 I ，固定于轴上，至轴两端的距离分别为 l_1 和 l_2 。

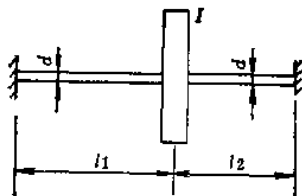


图 T2-6

2.7 一均匀等直杆 AB ，重量为 W ，用两相同尺寸的铅垂直线悬挂如图 T2-7 所示。线长为 l ，两线相距为 $2a$ 。试推导 AB 杆绕通过重心的铅垂轴作微摆动的振动微分方程，并求出其固有频率。

2.8 一薄半圆筒，平均半径为 R ，在一粗糙平面上作微摆动，如图 T 2-8 所示。试求其固有频率。

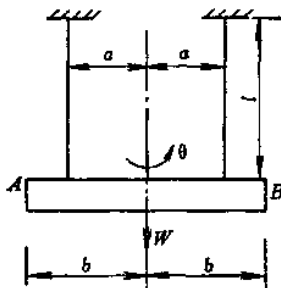


图 T 2-7

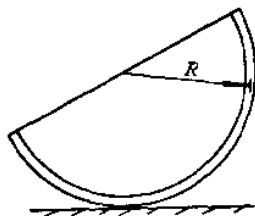


图 T 2-8

2.9 重 $Q = 2$ 吨的重物在吊索上以等速度 $v = 5 \text{ m/min}$ 下降。当下降时由于吊索嵌入滑轮的夹子内，吊索上端突然停止，重物 Q 即作上下自由振动。如不计吊索重量，求重物振动的频率和吊索中的最大张力。已知吊索在 2 吨重物静力作用下伸长 5 mm。

2.10 一重块 W_1 悬挂在一弹簧 K 的下端，处于静平衡状态，如图 T 2-10 所示。第二个重块 W_2 自高度为 h 处落下，然后与 W_1 一起作自由振动。试写出振动微分方程，并求出其频率与振幅。



图 T 2-9

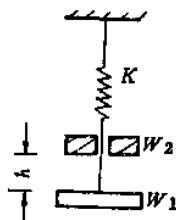


图 T 2-10

2.11 一机器重 2.2 吨, 用四个螺旋弹簧支承, 每个弹簧的螺圈平均半径 $R = 51\text{mm}$, 弹簧丝直径 $d = 18\text{mm}$, 圈数 $n = 10$, 材料剪切弹性模量 $G = 8 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ 。弹簧放置在与机器重心对称的位置。求此系统的固有频率。

2.12 有一简支梁, 抗弯刚度 $EJ = 2 \times 10^8 \text{kg} \cdot \text{cm}^2$, 跨度为 $l = 4\text{m}$, 用图 T 2-12 a)、b) 两种方式在梁跨中联接一螺旋弹簧和重块。弹簧刚度 $K = 500 \text{kg/cm}$, 重块重量 $W = 400 \text{kg}$ 。求两种弹簧质量系统的固有频率。

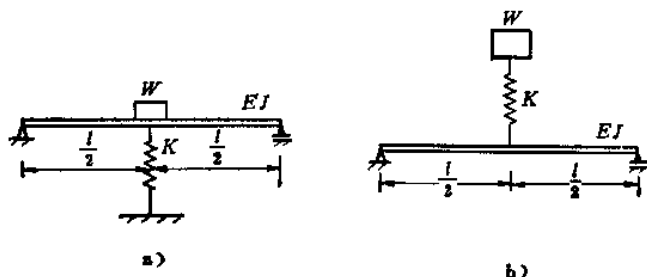


图 T 2-12

2.13 求图 T 2-13 所示的阶梯轴—圆盘系统扭转振动的固有频率。设 J_1 、 J_2 分别为两轴段绕轴线的极惯性矩, l_1 、 l_2 分别为两轴段的长度, G 为材料剪切弹性模量, I 为圆盘绕对称轴的转动惯量。

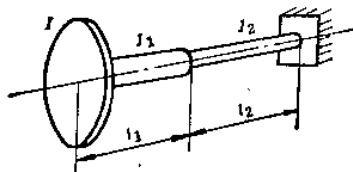


图 T 2-13

2.14 一重块 W 与四个弹簧联结如图 T 2-14 所示。重块 $W = 50 \text{kg}$, 支承在图示位置时, 弹簧均不受力。各弹簧的刚度分别为 $K_1 = 10 \text{kg/cm}$, $K_2 = K_3 = 5 \text{kg/cm}$, $K_4 = 20 \text{kg/cm}$ 。(1) 如将支承缓慢撤去, 重块将下落多少距离? 四个弹簧的等效刚度是多少? (2) 如将支承突然撤去, 重块又将下落多少距离?

2.15 一刚性直杆，长度为 l ，杆一端铰支，另一端由一刚度为 K 的弹簧支承。在离铰支端为 a 处有一集中质量 m ，如图 T 2-15 所示。忽略刚性杆本身质量，试求这个系统的固有频率。

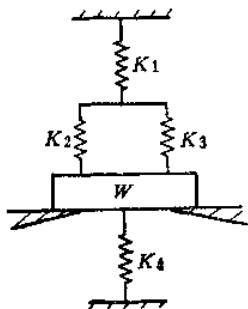


图 T 2-14

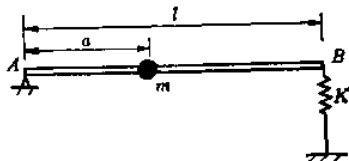


图 T 2-15

2.16 一刚性直杆 AB ，长度为 l ， A 端铰支，离铰支端 a 处用一刚度为 K_1 的弹簧悬挂，在 B 端用一刚度为 K_2 的弹簧悬挂一质量 m 。忽略杆本身的质量，求这个系统的固有频率。

2.17 由三根长度均为 l ，重量均为 W 的匀质杆，用铰链联接成的机构如图 T 2-17 所示。求此机构作微摆动时的固有频率。

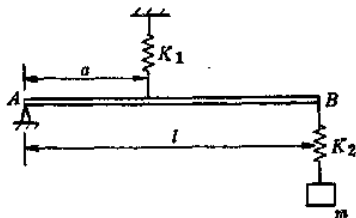


图 T 2-16

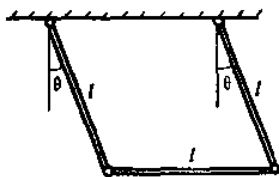


图 T 2-17

2.18 一质量 m 用绳子悬挂，跨过一半径为 R 质量为 m_1 的滑轮，系在一端固定的弹簧 K 上，如图 T 2-18 所示。忽略绳子的弹性和质量以及滑轮和轴承间的摩擦力，求此系统的固有频率。

2.19 一半径为 R 的圆柱, 质量为 m , 转动惯量为 I , 可在水平面上作无滑动的滚动。在重心 O 处联接一水平弹簧 K , 弹簧另一端固定, 如图 T 2-19 所示。求此系统的固有频率。

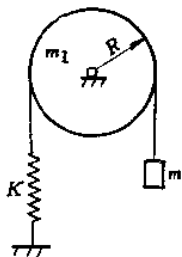


图 T 2-18

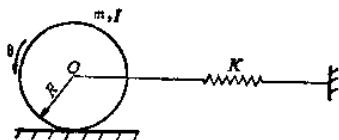


图 T 2-19

2.20 某测振仪结构如图 T 2-20 所示。一摆重量为 Q , 由一刚度为 K 的螺旋弹簧联结, 并维持与铅垂成 α 角的位置。摆对 O 点的转动惯量为 I 。摆的重心到转动轴 O 点的距离为 S 。求此测振仪的自振周期。

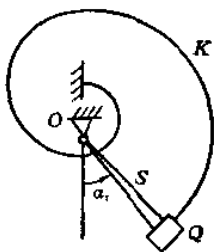


图 T 2-20

2.21 如第二章图 2-11 所示的扭振系统, 轴对轴线的转动惯量为 I' , 扭转刚度为 K_0 , 圆盘的转动惯量为 I 。试用瑞雷法计算系统的固有频率。

2.22 一两端固支的等直梁, 质量为 m , 跨度为 l , 抗弯刚度为 EI 。试用瑞雷法计算梁的固有频率。设梁作横向自由振动时的挠度曲线为

$$y = \frac{\delta}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$$

式中 δ 为 midpoint 挠度。

2.23 设一简支梁上有 n 个集中质量 m_1, m_2, \dots, m_n 。 y_1, y_2, \dots, y_n 分别表示在各质量处相应的挠度。试证明用瑞雷法计算该梁的基频的近似公式为

$$p^2 = \frac{g \sum_{j=1}^n m_j y_j}{\sum_{j=1}^n m_j y_j^2}$$



图 T 2-23

2.24 一弹簧质量系统的质量块重 $W = 2000 \text{ kg}$ ，弹簧刚度 $K = 49 \text{ kg/cm}$ 。今需在此系统中配置一阻尼器，使系统的相对阻尼系数 $\zeta = 0.10$ ，问阻尼器的粘性阻尼系数 r 应为多少？系统自由振动时的频率是多少？

2.25 一有粘性阻尼的单自由度系统，在振动时，它的振幅在五个周期之后减少了 50%。试求系统的相对阻尼系数 ζ 。

2.26 一有粘性阻尼的弹簧质量系统，作自由振动时测得振动周期为 1.8 s ，相邻两振幅之比为 $4.2:1$ 。求此系统的固有频率。

2.27 列出图 T 2-27 所示系统的振动微分方程，并计算其振动频率。

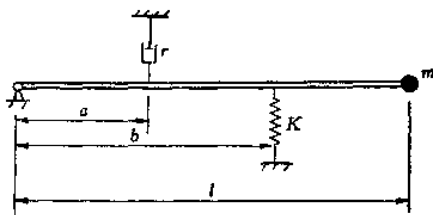


图 T 2-27

2.28 上题系统中，已知 $m = 10 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$ ， $K = 10 \text{ kg/cm}$ ， $r = 10 \text{ kg} \cdot \text{s}/\text{cm}$ ， $a = \frac{l}{3}$ ， $b = \frac{2l}{3}$ 。(1) 求系统振动时的频率，并与没有阻尼时的固有频率作比较；(2) 求该系统振动时的对数减幅。

2.29 一有阻尼的弹簧质量系统, $W = 98\text{kg}$, $K = 10\text{kg/cm}$, 处于临界阻尼状态。由 $t = 0$, $x_0 = 2.5\text{cm}$, $\dot{x}_0 = -30\text{cm/s}$ 开始运动。问质量块将于几秒后到达静平衡位置? 过静平衡位置后最远能移动多少距离?

2.30 某机器重 1.5 吨, 用四个弹簧对称支承, 每个弹簧的刚度为 $K = 82\text{kg/cm}$ 。(1) 试计算此系统的临界阻尼系数 r_c ;(2) 这个系统安装有四个阻尼缓冲器, 每个阻尼系数 $r = 1.68\text{kg}\cdot\text{s/cm}$ 。问此系统自由振动时经过多少时间后, 振幅衰减到 10%?(3) 衰减振动的周期是多少? 与不安装缓冲器时的振动周期作比较。

第 三 章

3.1 已知一弹簧质量系统, 质量块重 $W = 196\text{kg}$, 弹簧刚度 $K = 20\text{kg/cm}$, 作用在质量块上的力为 $F = 16\sin 19t$, 而所受阻力为 $R = 2.56v$ 。 F 、 R 的单位均为 kg , t 的单位为 s , v 的单位为 cm/s 。求 (1) 忽略阻力时, 质量块的位移和放大因子; (2) 考虑阻力时, 质量块的位移和放大因子。

3.2 如图 T3-2 所示轴系, 轴的直径 $d = 2\text{cm}$, $l = 40\text{cm}$, 剪切弹性模量 $G = 8 \times 10^5\text{kg/cm}^2$ 。圆盘绕对称轴的转动惯量为 $I = 1000\text{kg}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^2$, 并在 $M = 500\pi\sin 2\pi t$ $\text{kg}\cdot\text{cm}$ 的力矩作用下扭振。求振幅之值。

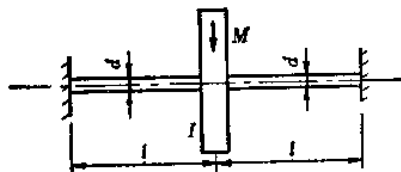


图 T3-2

3.3 一有阻尼的弹簧质量系统, 其固有圆频率为 $p = 2$ $1/\text{s}$, 弹簧刚度为 $K = 3\text{kg/cm}$, 粘性阻尼系数 $r = 1.5\text{kg}\cdot\text{s/cm}$ 。求在外力 $F = 2\cos 3t$ (kg) 作用下的振幅和相位角。

3.4 一机器部件重 20kg , 在激振力 $F = 2.5\sin 10\pi t$ (kg) 作用下发生共振。测得此时振幅为 1.2cm 。求此系统的阻尼系数 r 和相对阻尼系数 ζ 。

3.5 上题如将激振力的频率调到 $f = 6\text{Hz}$, 试求此时机器部件的振幅。

3.6 试证明有阻尼的弹簧质量系统在简谐激振力作用下作强迫振动时, 在频率比为

$$\lambda = \frac{\omega}{p} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

时振幅最大。此时放大因子为

$$\beta = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

3.7 试写出有阻尼的弹簧质量系统在初始条件 $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$, 和质量块上受有 $F = F_0 \sin \omega t$ 时的响应。

3.8 一电动机装置在由螺旋弹簧所支承的平台上。电动机与平台总重 $P = 100\text{kg}$, 弹簧的总刚度 $K = 70\text{kg/cm}$ 。电动机轴上有一偏心重 1kg , 偏心距离 $e = 10\text{cm}$ 。电机转速 $n = 2000\text{rpm}$ 。求平台的振幅。

3.9 用图 3-14 所示的惯性式激振器去测定一重 180kg 的结构的振动特性。在激振器转速为 600rpm 时, 一闪光器显示出激振器的偏心质量在正上方, 而结构正好通过静平衡位置向上移动, 此时振幅为 1cm 。激振器偏心质量重 4.5kg , 偏心距为 2cm 。求 (1) 结构的固有频率; (2) 结构的相对阻尼系数 ζ ; (3) 激振器转速为 720rpm 时的振幅。

3.10 如图 T 3-10 所示弹簧质量系统, 在质量块上作用有简谐力 $F = F_0 \sin \omega t$, 同时在弹簧固定端有支承运动 $x_s = a \cos \omega t$ 。试写出此系统的振动微分方程和稳态振动的解。

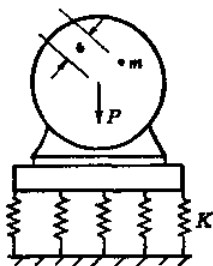


图 T 3-8

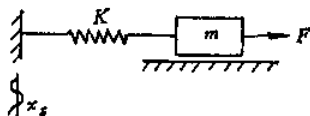


图 T 3-10

3.11 写出图 T 3-11 所示系统的振动微分方程, 并求出稳态振动的解。

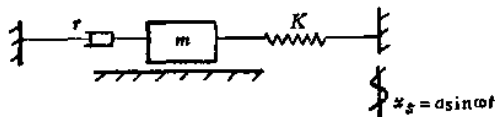


图 T 3-11

3.12 写出图 T 3-12 所示系统的振动微分方程, 并求出稳态振动的解。

3.13 一挂在匣内的单摆, 如图 T 3-13 所示。设匣子作水平简谐运动 $x_s = x_0 \sin \omega t$, 用图示坐标 x 写出单摆微振动微分方程, 并求其振幅之值。

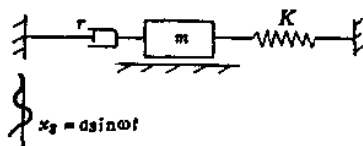


图 T 3-12

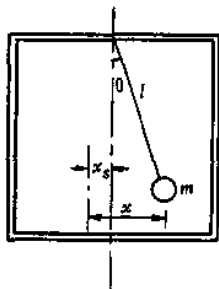


图 T 3-13

3.14 试写出如图 T 3-14 所示结构系统的振动微分方程, 并求出此系统的固有频率, 相对阻尼系数和稳态振动的振幅。

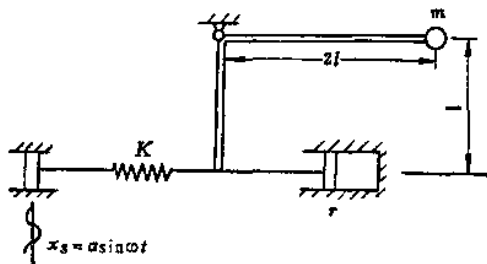


图 T 3-14

3.15 一机组重 30kg, 安装在三个刚度为 K 的弹簧上, 机组转速为 580rpm。问需取 K 为何值时, 才能使传到支承结构上的力仅为激振力的 10%。

3.16 一机器重 450kg, 支承在弹簧隔振器上, 弹簧的静变形为 0.5cm。机器有一偏心重, 产生偏心力 $F = 23 \frac{\omega^2}{g} \text{ (kg)}$, ω 为激振力频率, g 为重力加速度。阻尼忽略不计。求 (1) 在机器转速为 1200rpm 时传入地基的力; 及 (2) 机器的振幅。

3.17 上题机器如先安装在 1140kg 的混凝土基础上, 再在下面支承刚度更大的弹簧隔振器, 弹簧静变形仍为 0.5cm。求此时机器的振幅。

3.18 一洗衣机重 2.2T, 由四个螺旋弹簧支承, 每个弹簧的刚度 $K = 99\text{kg/cm}$, 同时装有四个阻尼器 $\zeta = 0.10$ 。在脱水时洗衣机以 $n = 600\text{rpm}$ 运行。此时衣物偏心重为 10kg, 偏心距为 40cm。试计算洗衣机的隔振系数 η 和隔振效率 \varnothing 。

3.19 一位移计的固有频率为 2Hz, 无阻尼, 用以测频率为 8Hz 的简谐振动, 测得振幅为 0.132cm。问实际振幅为多少? 误差为多少?

3.20 上题位移计如加入一阻尼器 $\zeta = 0.7$, 则测得的振幅将为多少?

3.21 一百分表位移计的固有频率为 10Hz, 阻尼器 $\zeta = 0.65$ 。问该位移计能测得的最低频率为多少时, 误差为 1%。

3.22 某试验室作单盘转子临界转速试验的模型如图 T 3-22 所示。圆盘直径 $D = 16.1\text{cm}$, 厚 $\delta = 2.02\text{cm}$, 重度 $\gamma = 7.8 \times 10^{-3}\text{kg/cm}^3$ 。轴的直径 $d = 1.51\text{cm}$, 跨度 $l = 57\text{cm}$, $E = 2.1 \times 10^6\text{kg/cm}^2$ 。试计算其临界转速。

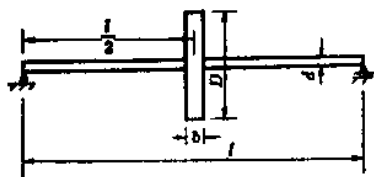


图 T 3-22

3.23 试用瑞雷法求图 T 3-23 所示的对称放置的双盘转子的二阶临界转速的近似值。已知圆盘质量为 m , 轴的抗弯刚度为 EJ 。

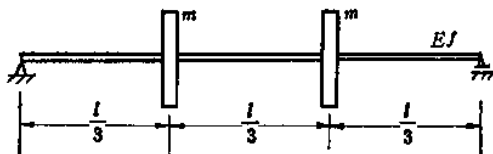


图 T 3-23

3.24 一双缸发动机曲柄轴简化如图 T 3-24 所示。曲柄与曲柄销的质量可看作一偏心质量作用在曲柄销处。曲柄销至轴的距离为 r 。飞轮半径为 R 。问为使轴达到刚性动平衡，应在两飞轮轮缘上何处各钻去多少质量？

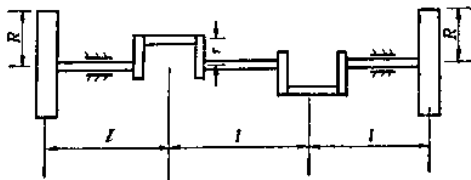


图 T 3-24

3.25 试证明在振动系统中粘性阻尼力在一个周期内所消耗的能量为

$$W_r = \frac{\pi F_0^2}{K} \frac{2\zeta\lambda}{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}$$

3.26 试证明对于粘性阻尼，振动系统的损耗因子与振幅无关，其数值为

$$\eta = 2\zeta\lambda$$

3.27 如图 T 3-27 所示的弹簧质量系统，在质量块上作用有简谐力 $F = 500 \sin \frac{\pi}{2} t$ (kg)，同时在弹簧固定端有支承运动 $x_s = 0.3 \sin \frac{\pi}{4} t$ (cm)。试写出此系统稳态振动的响应。已知 $m = 100 \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$ ， $K = 986 \text{ kg/cm}$ 。

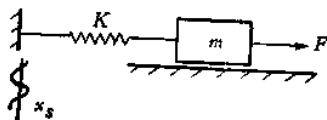


图 T 3-27

3.28 一弹簧质量系统在如图 T 3-28 所示的激振力作用下作强迫振动。试求其稳态振动的响应。

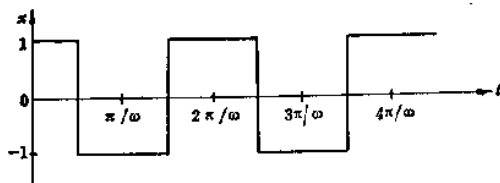


图 T 3-28

3.29 一弹簧质量系统在如图 T 3-29 所示的激振力作用下作强迫振动。试求其稳态振动的响应。

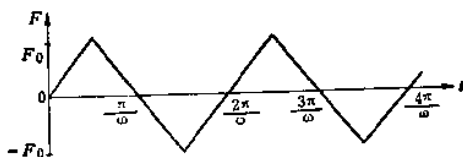


图 T 3-29

3.30 求如图 T 3-30 所示弹簧质量系统，支承处突然向上按 $x_s = a$ 运动时的响应。

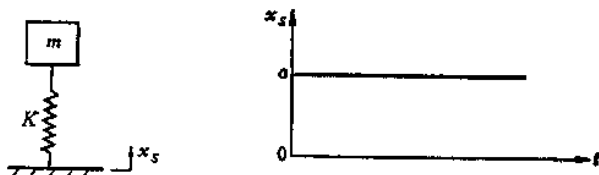


图 T 3-30

3.31 求一弹簧质量系统在图 T 3-31 所示外力 $F = F_0 \sin\left(\frac{\pi t}{t_1}\right)$ 作用下的响应。

3.32 求一弹簧质量系统在图 T 3-32 所示外力作用下的响应。

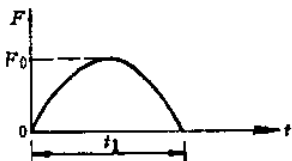


图 T 3-31

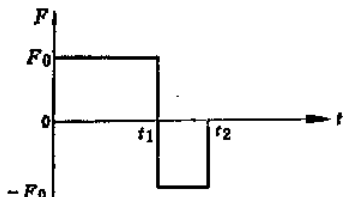


图 T 3-32

第 四 章

4.1 图 T 4-1 所示的弹簧质量系统作垂直振动。已知 $K_1 = K$, $K_2 = 10K$, $m_1 = m_2 = m$ 。

- (1) 求系统 (a) 的固有圆频率, 并画出相应的主振型图;
- (2) 求系统 (b) 和 (c) 的固有圆频率, 并与系统 (a) 的第一固有圆频率相比较。

4.2 图 T 4-2 所示的弹簧质量系统在光滑水平面上自由振动。

- (1) 试写出系统的振动微分方程;
- (2) 求系统的固有圆频率, 并求出相应的主振型。

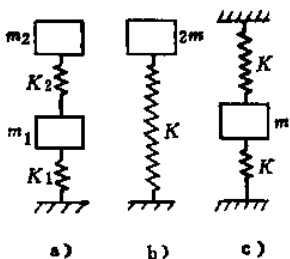


图 T 4-1

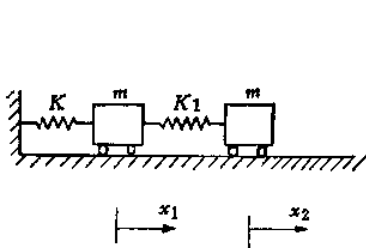


图 T 4-2

4.3 上题中若 $K_1 = K$, 运动的起始条件为: $t = 0$ 时, 物体 A 和 B 的初始位移分别为 $x_{10} = 5\text{mm}$, $x_{20} = 5\text{mm}$, 初始速度 $\dot{x}_{10} = 0$, $\dot{x}_{20} = 0$ 。求系统的响应。

4.4 图 T 4-4 所示系统, 质量 m_1 和 m_2 由刚度为 K 的弹簧联接。

(1) 试写出系统运动的微分方程, 并求出运动的规律;

(2) 讨论此系统一般运动情况和只作振动的条件。

4.5 某振动输送机, 为了估算其固有频率可简化为图 T 4-5 所示弹簧质量系统, 测得其数据为: 上体重 $W_2 = 407\text{kg}$, 下体重 $W_1 = 142\text{kg}$, 弹簧刚度 $K_2 = 3280\text{kg/cm}$, $K_1 = 1760\text{kg/cm}$, 试求系统的固有圆频率及主振型。

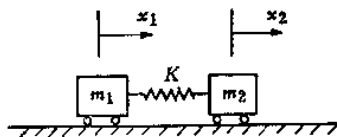


图 T 4-4

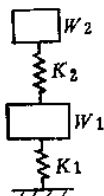


图 T 4-5

4.6 两个质量相同摆长相等的摆, 可绕 x 轴自由摆动, 如图 T 4-6 所示。两摆用一橡皮管联接。已知橡皮管的扭转刚度为 K_θ ($\text{kg}\cdot\text{cm}/\text{rad}$), 摆长为 l (cm), 重量为 W (kg), 试列出该系统绕 x 轴摆动的微分方程, 并求其固有频率和运动规律。

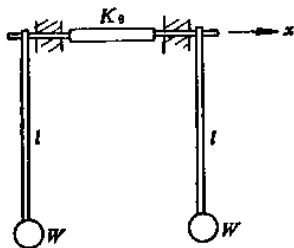


图 T 4-6

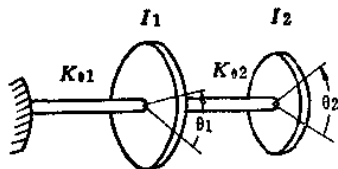


图 T 4-8

4.7 上题中若 $l = 50\text{cm}$, $W = 1.75\text{kg}$, $K_\theta = 2.3\text{kg}\cdot\text{cm}/\text{rad}$ 。初始条件为: $t = 0$ 时 $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta_0$, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ 。试求系统的运动规律及“拍”的周期。

4.8 图 T 4-8 所示扭振系统由无质量的轴和两个圆盘所组成。已知轴的扭转刚度 $K_{\theta 1} = K_{\theta 2} = K_\theta$, 圆盘的转动惯量 $I_1 = 2I_2 = I$, 求系统的扭转振动固有圆频率和主振型。

4.9 图 T 4-9 所示扭振系统由无质量的阶梯轴和两圆盘所组成。已知圆盘的转动惯量 $I_1 = 2I_2 = I$ ，轴的直径 $d_1 = 1.2d_2 = d$ ，轴的长度 $l_1 = 2l_2 = l$ 。求系统的固有频率和主振型。

4.10 图 T 4-10 所示扭振系统由扭转刚度为 K_1 的轴，半径为 r 转动惯量为 I_1 的轮毂，半径为 R 转动惯量为 I_2 的外轮和四个片状弹簧（每个弹簧外端的刚度系数为 K_2 ）所组成。假定轴的一端固定并忽略轴的质量。试建立扭转振动的微分方程，并证明其频率方程可化为：

$$p^4 - \left(\omega_{11}^2 + \omega_{22}^2 + \frac{I_2}{I_1} \omega_{22}^2 \right) p^2 + \omega_{11}^2 \omega_{22}^2 = 0$$

式中 $\omega_{11}^2 = \frac{K_1}{I_1}$ ， $\omega_{22}^2 = \frac{4K_2 R^2}{I_2}$ 。

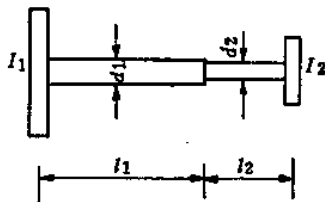


图 T 4-9

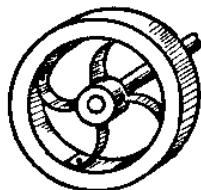


图 T 4-10

4.11 两个质量为 m_1 和 m_2 ，固结于张力为 T 的无质量的弦上。假如质量作横向微振动时，弦中的张力 T 不变。试列出振动的微分方程，并求出当 $m_1 = m_2$ 时系统的固有圆频率。

4.12 图 T 4-12 所示双摆在图示平面内作微振动，试用 θ_1 、 θ_2 或 x_1 、 x_2 作广义坐标，写出系统的振动微分方程，并求出固有圆频率。已知 $l_1 = l_2 = l$ ， $m_1 = m_2 = m$ 。

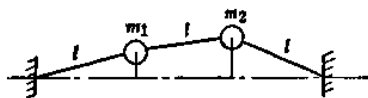


图 T 4-11

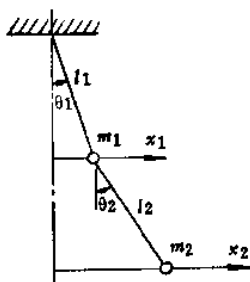


图 T 4-12

4.13 在风洞实验中,把机翼翼段简化为图 T 4-13 所示平面内的刚体,并由刚度为 K_1 的弹簧和刚度为 K_0 的扭簧所支持。已知翼段的质量为 m ,绕重心 G 的转动惯量为 I_0 ,重心与支持点的距离为 e 。试列出系统在图示平面内微振动的微分方程。

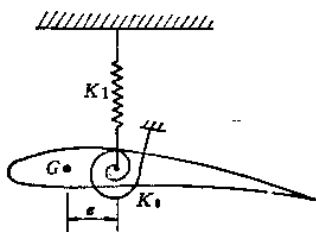


图 T 4-13

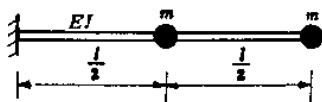


图 T 4-14

4.15 图 T 4-15 所示简支梁,长为 l ,抗弯刚度为 EI ,在距左端为 $l/3$ 处固结一薄圆盘。已知圆盘的质量为 m ,对直径的转动惯量为 I ,不可忽略。梁本身的质量不计。试写出系统横向振动的微分方程。

4.16 一机器系统如图 T 4-16 所示。已知机器重 $W_1 = 90\text{kg}$,减振器重 $W_2 = 2.25\text{kg}$,若机器上有一偏心块重 0.5kg ,偏心距 $e = 1\text{cm}$,机器转速 $n = 1800\text{转/分}$ 。试求:

- (1) 减振器的弹簧刚度 K_2 多大,才能使机器振幅为零;
- (2) 此时减振器的振幅 B_2 为多大;
- (3) 若使减振器的振幅 B_2 不超过 2mm ,应如何改变减振器的参数。

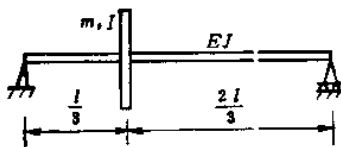


图 T 4-15

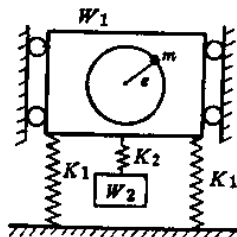


图 T 4-16

4.17 某振动筛简化为图 T 4-17 所示系统。已知：减振架重 $W_1 = 6700\text{kg}$ ，槽体重 $W_2 = 18700\text{kg}$ ，减振弹簧刚度 $K_1 = 7392\text{kg/cm}$ ， $K_2 = 5760\text{kg/cm}$ 。若在槽体上作用一激振力 $F = F_0 \sin \omega t$ ，其中 $F_0 = 50000\text{kg}$ 。直接带动激振器的转速 $n = 735\text{转/分}$ 。试求传到地基上的力最大值是多少？

4.18 转动惯量为 I 的飞轮通过四个刚度为 K 的弹簧与转动惯量为 I_d 并能在轴上自由转动的扭转减振器相连，如图 T 4-18 所示。试建立系统扭转振动的微分方程。若在飞轮上作用一简谐变化的扭矩，试讨论系统的响应。

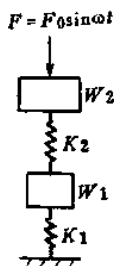


图 T 4-17

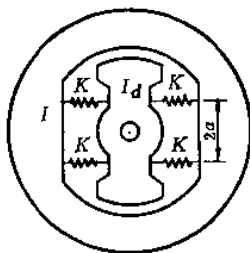


图 T 4-18

4.19 图 T 4-19 所示转子简化为刚体，两端支持在弹性支座上（弹簧刚度为 K ）。转子对称于中点 O ，总质量为 M ，跨度为 l ，对过 O 点与图示平面垂直的轴的转动惯量为 J_0 。如果在与 O 点的轴间距离为 b 处有一很小的不平衡质量 m （ m 与转轴的距离为 r ）。已知转子的转速为 ω ，试建立系统在图示平面内微振动的微分方程。

4.20 为了模拟地震对建筑物的影响，把建筑物当作刚体，并假定基础通过两个弹簧与地相连，已知拉伸弹簧的刚度为 K ，扭转弹簧的刚度为

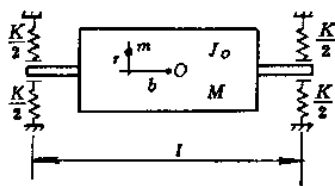


图 T 4-19

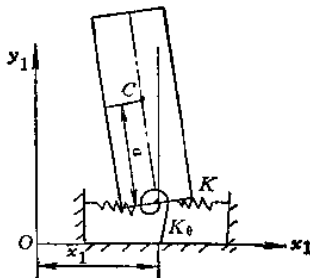


图 T 4-20

K_θ , 地面以 $x_1 = X_1 \sin \omega t$ 作简谐振动, 建筑物的质量为 M , 重心 C 与支持点的距离为 a , 对过 C 点与图示平面垂直的轴的转动惯量为 I 。试建立系统在图示平面内振动的微分方程。

第 五 章

5.1 试用拉格朗日方程建立例 2.7 的圆柱振动方程。

5.2 图 T 5-2 所示半径为 R 的薄半圆柱体, 在水平面上作无滑动滚动, 试由拉格朗日方程建立振动微分方程, 并求出微振动的固有频率。

5.3 图 T 5-3 所示一刚性杆 OA 可绕 O 点在垂直平面内转动, 杆上套一质量为 m 的滑块, 并用一刚度为 K 的弹簧联接到杆上, 弹簧未变形时位于 B 处, 距 O 点长度为 l , 若杆自水平位置以等角速度 ω 转动, 试列出滑块相对于 OA 杆的运动微分方程。并讨论作相对振动的条件。

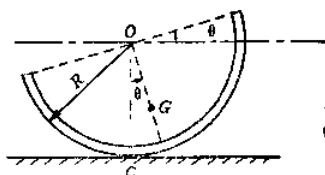


图 T 5-2

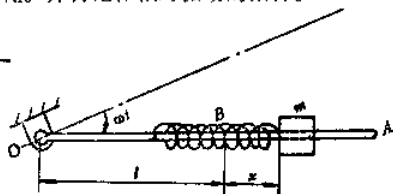


图 T 5-3

5.4 长度为 $2l$ 的两根均质杆, 铰接而成一双摆如图 T 5-4 所示。试以 θ_1 和 θ_2 为广义坐标建立双摆振动微分方程。并求出固有圆频率。

5.5 图 T 5-5 所示质量为 m 的质点, 由刚度为 K 的弹簧悬挂在一铅垂平面内成一弹簧摆, 弹簧原长为 l_0 , 试以 r, θ 为广义坐标列出运动微分方程, 并求出微振动方程。

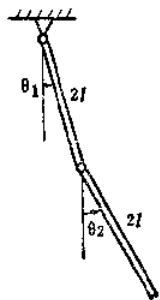


图 T 5-4

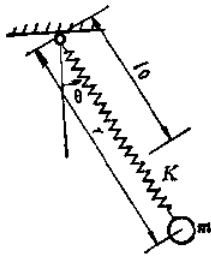


图 T 5-5

5.6 图 T 5-6 所示长度为 l 的绳子, 穿过水平面上小孔 O , 并在两端各联结质量为 m_1 和 m_2 的两质点, m_2 沿垂直线 Oz 运动, m_1 在水平面上运动, 略去摩擦力及绳子的重量和弹性影响, 试以 θ 及 z 为广义坐标列出此系统的运动微分方程。

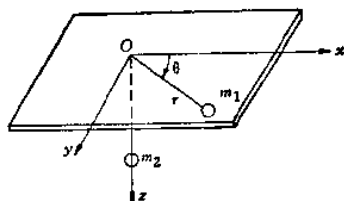


图 T 5-6

5.7 质量为 M 的水平台用长为 l 的绳子悬挂起来, 如图 T 5-7 所示, 半径为 r 的小球, 质量为 m , 沿水平台作无滑动的滚动, 试以 θ 和 x 为广义坐标列出此系统的运动微分方程。

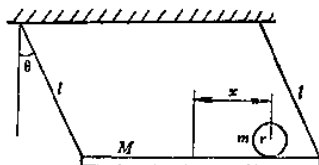


图 T 5-7

5.8 质量为 m 的滑块, 用两根刚度各为 K 的弹簧联结在基础上. 滑块上有质量为 m 摆长为 l 的单摆, 并设 $\frac{K}{m} = \frac{g}{l} = \omega_0^2$, 当基础作水平方向的简谐振动 $x = a \sin \omega t$ 时, 1) 若 $\omega^2 = \frac{K}{m}$, 试求摆的最大摆角 θ_{\max} , 2) 试求此系统发生共振时的 ω 值。

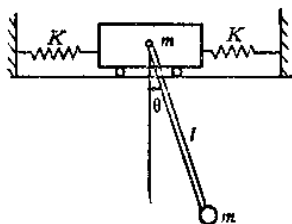


图 T 5-8

5.9 质量为 M 的刚体, 用长为 a 的两根绳子对称地悬挂起来, 下部有两个质量为 m 、摆长为 b 的单摆,

5.6 图 T 5-6 所示长度为 l 的绳子, 穿过水平面上小孔 O , 并在两端各联结质量为 m_1 和 m_2 的两质点, m_2 沿垂直线 Oz 运动, m_1 在水平面上运动, 略去摩擦力及绳子的重量和弹性影响, 试以 θ 及 z 为广义坐标列出此系统的运动微分方程。

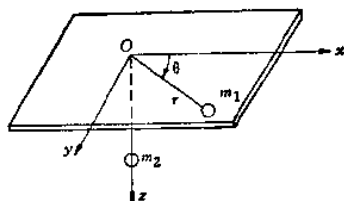


图 T 5-6

5.7 质量为 M 的水平台用长为 l 的绳子悬挂起来, 如图 T 5-7 所示, 半径为 r 的小球, 质量为 m , 沿水平台作无滑动的滚动, 试以 θ 和 x 为广义坐标列出此系统的运动微分方程。

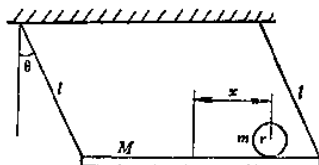


图 T 5-7

5.8 质量为 m 的滑块, 用两根刚度各为 K 的弹簧联结在基础上. 滑块上有质量为 m 摆长为 l 的单摆, 并设 $\frac{K}{m} = \frac{g}{l} = \omega_0^2$, 当基础作水平方向的简谐振动 $x = a \sin \omega t$ 时, 1) 若 $\omega^2 = \frac{K}{m}$, 试求摆的最大摆角 θ_{\max} , 2) 试求此系统发生共振时的 ω 值。

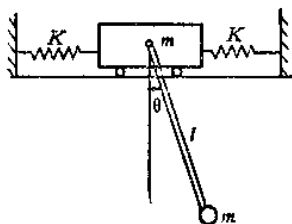


图 T 5-8

5.9 质量为 M 的刚体, 用长为 a 的两根绳子对称地悬挂起来, 下部有两个质量为 m 、摆长为 b 的单摆,

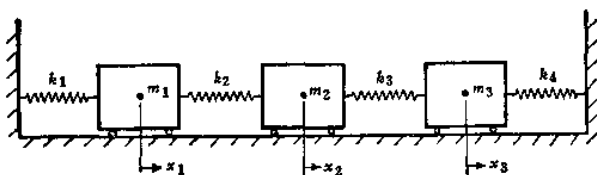


图 T 6-4

6.5 四质量用三个弹簧连接, 如图 T 6-5 所示。如 $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$, 求各阶固有频率及主振型。

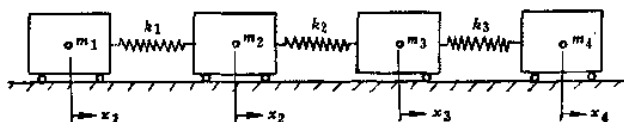


图 T 6-5

6.6 图 T 6-6 所示简支梁, 在四等分处有三个质量 $m_1 = m_2 = m_3 = m$, 梁的抗弯刚度为 EJ , 其质量略去不计, 求各阶固有频率及主振型。

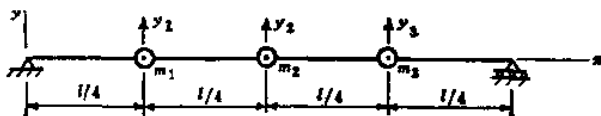


图 T 6-6

6.7 校核题 6.1 中各阶主振型对系统质量矩阵及刚度矩阵的正交性, 并求出各阶正则振型。

6.8 校核题 6.2 中各阶主振型对系统质量矩阵及刚度矩阵的正交性, 并求出各阶正则振型。

6.9 题 6.1 的弹簧质量系统中, 如原先有一力 P 沿 x 方向作用在第三个质量 m_3 上, 在 $t = 0$ 时突然释放此 P 力, 求系统对这种初始条件的响应。

6.10 题 6.5 的系统若有 $t = 0$ 时的初始条件为,

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \\ \dot{x}_{30} \\ \dot{x}_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$$

求系统对此初始条件的响应。

6.11 用矩阵迭代法计算题 6.1 系统的固有频率及主振型。

6.12 用矩阵迭代法计算题 6.2 系统的固有频率及主振型。

6.13 用矩阵迭代法求题 6.4 的固有频率及主振型。

6.14 用瑞雷法求题 6.1 的第一阶固有频率。

6.15 用瑞雷法求题 6.2 的第一阶固有频率。

6.16 用瑞雷法求题 6.4 的第一阶固有频率。

6.17 用邓可莱法求题 6.6 的第一阶固有频率。

6.18 用李兹法求题 6.1 的第一、二阶固有频率。

6.19 用李兹法求题 6.4 的第一、二阶固有频率。

6.20 图 T 6-20 所示系统是考虑了阻尼后的弹簧-质量系统，如 $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$, 各质量上作用有外力 $P_1 = P_2 = P_3 = P \sin \omega t$, 而 $\omega = 1.25 \sqrt{\frac{k}{m}}$, 各阶正则振型的相对阻尼系数 $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0.01$, 试用振型叠加法求各质量的稳态强迫振动。

(注意：本题的系统在无阻尼时，就是题 6.1 的系统，求解本题可利用题 6.1 及题 6.7 的计算结果。)

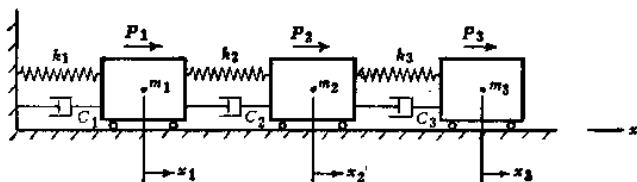


图 T 6-20

第 七 章

7.1 一等直杆左端固定右端附一重量为 W 的重物并和一弹簧相连，如图 T 7-1 所示。已知：杆长为 l ，单位长度的重量为 γA ，弹簧的刚度为

K , 杆的弹性模量为 E 。求系统纵向自由振动的频率方程。

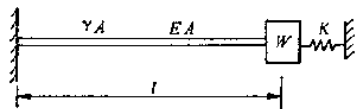


图 T7-1

7.2 一等直杆沿 x 轴方向以等速 v 运动, 突然将 $x = 0$ 的一端固定住, 这时起始条件为 $(u)_{t=0} = 0$, $(\dot{u})_{t=0} = v$ 。试求系统的响应。

7.3 一根两端固定的等直杆, 在其中点作用一轴向常力 P 。当力 P 突然取消后, 求系统的响应。



图 T7-3

7.4 一端固定一端自由的等直杆, 受轴向均布的下扰力 $\frac{P_1}{l} \sin \omega t$ 作用。试求稳态强迫振动的解。

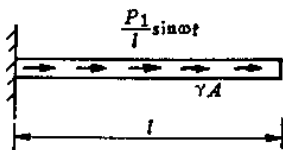


图 T7-4

7.5 一端固定一端自由的等直杆, 试根据精确解求出前两阶纵向自由振动的固有圆频率, 画出前两阶主振型图, 并与第六章的近似解作比较。

7.6 一根等直的圆杆两端附有两个相同的圆盘, 如图 T7-6 所示。已知杆的长度为 l , 杆对自身轴线的转动惯量为 I_s , 圆盘对杆的轴线的转动惯量为 I_0 , 求系统扭转振动的频率方程。

7.7 一等直的圆轴一端固定另一端和扭转弹簧相连, 如图 T 7-7 所示。已知: 轴的抗扭刚度为 GJ_p , 重量为 γ , 长度为 l , 弹簧的刚度为 K 。求系统扭转振动的频率方程。



图 T 7-6

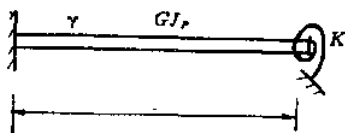


图 T 7-7

7.8 一悬臂梁左端固定右端附有重物, 如图 T 7-8 所示。已知重物的重量为 W , 梁的长度为 l , 抗弯刚度为 EJ , 单位长度重量为 γA , 试求系统横向振动的频率方程。

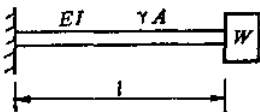


图 T 7-8

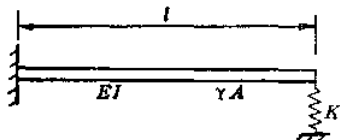


图 T 7-9

7.10 一简支梁在其中点受到力 P 作用而产生静变形, 如图 T 7-10 所示。已知梁的长度为 l , 弯曲刚度为 EJ , 单位长度的重量为 γA , 求当力 P 突然取消后梁的响应。

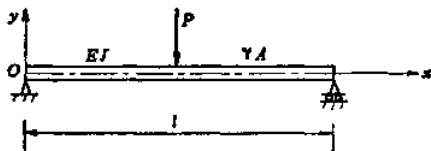


图 T 7-10

7.11 在上题中如果力 P 突然加在简支梁的中点, 求梁的响应。

7.12 一简支梁在 $t = 0$ 时梁上所有的点除去两端点以外都得到横向速度 v , 求梁的响应。

7.13 一简支梁在距左端 $\frac{l}{3}$ 和 $\frac{2l}{3}$ 处分别作用两个横向干扰力 $P_0 \sin \omega t$, 求梁的响应。

7.14 试求在正弦分布的横向干扰力 $q(x, t) = F_0 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \omega t$ 作用下, 简支梁的响应。

7.15 简支梁在左半部作用有分布的横向干扰力 $q \sin \omega t$, 如图 T 7-15 所示。求梁中点的振幅。

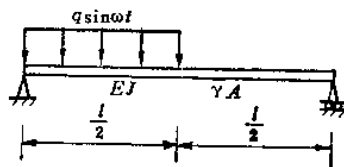


图 T 7-15

7.16 简支梁上附有两个集中质量, 每个集中质量的重量等于全梁重量的一半, 位置如图 T 7-16 所示。试用瑞雷法求系统的基频, 用李兹法求系统的基频和第二阶固有频率。

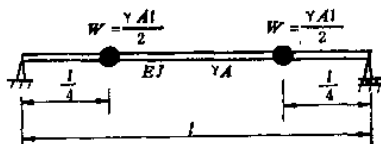


图 T 7-16

7.17 简支梁的高度 h 和横截面积 A 均按简谐规律变化, 如图 T 7-17 所示。已知: 梁的厚度为 b , 长度为 l ,

$$h = h_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{l} \right), \quad A = A_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{l} \right)$$

试用李兹法求系统的第一和第二阶固有频率。



图 T 7-17

7.18 图 T 7-18 所示悬臂梁，长度为 l ，厚度为 b ，横截面积 A 按直线规律变化：

$$A(x) = A_0 \left(1 + \frac{x}{l} \right)$$

试用李兹法求系统的第一和第二阶固有频率。

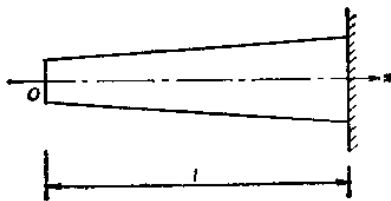


图 T 7-18

第九章

9.1 如图 T 9-1 所示桁架结构是由 5 个受轴向力的杆单元组成，各单元的截面积都为 A ，材料弹性模量都为 E ，单位长度的质量都为 m ，单元 1、2、4、5 长度为 l ，单元 3 长度为 $1.4142l$ 。试导出在总体坐标系 $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ 中各个单元的质量矩阵 $[\bar{M}^{(i)}]$ 和刚度矩阵 $[\bar{K}^{(i)}]$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)。

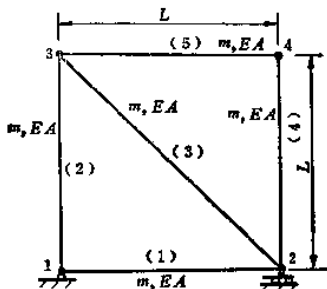


图 T 9-1

9.2 导出上题结构作自由振动的运动方程式，试以分块矩阵形式写出结构系统的质量矩阵 $[\bar{M}]$ 和刚度矩阵 $[\bar{K}]$ 。

9.3 图 T 9-3 所示是作扭转振动的均匀杆, 截面扭转刚度为 $GJ_t = 0.8 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$, 单位长度的转动惯量 $\rho J_p = 0.8 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{s}^2$, 长度 $l = 60 \text{ cm}$ 。如分成三个等长的单元, 该杆的端点条件是一端夹持, 一端自由。求解该杆作自由振动的前 3 阶固有频率和主振型, 并和解析解作比较。

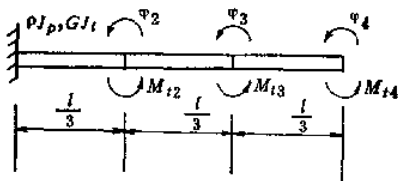


图 T 9-3

9.4 一正方形的平面问题划分为两个三角形单元, 底边两结点为简支。试计算结构系统的质量矩阵 $[\bar{M}]$ 和刚度矩阵 $[\bar{K}]$ 。四个直角边长度都等于 10 cm , 单元厚度为 1 cm , 材料弹性模量 $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = 0.3$, 单位体积的质量 $\rho = 0.8 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^{-4}$ 。

9.5 在上题结构的左侧受水平方向的激振力 $R_s = \left(1 - \frac{y}{5}\right) \delta(t)$, 试求作用于单元 (1) 的激振力列阵。

9.6 图 T 9-6 所示结构的二个单元的长度分别为 l_1 、 l_2 , 截面轴向刚度分别为 $(EA)_1$ 、 $(EA)_2$, 抗弯刚度分别为 $(EJ)_1$ 、 $(EJ)_2$, 单位长度的质量分别为 m_1 、 m_2 , 导出同时考虑轴向振动和横向弯曲振动时的结构质量矩阵 $[\bar{M}]$ 和结构刚度矩阵 $[\bar{K}]$ 。

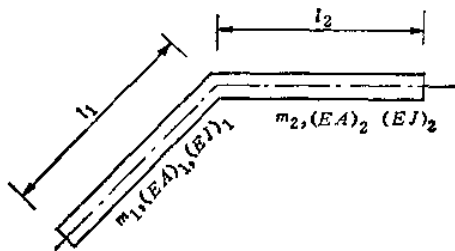


图 T 9-6

习 题 答 案

第 一 章

$$1.1 \quad A = 0.199 \text{ cm}; \quad v_{\max} = 31.2 \text{ cm/s}$$

$$1.2 \quad A = 0.717 \text{ cm}; \quad a_{\max} = 2820 \text{ cm/s}^2$$

$$T = 0.1 \text{ s}$$

$$1.4 \quad A = 0.584 \text{ cm}; \quad v_{\max} = 18.3 \text{ cm/s}$$

$$a_{\max} = 574.6 \text{ cm/s}^2$$

$$1.7 \quad x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \dots \right)$$

$$1.8 \quad x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$$

第 二 章

$$2.2 \quad 4 \text{ cm}$$

$$2.3 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{gK}}, \quad A = \sqrt{\frac{P}{K} \left(\frac{P}{K} \sin^2 \alpha + 2h \right)}$$

$$2.4 \quad T = 0.951 \text{ s}$$

$$2.5 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{fg}}$$

$$2.6 \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi d^4 G (l_1 + l_2)}{32 l_1 l_2 I}}$$

$$2.7 \quad f = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{b} \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

$$2.8 \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{(\pi - 2)R}}$$

$$2.9 \quad f = 7.046 \text{ Hz}; \quad N = 2.753 \text{ T}$$

$$2.11 \quad f = 2.113 \text{ Hz}$$

$$2.12 \quad f_a = 11.14 \text{ Hz}; \quad f_b = 4.824 \text{ Hz}$$

$$2.13 \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GJ_1 J_2}{(l_1 J_2 + l_2 J_1) I}}$$

$$2.14 \quad 4 \text{ cm}$$

$$2.15 \quad f = \frac{1}{2\pi} \frac{l}{a} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$2.16 \quad f = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1 K_2}{(a^2 K_1 + l^2 K_2)m}}$$

$$2.17 \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6g}{5l}}$$

$$2.18 \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2K}{2m + m_1}}$$

$$2.19 \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m + \frac{I}{R^2}}}$$

$$2.20 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{KS^2 + QS\cos\alpha}}$$

$$2.21 \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_0}{I + \frac{I'}{3}}}$$

$$2.22 \quad f = \frac{22.63}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

$$2.24 \quad r = 2 \text{ kg}\cdot\text{s}/\text{cm}; \quad p' = 4.875 \text{ 1/s}$$

$$2.25 \quad \xi = 0.0221$$

$$2.26 \quad f = 0.570 \text{ Hz}$$

$$2.27 \quad p' = -\frac{1}{2ml^2} \sqrt{4mKI^2b^2 - r^2a^4}$$

$$2.28 \quad p' = 0.664 \text{ 1/s}; \quad \delta = 0.526$$

$$2.29 \quad t = 0.50 \text{ s}; \quad x = -0.00124 \text{ cm}$$

$$2.30 \quad r_c = 44.8 \text{ kg}\cdot\text{s}/\text{cm}; \quad t = 1.05 \text{ s}$$

$$T' = 0.434 \text{ s}$$

第 三 章

$$3.1 \quad (1) x = -0.306\sin 19t; \quad \beta = 0.383$$

$$(2) x = 0.224\sin(19t + 0.75); \quad \beta = 0.28$$

$$3.2 \quad \theta = 0.0673 \text{ rad}$$

$$3.3 \quad B = 0.342 \text{ cm}; \quad \phi = 129^\circ 48'$$

$$3.4 \quad r = 0.0663 \text{ kg}\cdot\text{s}/\text{cm}; \quad \xi = 0.0517$$

$$3.5 \quad B = 0.272 \text{ cm}$$

$$3.8 \quad B = 0.102 \text{ cm}$$

$$3.9 \quad f = 10 \text{ Hz}; \quad \zeta = 0.025; \quad B = 0.162 \text{ cm}$$

$$3.10 \quad B = \frac{1}{1 - \lambda^2} \sqrt{a^2 + \left(\frac{F_0}{K}\right)^2}$$

$$3.11 \quad B = \frac{a}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}}$$

$$3.12 \quad B = \frac{a(2\zeta\lambda)}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}}$$

$$3.13 \quad \ddot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{g}{l}x_0 \sin \omega t; \quad B = \frac{x_0}{1 - \lambda^2}$$

$$3.14 \quad 4m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = 2Kas \sin \omega t;$$

$$p = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \zeta = \frac{r}{4\sqrt{Km}},$$

$$B = \frac{2a}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}}$$

$$3.15 \quad K = 3.42 \text{ kg/cm}$$

$$3.16 \quad F_A = 52.6 \text{ kg}; \quad B = 0.0584 \text{ cm}$$

$$3.17 \quad B = 0.0165 \text{ cm}$$

$$3.18 \quad \eta = 0.0641; \quad \Theta = 93.59\%$$

$$3.19 \quad a = 0.12375 \text{ cm}; \quad \Delta = 6.25\%$$

$$3.20 \quad a = 0.12366 \text{ cm}$$

$$3.21 \quad f = 16.5 \text{ Hz}$$

$$3.22 \quad n_K = 1970 \text{ rpm}$$

$$3.23 \quad n_K = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{162EJ}{5ml^3}}$$

$$3.27 \quad x = 0.32 \sin \frac{\pi}{4} t + 0.677 \sin \frac{\pi}{2} t$$

$$3.28 \quad x = \frac{4F_0}{\pi K} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}} \cos j\omega t}{j \left[1 - \left(\frac{j\omega}{p} \right)^2 \right]}$$

$$3.29 \quad x = \frac{8F_0}{\pi^2 K} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}} \sin j\omega t}{j^2 \left[1 - \left(\frac{j\omega}{p} \right)^2 \right]}$$

$$3.30 \quad x = a(1 - \cos pt)$$

$$3.31 \quad x = \frac{F_0}{K} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right) \beta \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}, \quad \omega = \frac{\pi}{t_1}$$

$$x = -\frac{F_1}{K} \frac{\omega}{p} [\sin p(t - t_1) + \sin pt] \beta \quad t_1 \leq t$$

$$3.32 \quad x = \frac{F_0}{K} (1 - \cos pt) \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$x = \frac{F_0}{K} [2 \cos p(t - t_1) - \cos pt - 1] \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$x = \frac{F_0}{K} [2 \cos p(t - t_1) - \cos pt - \cos p(t - t_2)] \quad t_2 \leq t$$

第 四 章

4.1 对于 (a) 系统

$$p_1 = 0.698 \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad p_2 = 4.53 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$4.4 \quad x_1 = -\frac{KA}{m_1 p^2} \sin(pt + \phi) + Bt + C$$

$$x_2 = \frac{KA}{m_2 p^2} \sin(pt + \phi) + Bt + C$$

$$p = \sqrt{\frac{K}{m_1} + \frac{K}{m_2}} \quad \text{为系统的固有圆频率}$$

$$4.5 \quad p_1 = 30.3 \text{ 1/s}, \quad p_2 = 102 \text{ 1/s}$$

$$4.6 \quad p_1 = \sqrt{g/l}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K_0 g}{Wl^2}}$$

$$4.7 \quad T = 55 \text{ s}$$

$$4.8 \quad p_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \frac{K_0}{I}}, \quad p_2 = \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \frac{K_0}{I}}$$

$$4.9 \quad p^2 = \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \cdot \frac{GJ_1 J_2}{I_1 J_2 + I_2 J_1}$$

$$J_1 = \frac{\pi d_1^4}{32}, \quad J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32}$$

$$4.12 \quad p_1 = \sqrt{\frac{g}{l}(2 - \sqrt{2})}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{g}{l}(2 + \sqrt{2})}$$

$$4.14 \quad p_1^3 = 2.73 \frac{EJ}{ml^3}, \quad p_2^3 = 121 \frac{EJ}{ml^3}$$

$$4.16 \quad (1) K_1 = 81.5 \text{ kg/cm}$$

$$(2) B_1 = 2.2 \text{ mm}$$

$$(3) K_2 = 89.7 \text{ kg/cm}, \quad W_2 = 2.48 \text{ kg}$$

$$4.17 \quad F_{\max} = 730 \text{ kg}$$

第 五 章

$$5.2 \quad \pi R \left(1 - \frac{2}{\pi} \cos \theta \right) \ddot{\theta} - R \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 - g \sin \theta = 0$$

$$p = \sqrt{g/R(\pi - 2)}$$

$$5.3 \quad \ddot{x} + \left(\frac{K}{m} - \omega^2 \right) x = g \sin \omega t + l \omega^2$$

$$5.4 \quad \frac{16l}{3g} \ddot{\theta}_1 + \frac{2l}{g} \ddot{\theta}_2 + 3\theta_1 = 0$$

$$\frac{2l}{g} \ddot{\theta}_1 + \frac{4l}{3g} \ddot{\theta}_2 + \theta_2 = 0$$

$$p_1 = 0.61 \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$p_2 = 1.62 \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$5.5 \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Kr - mg \cos \theta = Kl_0$$

微振动

$$r\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

$$m\ddot{r} + Kr = Kl_0 + mg$$

$$5.6 \quad (m_1 + m_2) \ddot{z} + m_1(l - z)\dot{\theta}^2 - m_2g = 0$$

$$m_1(l - z)^2 \dot{\theta} = \text{常数}$$

$$5.7 \quad l\ddot{\theta} + [m/(m + M)] \ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{5}{7} l \dot{\theta} \cos \theta = \text{常数}$$

$$5.8 \quad 1. \theta_{\max} = \frac{2a}{l}$$

$$2. p_{1,2} = \omega_0 \sqrt{2 \mp \sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
 5.9 \quad & (M+2m)a^2\ddot{\theta} + mab\ddot{\varphi}_1 + mab\ddot{\varphi}_2 + (M+2m)ga\theta = 0 \\
 & mab\ddot{\theta} + mb^2\ddot{\varphi}_1 + mgb\varphi_1 = 0 \\
 & mab\ddot{\theta} + mb^2\ddot{\varphi}_2 + mgb\varphi_2 = 0
 \end{aligned}$$

第 六 章

$$\begin{aligned}
 6.1 \quad & p_1 = 0.445\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad p_2 = 1.247\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad p_3 = 1.802\sqrt{\frac{k}{m}} \\
 & \{A^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 0.445 \\ 0.802 \\ 1.000 \end{bmatrix}, \quad \{A^{(2)}\} = \begin{bmatrix} -1.247 \\ -0.555 \\ 1.000 \end{bmatrix}, \quad \{A^{(3)}\} = \begin{bmatrix} 1.802 \\ -2.247 \\ 1.000 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.2 \quad & p_1 = 0.3731\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad p_2 = 1.321\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad p_3 = 2.029\sqrt{\frac{k}{m}} \\
 & \{A^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.861 \\ 2.162 \end{bmatrix}, \quad \{A^{(2)}\} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.254 \\ -0.341 \end{bmatrix}, \quad \{A^{(3)}\} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -2.115 \\ 0.679 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.3 \quad & p_1 = 0.457\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad p_3 = 1.34\sqrt{\frac{k}{m}} \\
 & \{A^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.79 \\ 1.00 \end{bmatrix}, \quad \{A^{(2)}\} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \{A^{(3)}\} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.79 \\ 1.00 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$6.4 \quad \frac{1}{p_1^2} = \frac{(2 + \sqrt{2})m}{2k}, \quad \frac{1}{p_2^2} = \frac{m}{2k}, \quad \frac{1}{p_3^2} = \frac{(2 - \sqrt{2})m}{2k}$$

$$6.5 \quad p_1^2 = 0, \quad p_2^2 = \frac{(2 - \sqrt{2})k}{m}, \quad p_3^2 = \frac{2k}{m},$$

$$p_4^2 = \frac{(2 + \sqrt{2})k}{m}$$

$$6.6 \quad p_1 = 4.93\sqrt{\frac{EJ}{m l^3}}, \quad p_2 = 19.6\sqrt{\frac{EJ}{m l^3}}, \quad p_3 = 41.6\sqrt{\frac{EJ}{m l^3}}$$

6.7

$$\{A_N^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 0.328 \\ 0.591 \\ 0.737 \end{bmatrix}, \quad \{A_N^{(2)}\} = \begin{bmatrix} -0.737 \\ -0.328 \\ 0.591 \end{bmatrix}, \quad \{A_N^{(3)}\} = \begin{bmatrix} 0.591 \\ -0.737 \\ 0.328 \end{bmatrix}$$

6.8

$$\{A_N^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 0.269 \\ 0.501 \\ 0.581 \end{bmatrix}, \quad \{A_N^{(2)}\} = \begin{bmatrix} 0.878 \\ 0.223 \\ -0.300 \end{bmatrix}, \quad \{A_N^{(3)}\} = \begin{bmatrix} 0.395 \\ -0.834 \\ 0.268 \end{bmatrix}$$

$$6.9 \quad x_1 = \frac{P}{4k} (1.220 \cos p_1 t - 0.280 \cos p_2 t + 0.060 \cos p_3 t)$$

$$6.10 \quad x_1 = \frac{1}{2} v \left(t + \frac{1}{p_3} \sin p_3 t \right)$$

$$6.17 \quad p_1 = 4.75 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

6.20

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.398 \\ 0.717 \\ 0.895 \end{bmatrix} \frac{P}{k} \sin(\omega t - \theta_1) + \begin{bmatrix} 10.89 \\ 4.84 \\ -8.73 \end{bmatrix} \frac{P}{k} \sin(\omega t - \theta_2) \\ &+ \begin{bmatrix} 0.0637 \\ -0.0794 \\ 0.0353 \end{bmatrix} \frac{P}{k} \sin(\omega t - \theta_3) \approx \begin{bmatrix} 10.89 \\ 4.84 \\ -8.73 \end{bmatrix} \frac{P}{k} \sin(\omega t - \theta_2) \end{aligned}$$

$$\theta_1 = 179^\circ 32', \quad \theta_2 = 103^\circ 31', \quad \theta_3 = 1^\circ 32'$$

第 七 章

$$7.1 \quad \frac{1}{p} \operatorname{tg} \frac{pl}{\alpha} = \frac{AE}{a \left(\frac{W}{g} p^2 - K \right)}$$

$$7.2 \quad u(x, t) = \frac{8vl}{\pi^2 a} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{2l} \sin p_n t$$

$$7.3 \quad u(x, t) = \frac{2pl}{\pi^2 EA} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos p_n t$$

$$7.4 \quad u(x, t) = \frac{4P_0 g \sin \omega t}{\pi^2 A l} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{p_n x}{a}}{n(p_n^2 - \omega^2)}$$

$$7.6 \quad \operatorname{tg} \frac{\rho l}{a} = \frac{2(I_0/I_s) \frac{\rho l}{a}}{(I_0/I_s)^2 \left(\frac{\rho l}{a} \right)^2 - 1}$$

$$7.7 \quad \operatorname{tg} \frac{\rho l}{a} = -\frac{GJ\rho}{K} \frac{\rho}{a}$$

$$7.8 \quad \frac{W\rho^2}{EJgk^3} = \frac{1 + \cos k l \operatorname{ch} k l}{\sin k l \operatorname{ch} k l - \cos k l \operatorname{sh} k l}$$

$$7.9 \quad \frac{K}{EJk^3} = \frac{1 + \operatorname{ch} k l \cos k l}{\cos k l \operatorname{sh} k l - \sin k l \operatorname{ch} k l}$$

$$7.10 \quad y(x, t) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4} \cos p_n t \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$7.11 \quad y(x, t) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ \times (1 - \cos p_n t)$$

$$7.12 \quad y(x, t) = \frac{4\nu}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n p_n} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin p_n t$$

$$7.13 \quad y(x, t) = \frac{4P_0 l^3 \sin \omega t}{EJ\pi^4} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4 - \alpha^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ \times \cos \frac{n\pi}{6}, \quad \alpha = \frac{\omega}{p_1}$$

$$7.14 \quad y(x, t) = \frac{F_0 l^4}{\pi^4 EJ} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \frac{\omega^2 l^4}{\pi^4 a^2}} \cdot \sin \omega t$$

$$7.15 \quad (y_{\max})_x = \frac{l}{2} = \frac{2ql^4}{\pi^6 EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(n^4 - \alpha^2)} \quad \text{其中} \quad \alpha = \frac{\omega}{p_1}$$

主要参考书目

- [1] Meirovitch, L. 《Elements of Vibration Analysis》(1975)
- [2] Thomson, W.T. 《Theory of Vibration with Application》
(1972)
- [3] S. Timoshenko. 《Vibration Problems in Engineering》
(1974)
- [4] 机械工程手册第21篇, 机械振动, 机械工业出版社 (1978)
- [5] 科学院沈阳计算所, 电子计算机常用算法, 科学出版社
(1976)