

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

非线性振动

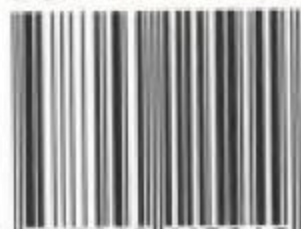
Nonlinear Vibrations

陈予恕

高等教育出版社

研究生教学用书 教育部研究生工作办公室推荐

ISBN 7-04-011594-8



9 787040 115949 >

定价 34.20 元

425

U322

C49a1

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

非线性振动

Nonlinear Vibrations

陈予恕



A1032116

高等教育出版社

内容提要

本书为 2000--2001 年度教育部研究生工作办公室推荐的研究生教学用书。

本书全面系统地介绍了分析单自由度和多自由度非线性振动系统定常解(周期解)和非定常解的各种研究方法、各种非线性因素对系统动态行为产生的影响和其典型的非线性现象,并简述了近 20 年来新发展的周期解分岔理论的主要成果,以及以上理论在工程中应用的典型实例。本书的特色是理论联系工程实际,只用数学高等分析的方法(避免用抽象数学方法)揭示复杂动力学现象的本质,并着重于物理概念的介绍。全书除绪论外,共分十一章,包括对非线性振动特点和研究方法的叙述;单自由度和多自由度系统的相平面法、渐近法、平均法、多尺度法、小参数法、分岔理论的基本概念、非线性振动系统周期解分岔理论方法,以及计算机的应用和实验研究问题等。

本书可作为理工科高等学校研究生非线性振动课程的教材,也可供机械、航空航天、自动控制、交通车辆、电子学、化工、复杂结构动力学的高年级学生,以及从事与时间有关的动力学过程研究的工程技术人员和研究参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性振动/陈予恕. —北京:高等教育出版社,

2002

ISBN 7-04-011594-8

I. 非... II. 陈... III. 非线性振动 IV. 0322

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 084367 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网 址	http://www.hep.edu.cn
传 真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	中国青年出版社印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2002 年 12 月第 1 版
印 张	25	印 次	2002 年 12 月第 1 次印刷
字 数	420 000	定 价	34.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

前 言

在各种不同的非线性动力学系统(物理的、力学的、化学的、生态学的、工程技术的、经济学的)中,除周期和概周期振动之外,无规律振动运动的发现是当代科学的重大成就之一。从1963年到现在,在许多杰出科学家研究成果的基础上已经形成了一门新的学科——混沌动力学(或非线性科学)。非线性振动力学是非线性科学的重要组成部分之一,随着非线性科学的发展,由研究其周期解和概周期解的经典理论,发展到研究周期解的分岔理论和混沌理论。

但是在近代物理学和工程科学中,寻求非线性系统周期解、概周期解,并保证其稳定运行的问题仍然大量地存在,有些工程动态失稳问题仍然十分突出。另外,非线性系统无规律振动往往是从有规律振动发展演变而来,了解它们之间相互转化的规律和联系,乃是非线性动力学设计和智能控制需要了解的重要内容之一。因此,无论是非线性振动系统周期解的理论,或是求周期解的分岔的理论都是迫切需要的。

本书是在我们1983年出版《非线性振动》(天津科学技术出版社)和1993年出版《非线性振动系统的分岔和混沌理论》(高等教育出版社)的基础上,总结了多年教学实践经验,为满足研究生的教学需要而写的。在叙述理论方法时,我们根据理论联系工程实际的思路,从工程实际的应用问题出发,应用理工科大学的高等数学知识进行分析,深入地介绍非线性振动周期解和周期解分岔的物理概念,以及理论分析结果在解决工程问题中的应用,因此,本书也可作为从事非线性动力学问题研究的高年级大学生、研究工作者和工程技术人员的参考书。

本书除绪论外共分十一章。

在绪论中简单介绍了非线性振动研究的任务和发展概况,非线性系统的一般特点和研究步骤,并介绍了机械系统中常见的各种非线性力函数。

第一章到第八章分别介绍了渐近法、平均法、多尺度法、小参数法等经典的非线性振动理论方法,以及从理论上阐明了非线性弹性力、非线性阻尼力、参数激励力、自激振动系统的一些较线性系统来说新的物理现象,并对某些单自由度和多自由度的工程非线性振动问题作了详细分析。

第九章介绍了分岔理论基础:动力系统的概念,分岔定义和平面向量

场分岔的分类,隐函数定理,稳定流形定理,中心流形定理,正规形理论和霍普分岔定理。

第十章讨论了非线性振动系统周期解的分岔理论。其中介绍了李雅普诺夫—施密特方法,奇异性理论,和非线性参激系统主参数共振分岔理论方法及其工程应用。

第十一章介绍了计算机的应用和实验研究,其中讨论了非线性振动系统周期解和周期分岔解的数值计算方法,符号积分方法,模拟计算机的应用,以及实验研究问题。

在编写过程中,梁以德(Andrew Y. T. Leung)教授和我们研究组的同志们给予了很多帮助,作者对他们表示感谢。同时对陆启韶教授等各位专家在审稿过程中,所提的十分有益的意见表示衷心的感谢。

本书的主要研究工作得到了国家自然科学基金重大项目 No. 19990510 和国家重点基础研究专项经费项目 No. G19980203 的资助,作者谨表示衷心的感谢。限于水平,书中的错误和不当之处恳请批评指正。

陈予恕

2001 年 12 月

主要符号表

x, y, z	振动位移
$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$	振动速度
$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z} (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$	振动加速
a	振幅
ω, ν	振动角频率
φ, ψ	相位
T	周期运动的周期
T_n	第 n 阶尺度的时间变量
k	线性刚度系数
ε, μ	小参数
\mathbf{R}	实数集
\mathbf{C}	复数集
\mathbf{Z}	整数集
\mathbf{R}^n	n 维线性空间
\forall	对所有给定
\exists	存在
$a \in A$	集 A 的元素 a
$A \subset B$	集 B 的子集 A
$A \oplus B$	集合 A 和 B 的直和
A	在零点计算的雅可比矩阵
$f: A \rightarrow B$	A 到 B 内的映射 f
$\dim V$	空间 V 的维数
$\text{codim } V_1$	子空间 V_1 的余维数
E^c, E^s, E^u	中心子空间, 稳定子空间, 不稳定子空间
$W^c(x_0), W^s(x_0), W^u(x_0)$	平衡点的中心流形, 稳定流形, 不稳定流形
g, f	芽
$\mathcal{E}_{x,\lambda}, E_{x,\lambda}$	芽空间
$RT(f)$	f 的限制切空间
$T(g)$	g 的切空间
$x \mapsto f(x)$	x 点映到 $f(x)$ 点

目 录

主要符号表	1
绪论	1
§ 0.1 非线性振动研究及其任务	1
§ 0.2 机械系统中常见的几种非线性力	2
§ 0.3 非线性振动的特点	11
§ 0.4 研究非线性振动问题的方法	12
§ 0.5 实际工程振动系统的建模简化	15
§ 0.6 非线性振动应用问题的研究步骤	16
第一章 非线性系统的自由振动	17
§ 1.1 渐近法 — 三级数法	17
§ 1.2 保守系统	24
§ 1.3 非线性阻尼的影响	30
§ 1.4 平均法	35
§ 1.5 自激振动系统	40
§ 1.6 定常解	44
§ 1.7 等效线性化	47
§ 1.8 谐波平衡法	53
习题	57
第二章 相平面法	62
§ 2.1 相平面 相迹	62
§ 2.2 奇点分析	64
§ 2.3 保守系统相迹的性质	70
§ 2.4 非保守系统相迹的性质	81
§ 2.5 自激振动系统相迹的性质	90
习题	95
第三章 一个自由度非线性系统的受迫振动	99
§ 3.1 非共振情况的平均法	99
§ 3.2 共振情况的平均法	104
§ 3.3 具有分段线性的非线性系统的受迫振动 分段弹簧间隙对 系统的影响	109
§ 3.4 线性非理想系统	116
习题	125

第四章 多自由度非线性系统的受迫振动	130
§ 4.1 多自由度系统的受迫振动	130
§ 4.2 两自由度分段线性系统	144
§ 4.3 多自由度非线性系统实例	159
§ 4.4 具有任意个准循环坐标非线性系统的概周期解	181
习题	191
第五章 带有慢变参数的非线性系统	196
§ 5.1 一个自由度系统非定常解的渐近法	196
§ 5.2 求非定常解的平均法	204
§ 5.3 具有任意个准循环坐标的多自由度系统的非定常解	207
§ 5.4 近似方程的数值积分法	215
习题	217
第六章 参数激励系统	218
§ 6.1 工程实例	218
§ 6.2 马休方程稳定理论	222
§ 6.3 马休方程的稳定边界	225
§ 6.4 平均法求解马休系统	229
§ 6.5 非线性马休方程	231
习题	234
第七章 多尺度法	237
§ 7.1 保守系统	238
§ 7.2 非保守系统	239
§ 7.3 受迫振动	241
§ 7.4 非定常振动	245
§ 7.5 参激系统	247
§ 7.6 多自由度受迫振动系统	250
习题	254
第八章 非线性振动系统的摄动法——小参数法	259
§ 8.1 摄动法的思想 小参数	259
§ 8.2 非自治系统的非共振情况	260
§ 8.3 非自治系统的共振情况	263
§ 8.4 自治系统	267
习题	270
第九章 分岔理论基础	272
§ 9.1 动力系统的概念	273
§ 9.2 分岔的基本概念和平面向量场的分类	276
§ 9.3 隐函数定理	281
§ 9.4 稳定流形定理	284

§ 9.5 中心流形定理	288
§ 9.6 向量场正规形	297
§ 9.7 霍普夫分岔定理	304
习题	310
第十章 非线性振动系统的分岔	312
§ 10.1 李雅普诺夫—施密特方法	312
§ 10.2 奇异性理论方法简介	316
§ 10.3 非线性参数激励振动系统的 $1/2$ 亚谐分岔解法—CL 方法	328
§ 10.4 混沌简介	339
习题	346
第十一章 计算机的应用和模型实验	347
§ 11.1 数值解法	347
§ 11.2 计算机代数语言解法	350
§ 11.3 模拟计算机的应用	359
§ 11.4 非线性振动的实验研究问题	360
参考文献	374
索引	380
外国人名译名对照表	384
英文内容提要	385
英文目录	388
作者简介	391

绪 论

§ 0.1 非线性振动研究及其任务

振动是物理学、技术科学中广泛存在的物理现象。如建筑物和机器的振动,无线电技术和光学中的电磁振动,控制系统和跟踪系统中的自激振动,声波振动,同步加速器中的束流振动和其结构共振,火箭发动机燃烧时所引起的振动,化学反应中的复杂振动等等。这样一些表面上看起来极不相同的现象,都可以通过振动方程统一到振动理论中来。振动是机械运动的一种形式,在技术领域中,经常出现的振动是周期振动。

因振动是机械运动的一种形式,所以其规律 $x(t)$ 决定于作用在系统上各种力的性质,即为下列方程所决定

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (a)$$

其中 m 为振动质量, x 为 m 的振动位移, $c\dot{x}$ 为阻尼力, kx 为弹性恢复力, $f(t)$ 为周期干扰力。因弹性力和阻尼力都是线性函数,所以方程(a)是二阶线性非齐次微分方程,这样的系统称为线性振动系统。如果弹性力和阻尼力二者之一或二者都是非线性函数 $f_2(x)$ 和 $f_1(\dot{x})$, 则振动方程成为非线性微分方程

$$m\ddot{x} + f_1(\dot{x}) + f_2(x) = f(t) \quad (b)$$

此时系统称为非线性振动系统。

非线性振动理论的主要任务是,研究各种不同振动系统的周期振动规律(振幅、频率、相位的变化规律,这三个参数称为振动三要素)或求周期解,以及研究周期解的稳定条件,从工程技术角度来说,其任务是研究为减小系统的振动或有效利用振动,使系统具有合理的结构形式和参数。

一般来说, n 个自由度非线性振动系统就有 n 个相互耦合的二阶微分方程或在状态空间中有 $2n$ 个一阶微分方程。

在非线性振动中,振幅、频率、相位等术语的定义和线性振动中完全相同。

自然界和工程技术中的动力学现象本质上都是非线性的,非线性因素可以来自系统的几何、物理、结构、耗散、运动、耦合等诸方面。为便于建立非线性振动力学模型,特列举机械系统中常见的几种非线性力。

§ 0.2 机械系统中常见的几种非线性力

在对一个振动系统进行研究时,其阻尼力和弹性力有时可线性化,有时则必须考虑其非线性性质(何时需考虑力的非线性特性,决定于所研究问题的性质和所要求的精度),另外在工程实际中也存在着很多不能线性化的系统。

在机械系统中非线性力有非线性势力,非线性阻尼力和所谓混合型非线性力,下面介绍一些产生非线性力的实例,一方面藉以说明非线性振动问题的重要性,同时也供建立振动方程时参考。

1. 非线性势力

只和系统的机械位置(只和广义坐标)有关的力称为势力。它有如下几种形式:

(1) 弹性力 由于物体的弹性变形或一定数量气体的体积发生变化而引起的力;

(2) 重力;

(3) 物体的某一部分在液体中时,该物体所受到的排挤力;

(4) 磁场中的磁力。

具有非线性势力的机械振动系统及势力特性曲线示于表 0.1。

若 F_0 为弹性力,则 $\frac{dF_0}{dq}$ 称为刚度系数。因在非线性系统中该系数和广义坐标 q 有关,所以 $\frac{dF_0}{dq}$ 称为拟刚度系数。当 $q > 0$ 时,如随着 q 的增加,刚度系数增大,则称此弹性力的特性为硬特性,反之,如 q 增加时,刚度系数减小,则称其特性为软特性。弹性力也可能在 q 变化的某个区间有硬特性,而在另一个区间有软特性。

以 x, y, ϕ 表示广义坐标(系统对平衡位置的偏离),用 F 或 M 表示广义力,并规定广义力的符号和广义坐标的符号相反。在以上的例子中,只有当系统偏离平衡位置的位移较大时,势力才可能出现非线性变化,而在小位移的情况下可认为系统是线性的。

有时尽管位移很小,也必须考虑势力的非线性特性,这样的例子如表 0.2 所示。

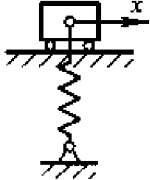
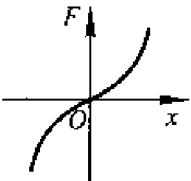
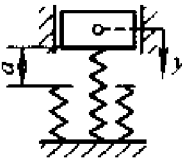
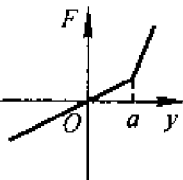
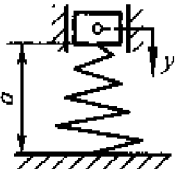
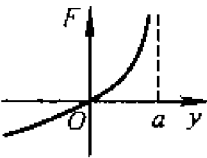
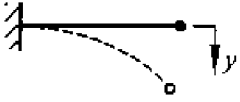
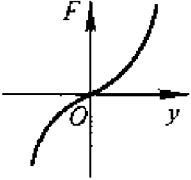
2. 非线性阻尼力

当系统振动时,如其中只与机械系统的速度有关的力的功率不恒等于零,则该力称为阻尼力(或简称阻尼)。而陀螺力(与速度有关),因其功

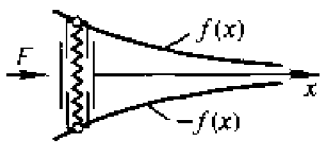
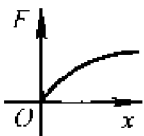
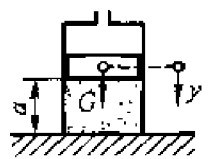
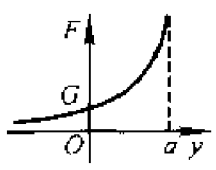

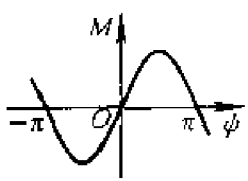

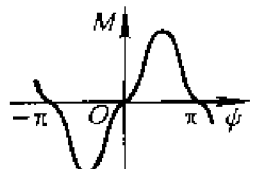

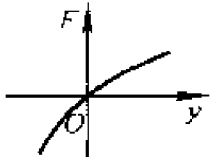
率恒等于零,不是阻尼力。一般情况下,当力和速度的方向相反的时候,则称该力为阻尼。

阻尼包括:有相对运动的零件之间产生的摩擦力,用铆钉、螺栓和压力连接的结构,当受动载荷作用时,在接触面之间产生的结构摩擦力,系统构件材料的内摩擦力,系统在气体或液体中振动而产生的介质阻力(迎面阻尼;机翼旋转阻力矩)等等。


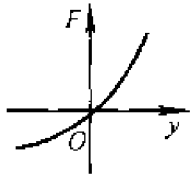

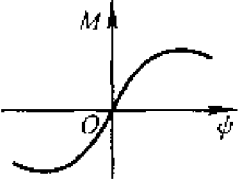
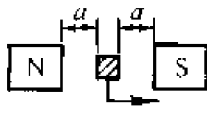
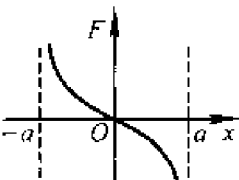

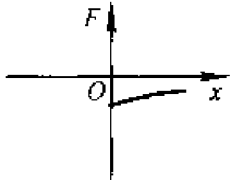
表 0.1

编号	系统类别	力的特性曲线
1	以弹簧压于平面上的重物(I) 	
2	置于分段弹簧上的重物(I) 	
3	置于堆形弹簧上的重物(I) 	
4	柔性弹性梁(I) 	

续表

编号	系 统 类 别	力的特性曲线
5	在收缩管道中的弹性活塞(I) 	 $F = 4c \int_0^x (f')^2 dx$ 其中 c 为线性弹簧的刚度系数
6	置于封闭容器中的 气体上的重物(I) 	
7	具有固定悬挂点的单摆(II) 	 $M = mgl \sin \psi$
8	悬挂轴旋转的单摆(II) 	 $M = mgl \sin \psi - m\Omega^2 l^2 \sin \psi \cos \psi$
9	连通器中的液体(II) 	


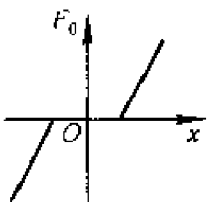

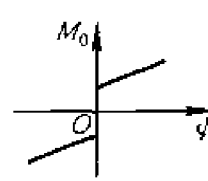
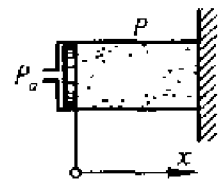
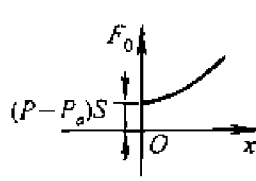
续表

编号	系统类别	力的特性曲线
10	曲面船(浮桥船,浮船) 垂直偏离平衡位置(Ⅲ) 	
11	同上,绕平衡位置转动(Ⅲ) 	
12	磁场中的电枢(Ⅳ) 	
13	轮箍 A 在通过固定导线 B 所产生的磁场中(Ⅳ) 	

注:括号中罗马数字表示势力的形式

阻尼常常是速度的非线性函数,但在计算时,一般都将它线性化,即认为它是线性粘滞阻尼。阻尼的线性化,不因它是弱非线性(实际上它是强非线性),而是因为阻尼对振动规律的影响很小。例如,在计算系统的固有频率和非共振情况的振幅时,阻尼即可线性化,甚至可以完全忽略。

表 0.2

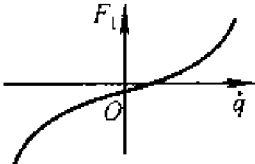
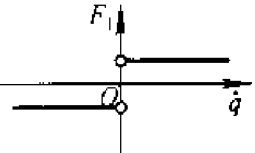
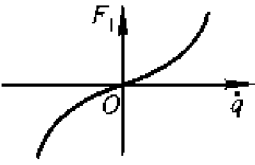
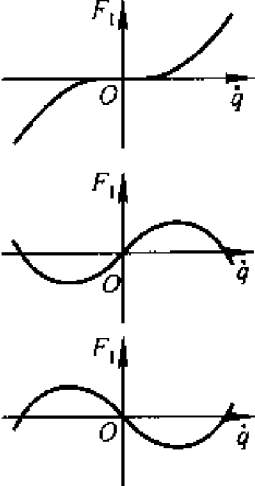
编号	系 统 类 别	力的特性曲线
1	具有间隙的系统(I) 	
2	具有纵向槽的 重型半圆柱体(II) 	
3	由内部压力压向 底部的活塞(I) 	 P, P_a — 表示内部和大气压力; S — 气缸横断面积

当然不是在任何情况下,阻尼都可线性化或可完全忽略。如在分析自由衰减振动时、在计算受迫振动的共振振幅时、计算自激振动的定常解时、计算参数共振的振幅以及研究自激振动系统的过渡过程时,都需考虑阻尼的非线性特性。

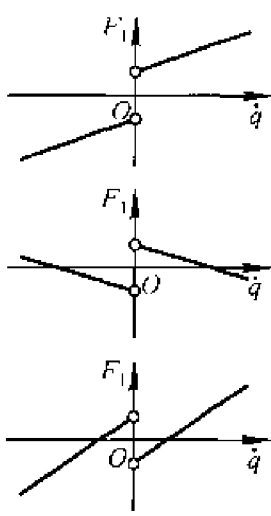
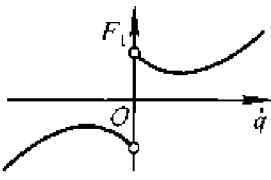
若 F_1 为阻尼力,则满足不等式 $F_1(\dot{q})\dot{q} > 0$ 的阻尼 $F_1(\dot{q})$ 作负功,它消耗机械能,这样的阻尼称为耗散阻尼或称正阻尼。若 $F_1(\dot{q})\dot{q} < 0$,那么阻尼作正功,使机械能积蓄在系统之内,这样的阻尼称为负阻尼。如阻尼在振动位移的一个区间作负功,而在另一个区间作正功,则系统具有自激振动的性质。

某些非线性阻尼及其特性曲线示于表 0.3 中。

表 0.3

编号	阻尼型式和其函数	阻尼特性曲线
1	<p>幂函数阻尼</p> $F_1 = b_n \dot{q} ^{n-1} \dot{q}$	
2	<p>库仑摩擦(在 1 中当 $n=0$ 时)</p> $F_1 = b_c \frac{\dot{q}}{ \dot{q} }$ <p>($\dot{q} \neq 0$)</p>	
3	<p>平方阻尼(在 1 中当 $n=2$ 时)</p> $F_1 = b_2 \dot{q} \dot{q}$	
4	<p>线性和立方阻尼</p> <p>(a) $F_1 = b_1 \dot{q} + b_3 \dot{q}^3$</p> <p>(b) $F_1 = b_1 \dot{q} - b_3 \dot{q}^3$</p> <p>(c) $F_1 = -b_1 \dot{q} + b_3 \dot{q}^3$</p>	

续表

编号	阻尼型式和其函数	阻尼特性曲线
5	<p style="text-align: center;">线性和库仑摩擦</p> <p>(a) $F_1 = b_1 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } + b_1 \dot{q}$</p> <p>(b) $F_1 = b_1 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } - b_1 \dot{q}$</p> <p>(c) $F_1 = -b_1 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } + b_2 \dot{q}$ ($\dot{q} \neq 0$)</p>	
6	<p style="text-align: center;">干摩擦(2 和 1 的各一部分)</p> <p>$F_1 = b_1 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } + b_2 \dot{q} + b_3 \dot{q}^3$ ($\dot{q} \neq 0$)</p>	

注: b, b_1, \dots, b_3 为正常数

在研究简谐振动时,即当 $q = A \sin(\omega t + \alpha)$ 时,弹性力和阻尼力的合力为 $F_0(q) + F_1(\dot{q}) = F_0 + F_1(\pm \omega \sqrt{A^2 - q^2})$,此合力只为广义坐标的函数。因为振动规律已给定,所以才能将两个变量 q 和 \dot{q} 的函数变成一个变量 q 的函数。但在变换之后合力为 q 的多值函数,而原势力函数则是 q 的单值函数(见表 0.1 和表 0.2)。

对于具有线性恢复力的耗散系统(见图 0.1 的 a,其合力特性示于图 b);滞后回线的面积等于阻尼在一个周期中所作的功。在具有非线性恢复力的情况下,滞后回线的骨干曲线为曲线而不是直线(图 c)。当振幅一定,而只改变振动频率时,则回线的骨干曲线不变,然而回线分支之间的距离和回线所包围的面积是变化的,其变化规律和阻尼特性有关,但库仑摩擦和材料的内摩擦情况除外,此时改变频率,滞后回线不变(图 d)。

3. 混合型非线性力

如果一种力不能表示成只和广义坐标有关,或只和广义速度有关,则

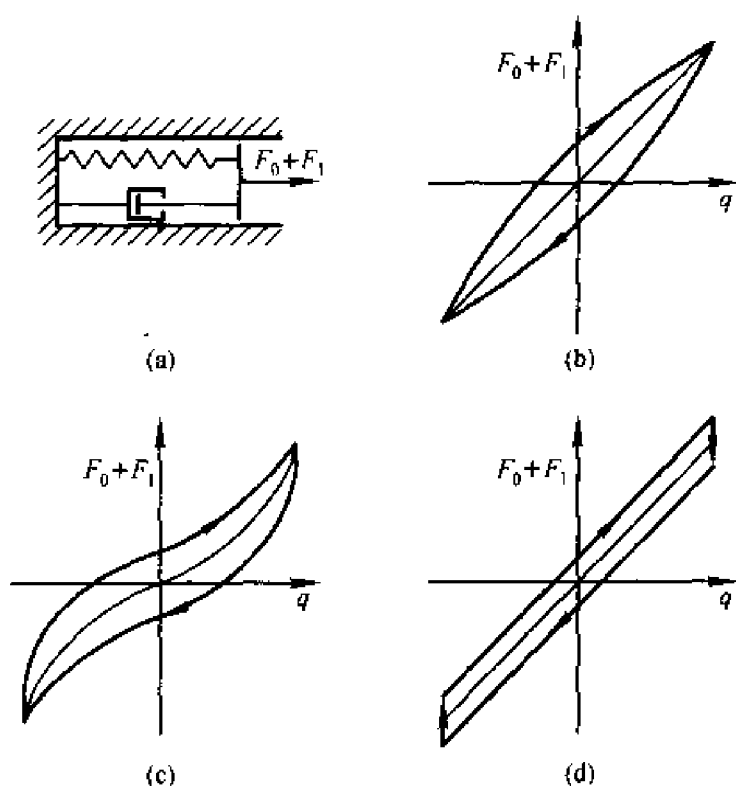
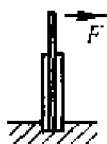
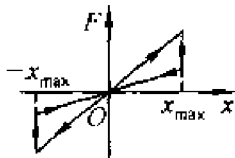
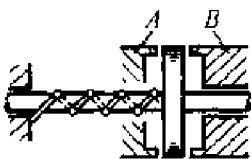
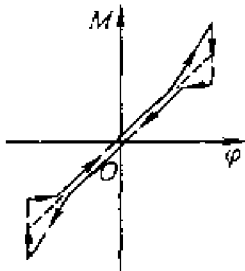
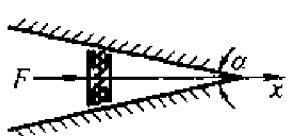
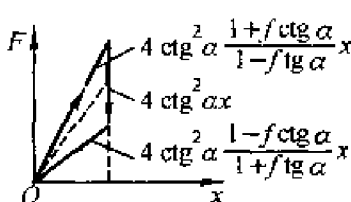
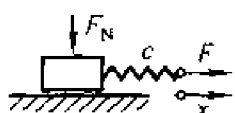
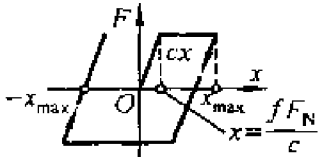
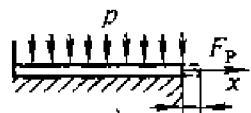
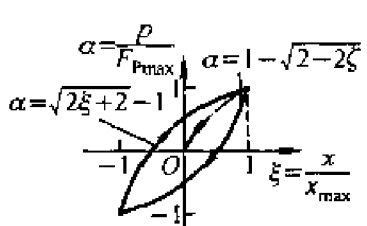


图 0.1

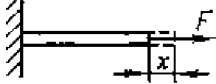
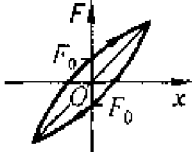
这种力称为混合型的力,此时它和广义坐标和广义速度两个变量有关。对一个自由度系统来说,以 q, \dot{q} 和 $F(q, \dot{q})$ 空间中的表面来表示混合型力的特性,取 F 的符号和广义力的符号相反。

有时混合型的力可表示成两个函数的积,其中一个函数只与广义坐标有关,另一个函数则只与广义速度有关。对一个自由度系统可用函数 $F = F_0(q)F_1(\dot{q})$ 表示这种力的特性。这样的力可称之为具有和系统位置有关的变系数的阻尼力或称势摩擦力。在表 0.4 中给出了产生势库仑摩擦力的例子及对应的力的特性曲线。在表 0.4 的系统 1~3 中,库仑力随着压力而变化,该压力只与坐标 q 有关,在系统 4 中压力不变,然而只有当 F 有足够大的值时库仑力才开始出现,也即只有当位移达到某确定的值后,摩擦力才开始出现,这个系统从形式上可代表弹塑性结构的性质,在系统 5 中,滑动部分的长度、总的摩擦力和外力 F 成正比,即和梁端面的位移有关,在系统 6 中,设材料的摩擦和材料弹性变形的频率无关,只随着位移而变化(和图 0.1d 所示相同),这样的假设对钢材等很多结构材料来说都是正确的。

表 0.4

编号	系 统 类 型	力的特性曲线
1	<p>在其间具有库仑摩擦的板弹簧</p> 	
2	<p>固定在螺旋弹簧上的圆盘在旋转的时候,由于弹簧的拧紧,它与粗糙表面 A 或 B 相压紧</p> 	
3	<p>弹性活塞进入具有摩擦的收缩管道</p> 	 <p>f——摩擦系数</p>
4	<p>弹塑性系统</p> 	
5	<p>以常压 p 压在粗糙表面上的弹性带钢</p>  <p>$x_{\max} = \frac{F_{p\max}^2}{2fpEF}$</p> <p>其中 EF——带钢横断面拉伸刚度</p>	

续表

编号	系统类型	力的特性曲线
6	<p>具有材料内阻的杆</p> 	 <p>特性曲线的简单公式</p> $F=cx+F_0\sqrt{1-\frac{x^2}{x_{max}^2}}\cdot\frac{\dot{x}}{ \dot{x} }$

混合型非线性力的其他例子见表 0.5。

其他非线性力,如非线性干扰力等,我们将在以下有关的例子中叙述。

表 0.5

编号	力学模型	力的表达式
1	范德波尔模型	$F=-\lambda\dot{q}(1-q^2)$
2	复杂的范德波尔模型	$F=-\lambda\dot{q}(1-q^2+a q^4)$
3	和位置有关的粘滞摩擦模型(摩擦系数的符号与差值 $q-a$ 的符号一致)	$F=b\dot{q}\text{sign}(q-a)$
4	和位置有关的粘滞摩擦模型(力的符号与和值 $\alpha q+\beta\dot{q}$ 的符号一致)。在库仑摩擦的情况下有 $\alpha=0$ 和 $\beta>0$	$F=b_0\text{sign}(\alpha q+\beta\dot{q})$

注: $a, b, b_0, \alpha, \beta, \lambda$ 为正常数

§ 0.3 非线性振动的特点

从伽利略、牛顿的古典力学时代起就有人开始研究振动理论,拉格朗日曾系统地研究过微小振动的理论。在振动理论发展的过程中,开始时只局限于对线性振动系统的研究,由于线性微分方程的理论早已发展得比较完善,而且简单明了,所以线性振动理论也很快就达到了完善的地步。将振动系统线性化除了便于数学求解外,更主要的是,它对于解决许多工程问题,能给出满意的结果。例如,关于共振现象的物理根据、固有

频率或固有振型与系统参数的关系等问题,线性振动理论都能圆满地解决。正是由于这些原因,曾经有不少研究工作者总是把所研究的振动系统尽可能地线性化,因而经常是无根据地抛弃非线性项,这样所得到的理论结果,不仅引起数量上的误差,而且有时还导致根本性质上的错误。实践证明,不但不能用线性理论代替对一切振动系统的分析,就是对拟线性系统(所谓拟线性系统是当小参数 ε 或 μ 等于零时,派生成具有常系数的线性微分方程组的系统)来说,无论是理论分析方法,或是振动过程的变化规律,与线性系统相比都有本质的区别。下面说明非线性振动系统的几个主要特点。

(1) 线性系统中的叠加原理对非线性系统是不适用的,如作用在非线性系统上有可以展成傅氏级数的周期干扰力,其受迫振动的解不等于每个谐波单独作用时解的叠加。

(2) 在非线性系统中,对应于平衡状态和周期振动的定常解一般有几个,必须研究解的稳定性问题,才能决定哪一个解在生产实际中能实现。

(3) 在线性系统中,由于有阻尼存在,自由振动总是被衰减掉,只有在干扰力作用下,才有定常周期解。而在非线性系统中,如自激振动系统,在有阻尼而无干扰力时,也有定常的周期振动。

(4) 在线性系统中,受迫振动的频率和干扰的频率相同,而对于非线性系统,在单频干扰力作用下,其定常受迫振动的解中,除存在和干扰力同频成分外,还有成倍数和分数的频率成分存在。

(5) 在线性系统中,固有频率和起始条件、振幅无关,而在非线性系统中,固有频率则和振幅有关,同时非线性系统中振动三要素也和起始条件有关。

(6) 非理想系统、自同步系统等不能线性化,必须研究非线性微分方程才能对其振动规律进行分析。

(7) 在非线性系统中,当系统参数发生微小改变(参数摄动)时,解的周期将发生倍化分岔,分岔的继续可能导致混沌等复杂的动力学行为。

非线性振动系统的这些特点,需要从理论上进行分析研究。

§ 0.4 研究非线性振动问题的方法

对非线性振动问题的研究,特别是对工程技术中出现的非线性振动问题的研究,一般从两方面进行。一是实验研究,根据动力学原理相似的条件,建立机械的(或电子的)模型,研究各种参数对振动特性的影响,以

及研究解的稳定条件,有时也需进行现场实验研究。实验不但可以验证理论,而且对一些复杂的振动系统能直接得到规律性的结论,因此,也是进一步发展理论的基础。另一方面是理论研究,这是非线性振动研究中的主要方面。由于科学技术发展的迫切需要,从上世纪二十年代起,非线性振动理论获得了迅速的发展。基于非线性微分方程的特点,在非线性振动理论中没有适应各种不同类型方程的通用的解析方法,目前仅有极少数的非线性振动方程可求得精确解。为了尽可能深入了解系统的非线性振动性质,已研究出不少有效的近似方法,如定性方法有相平面法;定量方法有数值解法和解析法。解析法主要包括:PL 摄动法(小参数法)、渐近法(三级数法,有时称 KBM 法)、平均法、多尺度法等。下面简单叙述一下各种方法的发展概况。

1. 数值解法

有迭代法、变分法、有限元法和配置法等。

2. PL 摄动法

摄动法也称小参数法,该方法是庞加莱(Poincaré H.)于 1892 年在研究行星运动^[1]时首先提出来的。当 $\epsilon=0$ 时,系统有频率为 ω 的周期振动,这种带有 ϵ 的小项是对系统周期运动的一种摄动,将解按小参数 ϵ 的幂级数展开,可求出满足一定误差要求的近似解,这种方法称为摄动法。为了消除近似解中的永年项(即长期项),林滋泰德(Lindstedt)等人除将解展成小参数 ϵ 的幂级数外,把频率也按小参数 ϵ 展开,即引进一个新的自变量 $\tau=\omega t$, ω 是 ϵ 的幂级数(此法相当于对出现永年项的自变量进行坐标变换)。李雅普诺夫(Ляпунов А. М.)引入了“本征时间”变换 $\tau=\frac{2\pi}{T+\alpha}t$,使解对新本征时间来说周期为 2π ,克雷洛夫(Крылов А. Н.)采用了将解和频率的平方按小参数展开的方法,使计算得到较大的简化。马尔金(Малкин М. Г.)^[5]系统地发展了小参数法,使其适应分析各种非线性振动系统的需要。

3. 平均法和渐近法

范德波尔(van der Pol)于 1926 年解决自激振动(振荡器)问题时首先引入缓变系数法,即认为振幅和相位是时间 t 的缓变函数,该法只能求第一次近似解,它是建立在直观的基础上的。克雷洛夫(Крылов Н. М.)、包戈留包夫(Боголюбов Н. Н.)^[2]从 20 世纪 30 年代起对此进行了系统的研究,提出了平均法和渐近法。首先将振动方程化成标准形式,然后根据克雷洛夫—包戈留包夫变换,可得到解的基波振幅和相位的导数都是 $O(\epsilon)$ 量级的不显含 t 的函数,因此可用一个周期内的平均值代替该函数的近

似值,故称之为平均法。他们于1947年曾提出了一种求任意阶近似的渐近法(三级数法),包戈留包夫,米特罗波尔斯基(Митропольский Ю. А.)^[42]在1958年对这个方法作了严格的证明。同时米特罗波尔斯基^[18]于1955年将该法推广,使之能求具有缓变参数的非线性系统的非定常解。这个方法在文献中称为克雷洛夫—包戈留包夫—米特罗波尔斯基法,简称KBM法。KBM法可以说是参量变值法中最基本的渐近算法,其他平均算法都是由它演化来的。沙马林柯(Самойленко А. М.)^[51]进一步发展了KBM法,从理论上全面地解决了多自由度系统多频振动问题。

4. 多尺度法

斯特罗克(Sturrock)于1957年首先提出多时间尺度的概念,60年代奈弗(Nayfeh A. H.)^[32]将各阶近似解设成为 $t, \epsilon t, \epsilon^2 t, \dots$ 等多个自变量(或多个时间尺度)的函数,建立了多尺度法。与摄动法相比,多尺度法的明显优点是不仅能计算周期解,而且能计算耗散系统的衰减振动;不仅能计算稳态响应,而且能计算非稳态过程;也可以分析稳态响应的稳定性,描绘非自治系统的全局运动行为。多尺度法可以灵活地引入多个时间尺度或多个变量,因而求解过程可以不受固定程式的约束。

其他如谐波平衡法,直接变分法,利用电子计算机的数值计算方法等都是经常应用的方法。特别是对具有强非线性项的系统进行分析时,这些都是很有效的方法。

点映射法,频闪法,模拟计算机方法等在研究系统的全局性态方面具有很大的优越性。

以上这些方法都有自己的特点,同时也有自己的局限性,我们将在本书的有关章节中予以介绍。

非线性问题,包括非线性振动问题,由于洛伦兹^[15]奇怪吸引子的发现,极大地激发了数学家、物理学家、力学家以及各个应用学科领域的科学家的研究热潮。1963年美国气象学家洛伦兹(Lorenz E. N.)首先对一个液体热对流系统简化的确定性三维模型进行了数值分析,在状态空间中发现了奇怪吸引子——混沌。次年,法国天文学家埃依(Henon M.)^[30]计算证实2个自由度哈密顿系统随能量的增加,其轨道在相空间的分布越来越随机。人们发现越来越多的动力学系统中只要有非线性因素就可能存在混沌。20世纪60年代初KAM定理的证明^[41],1967年数学家斯梅尔(Smale S.)^[27]证明马蹄映射具有典型的复杂性。梅利尼科夫(Мельников В. К.)^[16]方法和什尔尼科夫(Шилников Л. П.)^[25]方法,以及20世纪70年代末,费根鲍姆(Feigenbaum M.)^[31]的倍周期分岔的标度行为,并用重正化群方法证明其普适性,计算了其普适的标度常

数等等重要成果。科学家大量的卓有成效的工作形成了一门新的科学——非线性科学或混沌动力学。从应用领域来看,二次世界大战之后,由于世界统一市场竞争的加剧,如旋转机械的大型化、高速化,各种车辆行驶速度的大幅度提高,各种复杂工程结构的大型化、柔性化,其很多动力学结构的系统参数不得不设计在稳定区域的边界附近,以及生命动力学现象诊断的困难,电力大系统动态行为的稳定性机理不清,控制不力,致使其动力学突发失稳故障不断发生等等,大量动力学问题的存在,迫切要求非线性动力学对其机理进行理论分析,从而能进行有效诊治和控制。非线性振动在非线性科学的理论推动和各应用领域迫切需求的促进下,目前已进入到分岔和混沌的发展新阶段。

§ 0.5 实际工程振动系统的建模简化

对任何实际振动系统进行理论分析,我们总是根据需要解决的振动问题,对影响振动性质的种种因素作某些简化,以建立振动系统的力学模型。为此,需要考虑决定系统振动性质的主要因素,摒弃对需解决的问题来说是次要的因素。

例如,在不长的时间间隔里研究单摆的振动时,可不考虑阻尼对它的影响,但根据这样的简化条件来研究在很长的时间间隔里单摆的振动时,将得不到正确的答案,因为单摆的振动是衰减的。同样,在非共振区研究单摆的受迫振动,可不考虑阻尼,而在共振区则必须考虑阻尼。摆角很小时,可将单摆的振动方程线性化,摆角大时,必须研究其非线性方程。又如,计算弹性悬挂的电磁振动给料机的固有频率时,系统可简化成具有弹簧联系的两个单摆,而当计算其受迫振动的振幅时,则可简化成具有弹簧联系的两个滑动质量。

因此,对同一个振动系统来说,同样一个力学模型,对于要解决的某些问题来说认为是合理的,而对解决另一些问题来说,就不全面了。在简化时所忽略的一些因素,对回答某些问题来说是次要的,而对另一些问题来说则可能是主要的。一般地说,在研究系统的固有频率问题时,结构因素尽可能多地考虑,而阻尼可忽略;但在研究系统周期解的稳定性问题时,必须考虑各种阻尼的影响;在研究系统的受迫振动时,为了计算共振振幅,必须考虑阻尼,而结构因素可尽量简化。总之,合理地选取力学模型,对简化计算和正确地回答各种振动问题是十分重要的。

所选用的力学模型是否合理,尚需通过生产实践或科学实验来验证,有时需要认识和实践的多次反复,才能找到合理的解决问题的方法。

§ 0.6 非线性振动应用问题的研究步骤

对工程中的非线性振动问题一般可按下列步骤进行研究:建立力学模型(根据工程结构的工作原理,工艺参数,所需解决的主要问题,抓主要矛盾)、写出振动方程、进行理论分析、实验验证。理论分析的结果用来改进设计、指导维修或排除故障。

根据工程中提出的非线性振动问题,首先要进行现场调研,以便了解振动故障的现象、造成的危害,工程结构的动力学工作原理,现场安装调试的工艺参数等,初步分析对需解决的问题来说,应建一个什么样的力学模型,及什么是主要结构参数,然后根据动力学原理建立问题的力学模型。第二步是对力学模型进行理论分析,找到系统的动力学行为(系统解的结构)与结构参数之间的联系。这一步往往是一个应用、发展理论、或建立新理论的过程。如果说建立的力学模型过于复杂和庞大,目前已有的理论无法对之进行分析,需探讨新的理论方法,或进行数值计算和动力学相似的模型实验,以便找到解的结构和系统结构参数之间的某些联系,并发现某些新的动力学现象。数值计算和模型实验,是解决工程应用问题的第三步,已经得到的理论分析结果,需进行实验验证。第四步,正确的理论分析结果应结合所研究的对象,给出合理设计结构参数和排除故障的指南。

第一章 非线性系统的自由振动

§ 1.1 渐近法——三级数法

已知一个自由度系统自由振动的方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (1.1.1)$$

其中 ϵ 为正的小参数; x 为振动位移; $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ 为 x 和 $\frac{dx}{dt}$ 的非线性函数。

现用三级数法求(1.1.1)的解,即将方程(1.1.1)的解及其基波的振幅和相位直接设成三个小参数 ϵ 的幂级数的形式,用分离变量法求该级数的系数。

在方程(1.1.1)中,当无非线性干扰时,即当 $\epsilon=0$ 时,其解可表示为余弦函数

$$x = a \cos \psi$$

其中 a 是常数;相位角 ψ 等速变化; $\frac{da}{dt}=0, \frac{d\psi}{dt}=\omega$ ($\psi=\omega t+\theta$, ω 为线性化系统的固有频率),或 a, θ 是决定于起始条件的常数。

如有非线性干扰(即 $\epsilon \neq 0$),根据大量的试验和观察,知方程(1.1.1)有周期解,且其解中将出现:① 高次谐波;② 瞬时频率 $\frac{d\psi}{dt}$ 与振幅的大小有关;③ 由于系统可能积聚或耗散能量,有可能使振幅增长或减小。很明显,当无非线性干扰时,以上这些现象都将消失。

考虑到非线性项的影响,方程(1.1.1)的通解取

$$x = a \cos \psi + \epsilon u_1(a, \psi) + \epsilon^2 u_2(a, \psi) + \cdots \quad (1.1.2)$$

其中 $u_1(a, \psi), u_2(a, \psi), \cdots$ 为 ψ 的以 2π 为周期的周期函数; a, ψ 是时间 t 的函数,由下式决定

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \epsilon A_1(a) + \epsilon^2 A_2(a) + \cdots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \epsilon B_1(a) + \epsilon^2 B_2(a) + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

把解设成以上三个级数的方法称为三级数法或渐近法。现在的问题

是,函数 $u_1, u_2, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ 具有何种具体形式时, (1.1.2) 才是 (1.1.1) 的解。

如果这些函数已确定,则方程 (1.1.1) 的求解问题,就变成对已分离变量 (1.1.3) 的简单积分问题了。这些函数的确定,一般来说没有原则上的困难,但随着精度的提高,计算复杂程度增加很快,因此,实际中只确定这些函数的前 2~3 项。

如解的函数为

$$x = a \cos \psi + \epsilon u_1(a, \psi) + \epsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots + \epsilon^m u_m(a, \psi) \quad (1.1.4)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \epsilon A_1(a) + \epsilon^2 A_2(a) + \dots + \epsilon^m A_m(a) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \epsilon B_1(a) + \epsilon^2 B_2(a) + \dots + \epsilon^m B_m(a) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5)$$

对工程应用来说,一般只求一次,二次近似解。

渐近法的适用性,不取决于当 $m \rightarrow \infty$ 时级数 (1.1.4) 和 (1.1.5) 的收敛性,而取决于当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时的渐近性。即求时间区间足够大, ϵ 很小时, (1.1.1) 足够精确的解 (1.1.4)。因此,我们不去研究当 $m \rightarrow \infty$ 时级数的收敛问题,而设 (1.1.4) 和 (1.1.5) 就是求渐近解所必需的级数。

此时函数

$$\left. \begin{aligned} u_1(a, \psi), u_2(a, \psi), \dots, u_m(a, \psi) \\ A_1(a), A_2(a), \dots, A_m(a) \\ B_1(a), B_2(a), \dots, B_m(a) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.6)$$

以 ϵ^{m+1} 的精度满足方程 (1.1.1), 其中 a, ψ 由第 m 次近似方程 (1.1.5) 确定。

近似解 (1.1.6) 以 ϵ^{m+1} 的精度满足方程 (1.1.1), 而近似解和精确解的偏差为 $\epsilon^{m+1}t$, 因此, 不管 t 多么大, 只要 ϵ 足够小, 则近似解与精确解之间的偏差就可以任意小, 随着 m 的增大, 近似解更加接近于精确解, 故称此法为渐近法。若用普通的逐次近似法, 取至 $O(\epsilon^n)$ 项的近似时, 误差为 $O((\epsilon t)^{n+1})$, 这样虽然 ϵt 属于小量, 但 t 稍大时, 误差就立刻变大了。

为了使解中不出现永年项, 在函数 $u_1(a, \psi), u_2(a, \psi), u_3(a, \psi), \dots$ 中不应含有一阶谐波, 即

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_1(a, \psi) \cos \psi d\psi = 0, \int_0^{2\pi} u_1(a, \psi) \sin \psi d\psi = 0 \\ \int_0^{2\pi} u_2(a, \psi) \cos \psi d\psi = 0, \int_0^{2\pi} u_2(a, \psi) \sin \psi d\psi = 0 \\ \int_0^{2\pi} u_3(a, \psi) \cos \psi d\psi = 0, \int_0^{2\pi} u_3(a, \psi) \sin \psi d\psi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.7)$$

由这些条件可惟一地、单值地确定 $A_n(a), B_n(a)$ 。从物理意义上看, 以上的条件对应着选择一阶谐波的振幅 a 和相位 ψ 。

由(1.1.2)得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} \left(\cos \psi + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \epsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right) + \\ &\quad \frac{d\psi}{dt} \left(-a \sin \psi + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \epsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \dots \right) \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d^2 a}{dt^2} \left(\cos \psi + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \epsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right) + \\ &\quad \frac{d^2 \psi}{dt^2} \left(-a \sin \psi + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \epsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \dots \right) + \\ &\quad \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \left(\epsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \dots \right) + \\ &\quad 2 \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} \left(-\sin \psi + \epsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial \psi} + \dots \right) + \\ &\quad \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \left(-a \cos \psi + \epsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.8)$$

由(1.1.3)得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= \left(\epsilon \frac{dA_1}{da} + \epsilon^2 \frac{dA_2}{da} + \dots \right) (\epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \dots) = \epsilon^2 A_1 \frac{dA_1}{da} + \dots \\ \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= \left(\epsilon \frac{dB_1}{da} + \epsilon^2 \frac{dB_2}{da} + \dots \right) (\epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \dots) = \epsilon^2 A_1 \frac{dB_1}{da} + \dots \\ \left(\frac{da}{dt} \right)^2 &= (\epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \dots)^2 = \epsilon^2 A_1^2 + \dots \\ \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} &= (\epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \dots) (\omega + \epsilon B_1 + \epsilon^2 B_2 + \dots) \\ &= \epsilon A_1 \omega + \epsilon^2 (A_2 \omega + A_1 B_1) + \dots \\ \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 &= (\omega + \epsilon B_1 + \epsilon^2 B_2 + \dots)^2 \\ &= \omega^2 + \epsilon 2\omega B_1 + \epsilon^2 (B_1^2 + 2\omega B_2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.1.9)$$

将(1.1.3), (1.1.9)代入(1.1.8), 并展成 ϵ 的幂级数, 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin \psi + \epsilon \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) + \\ &\quad \epsilon^2 \left(A_2 \cos \psi - aB_2 \sin \psi + A_1 \frac{\partial u_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \omega \frac{\partial u_2}{\partial \psi} \right) + \dots \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -a\omega^2 \cos \psi + \epsilon \left(-2\omega A_1 \sin \psi - 2\omega aB_1 \cos \psi + \omega^2 \frac{\partial u_1}{\partial \psi^2} \right) + \\ &\quad \epsilon^2 \left[\left(A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega aB_2 \right) \cos \psi - \right. \\ &\quad \left. \left(2\omega A_2 + 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi + \right. \\ &\quad \left. 2\omega A_1 \frac{\partial u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} \right] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.1.10)$$

将(1.1.2)和(1.1.10)代入(1.1.1)的左端,则

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x &= \epsilon (-2\omega A_1 \sin \psi - 2\omega aB_1 \cos \psi + \\ &\quad \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 u_1) + \epsilon^2 \left[\left(A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega aB_2 \right) \cos \psi - \right. \\ &\quad \left. \left(2\omega A_2 + 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi + \right. \\ &\quad \left. 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega^2 u_2 \right] + \dots \quad (1.1.11)
 \end{aligned}$$

将(1.1.2)和(1.1.10)代入(1.1.1)的右端,并对 ϵ 展开,则

$$\begin{aligned} \epsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) &= \epsilon f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ &\quad \epsilon^2 \left[u_1 f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \left(A_1 \cos \psi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \right] + \dots \quad (1.1.12)
 \end{aligned}$$

为了使所研究的表达式(1.1.2)以 ϵ^{m+1} 的精度满足(1.1.1),应使(1.1.1)和(1.1.12)中 ϵ 的同阶项的系数相等,直至 ϵ^m 在内。

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1 \right) &= f_0(a, \psi) + 2\omega A_1 \sin \psi + 2\omega aB_1 \cos \psi \\ \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + u_2 \right) &= f_1(a, \psi) + 2\omega A_2 \sin \psi + 2\omega aB_2 \cos \psi \\ &\dots\dots \\ \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial \psi^2} + u_m \right) &= f_{m-1}(a, \psi) + 2\omega A_m \sin \psi + 2\omega aB_m \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (1.1.13)$$

为简单起见采用了表达式

$$\left. \begin{aligned} f_0(a, \psi) &= f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \\ f_1(a, \psi) &= u_1 f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ &\quad \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) f'_x(a \cos \psi, \\ &\quad -a\omega \sin \psi) + \left(aB_1^2 - A_1 \frac{dA_1}{da} \right) \cos \psi + \\ &\quad \left(2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi - \\ &\quad 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} - 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.14)$$

如 $A_1(a), B_1(a), u_1(a, \psi)$ 已求出, 则 $f_1(a, \psi)$ 是与 a 有关的、 ψ 的以 2π 为周期的周期函数。

为了从(1.1.13)的第一式确定 $A_1(a), B_1(a)$ 和 $u_1(a, \psi)$, 现研究 $f_0(a, \psi)$ 和 $u_1(a, \psi)$ 的傅里叶级数

$$\left. \begin{aligned} f_0(a, \psi) &= g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi] \\ u_1(a, \psi) &= v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [v_n(a) \cos n\psi + w_n(a) \sin n\psi] \end{aligned} \right\} \quad (1.1.15)$$

将上式代入(1.1.13)的第一式, 得

$$\begin{aligned} &\omega^2 v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \omega^2 (1-n^2) [v_n(a) \cos n\psi + w_n(a) \sin n\psi] \\ &= g_0(a) + [g_1(a) + 2\omega a B_1] \cos \psi + \\ &\quad [h_1(a) + 2\omega A_1] \sin \psi + \sum_{n=2}^{\infty} [g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi] \end{aligned}$$

令上式两端同阶谐波的系数相等, 则有

$$\left. \begin{aligned} g_1(a) + 2\omega a B_1 &= 0, h_1(a) + 2\omega A_1 = 0 \\ v_0(a) &= \frac{g_0(a)}{\omega^2}, v_n(a) = \frac{g_n(a)}{\omega^2(1-n^2)} \\ w_n(a) &= \frac{h_n(a)}{\omega^2(1-n^2)} \quad (n=2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.16)$$

从上式可以单值地确定 $A_1(a), B_1(a)$ 和 $u_1(a, \psi)$ 中的系数, 而由(1.1.7)式有

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_1(a, \psi) \cos \psi d\psi &= \int_0^{2\pi} [v_0(a) + v_1 \cos \psi + \\ &\quad w_1(a) \sin \psi + \dots] \cos \psi d\psi = v_1 \pi = 0 \end{aligned}$$

所以 $v_1(a)=0$

同理 $w_1(a)=0$, 故

$$u_1(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{1-n^2} \quad (1.1.17)$$

继续解下去, 将 $u_1(a, \psi), A_1(a), B_1(a)$ 代入 (1.1.14), 则 $f_1(a, \psi)$ 的傅氏级数为

$$f_1(a, \psi) = g_0^{(1)}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [g_n^{(1)}(a) \cos n\psi + h_n^{(1)}(a) \sin n\psi]$$

利用 (1.1.13) 的第二式和 (1.1.7) 式, 则

$$\left. \begin{aligned} g_1^{(1)}(a) + 2\omega a B_2 &= 0, \\ h_1^{(1)}(a) + 2\omega A_2 &= 0 \\ u_2(a, \psi) &= \frac{g_0^{(1)}(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n^{(1)}(a) \cos n\psi + h_n^{(1)}(a) \sin n\psi}{1-n^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.18)$$

同理可得 (1.1.6) 的其他表达式。

故 $u_n(a, \psi), A_n(a), B_n(a) \quad n=1, 2, \dots$ 可求到任意的精度, 亦即满足方程 (1.1.1) 的近似解可求到任意精度。

综上所述, 第一次近似解为

$$x = a \cos \psi \quad (1.1.19)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \epsilon A_1(a) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \epsilon B_1(a) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.20)$$

第二次近似解为

$$x = a \cos \psi + \epsilon u_1(a, \psi) \quad (1.1.21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \epsilon A_1(a) + \epsilon^2 A_2(a) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \epsilon B_1(a) + \epsilon^2 B_2(a) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.22)$$

从 (1.1.16), (1.1.17) 和 (1.1.18), 可得 $A_1(a), A_2(a), B_1(a), B_2(a)$ 和 $u_1(a, \psi)$

$$\left. \begin{aligned} A_1(a) &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) \sin\psi d\psi \\ B_1(a) &= -\frac{1}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) \cos\psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.1.23)$$

由(1.1.18)得

$$u_1(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{n^2 - 1} \quad (1.1.24)$$

其中 $g_n(a)$ 和 $h_n(a)$ 决定于下式

$$\left. \begin{aligned} g_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) \cos n\psi d\psi \\ h_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) \sin n\psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.1.25)$$

$A_2(a)$ 和 $B_2(a)$ 为

$$\left. \begin{aligned} A_2(a) &= -\frac{1}{2\omega} \left(2A_1B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \left[u_1(a, \psi) f'_x(a\cos\psi, \right. \\ &\quad \left. - a\omega\sin\psi) + \left(A_1 \cos\psi - aB_1 \sin\psi + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) f'_x(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) \right] \sin\psi d\psi \\ B_2(a) &= -\frac{1}{2\omega} \left(B_1^2 - \frac{A_1}{a} \frac{dA_1}{da} \right) - \frac{1}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} \left[u_1(a, \psi) f'_x(a\cos\psi, \right. \\ &\quad \left. - a\omega\sin\psi) + \left(A_1 \cos\psi - aB_1 \sin\psi + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) f'_x(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) \right] \cos\psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.1.26)$$

在(1.1.20)中取瞬时固有频率为

$$\omega_1(a) = \omega - \frac{\epsilon}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) \cos\psi d\psi$$

取上式的平方, 并只考虑第一次近似解, 忽略 ϵ^2 项, 则有

$$\omega_1^2(a) = \omega^2 - \frac{\epsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) \cos\psi d\psi \quad (1.1.27)$$

设 $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \omega^2 x - \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, 则

$$\omega_1^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) \cos\psi d\psi \quad (1.1.28)$$

因

$$\int_0^{2\pi} \omega^2 a \cos\psi \sin\psi d\psi = 0$$

所以

$$\varepsilon A_1(a) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} F(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) \sin\psi d\psi \quad (1.1.29)$$

上式与范德波尔法所得的结果^[19]完全相同。在(1.1.28), (1.1.29)中直接用函数 $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, 这是方程(1.1.1)中除 $m \frac{d^2x}{dt^2}$ 外的线性项和非线性项的总和, 这样做有时是很方便的。

§ 1.2 保守系统

作为方程(1.1.1)的特例, 研究保守系统, 即质量 m 的无阻尼自由振动, 其方程为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + p(x) = 0 \quad (1.2.1)$$

其中弹性力和位移的关系 $F_x = p(x)$ 是非线性的, 如非线性足够弱, 则可设

$$p(x) = kx + \varepsilon\phi(x) \quad (1.2.2)$$

其中 $\phi(x)$ 为 x 二次以上的非线性函数, 此时方程(1.2.1)属于在上节已研究过的类型。同时

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = -\frac{\phi(x)}{m} \quad (1.2.3)$$

其中 ε 为正小参数。

为了求其近似解, 将 $x = a\cos\psi$ 代入 $\phi(x)$, 下面研究函数 $\phi(a\cos\psi)$ 的傅氏级数, 因 $\phi(x)$ 中无 $\frac{dx}{dt}$, 而 $\cos^2\psi, \cos^4\psi, \dots$ 都是 ψ 的偶函数, 所以该函数是 ψ 的偶函数, 在其傅氏级数中将无 $\sin\psi$ 的项。

$$\phi(a\cos\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(a) \cos n\psi \quad (1.2.4)$$

由(1.1.15)有

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(a) \cos n\psi + \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a) \sin n\psi = -\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(a) \cos n\psi$$

则

$$g_n(a) = -\frac{C_n(a)}{m}, h_n(a) = 0$$

由(1.1.16)有

$$\left. \begin{aligned} A_1(a) &= 0 \\ B_1(a) &= \frac{C_1(a)}{2ma\omega} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.5)$$

由(1.1.19), (1.1.20), 则第一次近似解为

$$x_1 = a \cos \psi$$

其中 a, ψ 由下式决定

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0 \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \frac{\varepsilon C_1(a)}{2ma\omega} = \omega_1(a) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.6)$$

从(1.2.6)知, 振幅和时间 t 无关, 而由起始条件所确定。

$$a = a_0 = \text{const}$$

由于 a 是常数, 则其相角为

$$\psi = \omega_1(a)t + \theta$$

θ 为由起始条件确定的起始相位角。

故振动的第一次近似解为简谐振动, 其振幅为决定于起始条件的常数, 其频率受到方程(1.2.1)中的弹性力的非线性项的影响, 即振动频率随振幅而变化。换言之, 由于(1.2.1)中弹性力的非线性项的存在, 振动系统就失去了“等时性”。

现求第二次近似解, 由(1.1.17)得:

$$u_1(a, \psi) = \frac{1}{k} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{C_n(a) \cos n\psi}{n^2 - 1} \quad (1.2.7)$$

因非线性函数为偶函数, 将(1.2.5), (1.2.7)代入(1.1.26)后, 则有

$$\left. \begin{aligned} A_2(a) &= 0 \\ B_2(a) &= -\frac{1}{2\omega} \left[\frac{C_1(a)}{2\omega ma} \right]^2 + \\ &\quad \frac{1}{2\pi\omega ma} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{C_n(a)}{k(n^2 - 1)} \int_0^{2\pi} \phi'(a \cos \psi) \cos \psi \cos n\psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.2.8)$$

因

$$\begin{aligned} \frac{dC_0(a)}{da} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi'(a \cos \psi) \cos \psi d\psi \\ \frac{dC_n(a)}{da} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi'(a \cos \psi) \cos \psi \cos n\psi d\psi \end{aligned}$$

所以 B_2 为

$$\begin{aligned} B_2(a) &= -\frac{1}{2\omega} \left[\frac{C_1(a)}{2\omega ma} \right]^2 + \\ &\quad \frac{1}{2k\omega ma} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n(a)}{n^2 - 1} \frac{dC_n(a)}{da} - 2C_0(a) \frac{dC_n(a)}{da} \right] \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

第二次近似解为

$$x_{II} = a \cos \psi + \frac{\varepsilon}{k} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{C_n(a) \cos n\psi}{n^2 - 1} \quad (1.2.10)$$

同时

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0 \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_{II}(a) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.11)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_{II}(a) &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) \\ &= \omega + \frac{\varepsilon C_1(a)}{2ma\omega} - \frac{\varepsilon^2}{2\omega} \left(\frac{C_1(a)}{2\omega ma} \right)^2 + \\ &\quad \frac{\varepsilon^2}{2\omega mka} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n(a) \frac{dC_n(a)}{da}}{n^2 - 1} - 2C_0(a) \frac{dC_0(a)}{da} \right] \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

从式(1.2.11)和(1.2.12)知,第二次近似解,其振幅仍和时间 t 无关,并保持任意的起始值,频率为和振幅有关的常数。

由(1.2.1)所确定的保守系统,所有的 $A_m(a)$ 都等于零, $\frac{da}{dt} = 0$ 表示以任意常值振幅(其大小决定于起始条件)振动的定常条件,在保守系统中,非线性弹性力对系统自由振动的振幅的大小不产生影响,而只影响频率的大小,从而使振动系统失去了等时性。由公式(1.2.10)确定的解,与精确解的误差与 ε^2 成正比。其最大、最小值分别为

$$\left. \begin{aligned} x_{II \max} &= a - \frac{\varepsilon C_0(a)}{k} + \frac{\varepsilon}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n(a)}{n^2 - 1} \\ x_{II \min} &= -a - \frac{\varepsilon C_0(a)}{k} + \frac{\varepsilon}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n(a)}{n^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.13)$$

取(1.2.12)两端的平方,并忽略 ε 的三阶以上的项,则

$$\begin{aligned} \omega_{II}^2(a) &= \omega^2 + \frac{\varepsilon C_1(a)}{ma} + \\ &\quad \frac{\varepsilon^2}{mak} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n(a) \frac{dC_n(a)}{da}}{n^2 - 1} - 2C_0(a) \frac{dC_0(a)}{da} \right] \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

第一次近似解为

$$\omega_I^2(a) = \omega^2 + \frac{\varepsilon C_1(a)}{ma} \quad (1.2.15)$$

由第一次近似解的公式知,弹性力的非线性项和线性项是分别包括在式子中的, ω^2 表示线性项, $C_n(a)$ 表示非线性项。把整个弹性力分成线性和非线性部分的方法有很多种,现举一种。如在(1.2.15)中取频率的零次近似和一次近似 $\omega_1(a)$ 形式上相等,则

$$C_1(a) = 0 \quad (1.2.16)$$

将弹性力 $p(x)$ 展成傅氏级数

$$p(a \cos \psi) = p_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(a) \cos n\psi \quad (1.2.17)$$

把(1.2.4)代入(1.2.2),并令其等于上式

$$ak \cos \psi + \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} C_n(a) \cos n\psi = p_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(a) \cos n\psi$$

比较各次谐波的系数,则

$$\left. \begin{aligned} p_1(a) &= ak + \epsilon C_1(a) \\ p_n(a) &= \epsilon C_n(a) \quad (n=0, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.18)$$

根据(1.2.16)式知, $C_1(a) = 0$, 则等效刚度系数为

$$k = \frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} p(a \cos \psi) \cos \psi d\psi = \frac{1}{a} p_1(a) \quad (1.2.19)$$

从上式知,等效刚度系数是 a 的函数,只有 a 为常数时式(1.2.19)才可以用来进行计算。如考虑阻尼, $\frac{p_1(a)}{a}$ 是时间 t 的函数,上式无法应用。

如弹性力与原点对称,即 F_x 对 $\pm x$ 来说大小相等,方向相反,则(1.2.17)中所有偶数项为零,则

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= a \cos \psi + \frac{\epsilon}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{2n+1}(a) \cos (2n+1)\psi}{(2n+1)^2 - 1} \\ \omega_{II}^2 &= \omega_1^2(a) + \frac{\epsilon^2}{mak} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{2n+1}(a) \frac{dp_{2n+1}(a)}{da}}{(2n+1)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.20)$$

现用上面的方法研究数学摆,其振动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin x = 0 \quad (1.2.21)$$

在此例中

$$p(x) = \frac{g}{l} \sin x$$

由(1.2.17)则有

$$p(a \cos \psi) = \frac{g}{l} 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(a) \cos (2n+1)\psi \quad (1.2.22)$$

其中 $J_k(a)$ 为贝塞尔函数

由(1.2.15)知,第一次近似解为

$$\left. \begin{aligned} x_I &= a \cos \psi \\ \left(\frac{\omega_I}{\omega_0} \right)^2 &= \frac{2J_1(a)}{a} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.23)$$

其中

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

由(1.2.20)知,第二次近似解为

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= a \cos \psi + 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n J_{2n+1}(a) \cos (2n+1)\psi}{(2n+1)^2 - 1} \\ \left(\frac{\omega_{II}}{\omega_0} \right)^2 &= \left(\frac{\omega_I}{\omega_0} \right)^2 + 4 \frac{\omega_0^2}{a \omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(a) J'_{2n+1}(a)}{(2n+1)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.24)$$

由上式知

$$\left. \begin{aligned} x_{I \max} &= a \\ x_{II \max} &= a + 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n J_{2n+1}(a)}{(2n+1)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.25)$$

由于(1.2.24)和(1.2.25)收敛得很快,故做数字计算时取前两项即可。

方程(1.2.21)的精确解[见卡尔曼(Karman T. V.)《工程中的数学方法》一书]为

$$\left. \begin{aligned} x(a, \psi) &= \frac{8\sqrt{q}}{1+q} \cos \psi - \frac{8q^{3/2}}{3(1+q^3)} \cos 3\psi + \dots \\ \frac{\omega}{\omega_0} &= \frac{\pi}{2K} \\ k &= \sin \frac{x_{\max}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.26)$$

其中

k ——模数;

K ——第一类全椭圆积分;

$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$;

$K'(k) = K(k')$;

$k' = \sqrt{1-k^2}$ 。

计算结果见表1.1,符号的意义可查椭圆函数手册。

将近似解(1.2.23)和(1.2.24)与精确解比较,知当 x 在 160° 附近时,第一次近似解与精确解的误差为 5.5%,第二次近似解为 3%; x 在 $-45^\circ \sim 45^\circ$ 之间时,第二次近似解与精确解在小数点后的前五位数相

同;在 $-30^\circ \sim 30^\circ$ 时,第一次近似解与精确解在小数点后的前四位数相同,故知近似解有很高的精度。在 x 为 $\pm 180^\circ$ 时误差较大,这是因为当 x 超过 180° 时,振动就变成旋转运动了。

如摆角不大,则(1.2.21)中的 $\sin x$ 将由其泰勒级数的前两项或前三项来代替,此时单摆的振动方程为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) = 0 \quad (1.2.27)$$

由(1.2.17),则

$$\begin{aligned} p_1(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(a \cos \psi) \cos \psi d\psi \\ &= \frac{g}{l} a \left(1 - \frac{a^2}{8} \right) \end{aligned}$$

表 1.1

$x_{\perp \max} = a$	$x_{\parallel \max}$	x_{\max}	$\frac{\omega_{\perp}}{\omega_0}$	$\frac{\omega_{\parallel}}{\omega_0}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$	x_{\max}^c
0.2	0.19996	0.19996	0.99751	0.99751	0.99751	$11^\circ 27' 25''$
0.4	0.39966	0.39968	0.99002	0.99003	0.99003	$22^\circ 53' 46''$
0.6	0.5988	0.5989	0.97759	0.97763	0.97763	$34^\circ 18' 52''$
0.8	0.7972	0.7973	0.9602	0.96040	0.96040	$45^\circ 40' 55''$
1.0	0.9944	0.9946	0.9381	0.93847	0.93846	$56^\circ 59' 11''$
1.2	1.1900	1.1906	0.9113	0.91201	0.91198	$68^\circ 12' 59''$
1.4	1.3835	1.3846	0.8799	0.88122	0.88114	$79^\circ 19' 54''$
1.6	1.5743	1.5763	0.844	0.8463	0.8461	$90^\circ 18' 55''$
1.8	1.761	1.765	0.804	0.8076	0.8072	$101^\circ 07' 37''$
2.0	1.943	1.951	0.759	0.7654	0.7476	$111^\circ 47' 03''$
2.2	2.118	2.132	0.711	0.7200	0.7185	$122^\circ 09' 17''$
2.4	2.283	2.307	0.658	0.6719	0.6698	$132^\circ 10' 53''$
2.6	2.432	2.476	0.602	0.6216	0.6138	$141^\circ 51' 52''$
2.8	2.558	2.635	0.541	0.5699	0.5610	$150^\circ 58' 28''$
3.0	2.642	2.783	0.475	0.5179	0.5023	$159^\circ 27' 15''$

由(1.2.15)知第一次近似解

$$x_1 = a \cos \psi$$

$$\omega_1^2 = \frac{P_1(a)}{a} = \frac{g}{l} \left(1 - \frac{a^2}{8} \right)$$

或

$$\left. \begin{aligned} x_I &= a \cos \psi \\ \frac{\omega_I^2(a)}{\omega_0^2} &= 1 - \frac{a^2}{8} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.28)$$

其中

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

由上式得

$$\frac{\omega_I(a)}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{8}} \approx 1 - \frac{a^2}{16} \quad (1.2.29)$$

从上式知,随着振幅的增大,频率将减小;而周期

$$T_I = \frac{T_0}{1 - \frac{a^2}{16}} \approx T_0 \left(1 + \frac{a^2}{16} \right) \quad (1.2.30)$$

将增大。其中

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

根据(1.2.20)知第二次近似解为

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= a \cos \psi - \frac{a^3}{192} \left(1 + \frac{3}{64} a^2 \right) \cos 3\psi + \frac{a^5}{20480} \cos 5\psi \\ \frac{\omega_{II}^2(a)}{\omega_0^2} &= 1 - \frac{a^2}{8} + \frac{3a^4}{512} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.31)$$

所以

$$\frac{\omega_{II}(a)}{\omega_0} \approx 1 - \frac{a^2}{16} + \frac{3a^4}{1024} \quad (1.2.32)$$

$$T_{II} = T_0 \left(1 + \frac{a^2}{16} - \frac{3a^4}{1024} \right) \quad (1.2.33)$$

当摆角小时用(1.2.27)代替(1.2.21)能得到足够精确的解,如用 x 代替 $\sin x$ 时,当摆角 $< 11^\circ$ 时,误差为 0.25%; $< 23^\circ$ 时,为 1%; $< 34^\circ$ 时,为 2%; $< 45^\circ$ 时,为 4%; $< 70^\circ$ 时,为 10%。

§ 1.3 非线性阻尼的影响

作为第二种特殊情况,让我们研究方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon F \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad (1.3.1)$$

这是质量 m 在线性恢复力 kx 和与速度的非线性函数有关的弱阻尼作用下的自由振动方程。

和(1.1.1)式比较,有

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{m} F\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

为了利用 § 1.1 中求近似解的公式,研究级数

$$\frac{1}{m} F(a \cos \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a) \cos n\psi \quad (1.3.2)$$

可将本节的非线性函数变成上面的形式

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} F(-a\omega \sin \psi) &= \frac{1}{m} F(a\omega) \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a\omega) \cos n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

此级数与(1.1.15)比较,得

$$\left. \begin{aligned} g_n(a) &= F_n(a\omega) \cos \frac{n\pi}{2} \\ h_n(a) &= -F_n(a\omega) \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.3)$$

由(1.1.16)有

$$A_1(a) = -\frac{h_1(a)}{2\omega} = \frac{F_1(a\omega)}{2\omega}, B_1(a) = 0 \quad (1.3.4)$$

由(1.1.19), (1.1.20), 则第一次近似解为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \cos \psi \\ \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\omega} F_1(a\omega) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.5)$$

从上面的第三式知,在第一次近似时,频率仍和线性化系统的频率相同。故振动是以常数 ω 为频率的简谐振动。

虽然已证明过在非线性系统中,已失去了“等时性”,但在非线性阻尼的情况下,第一次近似解仍为“等时性”的,而高次近似解才失去了“等时性”,故称以上的系统为“拟等时性”系统。

由(1.1.24)和(1.3.3)得

$$u_1(a, \psi) = -\frac{1}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{F_n(a\omega) \cos n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)}{n^2 - 1} \quad (1.3.6)$$

因 $F\left(\frac{dx}{dt}\right)$ 中不含 x , 则 $F'_x\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \psi} = \frac{1}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{n F_n(a\omega) \sin n \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right)}{n^2 - 1}$$

$$B_1(a) = 0$$

$$F'(-a\omega \sin \psi) \neq 0$$

将以上各式代入(1.1.26), 则

$$\left. \begin{aligned} A_2(a) = & -\frac{A_1(a)}{2\omega\pi m} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \cos \psi \sin \psi d\psi - \\ & \frac{1}{2\omega^2 \pi m} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{n F_n(a\omega)}{n^2 - 1} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \times \\ & \sin n \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) \sin \psi d\psi \\ B_2(a) = & \frac{1}{2\omega} \frac{A_1(a)}{a} \frac{dA_1(a)}{da} - \frac{A_1(a)}{2\omega\pi m a} \times \\ & \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \cos^2 \psi d\psi - \\ & \frac{1}{2\omega^2 \pi a m} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{n F_n(a\omega)}{n^2 - 1} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \times \\ & \sin n \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.3.7)$$

将 ψ 以 $\psi - \frac{\pi}{2}$ 替换, $A_2(a)$ 的第一个积分号下为奇函数, 故在一个周期中积分为零, 在第二个积分中, 则有

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \sin n \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) \sin \psi d\psi \\ &= - \int_0^{2\pi} F'(a\omega \cos \psi) \sin n\psi \cos \psi d\psi \end{aligned}$$

该积分号下也为奇函数, 积分后也为零。

故 $A_2(a) = 0$

在 $B_2(a)$ 的第二个积分中, 以 $\psi - \frac{\pi}{2}$ 代替 ψ , 并利用分步积分公式, 则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \sin n \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) \cos \psi d\psi \\ &= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} F'(a\omega \cos \psi) \sin n\psi \sin \psi d\psi \\ &= - \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \sin n\psi d \left[\frac{F(a\omega \cos \psi)}{a\omega} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n}{am\omega} \int_0^{2\pi} F(a\omega \cos \psi) \cos n\psi d\psi \\
 &= \frac{n\pi}{a\omega} F_n(a\omega)
 \end{aligned}$$

同理, $B_2(a)$ 的第一个积分中

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \cos^2 \psi d\psi \\
 &= - \int_0^{2\pi} \sin \psi d \left[\frac{F(a\omega \cos \psi)}{a\omega} \right] \\
 &= \frac{n\pi}{a\omega} F_1(a\omega)
 \end{aligned}$$

故(1.3.7)为

$$\left. \begin{aligned}
 A_2(a) &= 0 \\
 B_2(a) &= \frac{F_1(a\omega)}{8\omega^3 a} \frac{dF_1(a\omega)}{da} - \frac{F_1^2(a\omega)}{4\omega^3 a^2} - \\
 &\quad \frac{1}{2\omega^3 a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^2(a\omega)}{n^2 - 1}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.8)$$

所以第二次近似解

$$x_{II} = a \cos \psi - \frac{\epsilon}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{F_n(a\omega) \cos n \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right)}{n^2 - 1} \quad (1.3.9)$$

和

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{\epsilon}{2\omega} F_1(a\omega) \\
 \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \epsilon^2 B_2(a)
 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.10)$$

由以上方程组知, 非线性阻尼的存在, 在第一次近似中, 只给振幅以影响, 而对频率无影响。在第二次近似中, 系统失去了等时性。所以阻尼项主要是影响振幅的大小, 而对频率的影响只有高次近似时才显示出来。

下面研究具体的例子。

有阻尼的线性振动方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (1.3.11)$$

其中阻尼系数很小, 可设 $\lambda = \epsilon \nu$

此时

$$F \left(\frac{dx}{dt} \right) = -\nu \frac{dx}{dt} = \nu a \omega \sin \psi$$

由(1.3.3)有

$$\begin{aligned} F_1(a\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(-a\omega \sin \psi) \cos \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) d\psi \\ &= \frac{\nu a\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) d\psi = -\nu a\omega \\ F_n(a\omega) &= 0 \quad (n=0, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

由(1.3.8)知

$$B_2(a) = \frac{\nu a\omega}{8\omega^3 a} \nu\omega - \frac{\nu^2 \omega^2 a^2}{4a^2 \omega^3} = -\frac{\nu^2}{8\omega}$$

则第二次近似解

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= a \cos \psi \\ \frac{da}{dt} &= -\frac{\lambda a}{2} \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.3.12)$$

从上面的第二式得

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda}{2} t}$$

它与线性方程的精确解相同。

频率的第二次近似公式

$$\omega_{II} = \omega \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 \right] \quad (1.3.13)$$

与频率的精确解

$$\begin{aligned} \omega \sqrt{1 - \frac{n^2}{\omega^2}} &= \omega \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2} \\ &= \omega \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 - \frac{1}{128} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

的前两项相同。

为了得到解的精度度的概念,取 $\frac{\lambda}{\omega} = \frac{\ln 2}{\pi}$, 即每个周期振幅缩小 $\frac{1}{2}$, 此时阻尼很大, 阻尼项相当于 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ 和 $\omega^2 x$ 的 $\frac{1}{4}$, 此时(1.3.13)与精确解之间的误差只为 0.01 %。

干摩擦的例子

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = -A \operatorname{sign} \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad (1.3.14)$$

其中符号 $\operatorname{sign} \left(\frac{dx}{dt} \right)$ 的意义为

$$\operatorname{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\begin{cases} 1 & \left(\text{当}\frac{dx}{dt}>0\right) \\ -1 & \left(\text{当}\frac{dx}{dt}<0\right) \end{cases} \quad (1.3.15)$$

此时非线性函数

$$\frac{\varepsilon}{m}F\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\frac{A}{m}\operatorname{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

因

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}F(-a\omega\sin\psi) &= \frac{1}{m}F[a\omega\cos(\psi+\frac{\pi}{2})] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a\omega)\cos n(\psi+\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

由(1.3.4)知

$$\begin{aligned} A_1(a) &= \frac{1}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} F[a\omega\cos(\psi+\frac{\pi}{2})] \cos(\psi+\frac{\pi}{2}) d\psi \\ &= \frac{-A}{2\pi\omega m} \left[\int_0^{2\pi} \cos(\psi+\frac{\pi}{2}) d\psi - \int_0^{2\pi} \cos(\psi+\frac{\pi}{2}) d\psi \right] \\ &= \frac{-2A}{\pi m\omega} \end{aligned}$$

将上式代入(1.3.5), 则

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{2A}{\pi m\omega} & (a>0) \\ \frac{da}{dt} &= 0 & (a=0) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.16)$$

如 $t=0, a=a_0$, 则

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 - \frac{2A}{\pi m\omega} t & \left(\text{当 } t \leq \frac{\pi m\omega}{2A} a_0\right) \\ a &= 0 & \left(\text{当 } t > \frac{\pi m\omega}{2A} a_0\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.17)$$

从上式知, 具有干摩擦时, 振幅线性地减小。令(1.3.17)的第一式等于零, 则得 $\bar{t} = \frac{\pi m\omega}{2A} a_0$, 即从 $t = \bar{t}$ 时起, 振动完全被衰减掉。

§ 1.4 平 均 法

所谓平均法就是将以位移为未知量的振动方程, 化成以振幅、相位为未知量的标准方程组, 因为振幅和相位的导数都是 $O(\varepsilon)$ 量级的周期函数, 因此, 可用一个周期的平均值代替它, 故称其为平均法。

故方程(1.1.1)中,如 $\epsilon=0$,可得其解为

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \psi \\ \dot{x} &= -a\omega \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (1.4.1)$$

其中 $\psi = \omega t + \theta$, 而 a, θ 为由起始条件确定的常数, 当 $\epsilon \neq 0$ 时, 即有非线性干扰存在, 则 a, θ 将为 t 的函数, 现研究 a, θ 是什么函数时, (1.4.1) 满足方程(1.1.1), 为此, 以 a, θ 作为新变量, 以(1.4.1)作为变量变换的公式。

微分(1.4.1)的第一式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \cos \psi - a \left(\omega + \frac{d\theta}{dt} \right) \sin \psi \quad (1.4.2)$$

令上式与(1.4.1)的第二式相等, 则有

$$\frac{da}{dt} \cos \psi - a \frac{d\theta}{dt} \sin \psi = 0 \quad (1.4.3)$$

微分(1.4.1)的第二式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{da}{dt} \omega \sin \psi - a\omega \left(\omega + \frac{d\theta}{dt} \right) \cos \psi \quad (1.4.4)$$

将(1.4.1), (1.4.4)代入(1.1.1), 则

$$-\frac{da}{dt} \omega \sin \psi - a\omega \frac{d\theta}{dt} \cos \psi = \epsilon f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \quad (1.4.5)$$

为了从(1.4.3)和(1.4.5)中解出 $\frac{da}{dt}, \frac{d\theta}{dt}$, 使(1.4.3) $\times \cos \psi -$
(1.4.5) $\times \sin \psi$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\epsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi = \epsilon \phi(a, \psi) \quad (1.4.6)$$

(1.4.3) $\times \sin \psi +$ (1.4.5) $\times \cos \psi$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\epsilon}{a\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi = \epsilon \phi^*(a, \psi) \quad (1.4.7)$$

(1.4.6)和(1.4.7)称为标准方程组, 从其形式知, 振幅和初相位的导数是与 ϵ 成比例的量, 故 a, θ 是 t 的缓变函数, 到目前未知, 尚未引入近似关系, 故式(1.4.6)和(1.4.7)是精确的。由于它们是非线性的, 一般只能求其近似解。设函数 a, θ 由平稳变化的项 y, ϑ 和小振动项叠加而成, 对之取克雷洛夫—包戈留包夫变换(简称 KB 变换)

$$\left. \begin{aligned} a &= y + \epsilon U_1(t, y, \vartheta) + \epsilon^2 U_2(t, y, \vartheta) + \cdots \\ \theta &= \vartheta + \epsilon V_1(t, y, \vartheta) + \epsilon^2 V_2(t, y, \vartheta) + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (1.4.8)$$

并要求新变量 y, ϑ 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \epsilon Y_1(y) + \epsilon^2 Y_2(y) + \epsilon^3 Y_3(y) + \dots \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \epsilon Z_1(y) + \epsilon^2 Z_2(y) + \epsilon^3 Z_3(y) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.4.9)$$

其中 $Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3$ 不显含 t , U_1, U_2, V_1, V_2 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数, 以及为 t 的以 T 为周期的周期函数。

变换(1.4.9)所采用的形式可证明如下:

如有标准方程式

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon \phi(t, x) \quad (a)$$

$\phi(t, x)$ 的傅氏级数为

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \sum_n e^{in\vartheta} \phi_n(x) \\ &= \phi_0(x) + \sum_{n \neq 0} e^{in\vartheta} \phi_n(x) \end{aligned} \quad (b)$$

因 $\frac{dx}{dt}$ 与 ϵ 成比例, 所以可认为 x 是由平稳变化的 ξ 和小振动项叠加而成, 设

$$x = \xi + \epsilon U(t, \xi) \quad (c)$$

其中取

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \phi(t, \xi) - \phi_0(\xi) \quad (d)$$

将(c)代入(a)

$$\frac{d\xi}{dt} + \epsilon \frac{\partial U}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} = \epsilon \phi(t, \xi + \epsilon U)$$

将(d)代入上式, 并将 $\phi(t, \xi + \epsilon U)$ 展成泰勒级数, 则

$$\begin{aligned} \left(1 + \epsilon \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \epsilon \phi(t, \xi) + \epsilon^2 \dots = \epsilon \phi(t, \xi) + \epsilon \phi_0(\xi) \\ &= \epsilon \phi_0(\xi) + \epsilon^2 \dots \end{aligned} \quad (e)$$

因 $\left(1 + \epsilon \frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^{-1} = 1 - \epsilon \frac{\partial U}{\partial \xi} + \epsilon^2 \dots$, 将(e)从左端乘以 $\left(1 + \epsilon \frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^{-1}$, 则

$$\frac{d\xi}{dt} = \epsilon \phi_0(\xi) + \epsilon^2 \dots \quad (f)$$

故上式右端前 m 项中不显含 t 已得证。应当指出的是, $\phi(t, x)$ 不一定必须展成(b)的形式, 只要 $\phi(t, x)$ 的平均值不为零, 即可应用平均法。

将(1.4.8)代入(1.4.6)和(1.4.7), 考虑到(1.4.9), 则

$$\left. \begin{aligned}
& \epsilon Y_1 + \epsilon^2 Y_2 + \epsilon^3 Y_3 + \epsilon \frac{\partial U_1}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial U_1}{\partial y} (\epsilon Y_1 + \epsilon^2 Y_2 + \epsilon^3 Y_3) + \\
& \quad \epsilon \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} (\epsilon Z_1 + \epsilon^2 Z_2 + \epsilon^3 Z_3) + \epsilon^2 \frac{\partial U_2}{\partial t} + \\
& \quad \epsilon^2 \frac{\partial U_2}{\partial y} (\epsilon Y_1 + \epsilon^2 Y_2 + \epsilon^3 Y_3) + \\
& \quad \epsilon^2 \frac{\partial U_2}{\partial \vartheta} (\epsilon Z_1 + \epsilon^2 Z_2 + \epsilon^3 Z_3) \\
& = \epsilon \phi(t, y, \vartheta, \epsilon) \\
& = \epsilon \phi_0 + \epsilon^2 \phi_1 + \dots \\
& \epsilon Z_1 + \epsilon^2 Z_2 + \epsilon^3 Z_3 + \epsilon \frac{\partial V_1}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial V_1}{\partial y} (\epsilon Y_1 + \epsilon^2 Y_2 + \epsilon^3 Y_3) + \\
& \quad \epsilon \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} (\epsilon Z_1 + \epsilon^2 Z_2 + \epsilon^3 Z_3) + \epsilon^2 \frac{\partial V_2}{\partial t} + \\
& \quad \epsilon^2 \frac{\partial V_2}{\partial y} (\epsilon Y_1 + \epsilon^2 Y_2 + \epsilon^3 Y_3) + \\
& \quad \epsilon^2 \frac{\partial V_2}{\partial \vartheta} (\epsilon Z_1 + \epsilon^2 Z_2 + \epsilon^3 Z_3) \\
& = \epsilon \phi'(t, y, \vartheta, \epsilon) = \epsilon \phi_0^* + \epsilon^2 \phi_1^* + \dots
\end{aligned} \right\} \quad (1.4.10)$$

令上面等式两端 ϵ 同次方的系数相等, 则可得到确定 Y, Z, V, U 的微分方程式, 下面只写出 ϵ 前二阶的系数方程

$$\left. \begin{aligned}
Y_1 + \frac{\partial U_1}{\partial t} &= \phi_0 \\
Z_1 + \frac{\partial V_1}{\partial t} &= \phi_0^*
\end{aligned} \right\} \quad (1.4.11)$$

和

$$\left. \begin{aligned}
Y_2 + \frac{\partial U_1}{\partial y} Y_1 + \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} Z_1 + \frac{\partial U_2}{\partial t} &= \phi_1 \\
Z_2 + \frac{\partial V_1}{\partial y} Y_1 + \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} Z_1 + \frac{\partial V_2}{\partial t} &= \phi_1^*
\end{aligned} \right\} \quad (1.4.12)$$

其中 $\phi_0, \phi_1, \phi_0^*, \phi_1^* \dots$ 为将 ϕ, ϕ^* 在 $\epsilon=0$ 点展成泰勒级数时 ϵ 的系数。

根据 Y, Z 不显含 t 的条件, 可用下列方法确定它们

$$\left. \begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T \phi_0 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_0 d\psi \\
Z_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T \phi_0^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_0^* d\psi
\end{aligned} \right\} \quad (1.4.13)$$

和

$$\left. \begin{aligned} Y_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\phi_1 - \frac{\partial U_1}{\partial y} Y_1 - \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} Z_1 \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\phi_1 - \frac{\partial U_1}{\partial y} Y_1 - \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} Z_1 \right) d\psi \\ Z_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\phi_1^* - \frac{\partial V_1}{\partial y} Y_1 - \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} Z_1 \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\phi_1^* - \frac{\partial V_1}{\partial y} Y_1 - \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} Z_1 \right) d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.4.14)$$

其中 T 为振动周期。

而

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \int_0^t (\phi_0 - Y_1) dt - U_{10} \\ V_1 &= \int_0^t (\phi_0^* - Z_1) dt - V_{10} \end{aligned} \right\} \quad (1.4.15)$$

和

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= \int_0^t \left(\phi_1 - Y_2 - \frac{\partial U_1}{\partial y} Y_1 - \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} Z_1 \right) dt - U_{20} \\ V_2 &= \int_0^t \left(\phi_1^* - Z_2 - \frac{\partial V_1}{\partial y} Y_1 - \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} Z_1 \right) dt - V_{20} \end{aligned} \right\} \quad (1.4.16)$$

在式(1.4.13)~(1.4.16)中,对显含的自变量 t 进行运算,在这个运算过程中,将不显含 t 者当作常数。

故第一次近似解

$$\left. \begin{aligned} x &= y \cos(\omega t + \vartheta) \\ \frac{dy}{dt} &= \epsilon Y_1(y) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \epsilon Z_1(y) \end{aligned} \right\} \quad (1.4.17)$$

第二次近似解

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \theta) \\ a &= y + \epsilon U_1(t, y, \vartheta) \\ \theta &= \vartheta + \epsilon V_1(t, y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (1.4.18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} U_1(t, y, \vartheta) &= \int_0^t (\phi_0 - Y_1) dt - U_{10} \\ V_1(t, y, \vartheta) &= \int_0^t (\phi_0^* - Z_1) dt - V_{10} \end{aligned} \right\} \quad (1.4.19)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \epsilon Y_1(y) + \epsilon^2 Y_2(y) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \epsilon Z_1(y) + \epsilon^2 Z_2(y) \end{aligned} \right\} \quad (1.4.20)$$

将 ϕ_0, ϕ_0^* 和 ϕ_1, ϕ_1^* 代入 (1.4.13) 和 (1.4.14), 不难看出, 它们和 (1.1.23), (1.1.26) 相同, 故平均法所得到的近似解的精度与渐近法所得到的近似解 (1.1.2) 和 (1.1.3) 的精度相同。如将 (1.4.8) 和 (1.4.9) 写成 ϵ 的 m 阶级数, 当有关的系数确定后, 则可求得其 m 次近似解。

§ 1.5 自激振动系统

如振动方程的形式为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f(x) \frac{dx}{dt} \quad (1.5.1)$$

则它是方程 (1.1.1) 的另一种特殊形式, 如

$$f(x) = 1 - x^2$$

则有范德波尔系统 (自激振动系统)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \epsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (1.5.2)$$

其中 $\omega^2 = 1$

该方程的建立方法可参看斯脱可尔 (Stoker J. J.) 著《力学和电学系统中的非线性振动》^[8]。在工程技术中有不少自激振动问题, 如初轧机在轧制过程中, 当轧件氧化皮较多时, 轧辊与轧件间的摩擦系数降低将引起自激振动; 柔性转子材料的内阻、滑动轴承油膜阻尼产生负阻尼时引起的振动; 金属切削时铁屑与刀具之间的干摩擦引起的振动; 气流引起的机翼的颤振等都属于自激振动, 本节讨论自激振动系统的动态特性。

现用平均法求上述方程的近似解, 为了将 (1.5.2) 化成标准方程, 采用变换

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(t + \theta) \\ \frac{dx}{dt} &= -a \sin(t + \theta) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.3)$$

微分第一式并与第二式比较, 则有

$$\frac{da}{dt} \cos(t + \theta) - a \frac{d\theta}{dt} \sin(t + \theta) = 0 \quad (1.5.4)$$

微分 (1.5.3) 的第二式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{da}{dt} \sin(t + \theta) - a \left(1 + \frac{d\theta}{dt} \right) \cos(t + \theta)$$

将 $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x$ 代入 (1.5.2) 式, 则

$$\left. \begin{aligned} & \frac{da}{dt} \sin(t+\theta) + a \frac{d\theta}{dt} \cos(t+\theta) \\ & = \epsilon [1 - a^2 \cos^2(t+\theta)] a \sin(t+\theta) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.5)$$

令 (1.5.4) $\times \cos(t+\theta)$ + (1.5.5) $\times \sin(t+\theta)$ 和 (1.5.5) $\times \cos(t+\theta)$ - (1.5.4) $\times \sin(t+\theta)$ 得

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \epsilon [1 - a^2 \cos^2(t+\theta)] a \sin^2(t+\theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \epsilon [1 - a^2 \cos^2(t+\theta)] \sin(t+\theta) \cos(t+\theta) \end{aligned}$$

或

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \epsilon \left[\frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{a}{2} \cos 2(t+\theta) + \frac{a^3}{8} \cos 4(t+\theta) \right] \\ \frac{d\theta}{dt} &= \epsilon \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) \sin 2(t+\theta) - \frac{a^2}{8} \sin 4(t+\theta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.5.6)$$

为求其二次近似解, 对上式采用 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} a &= y + \epsilon U_1(t, y, \vartheta) + \epsilon^2 U_2(t, y, \vartheta) \\ \theta &= \vartheta + \epsilon V_1(t, y, \vartheta) + \epsilon^2 V_2(t, y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.7)$$

并要求新变量 y, ϑ 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \epsilon Y_1(y) + \epsilon^2 Y_2(y) + \epsilon^3 Y^*(t, y, \vartheta, \epsilon) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \epsilon Z_1(y) + \epsilon^2 Z_2(y) + \epsilon^3 Z^*(t, y, \vartheta, \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.8)$$

其中 Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 不显含 t ; U_1, U_2, V_1, V_2, Y^* 和 Z^* 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数, 以及 t 的周期函数。

将 (1.5.7) 代入 (1.5.6), 并考虑到 (1.5.8), 则得到和 (1.4.11), (1.4.12) 同样的方程, 其中

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 &= \frac{y}{2} \left(1 - \frac{y^2}{4} \right) - \frac{y}{2} \cos 2(t+\vartheta) + \frac{y^3}{8} \cos 4(t+\vartheta) \\ \phi_2^* &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y^2}{2} \right) \sin 2(t+\vartheta) - \frac{y^2}{8} \sin 4(t+\vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.9)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{U_1}{2} \left(1 - \frac{3y^2}{4} \right) + \dots \\ \phi_1^* &= \left(1 - \frac{y^2}{2} \right) V_1 \cos 2(t+\vartheta) - \frac{1}{2} U_1 y \sin 2(t+\vartheta) - \\ & \quad \frac{1}{2} y^2 V_1 \cos 4(t+\vartheta) - \frac{1}{4} y U_1 \sin 4(t+\vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.10)$$

将(1.5.9)代入(1.4.13),则

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{y}{2} \left(1 - \frac{y^2}{4} \right) - \frac{y}{2} \cos 2(t + \vartheta) + \right. \\ &\quad \left. \frac{y^3}{8} \cos 4(t + \vartheta) \right] d\psi = \frac{y}{2} \left(1 - \frac{y^2}{4} \right) \\ Z_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{y^2}{2} \right) \sin 2(t + \vartheta) - \frac{y^2}{8} \sin 4(t + \vartheta) \right] d\psi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5.11)$$

将(1.5.9)代入(1.4.15),则

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= -\frac{y}{4} \sin 2(t + \vartheta) + \frac{y^3}{32} \sin 4(t + \vartheta) \\ V_1 &= -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{y^2}{2} \right) \cos 2(t + \vartheta) + \frac{y^2}{32} \cos 4(t + \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.12)$$

现求第一次近似解,在式(1.5.8)中忽略 ε^2 以上各项,则

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} y \left(1 - \frac{y^2}{4} \right) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5.13)$$

以 y 乘以第一式的两端,有

$$\frac{dy^2}{dt} = \varepsilon \left(1 - \frac{y^2}{4} \right) y^2$$

或

$$\begin{aligned} \frac{dy^2}{4 - y^2} + \frac{dy^2}{y^2} &= \varepsilon dt \\ \text{积分上式} \quad \int_{y_0}^y \frac{dy^2}{4 - y^2} + \int_{y_0}^y \frac{dy^2}{y^2} &= \varepsilon \int_0^t dt \\ \ln \frac{\frac{y^2}{4 - y^2}}{\frac{y_0^2}{4 - y_0^2}} &= \varepsilon t \\ \frac{y^2}{4 - y^2} &= \frac{y_0^2}{4 - y_0^2} e^{\varepsilon t} \end{aligned}$$

整理后

$$y = \frac{y_0 e^{\frac{\varepsilon t}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} y_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}} \quad (1.5.14)$$

故第一次近似解为

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{y_0 e^{\frac{\alpha}{2}t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}y_0^2(e^\alpha - 1)}} \cos \psi \\ \psi &= \omega t + \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (1.5.15)$$

从上式知,如振幅的起始值 $y_0 = 0$,则对任何 t 来说, x 都为零,这对应着静平衡状态, $x = 0$ 的解称为范德波尔方程的平凡解,但平凡解是不稳定的,因任何小的干扰将使振幅单调上升,直至等于 2。

在(1.5.14)中,分子、分母同除以 $e^{\frac{1}{2}\alpha t}$,则

$$y = \frac{y_0}{\sqrt{e^{-\alpha} + \frac{y_0^2}{4}(1 - e^{-\alpha})}}$$

所以,当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$y = \frac{y_0}{\sqrt{0 + \frac{y_0^2}{4}(1 - 0)}} = 2$$

在工程实际中,由于各种干扰很难避免,它们使处于静止状态的振动系统的振幅自动增大,故称自激振动。

在(1.5.15)中,取 $y_0 = 2$,则

$$y = \frac{2e^{\frac{1}{2}\alpha t}}{\sqrt{1 + e^\alpha - 1}} \cos(t + \theta) = 2 \cos(t + \theta) \quad (1.5.16)$$

对任何 $t \geq 0$,振动的振幅永为 2,此时解(1.5.16)对应着定常振动状态。此定常状态是非常稳定的,因不管非线性干扰多大或多小,当 $t \rightarrow \infty$ 时,振幅趋于 2,换句话说,虽然系统是自治的,即系统不受外部周期干扰作用,但随着时间的增加,任意振动都趋于定常振动。

由式(1.5.16)知,在第一次近似时其定常解(周期解)的频率为 1,振幅为 2,事实上从高次近似知,定常解并非简谐振动。

下面研究第二次近似解,将 U_1, V_1 代入(1.5.3),则

$$\begin{aligned} x &= a \cos(t + \theta) = \left[2 - \frac{\epsilon}{2} \sin 2(t + \vartheta) + \frac{\epsilon}{4} \sin 4(t + \vartheta) \right] \times \\ &\quad \cos \left[t + \vartheta + \frac{\epsilon}{4} \cos 2(t + \vartheta) + \frac{\epsilon}{8} \cos 4(t + \vartheta) \right] \\ &= 2 \cos(t + \vartheta) - \frac{\epsilon}{4} \sin 3(t + \vartheta) + \epsilon^2 \cdots \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

将(1.5.10)代入(1.4.14),则

$$Z_2 = -\frac{1}{8} + \frac{3y^2}{16} - \frac{11y^4}{32 \times 8} = -\frac{1}{16} \quad (1.5.18)$$

故第二次近似解为

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\varepsilon^2 \frac{1}{16}$$

所以

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{16} = \omega_0 \\ x &= 2\cos(\omega_0 t + \vartheta) - \frac{\varepsilon}{4}\sin 3(\omega_0 t + \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.19)$$

从(1.5.18)知,瞬时频率 ω_0 为 y 的函数。所以第一次近似时,振动为等时性的,而第二次近似则失去了等时性,故自激振动系统和其他具有阻尼的系统一样也是“拟等时性”的振动系统。

从对范德波尔方程的研究知,自激振动和保守系统有本质的区别:保守系统的振幅可为由起始条件确定的任意值,而自激振动定常解的振幅为一个确定的值。其物理意义是,在保守系统中无能量消耗,也无能量供给,所以振动发生后,振幅既不增长,也不衰减,而保持起始值。在自激振动系统中,有能量消耗,也有能量供给,供给大于消耗则振幅增,供给小于消耗则振幅减,供给等于消耗则振幅不变。

§ 1.6 定 常 解

在本章以上各节中,我们得到了解的基波振幅的近似公式。

在三级数法中

$$x = a \cos \phi + \varepsilon U_1(a, \phi) + \varepsilon^2 U_2(a, \phi) + \varepsilon^3 U_3(a, \phi) + \dots$$

其中

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots$$

在平均法中

$$x = a \cos \phi$$

$$a = y + \varepsilon U_1(t, y, \phi) + \varepsilon^2 U_2(t, y, \phi) + \dots$$

$$\phi = \varphi + \varepsilon V_1(t, y, \phi) + \varepsilon^2 V_2(t, y, \phi) + \dots$$

其中

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon Y_1(y) + \varepsilon^2 Y_2(y) + \dots$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega + \varepsilon Z_1(y) + \varepsilon^2 Z_2(y) + \dots$$

在以上两种方法中,基波振幅近似解的公式是一致的,如考虑 n 次近似,则

$$\frac{da}{dt} = \phi(a) \quad (1.6.1)$$

其中 $\phi(a) = \epsilon A_1(a) + \epsilon^2 A_2(a) + \cdots + \epsilon^n A_n(a)$

可对(1.6.1)进行积分,以得到振幅的变化规律。实际上不进行积分也可定性地研究 $a(t)$ 的性质,本节就是根据 $\phi(a)$ 的规律来研究 $a(t)$ 的性质及稳定性问题。

首先假设,不存在这样一个 a^* 值,当 $a > a^*$ 时,有

$$\phi(a) > 0$$

这个条件的物理意义是,如存在这样一个 a^* 值,在取起始条件 $a(0) > a^*$ 后,由于 $\phi(a) > 0$,则由(1.6.1)知,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $a(t) \rightarrow \infty$,这从物理上讲是不可能的,所以上面的假设必须成立。这个条件称为“振幅的有界条件”。

从方程(1.6.1)知:

当 $\phi(a) > 0$ 时,振幅增加;当 $\phi(a) < 0$ 时,振幅减小;只有当

$$\phi(a) = 0 \quad (1.6.2)$$

时,振幅不变而为常数。这个不变的常数称为“定常值”,故为了得到振幅的定常解,必须令(1.6.1)式的右端等于零。

从(1.6.1)知,如振幅的起始值 a_0 不满足定常条件(1.6.2),那么,在系统起振后,振幅或增大或减小,向定常值趋近。因此,非定常振动随着时间的增加,必向定常振动趋近,非定常振动也称为过渡过程。对高频成分来说,由于周期很小,所以向定常解趋近得非常快,故对这样一类振动来说,振动过程开始后就可认定为定常的。

在工程技术中,也存在着没有过渡过程的所谓“退化系统”,此系统的任何振动都是定常的,例如

函数 $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ 只与 x 有关,而与 $\frac{dx}{dt}$ 无关时

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = 0 \quad (1.6.3)$$

以 dx 乘以上式,得

$$\frac{d^2x}{dt^2} dx + F(x) dx = 0$$

或

$$v dv + F(x) dx = 0$$

所以

$$T + E = \text{const}$$

这就是保守系统,在振动过程中无能量输入和输出,因此由起始条件

所确定的任何振动都是不变的,即都是定常的。

实际上,任何物理系统在振动过程中都有能量的损失,即使自激振动系统,也必须供给能量。

下面研究定常解的稳定问题。

设 a_0 是方程(1.6.2)的根,该常数也是(1.6.1)的定常解。给振幅一个很小的扰动 δa ,则

$$a = a_0 + \delta a$$

将上式代入(1.6.1),则

$$\frac{da_0}{dt} + \frac{d\delta a}{dt} + \phi(a_0 + \delta a) = \phi(a_0) + \delta a \phi'(a_0)$$

所以

$$\frac{d\delta a}{dt} = \phi'(a_0) \delta a$$

其解为

$$\delta a = (\delta a)_0 e^{\phi'(a_0)t}$$

如

$$\phi'(a_0) < 0 \quad (1.6.4)$$

则 $t \rightarrow \infty$ 时, $\delta a = 0$, 即定常解 a_0 为稳定的。如 $\phi'(a_0) > 0$, 则定常解 a_0 不稳定。

因 $a_0 = 0$ 对应平衡状态, $a_0 = 0$ 这个定常解是(1.6.2)的根。

如 $\phi'(0) > 0$, 则由 $\delta a = (\delta a)_0 e^{\phi'(0)t}$, 振幅随着 t 而增长, 所以 $\phi'(0) > 0$ 为产生自激振动的条件, 此条件也可写成

$$\phi'(0) = \epsilon A'_1(0) + \epsilon^2 A'_2(0) + \cdots + \epsilon^n A'_n(0) > 0$$

如不考虑有重根的情况, 在 ϵ 很小的时候, 上式的符号完全由 $\epsilon A'_1(0)$ 所确定。

因为定常振幅应满足(1.6.2)

$$A_1(a) + \epsilon A_2(a) + \cdots + \epsilon^{n-1} A_n(a) = 0$$

如不考虑有重根的情况, 则 a 可写成

$$a = a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \cdots \quad (1.6.5)$$

其中 a_0 为 $A_1(a) = 0$ 的解。

将(1.6.5)代入上式, 并令 ϵ 各次幂的系数为零, 则

$$A_1(a_0) = 0$$

$$a_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + A_2(a_0) = 0$$

.....

从上式得

$$a_1 = -\frac{A_2(a_0)}{A_1'(a_0)}$$

因定常解的稳定与否决定于下面的表达式

$$\epsilon A_1'(a) + \epsilon^2 A_2'(a) + \cdots + \epsilon^n A_n'(a) \leq 0$$

将(1.6.5)代入上式,则

$$\begin{aligned} & \epsilon A_1'(a) + \epsilon^2 A_2'(a) + \cdots + \epsilon^n A_n'(a) \\ &= \epsilon A_1'(a_0) + \epsilon^2 [a_1 A_1'(a_0) + A_2'(a_0)] + \cdots \end{aligned}$$

故在 ϵ 足够小的时候,上式左端的符号,可由右端第一项所确定。所以定常解的稳定问题,在 ϵ 足够小的时候,决定于 $\epsilon A_1'(a_0)$ 的符号。这和根据第一次近似方程来判断解的稳定问题是相同的。

应该指出,存在稳定的定常解的条件是(1.6.2)必须有一个非零解,而产生自激振动的条件是系统应有负阻尼,它不是存在稳定定常解的必要条件。

总之,为了求 n 次近似的定常解,令方程(1.6.1)右端的前 n 项等于零,从代数方程可求其定常解 a_0 ,而其稳定问题决定于 $A_1'(a_0)$ 的符号。如直接积分方程(1.6.1),则可得到向定常解过渡的非定常解。

§ 1.7 等效线性化

由渐近法(或平均法)所给的第一次近似解,在很多情况下,能给出与高次近似解相同的定性的结果。

另外,也由于计算高次近似解十分繁杂,所以多数情况下都限于计算第一次近似解。

第一次近似的方程式有非常简明的物理意义,有时不必建立振动微分方程就可得到。

本节我们研究第一次近似方程的物理意义。

如有振动方程:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (1.7.1)$$

其中 m, k 为正数。其第一次近似解

$$x = a \cos \psi \quad (1.7.2)$$

a 为振幅, ψ 为相位,由下式确定

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\epsilon}{2\pi m\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_e(a) \end{aligned} \right\} \quad (1.7.3)$$

其中

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (\omega_e \text{ 的零次近似})$$

和

$$\omega_e^2(a) = \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi m a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi$$

下面引入振幅的函数

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e(a) &= \frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ k_e(a) &= k - \frac{\varepsilon}{a \pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.7.4)$$

把(1.7.4)代入(1.7.3), 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\lambda_e(a)}{2m} a \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_e(a) \end{aligned} \right\} \quad (1.7.5)$$

式中

$$\omega_e^2(a) = \frac{k_e(a)}{m}$$

现分析 $\lambda_e(a)$ 和 $\omega_e(a)$ 的物理意义。

微分(1.7.2), 并考虑(1.7.5), 则有

$$\frac{dx}{dt} = -a \omega_e(a) \sin \psi - \frac{\lambda_e(a)}{2m} a \cos \psi \quad (1.7.6)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -a \omega_e^2(a) \cos \psi + \frac{\lambda_e(a)}{m} a \omega_e(a) \sin \psi - \\ &\quad a \frac{d\omega_e(a)}{da} \frac{da}{dt} \sin \psi + \frac{\lambda_e^2(a)}{4m^2} a \cos \psi - \\ &\quad \frac{a}{2m} \frac{da}{da} \frac{d\lambda_e(a)}{dt} \cos \psi \\ &= -\frac{k_e(a)}{m} x - \frac{\lambda_e(a)}{m} \frac{dx}{dt} + a^2 \frac{\lambda_e(a)}{2m} \frac{d\omega_e(a)}{da} \sin \psi + \\ &\quad \frac{\lambda_e^2(a)}{4m^2} x + \frac{a}{2m} \frac{\lambda_e(a)}{2m} \frac{d\lambda_e(a)}{da} x \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

从(1.7.4)知, $\lambda_e(a)$ 与 $\frac{d\omega_e(a)}{da}$ 都和 ε 同量级, 所以有

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} + k_e(a) x = O(\varepsilon^2) \quad (1.7.8)$$

其中 $O(\varepsilon^2)$ 与 ε^2 同量级。

如只考虑 ε 的一次项, 则得线性方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} + k_e(a)x = 0 \quad (1.7.9)$$

即解(1.7.2)以 ε^2 的精度满足线性方程(1.7.9), 或非线性振动系统的第一次近似解和以弹性系数为 $k_e(a)$ 、阻尼系数为 $\lambda_e(a)$ 的线性系统的振动解等效, 故称 $\lambda_e(a)$ 为等效阻尼系数; $k_e(a)$ 为等效弹性系数。

方程(1.7.9)所描述的振动系统称为“等效系统”。

比较(1.7.9)与(1.7.1)知, 用等效线性力

$$F_e = - \left[k_1(a)x + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} \right] \quad (1.7.10)$$

来代替

$$F = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \quad (1.7.11)$$

其中 $k_1(a) = k_e(a) - k$

可以从(1.7.1)直接得到(1.7.9), 即

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = -k_e(a)x + kx - \lambda_e(a) \frac{dx}{dt}$$

所以

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} + k_e(a)x = 0$$

则等效线性系统的衰减指数

$$\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m}$$

等效线性系统的固有频率

$$\omega_e(a) = \sqrt{\frac{k_e(a)}{m}} \quad (1.7.12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e(a) &= \frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ k_1(a) &= \frac{-\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.7.13)$$

由线性振动理论知

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta a \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega \end{aligned} \right\} \quad (1.7.14)$$

如将等效线性衰减指数和等效线性固有频率代入上式, 则可得到和渐近

法第一次近似完全相同的表达式。

于是产生了一个问题：当用等效线性力代替非线性力时， $\lambda_e(a)$ 和 $k_1(a)$ 为什么必须有(1.7.13)的形式，而不采取其他的形式？为解决此问题，必须阐明它们的物理意义。

令等效线性力(1.7.10)和非线性力(1.7.11)在一个周期上的平均功率相等，则

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_0^T f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} dt \\ &= - \int_0^T \left[k_1(a)x + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} \right] \frac{dx}{dt} dt \\ &= -\lambda_e(a) \int_0^T \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt \end{aligned} \quad (1.7.15)$$

取解

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta), \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \vartheta) \quad (1.7.16)$$

将上式代入(1.7.15)，则

$$\begin{aligned} & -\epsilon \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f[a \cos(\omega t + \vartheta), -a\omega \sin(\omega t + \vartheta)] a\omega \sin(\omega t + \vartheta) dt \\ &= -\lambda_e(a) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \vartheta) dt \\ &= -\lambda_e(a) a^2 \pi \omega \end{aligned}$$

所以

$$\lambda_e(a) = \frac{\epsilon}{a \pi \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi \quad (1.7.17)$$

以上是根据功率相等的原理得到的等效阻尼系数的表达式。下面研究等效弹性系数 $k_1(a)$ 。

令等效线性力(1.7.10)和非线性力(1.7.11)在一个周期上的平均无功功率相同，则可得 $k_1(a)$ 的表达式。

无功功率是电子技术中采用的名词。

如导线AB，通过交流电流 $i(t)$ ，两端的电压为 $U(t)$ ，则有功功率

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) i(t) dt \quad (1.7.18)$$

无功功率

$$P_r(a) = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) i\left(t - \frac{T}{4}\right) dt \quad (1.7.19)$$

由于机电系统的相似性，可以将无功功率的概念直接应用到机械系

统中来。

如果一个物体 m , 在干扰力 $F(t)$ 的作用下, 作周期振动 $x(t)$, 则在一个周期内的平均功率为

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) \frac{dx}{dt} dt \quad (1.7.20)$$

与电子技术相类似, 则其无功功率为

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) \frac{dx \left(t - \frac{T}{4} \right)}{dt} dt \quad (1.7.21)$$

现令非线性力和等效线性力在一个周期上的平均无功功率相等, 则

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t), \dot{x}(t)] \dot{x} \left(t - \frac{T}{4} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [k_1(a)x(t) + \lambda_e(a)\dot{x}(t)] \dot{x} \left(t - \frac{T}{4} \right) dt \end{aligned} \quad (1.7.22)$$

比较上式等号两端各项知, 左端与 ε 成比例, 右端 $\lambda_e(a)$ 与 ε 同阶, 故 $k_1(a)$ 必与 ε 同阶。

取

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \vartheta) \\ \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin(\omega t + \vartheta) \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (1.7.23)$$

则

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t), \dot{x}(t)] \dot{x} \left(t - \frac{T}{4} \right) dt \\ &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \omega a \sin \left(\psi - \frac{\pi}{2} \right) d\psi \\ &= \frac{\varepsilon a \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T [k_1(a)x(t) + \lambda_e(a)\dot{x}(t)] \dot{x} \left(t - \frac{T}{4} \right) dt \\ &= -\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} [k_1(a)a \cos \psi - a\lambda_e(a)\omega \sin \psi] a \sin \left(\psi - \frac{\pi}{2} \right) d\psi \\ &= \frac{1}{2} a^2 \omega k_1(a) \end{aligned}$$

所以

$$k_1(a) = -\frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi$$

上式与(1.7.13)完全相同。

总之,用等效线性力

$$F_e = -\left[k_1(a)x + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} \right] \quad (1.7.24)$$

代替非线性力

$$F = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (1.7.25)$$

在系统作简谐振动 $x = a \cos(\omega t + \vartheta)$ 时,可得到与 ε 一次方精度相同的解,其中 ω 为零次近似的频率。

以上确定等效线性系数的方法称为“功率原理”,或“能量平衡原理”。

下面介绍确定等效系数的一种更简单的方法——“谐波平衡原理”。

对简谐振动

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta), \frac{dx}{dt} = -a \omega \sin(\omega t + \vartheta)$$

来说,等效线性力也是频率为 ω 的简谐函数,可表示为

$$F_e = J_e \cos(\omega t + \phi_e) \quad (1.7.26)$$

非线性力也是周期函数,其频率为 $n\omega$,其中 $n=1,2,\dots$,非线性力的基波为

$$J \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.7.27)$$

比较(1.7.26)与(1.7.27),则

$$J_e = J, \quad \phi_e = \varphi$$

等效线性力的傅氏级数为

$$F_e = -k_1(a)a \cos(\omega t + \vartheta) + a\omega \lambda_e(a) \sin(\omega t + \vartheta) \quad (1.7.28)$$

而非线性力的傅氏级数为

$$\begin{aligned} & f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \\ &= g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi] \\ &= g_0(a) + g_1(a) \cos \psi + h_1(a) \sin \psi + \\ & \quad \sum_{n=2}^{\infty} [g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi] \end{aligned} \quad (1.7.29)$$

其中

$$g_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi$$

$$h_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi$$

比较(1.7.28)与(1.7.29),由同阶谐波的系数相等,则

$$-k_1(a)a = g_1(a)$$

所以

$$\left. \begin{aligned} k_1(a) &= -\frac{\varepsilon}{a\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \\ \lambda_e(a) &= \frac{\varepsilon}{a\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.7.30)$$

故(1.7.30)与(1.7.13)也完全相同。

以上的方法称“谐波平衡原理”。

能量平衡原理和谐波平衡原理是等价的,因在干扰力 $F(t)$ 的作用下,作简谐振动 $x = a \cos(\omega t + \vartheta)$ 时,其有功功率和无功功率只决定于 $F(t)$ 的基波,其余的项在一个周期上进行积分为零。

如等效线性力和非线性力的基波相同,则其有功功率和无功功率就相同,否则就不同。这是“谐波平衡原理”和“能量平衡原理”等价的基础。

在很多情况下,只要知道非线性力 $\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ 的表达式,在系统作近似简谐振动的条件下,就可计算等效线性力系数 $[\lambda_e(a), k_e(a)]$,而不需要写出振动方程式。

§ 1.8 谐波平衡法

在非线性振动中谐波平衡法也是经常使用的近似方法,尤其对强非线性系统。它的基础是,在系统中尽管存在着非线性的影响,但在一定条件下其定常解仍然是近于简谐的周期解。

设系统的振动方程为

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F(t) \quad (1.8.1)$$

其中 $f(x, \dot{x})$ 为非线性函数; $F(t)$ 为以 T 为周期的周期函数,其傅氏级数为

$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \quad (1.8.2)$$

设方程(1.8.1)的周期解为

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

将(1.8.2)代入(1.8.1),并设函数 $f[x(t), \dot{x}(t)]$ 也可展成傅氏级数

$$f[x(t), \dot{x}(t)] = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_0(a_0, a_1, b_1, \dots) \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f[x(t), \dot{x}(t)] dt \\ \alpha_n &= \alpha_n(a_0, a_1, b_1, \dots) \\ &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f[x(t), \dot{x}(t)] \cos n\omega t dt \\ \beta_n &= \beta_n(a_0, a_1, b_1, \dots) \\ &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f[x(t), \dot{x}(t)] \sin n\omega t dt \end{aligned} \right\} \quad (1.8.3)$$

$$n=1, 2, \dots$$

令等式两端 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 的系数相等, 则可得到确定的系数 a_n 和 b_n 的无穷方程组

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= A_0; n^2 \omega^2 a_n = \alpha_n(a_0, a_1, b_1, \dots) - A_n \\ n^2 \omega^2 b_n &= \beta_n(a_0, a_1, b_1, \dots) - B_n \end{aligned} \right\} \quad (1.8.4)$$

$$n=1, 2, \dots$$

求解方程组(1.8.4), 也就是说求式(1.8.2)的精确值, 在多数情况下是十分困难的问题。假设在解中常数分量和一阶谐波是主要的, 则近似解可写成

$$\tilde{x}(t) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \cos \omega t + \tilde{b}_1 \sin \omega t \quad (1.8.5)$$

在这种情况下, 可得到三个确定 \tilde{a}_0, \tilde{a}_1 和 \tilde{b}_1 的方程式

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1) &= A_0 \\ \tilde{a}_1 \omega^2 &= \tilde{\alpha}_1(a_0, a_1, b_1) - A_1 \\ \tilde{b}_1 \omega^2 &= \tilde{\beta}_1(a_0, a_1, b_1) - B_1 \end{aligned}$$

在(1.8.3)中以 $\tilde{x}(t)$ 代替 $x(t)$, 则可确定函数 $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1$ 和 $\tilde{\beta}_1$ 。为简单起见, 取解(1.8.5)为

$$\tilde{x}(t) = \tilde{a}_0 + \tilde{a} \sin \omega t \quad (1.8.6)$$

而在解 $\tilde{x}(t)$ 和干扰力 $F(t)$ 的一阶谐波之间的相位差 $\tilde{\epsilon}$, 则表示为

$$F(t) = A_0 + A \sin(\omega t - \tilde{\epsilon})$$

为确定系数 \tilde{a}_0, \tilde{a}_1 和 $\tilde{\beta}_1$ 则有

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{a}_0 &= \tilde{\alpha}_0(\tilde{a}_0, \tilde{a}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tilde{a}_0 + \tilde{a} \sin \tau, \tilde{a} \omega \cos \tau) d\tau \\
 \tilde{a}_1 &= \tilde{\alpha}_1(\tilde{a}_0, \tilde{a}) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tilde{a}_0 + \tilde{a} \sin \tau, \tilde{a} \omega \cos \tau) \cos \tau d\tau \\
 \tilde{\beta}_1 &= \tilde{\beta}_1(\tilde{a}_0, \tilde{a}) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tilde{a}_0 + \tilde{a} \sin \tau, \tilde{a} \omega \cos \tau) \sin \tau d\tau
 \end{aligned} \right\} \quad (1.8.7)$$

而 \tilde{a}_0 , \tilde{a} 和 $\tilde{\epsilon}$ 由下式确定

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{\alpha}_0(\tilde{a}_0, \tilde{a}) &= A_0 \\
 \tilde{\alpha}_1(\tilde{a}_0, \tilde{a}) &= -A \sin \tilde{\epsilon} \\
 \tilde{\beta}_1(\tilde{a}_0, \tilde{a}) &= A \cos \tilde{\epsilon} + \omega^2 \tilde{a}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.8.8)$$

从(1.8.8)的最后两个方程式消去 $\tilde{\epsilon}$, 则有

$$\tilde{\alpha}_1^2(\tilde{a}_0, \tilde{a}) + [\tilde{\beta}_1(\tilde{a}_0, \tilde{a}) - \omega^2 \tilde{a}]^2 = A^2$$

上式和(1.8.8)的第一式就是确定 \tilde{a}_0 , \tilde{a} 的方程式。相位差 $\tilde{\epsilon}$ 由下式确定

$$\operatorname{tg} \tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{\alpha}_1(\tilde{a}_0, \tilde{a})}{\omega^2 \tilde{a} - \tilde{\beta}_1(\tilde{a}_0, \tilde{a})}$$

应该指出的是, 谐波平衡的方法对自治系统也是很有效的, 处理步骤同上, 此时 $F(t) = 0$ 和 $A = 0$ 。在这种情况下 $\tilde{\epsilon} = 0$, 从式(1.8.8)除可确定 \tilde{a}_0 和 \tilde{a} 外, 还可确定解的频率 ω 。

近似的周期解(1.8.6)对应着方程组(1.8.8)的实数解。需要强调指出的是, 这些解的近似性不仅是由于在式(1.8.6)中忽略了高次谐波, 同时也是由于在以方程(1.8.8)确定 \tilde{a}_0 , \tilde{a} 和 $\tilde{\epsilon}$ 时, 没有考虑式(1.8.2)中全部的傅氏级数的系数。

经验指出, 谐波平衡法在很多情况下可得到满意的定性的、常常也是定量的结果, 不仅对拟线性系统, 而且对强非线性系统, 对具有干摩擦的系统和具有冲击载荷的系统都能得到满意的结果。此法用来解具有非线性耗散特性的弹性体振动问题也很有效。谐波平衡法效率高的原因是相应系统的过滤特性, 因而尽管有非线性存在也可采取(1.8.6)作为近似解。

谐波平衡法在拟线性系统中, 当 $f(x, \dot{x}) = k^2 x + \epsilon f_1(x, \dot{x})$ 时, 可得到和等效线性化方法同样的结果。因此可认为这是该法和平均法的直接

联系^[18]。

谐波平衡法的缺点是,为了得到足够精确的解必须事先知道解中所含的谐波成分,或者在解中算足够多的项,并检查所忽略的谐波系数的量级,否则可能得到和其他方法相比很不精确的近似解。

例 1 设有一作纵向简谐振动的水平粗糙平面,现研究其上的质点和运动问题。一个粗糙平面沿水平方向以频率 ω 和振幅 A 作简谐振动(图 1.1),在该平面上的质点的相对运动方程为

$$\ddot{x} + q \operatorname{sign} \dot{x} = \sin(\tau - \tilde{\epsilon})$$

其中 x 为质点沿平面相对于振幅 $q = \frac{gf}{A\omega^2}$ 的位移,

g 为重力加速度, f 为干摩擦系数, x 上的点为对于无因次时间 $\tau = \omega t$ 的导数。

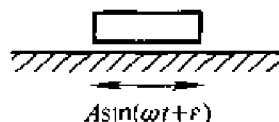


图 1.1

在所研究的情况下, $A_0 = 0, A = 1, f(x, \dot{x}) = q \operatorname{sign} \dot{x}, \omega = 1$, 因此根据(1.8.7)有

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q \operatorname{sign}(\tilde{a} \cos \tau) d\tau = 0 \\ \tilde{\alpha}_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q \operatorname{sign}(\tilde{a} \cos \tau) \cos \tau d\tau = 0 \\ &= \frac{4q}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \tau d\tau = \frac{4q}{\pi} \\ \tilde{\beta}_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q \operatorname{sign}(\tilde{a} \cos \tau) \sin \tau d\tau = 0\end{aligned}$$

根据方程(1.8.8)有 $\frac{4q}{\pi} = -\sin \tilde{\epsilon}, -\tilde{a} = \cos \tilde{\epsilon}$, 质点相对运动的振幅为

$$\tilde{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{4q}{\pi}\right)^2}$$

在图 1.2 上以虚线表示了上面所得到的关系,实线表示的是精确解^[17]。在这个解中取滑动摩擦系数 f 为静摩擦系数 f_1 的 0.7 倍。从图 1.2 知近似解与精确解是基本上符合的,特别是平面的振动

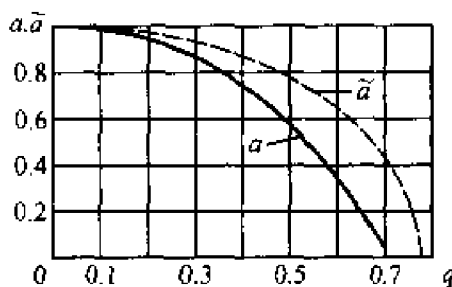


图 1.2

强度大时 ($A\omega^2 \gg q$) 更是这样。从图中看出,尽管系统中不存在过滤性,近似解的精度也是足够满意的。

例 2 用谐波平衡法研究系统

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = F \operatorname{sign} \dot{q}$$

在这种情况下 $A_0 = A = 0; f(q, \dot{q}) = 2h\dot{q} + \omega_0^2 q - F \operatorname{sign} \dot{q}$ 。又(1.8.7)

得

$$\bar{\alpha}_0 = 0, \bar{\alpha}_1 = 2h\tilde{\omega} - \frac{4}{\pi}F, \bar{\beta}_1 = \omega_0^2 \tilde{a}$$

由(1.8.8)得

$$\omega = \omega_0, \tilde{a} = \frac{2F}{\pi h \omega_0}$$

其精确解为 $q_0 = \frac{(1 + e^{-hT})F}{(1 + e^{-hT})\omega_0^2}$ 。

在图 1.3 和图 1.4 上, 给出了 $\frac{\omega}{\omega^*} = \frac{\omega_0}{\omega^*} = \frac{1}{\sqrt{1-Q^2}}$; $\frac{\tilde{a}}{q} = \frac{2 \left[1 - \exp \left(-\frac{\pi Q}{\sqrt{1-Q^2}} \right) \right]}{\pi Q \left[1 + \exp \left(-\frac{\pi Q}{\sqrt{1-Q^2}} \right) \right]}$ 和参数 $Q = \frac{h}{\omega_0}$ 之间的关系。从图知, 两种方法所得的结果很接近, 尤其在阻尼小的情况下, 精度更高。谐波平衡法所以能得到较好的效果是因为系统线性部分有过滤特性。

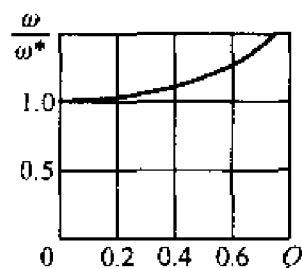


图 1.3

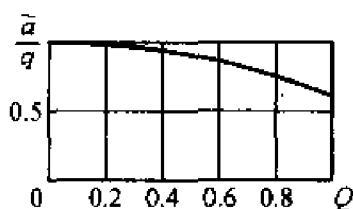


图 1.4

习 题

1.1 对于下列系统, 应用渐近法和平均法, 求一阶近似解。

- (a) $\dot{u} + u = 0$
- (b) $\ddot{u} + u + u^2 = 0$
- (c) $\ddot{u} + u - u^2 = 0$
- (d) $\ddot{u} - u + u^2 = 0$
- (e) $\ddot{u} + u + u^3 = 0$
- (f) $\ddot{u} + u - u^3 = 0$
- (g) $\ddot{u} - u + u^3 = 0$
- (h) $\ddot{u} + u^3 = 0$
- (i) $\ddot{u} - u - u^2 = 0$

$$(j) \ddot{u} - u - u^3 = 0$$

$$(k) \ddot{u} - u - \frac{\lambda}{a-u} = 0$$

1.2 确定下列系统的一阶近似的幅频关系。

$$(a) \ddot{u} + \omega_0^2 u (1 + u^2)^{-1} = 0 \quad \left(\omega = \omega_0 - \frac{3}{8} \omega_0 a^2 \right)$$

$$(b) \ddot{u} + \omega_0^2 u + \alpha u^5 = 0 \quad \left(\omega = \omega_0 + \frac{5}{16} \omega_0^{-1} \alpha a^4 \right)$$

$$(c) \ddot{u} - u + u^3 = 0 \quad \left(\omega^2 = 2 - 3a^2, 0 < a < \sqrt{2} - 1; \omega^2 = -1 + \frac{3}{4} A^2, A > \sqrt{2} \right)$$

$$(d) \ddot{u} + \omega_0^2 u + \alpha u^2 \ddot{u} = 0 \quad \left(\omega = \omega_0 - \frac{3}{8} \omega_0 \alpha a^2 \right)$$

1.3 质量为 m_0 的质点在光滑水平面与刚度为 k 的弹簧连接,其相对运动为

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 \dot{u}}{\left(1 - \frac{\dot{u}^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right] + ku = 0$$

其中 c 为光速。试确定二阶近似的幅频关系。

1.4 考虑如图 E1.1a 系统

(a) 确定该系统幅频关系的一阶近似, 弹簧力为 $f(x) = k_1 x + k_3 x^3$, x 为弹簧的变形。

(b) 假如该系统转动 90° , 如图 E1.1(b) 所示。试比较与图(a)的幅频关系。

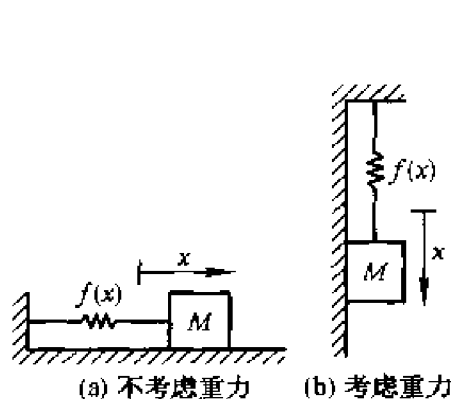


图 E1.1

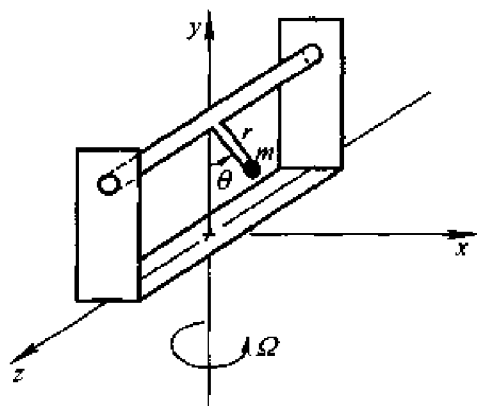


图 E1.2

1.5 图 E1.2 所示的刚架结构在外力作用下绕固定轴以角速度 Ω 转动。当刚架转动时, 单摆产生振动。

(a) 证明角 θ 的基本方程为

$$\ddot{\theta} + (1 - A \cos \theta) \sin \theta = 0.$$

其中 $\Delta = \left(\frac{\Omega^2 r}{g} \right)$, 新自变量为 $\tau = \left(\frac{g}{r} \right)^{\frac{1}{2}} t$ 。

(b) 证明该方程可被积分生成下列方程

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 - F(\theta)$$

其中 $\dot{\theta}_0$ 是 $\theta=0$ 处的速度, $F(\theta) = 1 - \frac{1}{2} \Delta - \left(1 - \frac{1}{2} \Delta \cos \theta \right) \cos \theta$ 。试讨论当 Δ 增加时, 运动特征的改变。 $\Delta=1$ 的重要意义是什么?

(c) 设 $\Delta > 1$ 对于小而有限运动, 求得幅频关系的一阶近似。

(d) 设 $\Delta < 1$, 对于小而有限运动, 求得幅频关系的一阶近似。

1.6 如图 E1.3 所示的与轮轴连接的刚性杆。当摆来回摆动时, 轮子只滚不滑。只有摆端点的球具有相当大的质量, 它可被考虑为质点。

(a) 证明 θ 的基本方程为

$$(l^2 + r^2 - 2rl \cos \theta) \ddot{\theta} + rl \sin \theta \dot{\theta}^2 + gl \sin \theta = 0$$

(b) 对于小而有限的运动, 确定一阶近似的幅频关系。

1.7 考虑图 E1.4 的结构。质量块 m 仅沿水平方向移动。应用该模型来描述立柱, 我们示范通过确定动力方程奇异点 $x=0$ 的性质, 是如何研究静态稳定性的。这个“动态”逼近便于应用, 其论据比“静态”逼近更令人满意。

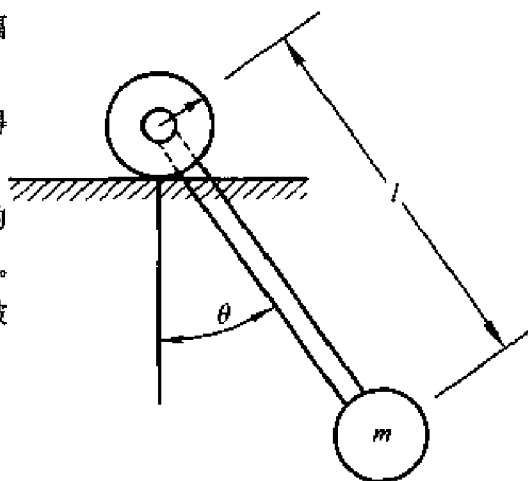
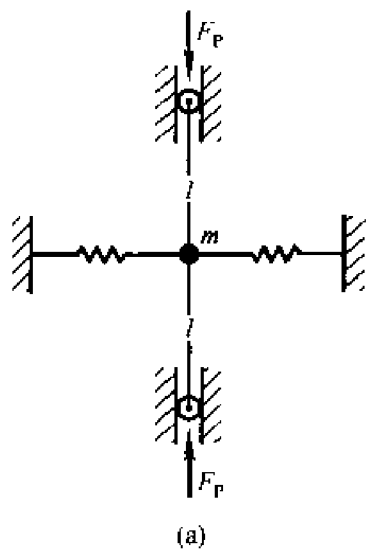
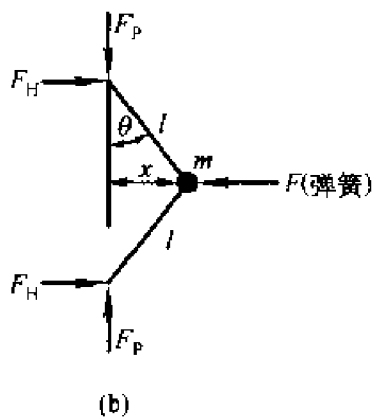


图 E1.3



(a)



(b)

图 E1.4

(a) 除了质量块 m 外, 其余的质量全部忽略掉, 证明质量块 m 运动的基本方

程为

$$m\ddot{x} + \left(k_1 - \frac{2P}{l}\right)x + \left(k_3 - \frac{P}{l^3}\right)x^3 + \dots = 0$$

弹簧力由

$$F = k_1 x + k_3 x^3 + \dots$$

给定。

该方程可写成一般形式

$$\ddot{x} + a_1 x + a_3 x^3 + \dots = 0$$

(b) 对于 $a_1 < 0$ 和 $a_1 > 0$ 绘出势能和相平面草图。这些草图描述了在系统平衡点 $x=0$ 处摄动时系统的行为。 P 的临界值等于多少(即对小初始摄动能引起大响应的压杆屈曲临界载荷)?

1.8 (a) 考虑由下列非线性方程描述的系统

$$\ddot{x} + a_1 x + a_3 x^3 = 0$$

应用等效线性方法,证明该非线性方程可由下列方程代替

$$\ddot{x} + \lambda x = 0$$

其中

$$\lambda = \frac{a_1 \langle x^2 \rangle + a_3 \langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle}$$

令 $x = a \cos(\omega t + \beta)$, a 和 β 是积分常数,且 $\omega = \sqrt{\lambda}$ 。在区间 $\frac{2\pi}{\omega}$ 上进行平均得到

$$\lambda = a_1 + \frac{3}{4} a_3 a^2$$

(b) 现在考虑有非线性方程决定的系统

$$\ddot{x} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0$$

应用等效线性方法,由下列方程代替原非线性方程

$$\ddot{x} + \lambda x = 0$$

其中

$$\lambda = \frac{a_1 \langle x^2 \rangle + a_2 \langle x^3 \rangle + a_3 \langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle}$$

证明:在这种情形下,也可得到

$$\lambda = a_1 + \frac{3}{4} a_3 a^2$$

(c) 你能否对等效线性方法给出一些结论。

1.9 图 E1.5 所示的圆柱只滚不滑的来回滚动。

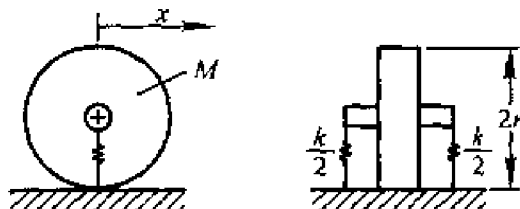


图 E1.5

(a) 证明运动方程可写为

$$\ddot{x} + \omega^2 \left[1 - \frac{f}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \right] x = 0$$

其中 $\omega^2 = \frac{2k}{3M}$, f 为弹簧的自由程度。所有长度已经对 r 做了无量纲化。

(b) 对于 $f = \sqrt{2}$, 在平衡位置附近, 求幅频关系的一阶近似。

1.10 考虑系统

$$\ddot{u} - \delta(1-u^2)\dot{u} = -\epsilon[\dot{u} + (1-\delta)\dot{u}]$$

$\epsilon \ll 1, \delta = O(1)$ 。

(a) 当 $\epsilon = 0$ 时, 证明

$$\dot{u}^2 + 2\delta \left(\frac{1}{12}u^4 - \frac{1}{2}u^2 + bu \right) = E$$

再证明: 如果 $|b| < \frac{2}{3}$, 系统有三个平衡点; 而 $|b| > \frac{2}{3}$ 时, 系统仅有一个平衡点。

(b) 对于小 ϵ , 确定系统的一阶近似解。

第二章 相平面法

§ 2.1 相平面 相迹

相平面法是研究非线性振动的有效方法之一,它是一种几何方法,也称定性方法。相平面法可将振动系统一切可能的运动都表示在相平面上,可一目了然。另外定量的近似方法(如渐近法、摄动法等)要求非线性振动方程是拟线性的,如果系统中有强非线性项,则这些方法就不适用了。但可用相平面法对强非线性系统进行研究。

先以一个自由度的非线性保守系统为例,说明相平面法的特点,设振动方程

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (2.1.1)$$

作代换 $y = \dot{x}$, 则方程(2.1.1)可化成一阶方程组

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

函数 $f(x)$ 中的非线性项不一定是小项。以 x (可看作质点的位移) 和 y (可看作质点的速度) 为坐标, 作一个坐标平面 Oxy , 则系统在每一瞬时的运动状态 (x, \dot{x}) , 可用 x 和 y 的一对数值 (x, y) 来表示, 而这正好是 Oxy 平面上的一个点; 反之, Oxy 平面上的一个点 $M(x, y)$ 对应系统的一个运动状态。故此坐标平面 Oxy 称为相平面(或状态平面), 它表示一个自由度系统的所有可能振动状态的集合。由于相平面上每个不同的点对应于系统的不同状态, 因此可以用一个动点在相平面上的运动表示系统运动状态的变化, 这个在相平面上以 (x, y) 为坐标的

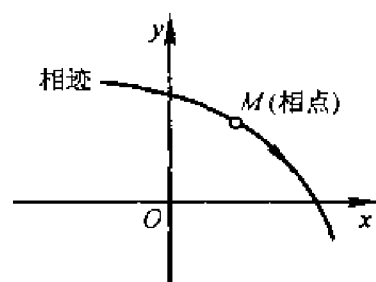


图 2.1

表示系统运动状态变化的动点称为相点, 相点在相平面上运动的轨迹称为相迹(或相轨线), 并在相迹上标以相应的箭头, 表示相点沿相迹运动的方向, 如图 2.1 所示。相点沿相迹运动的速度称为相速度, 所以式(2.1.2)可以看作是相速度的投影方程。

按照以上的表示方法,我们就有了系统的运动和相平面上的相点的——对应关系。

(1) 系统在某一瞬时的运动状态 (x, \dot{x}) 对应于相点在该瞬时在相平面上的一个位置,即相平面上的一个点 (x, y) 。

(2) 系统运动状态的改变对应于相点在相平面上位置的改变。

(3) 系统的振动方程 $\ddot{x} + f(x) = 0$ 对应相速度的投影方程 $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -f(x)$ 。若将(2.1.2)中的两式相除,可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f(x)}{y} \quad (2.1.3)$$

上式表示相平面上的一个方向场,也就是相迹曲线的微分方程式。

(4) 求解系统的振动方程(2.1.1),对应于求相点在相平面上的运动方程 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$,即求解相迹的参数方程(以 t 为参数)。这相当于求满足方向场(2.1.3)的积分曲线族和相点沿此曲线族(相迹)运动的规律。

一般情况下,一个自由度自治系统的振动方程可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

其中 $\dot{x}=y$,函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在整个相平面上是解析的,且系统的状态与相平面上的点 (x, y) 保持相互单值、连续地对应。

式(2.1.4)中的两式相除,得一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (2.1.5)$$

它确定相平面上的一个方向场。因此,关于保守系统运动和相平面的表示之间的对应关系,这里也同样成立。

根据以上关于函数 $f(x)$, $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 的要求,可知方程(2.1.3)和(2.1.5)均满足解的存在性与唯一性的柯西条件。因此,对任意给定的起始条件,必存在唯一的函数组 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 满足方程(2.1.3)、(2.1.5)和给定的起始条件。

这样对于一个自由度非线性自治系统,用相平面法研究其运动规律的问题,就是根据由振动方程变换得到的方向场求出积分曲线,并求出相点沿此曲线族的运动规律。了解系统的运动性质的关键在于积分曲线的性状(拓扑结构),至于它们的定量变化是不重要的。同样,相点沿相迹运动的定量规律是不重要的,关键是其运动方向和特性。所以相平面法属于定性的方法,它能给出系统运动性质的一个全局的“图像”。

将相平面的概念加以推广,就可以建立表示任一 k 个自由度非线性

系统运动的相空间的概念。 k 个自由度系统的振动方程为

$$\ddot{q}_i = \phi_i(q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k, t) \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (2.1.6)$$

其中 q_i 是系统的广义坐标, \dot{q}_i 是广义速度, ϕ_i 是 q_i, \dot{q}_i 的非线性函数和 t 的周期函数。对于自治系统, 则 ϕ_i 不显含 t 。

在研究非线性振动问题时, 广义坐标和广义速度在形式上有相同的作用, 可以把它们同等看待, 例如在一个自由度系统的分析中, 就是将 x 和 \dot{x} 同等看待的。下面就从形式上用统一的符号表示。

设

$$x_i = q_i, x_{i+k} = \dot{q}_i \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

在几何上可以简单地统称为系统的坐标, 故二阶振动方程组(2.1.6)可以化成 $n=2k$ 个一阶微分方程式

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (2.1.7)$$

x_1, x_2, \dots, x_n 在同一瞬时的值, 表示系统在该瞬时的运动状态, 在几何上对应 n 维空间的一个点, 故我们把这一表示系统状态的空间称为相空间。相空间中以 (x_1, x_2, \dots, x_n) 为坐标的表示系统状态的动点称为相点, 而方程组(2.1.7)的解

$$x_i = x_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.1.8)$$

为系统的运动方程, 可解释为相点在相空间中的运动方程, 也可看成相迹的参数方程, 所以也可称它是式(2.1.7)的积分曲线。若加上时间 t 这一变量, 与 x_1, x_2, \dots, x_n 构成 $n+1$ 维空间, 称为增广相空间。

当 f_i 不显含 t 时, 式(2.1.7)变成

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.1.9)$$

它在相空间所确定的方向场是定常的, 即相迹在每一点的切线方向是恒定而不随时间变化的, 这类系统称为自治系统。式(2.1.7)所确定的方向场是非定常的, 相迹在每一点的切线方向是随时间而变化的, 这类系统称为非自治系统。

§ 2.2 奇点分析

设一个自由度自治系统的振动方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

其中 f_1 和 f_2 为变量 x_1, x_2 的非线性函数, 都有一阶偏导数。根据(2.2.1)可得

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (2.2.2)$$

式(2.2.2)给出了相平面上除平衡位置(奇点)外的相迹上各点切线的斜率,即方向场。在平衡位置处,由于同时存在有 $\dot{x}_1 = 0$ 和 $\dot{x}_2 = 0$,即 $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$,因此,在经过平衡位置时其积分曲线切线的斜率具有不定值。所以,在相平面上,除了孤立奇点外不存在有任意两条积分曲线相交的点。

相平面上孤立奇点的位置可以从下列方程

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

来求得。由于方程 f_1 和 f_2 是非线性的,故方程(2.2.3)中可能存在多个孤立奇点。下面我们只研究奇点在原点附近系统的运动性质。这样处理问题并不妨碍问题的普遍性,通过简单的坐标变换就可以把其他位置的奇点平移到原点来。

设方程(2.2.1)的奇点在原点处 $x_1 = x_2 = 0$,将 f_1 和 f_2 在原点附近展成泰勒级数

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \epsilon_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \epsilon_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

其中 $a_v = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_j}$

函数 ϵ_1 和 ϵ_2 为 x_1 和 x_2 的二次以上函数,如设

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

则(2.2.4)式可以写成矩阵的形式

$$\dot{x} = ax + \epsilon \quad (2.2.5)$$

庞加莱曾证明,在行列式 $\det a \neq 0$ 的情况下,当 x 趋近于零时, ϵ 作为高阶无穷小也趋近于零,所以方程(2.2.5)可以用线性方程

$$\dot{x} = ax \quad (2.2.6)$$

来代替。

为了求方程(2.2.6)的解,采用变换

$$x = bu \quad (2.2.7)$$

其中 b 为一非奇异常数矩阵(即 $|b| \neq 0$)。将(2.2.7)式代入(2.2.6),两端乘以逆矩阵 b^{-1} ,则得

$$\dot{u} = cu \quad (2.2.8)$$

其中

$$c = b^{-1}ab \quad (2.2.9)$$

上式表示了矩阵间的相似变换。即 c 和 a 是相似的, 它们具有相同的特征值。如我们能找出一个矩阵 b , 通过相似变换 (2.2.9), 使矩阵 c 成为一个对角阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 这样就可以使方程 (2.2.8) 变成最简单的形式。对角阵的元素分别为矩阵 a 的两个特征值 λ_1 和 λ_2 。

下面根据特征值 λ_1 和 λ_2 的各种不同情况, 讨论系统在平衡点附近相迹的分布规律, 并由此决定奇点的各种类型。

1. λ_1 和 λ_2 为两个不同的实根

根据方程 (2.2.8) 和

$$c = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

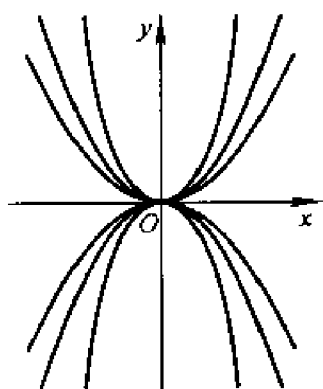
得

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 u_1, \quad \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2$$

其解为

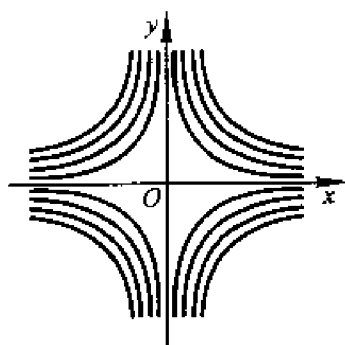
$$u_1 = u_{10} e^{\lambda_1 t}, \quad u_2 = u_{20} e^{\lambda_2 t} \quad (2.2.10)$$

如果特征值 λ_1 和 λ_2 是同号, 对应于此情况的奇点称为结点。如特征值都是负号, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, u_1 和 u_2 都趋近于零, 因此结点是稳定的。反之, 如特征符号均为正, 则结点是不稳定的。图 2.2 为稳定结点的相图 ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$)。



结点

图 2.2



鞍点

图 2.3

如 λ_1 和 λ_2 为两个符号相异的实根, 则有一个解随着时间的变化趋近于零, 而另一个解则趋近于无穷大。对应于这种情况的奇点称为鞍点, 平衡位置是不稳定的, 其相图如图 2.3 所示, ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$)。

2. λ_1 和 λ_2 为相等的实根

此时矩阵 $[c]$ 为

$$[c] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (2.2.11)$$

或

$$[c] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (2.2.12)$$

对应于(2.2.11)的情况,方程(2.2.8)成为

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 u_1, \quad \dot{u}_2 = \lambda_1 u_2 \quad (2.2.13)$$

上式的解为

$$u_1 = u_{10} e^{\lambda_1 t}, \quad u_2 = u_{20} e^{\lambda_1 t} \quad (2.2.14)$$

相迹为通过原点的直线。如 $\lambda_1 < 0$ 则平衡位置为稳定的结点, $\lambda_1 > 0$ 则为不稳定的结点。对应于(2.2.14)的情况叫退化结点,由于这种情况很少见到,此处不作详细讨论。

3. λ_1 和 λ_2 为共轭复数

此时

$$[c] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

则得

$$\dot{u}_1 = (\alpha + i\beta)u_1, \quad \dot{u}_2 = (\alpha - i\beta)u_2 \quad (2.2.15)$$

其中

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

或

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10} e^{\alpha t} e^{i\beta t} = u_{10} e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \\ u_2 &= u_{20} e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = u_{20} e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t) \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

上式为对数螺线方程,这时奇点称为焦点。如 $\alpha < 0$ 为稳定焦点(图2.4), $\alpha > 0$ 则为不稳定焦点。

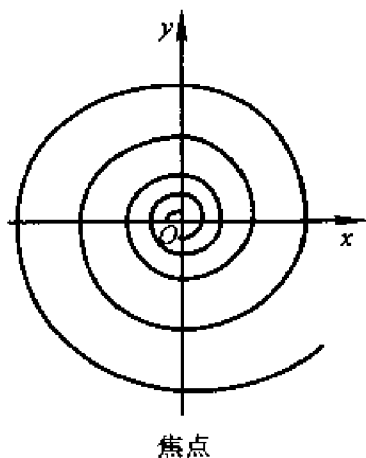


图 2.4

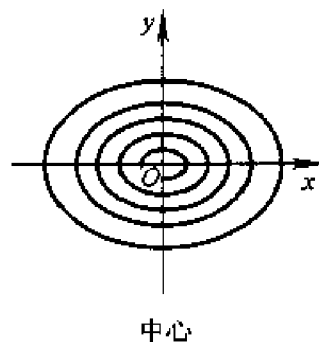


图 2.5

当 $\alpha=0$ 时, 向径保持为常数, 相迹为封闭的圆, 这种奇点称为中心 (图 2.5)。

现求特征值 λ_1 和 λ_2 。根据特征方程

$$\det(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

或

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (2.2.17)$$

设

$$a_{11} + a_{22} = p, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = q \quad (2.2.18)$$

则得特征值

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(p \pm \sqrt{p^2 - 4q} \right) \quad (2.2.19)$$

根据上式, 将上述各种情况综合分析如下。

(1) $p^2 > 4q$

此时存在两相异实根, 当 $q > 0$ 时, 两根同号。在 p 为负的情况下, 若同时 $q < 0$, 则奇点为稳定结点。当 $q < 0$ 时, 会出现有一个根为正, 另一个根为负的情况, 此时奇点为鞍点。

(2) $p^2 = 4q$

根据 (2.2.18) 式则有

$$p^2 - 4q = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$$

从上式知, 除非 a_{12} 和 a_{21} 的符号相异, 否则是不可能出现有等根的情况的。

(3) $p^2 < 4q$

如果 $p < 0$, 则奇点为稳定焦点, 反之, 则为不稳定焦点。 $p = 0$ 时, 奇点为中心。

根据以上分析, 可把各种情况用图 2.6 全面地表示出来。

例 应用奇点分析方法讨论图 2.7 所示的单摆在其不同平衡位置附近的运动性质。

单摆的运动方程为

$$ml \ddot{\theta} = -F_p \sin \theta$$

设

$$\theta = x_1, \quad \dot{\theta} = x_2, \quad \omega_n^2 = \frac{g}{l}$$

则上式成为

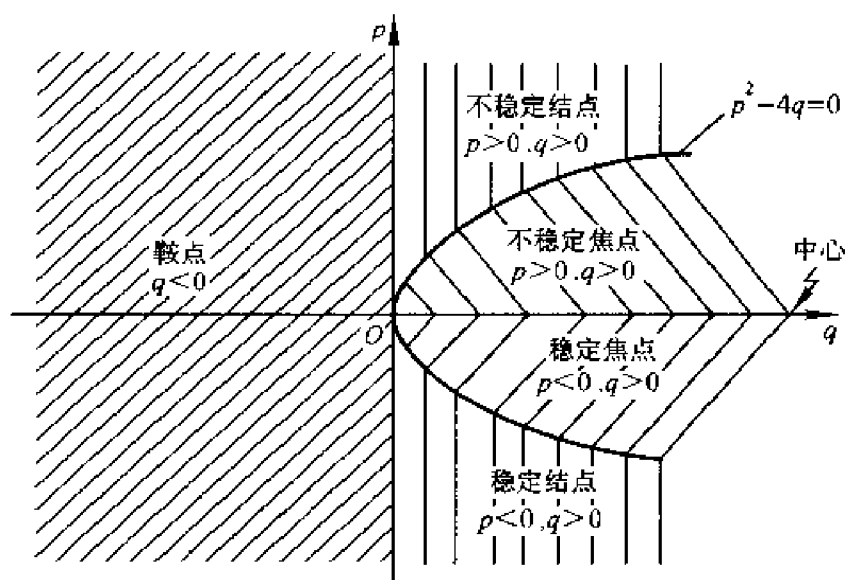


图 2.6

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\omega_n^2 \sin x_1$$

平衡位置为

$$x_1 = \pm k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$x_2 = 0$$

实际平衡位置只有两个：一个是 $x_1 = 0$ ，另一个是 $x_1 = \pi$ 。

对于 $x_1 = x_2 = 0$ 的情况，振动方程可线性化为

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\omega_n^2 x_1$$

则其系数矩阵 \mathbf{a} 为

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_n^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

或

$$\lambda^2 + \omega_n^2 = 0$$

特征值为共轭虚根，且 $p=0, q>0$ ，故知此奇点为中心，即单摆相对于平衡位置 $x_1=0 (\theta=0), x_2=0 (\dot{\theta}=0)$ 的运动为周期振动。

下面讨论 $x_1=\pi$ 和 $x_2=0$ 的情况，此时振动方程为

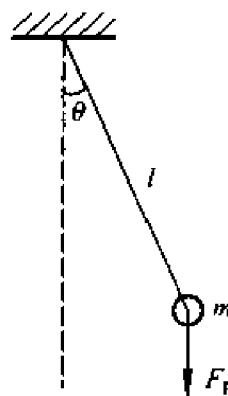


图 2.7

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad \frac{dx_2}{dt} = -\omega_n^2 x_1$$

系数矩阵 a 为

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_n^2 & 0 \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(a - \lambda I) = \lambda^2 - \omega_n^2 = 0$$

特征值为

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_n$$

由于特征值为实数且符号相反,所以此时的奇点为鞍点。显然,单摆在最高位置 $x_1 = \pi$ 时是不稳定的。

§ 2.3 保守系统相迹的性质

将方程(2.1.3)分离变量后,积分一次可得

$$\frac{y^2}{2} + u(x) = h \quad (2.3.1)$$

上式 h 为积分常数,由起始条件确定。 $u(x) = \int f(x) dx$ 是系统的势能,

$\frac{y^2}{2} = \frac{\dot{x}^2}{2}$ 是系统的动能,故此式表示系统的机械能守恒。

如果我们给定一个 h 值,则方程(2.3.1)表示相平面上的一条曲线,它上面的各个点对应同一个 h 值,故也称为等能量曲线,它也就是微分方程(2.1.3)的一条积分曲线,也就是相迹。故方程(2.3.1)是方程(2.1.3)的积分曲线族方程,或称为相迹方程。

下面首先讨论微分方程(2.1.3)的积分曲线(相迹)的某些普遍性质。

2.3.1 相迹的普遍性质

(1) 积分曲线族所有曲线均对称于 Ox 轴,当 y 改变正负号时,式(2.3.1)不变。

(2) 相平面上同时有

$$y=0 \text{ 和 } f(x)=0$$

的点,这些点是 Ox 轴上以

$$f(x)=0$$

的根为坐标的点,它们对应于系统的平衡状态。且有

$$\dot{x}=0, \quad \dot{y}=0$$

故称为平衡点。若在起始瞬时相点落在某一平衡点上,则相点将静止在该点上。同时在这些点上有

$$u'(x) = f(x) = 0$$

势能具有驻定值,或为极大,或为极小,或对应于切线成水平的拐点。另外,这些点也是积分曲线的奇点,因为在这些点上积分曲线的斜率

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y}$$

为 $\frac{0}{0}$ 。

(3) 在积分曲线与 Ox 轴相交的正常点(不是奇点)上,积分曲线的切线应垂直于 Ox 轴,因为在这些点上有 $y=0$,且 $f(x) \neq 0$,故 $\frac{dy}{dx} = \infty$ 。

(4) 在积分曲线与通过奇点且平行于 Oy 轴的直线的交点(不包括奇点)上,积分曲线的切线应与 Ox 轴平行。因为在这些点上,有 $f(x) = 0$, $y \neq 0$,故 $\frac{dy}{dx} = 0$ 。

(5) 相点沿相迹的运动,在相平面上半平面应自左向右,因为在上半平面,有 $y > 0$,即 $\dot{x} > 0$,也就是相速度在 Ox 轴上的投影为正;反之,在下半平面应自右向左,因为在下半平面,有 $y < 0$,即 $\dot{x} < 0$,也就是相速度在 Ox 轴上的投影为负。

2.3.2 与能量曲线个别段对应的相迹的形状

将方程(2.3.1)改变为

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{h - u(x)} \quad (2.3.2)$$

通常函数 $f(x)$ 都用图解形式给出(如图 2.8a),此时,函数 $z = u(x)$ 也可用图解积分法求得(如图 2.8b)。为了根据函数 $u(x)$ 和起始条件确定的 h 值,在相平面上构造积分曲线(相迹),我们利用一个辅助平面 Oxz ,在此平面上作出势能随 x 的变化关系

$$z = u(x)$$

此辅助平面称为能量平衡平面,此曲线称为能量曲线(如图 2.9 所示)。

再将由起始条件确定的 h 值用直线 $z = h$ 示于能量平衡平面上,构成能量平衡图(图 2.9)。从图中找出差值 $h - u(x)$,从而可按式(2.3.2)在相平面上构造相迹。

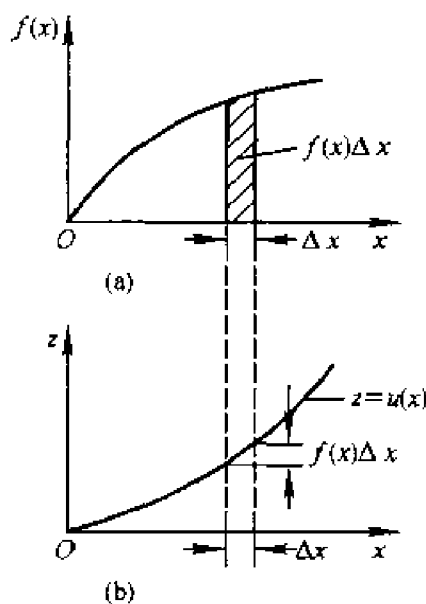


图 2.8

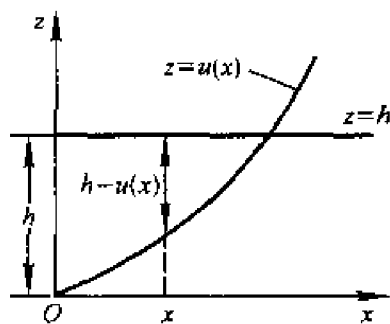


图 2.9

由式(2.3.2)可知,只有当 $h - u(x) \geq 0$ 时, y 有实值,积分曲线存在。对应于 $h - u(x) < 0$, y 无实值,积分曲线不存在。

为了在相平面上作图简便起见,将纵坐标 y 改为 $\frac{y}{\sqrt{2}}$,这并不影响积分曲线的性状。

(1) 能量曲线上 $z = u(x)$ 与直线 $z = h$ 相交的这一段能量曲线 $z = u(x)$ 可根据给定的 $f(x)$ 图作出(如图 2.10 所示),并根据起始条件作出直线 $z = h$ 。设 $z = u(x)$ 与 $z = h$ 交点的横坐标为 $x = a$,且在该点 $f(a) = u'(a) \neq 0$,在相平面上与此点对应的点为 $A(a, 0)$,即相迹在该点与 Ox 轴相交,且为一正常点,故相迹在 A 点的切线与 Ox 轴垂直。

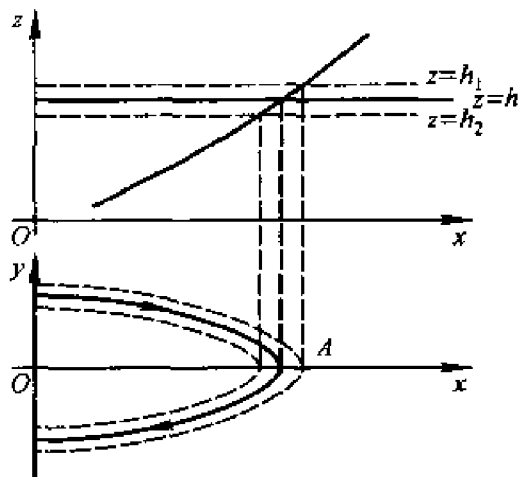


图 2.10

当 $x > a$ 时, $h - u(x) < 0$, y 无实值, 故 A 点右侧无相迹。在 A 点附近的相迹图形如图 2.10 所示。相点沿相迹的运动方程, 在上半平面自左向右, 在下半平面自右向左。在相平面上作出的这种带有指向的相迹(图 2.10)。当 h 稍有变动时, 相迹的形状并无变化, 对应于 h_1 ($h_1 > h$), 相迹套在前者的外边; 对应于 h_2 ($h_2 < h$), 相迹套在里边。

(2) 能量曲线上有孤立极小值的一段。设当 $x = a$ 时, 势能 $u(x)$ 有极小值, 即 $z = u(a) = h_0$ 为极小, 则 $f(a) = u'(a) = 0$ 。

若总能量的起始值也是 h_0 , 则 $z = u(x)$ 与 $z = h_0$ 仅相交于一点 (a, h_0) , 且在 $x = a$ 的邻域内恒有 $h_0 - u(x) < 0$ 。在 $x = a$ 处, 在相平面上有

$$y = 0 \text{ 和 } f(a) = 0$$

故这时相迹退化为 Ox 轴上的一个表示系统平衡状态的奇点 A 。若取总能量的起始值 $h_1 > h_0$ 但又充分接近 h_0 , 则在 $x = a$ 足够小的邻域内恒有 $h_1 - u(x) \geq 0$, 因此在相平面上对应的相迹为围绕 A 点的封闭曲线族。

在这种情况下, 平衡点 $A(x = a)$ 为中心, 它对应于系统的稳定平衡状态, 邻近 A 点的相迹为围绕 A 点的封闭曲线, 且这些曲线层层相套, 组成一封闭曲线族, 如图 2.11 所示。相点沿相迹的运动方向如图所示, 而相速度大小为

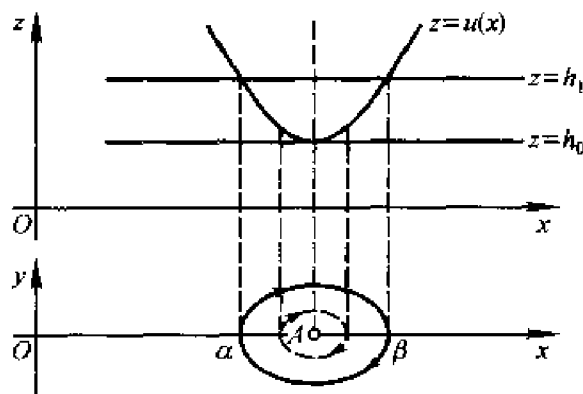


图 2.11

$$v_{\text{相}} = \sqrt{y^2 + [f(x)]^2}$$

而 y 和 $f(x)$ 不同时为零(除奇点 A 外), 因此相点在相迹的每一点上, 都具有不等于零的有限的速度, 故相点沿相迹的运动是周期性的, 每经过一个周期又回到原来的位置, 它表示系统的周期运动。

(3) 能量曲线上有孤立极大值的一段。设 $x = a$ 时, 势能有极大值, 即 $z = u(a) = h_0$ 为极大, 则 $f(a) = u'(a) = 0$, 若起始总能量亦为 h_1 , 则此时对应的积分曲线为相交于 A 点的两条曲线, A 点为奇点(即平衡点), 表示系统的平衡状态。此时相迹表现为平衡点和被 A 点分隔开的积分

曲线的四个分支(图 2.12 中的 I、II、III、IV 四个分支),相点沿相迹的运动方向如图所示。显然落在任一支上的相点都不可能越过 A 点而进到另一分支上去,所以四个分支是四条独立的相迹,这也是相迹与积分曲线的不同之处。

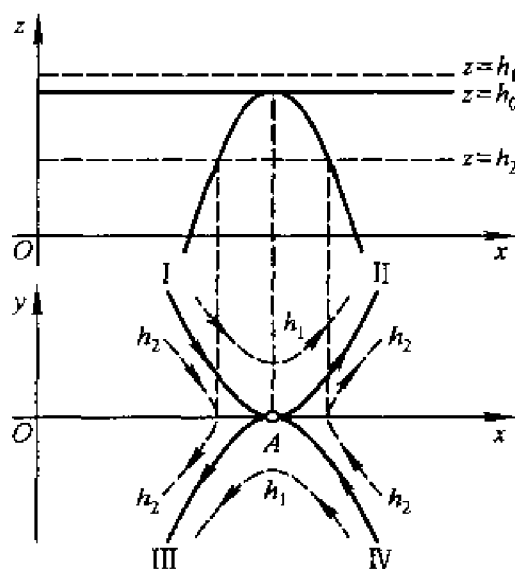


图 2.12

这四个分支将相平面分成了四个区,在 h_0 附近当初始总能量 $h_1 > h_0$ 时,相迹落在上、下区内,当初始总能量 $h_2 > h_0$ 时,相迹落在左右区内。积分曲线类似于双曲线,相点沿这些相迹的运动方向如图所示。显然,当相点落在邻近平衡点 A 的这种相迹上时,它将随时间而远离 A 点,同样当相点落在相迹 II 和 III 上时,它也将随时间而远离 A 点,故平衡点 A 为鞍点。它表示系统的不稳定平衡状态。

当相点落在相迹 I 或 IV 时,会逐步趋近于 A 点,但这与平衡点表示系统不稳定平衡状态的结论并不矛盾。第一,在 A 点邻域内,只有在相点恰好落在相迹 I 或 IV 上时,这种情况才会发生,并且只要稍有扰动,相点就会远离 A 点,所以这样的几率是极小的。第二,即使在这种情况下,相点也仅是趋向于 A 点,而不可能达到 A 点,因为达到 A 点需要无限大的时间。

(4) 能量曲线上有水平切线的拐点的一段。设能量曲线在 $x=a$ 处有一个水平切线的拐点,则有 $f(a)=u'(a)=0$,又设 $u(a)=h_0$,若起始总能量亦为 h_0 ,则在相平面上的积分曲线为一通过 A 点($x=a$)的曲线, A 为奇点(平衡点),表示为系统的平衡状态。相迹为平衡点 A 和被 A 点分隔开的积分曲线的两个分支 I 和 II(图 2.13 所示),此相迹将相平面分为左右两个区域。当起始总能量在 h_0 附近变动时,若 $h_1 > h_0$,则对应的相

迹落在右区, 当 $h_2 < h_0$ 时, 相迹落在左区。相点沿相迹的方向如图 2.13 所示。显然, 当相点落在平衡点 A 的邻域内的这种相迹上或相迹 II 上时, 它将随时间而远离平衡点 A 。所以平衡点 A 与鞍点相似, 但属于退化情况, 不是鞍点, 它表示系统的不稳定平衡状态。

总之在保守系统中平衡点只能是中心、鞍点或退化情况的奇点, 不存在独立的封闭相迹, 当势能为极小时, 系统的平衡状态是稳定, 平衡点为中心型奇点; 当势能为极大时, 平衡点为鞍点型奇点, 系统的平衡状态是不稳定的; 当势能有拐点时, 平衡点属于退化奇点(亦称尖点), 系统的平衡状态亦是不稳定。

2.3.3 在整个相平面上相迹的性质

(1) 直线 $z=h$ 与能量曲线 $z=u(x)$ 既不相交, 也不相切的情况。这时若直线 $z=h$ 处在曲线 $z=u(x)$ 的下方, 则系统的运动不可能实现。

若直线 $z=h_0$ 处在曲线 $z=u(x)$ 上方, 则相迹为对称 Ox 轴的两条曲线, 向两侧无限延伸, 相点将沿此种相迹朝单方向运动至无限远, 这种相迹称为逸散轨线, 相点的这种运动称为逸散运动, 如图 2.14 所示。

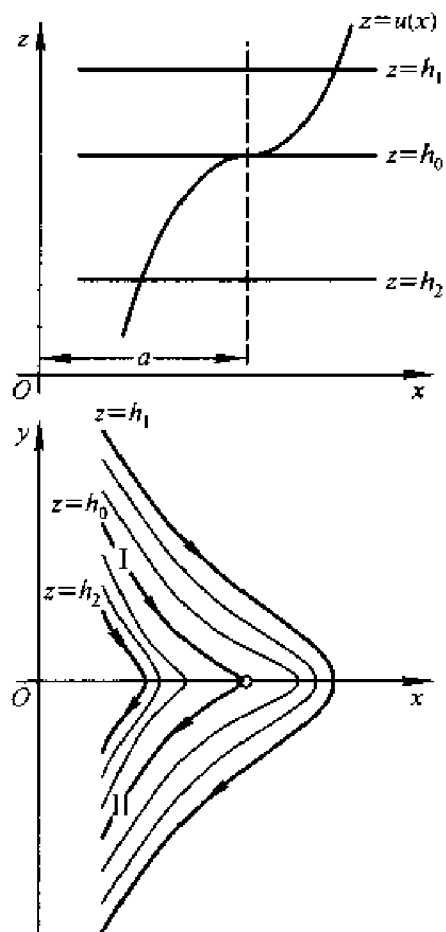


图 2.13

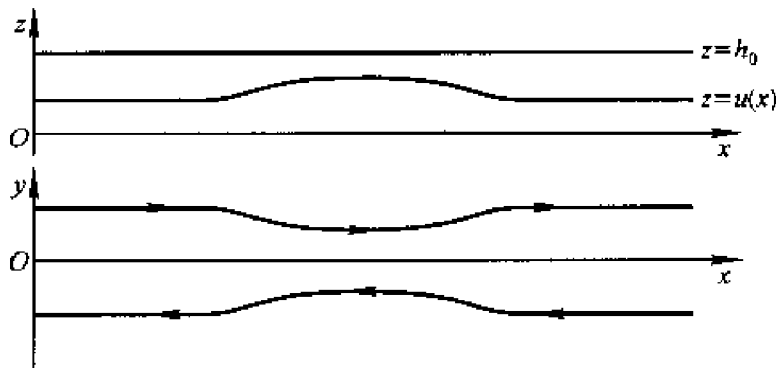


图 2.14

(2) 直线 $z=h_0$ 与曲线 $u(x)$ 既相交叉又相切于若干点的情况。对于

$u(x) > h_0$ 的那些 x 值, 相迹不存在。

与函数 $z = u(x)$ 的孤立极小值对应的是孤立平衡点(如图 2.15), 它表示系统的稳定平衡状态。当 h 增大时, 形成围绕此种孤立平衡点的封闭相迹, 表示系统的周期运动。

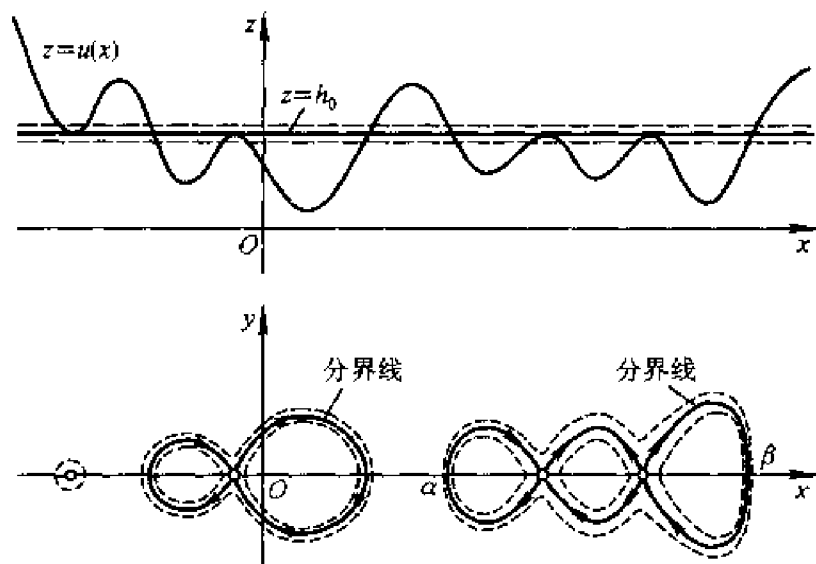


图 2.15

在孤立的有限段上, 或为对应于周期运动的封闭相迹, 或为有自交点的奇型封闭线, 即所谓分界线(或分隔线)。图中第 1 类相迹即为封闭相迹, 第 2 类曲线即为分界线。分界线的自交点对应于势能的孤立极大值, 属于鞍点, 表示系统的不稳定平衡状态。分界线将相平面分成不同类型相迹的若干区域, 显然, 如果假定相平面上所有起始值的出现是等概率的, 那么出现相点恰巧落在分界线上的起始条件上的概率为无穷小, 即分界线本身并不代表真实的运动, 而真实运动总是与它有偏差的, 或为被分界线形成的环所包围的封闭相迹(如图中第 1 类曲线), 或为包围分界线形成的相邻环的封闭相迹(如图中第 3 类曲线)。由上述可见, 知道分界线, 对于说明积分曲线在相平面上的分布及性状是有极重要的意义的。

无限大相迹段, 为无限环链形状分界线。这是一种单面逸散曲线, 即当 $t \rightarrow +\infty$ (或 $-\infty$) 时是逸散的, 而当 $t \rightarrow -\infty$ (或 $+\infty$) 时是有限的(如图 2.16 所示)。这种相迹我们也称之为分界线, 因为其上一定有对应于直线的 $z = h$ 和曲线 $z = u(x)$ 的切点的鞍点型平衡点(曲线的自交点), 更主要的是随着 h 的增加或减少, 邻近相迹的性状将有本质上的变化。

当直线 $z = h$ 是曲线 $z = u(x)$ 的渐近线时, 对应的相迹也是单面逸散的曲线。当 h 改变时, 相迹的性状会发生本质上的变化(如图 2.17), 当 h 减小时, 相迹会变成封闭曲线, 所以这种相迹也是分界线。

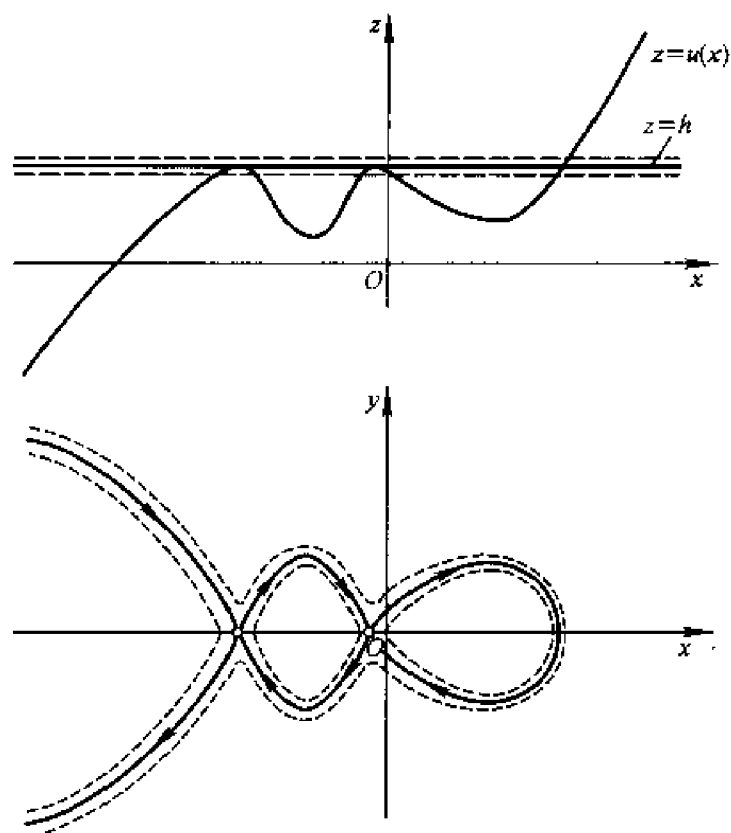


图 2.16

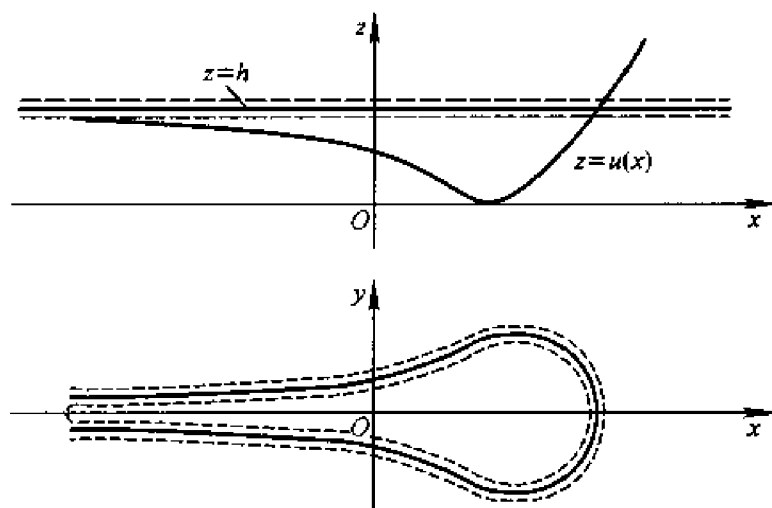


图 2.17

综上所述可知,保守系统在相平面上可能出现的不同性状的相迹及其所表示的系统运动有如下几种:

- (a) 孤立奇点(中心),表示系统的稳定平衡状态。
- (b) 鞍点和退化奇点(尖点),表示系统的不稳定平衡状态。
- (c) 围绕中心的封闭轨线或包围由分界线形成的几个相邻环的封闭

轨线,均表示系统的周期运动。

(d) 逸散轨线,表示系统的双面逸散运动。

(e) 分界线,当分界线形成几个相邻环时,边界的环是一条相迹,而中间环则由两条相迹组成(见图 2.15),相点沿其中的任一条相迹的运动,都是渐近地趋向于平衡点的,它表示系统的有限运动。当分界线为单面逸散轨线时,它表示系统的单面逸散运动。

对非线性保守系统来说,所有运动或者是周期的,或者是双面逸散的。而分界线的意义不在于它们所表示的系统运动状态,而在于它们在相平面上将不同类型的相迹分隔开来。

最后,我们研究一下奇点在相平面 Ox 轴上的分布规律和奇点与封闭相迹共存的规律。显然,函数 $z=u(x)$ 的极大值和极小值是彼此相间的,因此在相平面的 Ox 轴上鞍点和中心也是彼此相间出现的。关于奇点与封闭相迹的共存问题,设在相平面上有一封闭相迹,与 Ox 轴相交于点 α 和 β (如图 2.15),在能量平衡平面上与这两点相对应的是曲线 $z=u(x)$ 和直线 $z=h$ 的两个交点。设函数 $\phi(x)=h-u(x)$,则在 Ox 轴上的 $x=\alpha$ 和 $x=\beta$ 的点上,有 $\phi(\alpha)=0, \phi(\beta)=0$,且对于 $\alpha < x < \beta$ 有 $\phi(x) > 0$,根据罗尔定理可知,必有这样的 $x=\xi(\alpha < \xi < \beta)$ 值存在,使得 $\phi'(\xi)=0$,即 $u'(\xi)=0$,这样就证明了,在封闭相迹内至少有一个奇点,从几何学的考虑可以看出,如果奇点是唯一的,那么它对应势能的极小值,因而是中心型奇点,如果这种奇点不只一个,则由于中心和鞍点是彼此相间的,故中心的数目总是比鞍点的数目多一个,奇点总数为奇数。于是可得定理如下:对于非线性保守系统,在封闭相迹内,必定有奇数个奇点,它们是中心或鞍点,而且中心数目比鞍点数目多一个。

2.3.4 非线性保守系统的周期运动

在相平面上的封闭相迹表示相点的周期运动,非线性保守系统的周期运动的特点,即无论何时它们都不是孤立的。如果对于 $h=h_0$,在相平面上得到一个封闭相迹,表示周期运动,那么在这条封闭相迹的近旁,一定环绕着一些对应于邻近 h_0 值的相邻的封闭相迹,这样就在相平面上形成布满于有限区域的闭轨线族,而且彼此相套,互不相交。因此,如果在保守系统中可能有一个周期运动,则在此系统中就可能有无穷多个周期运动,构成一个无限集合,而且这些周期运动可以由在某个有界区域的范围内连续地改变起始条件而得到。

与线性保守系统不同,非线性保守系统的运动周期与起始条件有关,其周期可求之如下,对于方程

$$\dot{x} = y$$

有

$$dt = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{2[h - u(x)]}}$$

若用 α 和 β 表示封闭相迹与 Ox 轴交点的横坐标, 则振动周期为

$$T = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{2[h - u(x)]}} \quad (2.3.3)$$

从式中不难看出, 周期对起始条件 (h 的起始值) 的依赖关系是非线性保守系统不同于线性保守系统的重要特点。

下面讨论非线性保守系统周期运动的稳定性问题。由于非线性保守系统的周期运动的周期与起始条件有关, 即相点沿表示此种周期运动的不同封闭相迹 (对应不同的起始条件) 的运动是不同的, 所以当两个相点同时沿十分接近的两条相迹进入运动后, 尽管开始的距离很小, 但经过一定的时间, 彼此就会离开有限的距离。因此若把其中之一看作系统的未扰运动, 把另一个看作被扰运动, 则严格来说, 不能把非线性保守系统的周期运动看成在李雅普诺夫意义下是稳定的。但是, 它们具有所谓的轨道稳定性, 即和所研究的轨线充分接近的轨线, 将永远位于它的邻域之内 (与时间无关)。换句话说, 当起始条件有很小的变化时, 相点的被扰周期运动将转到任意接近于原来无扰系统运动轨线的另一轨线上去。

例 利用相平面法分析单摆的运动

已知单摆的振动方程为

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0$$

令 $\dot{x} = y$, 则对应的相点在相平面上的运动方程为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x$$

势能为

$$u(x) = \int \frac{g}{l} \sin x dx = -\frac{g}{l} \cos x$$

势能函数表示于图 2.18 上, 这是一条余弦曲线, 在点

$$x = 0, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 4\pi, \quad \dots$$

上有孤立极小值, 相平面上对应的点为中心 (表示单摆稳定的下平衡状态), 在点

$$x = \pm \pi, \quad \pm 3\pi, \quad \dots$$

上有孤立的极大值, 相平面上对应的点为鞍点 (表示单摆不稳定的上平衡状态)。总能量起始值为

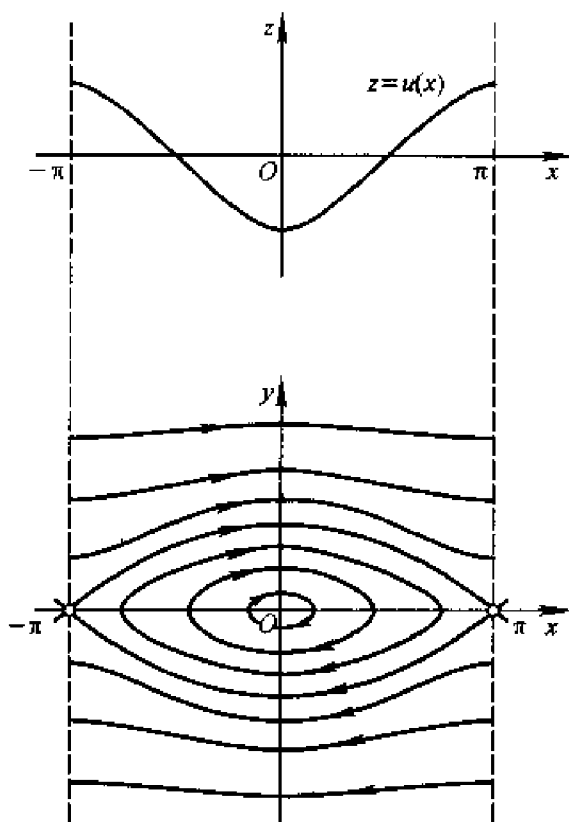


图 2.18

$$h_0 = -\frac{g}{l} \cos x_0 + \frac{y_0^2}{2}$$

当 $h_0 = \frac{g}{l}$ 时, 有 $h_0 - u(x) = \frac{g}{l}(1 + \cos x)$, 在相平面上得分界线

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}(1 + \cos x)}$$

相点沿分界线的运动都是渐趋鞍点的运动, 表示单摆渐趋于上平衡位置的运动, 这种运动只有理论上的意义, 实际上是无法实现的。

此分界线围成许多相似的环, 环内与环外的相迹具有不同的性状, 与实际运动相对应的相点的运动或是沿环内的相迹, 或是沿环外的相迹。

当 $h_0 < \frac{g}{l}$ 时, 相迹是在分界线所构成的环内的围绕中心的封闭曲线族, 表示单摆绕稳定平衡位置(下平衡位置)的周期运动, 在区间 $(-\pi < x < \pi)$ 中的封闭轨线族则表示单摆绕下平衡位置的所有周期运动, 而其它环内的封闭相迹只是重复这个图形, 因为 $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 对应于摆的同一稳定平衡状态。

当 $h_0 > \frac{g}{l}$ 时, 在相平面上得到逸散轨线, 表示单摆的逸散运动, 也就

是单摆在铅垂平面内,绕悬挂轴向同一个方向旋转。显然,这种转动与上述绕平衡位置的周期振动是不同的,但它仍然是一种周期性的运动。这一点在相平面上是无法表示的,为了解决这一矛盾和上述各环的重复性问题,我们可以采用相柱面的方法,即让包含在直线 $x = -\pi$ 和 $x = \pi$ 之间的那部分相平面卷起来,使 $x = -\pi$ 和 $x = \pi$ 两条直线互相重合,构成一圆柱面,称为相柱面。这样单摆的全部运动可以用相柱面上的相迹表示。若在相柱面上的相迹全部为封闭轨线,即表示都是周期性运动,但全部相迹除中心和鞍点外,仍可分为两类性质不同的轨线,一类是在分界线以内的不围绕相柱并能缩成一点(中心)的轨线(表示单摆绕下平衡位置的周期运动);一类是在分界线以外的围绕圆柱的封闭轨线(表示单摆绕悬挂轴的周期性运动),如图 2.19 所示。

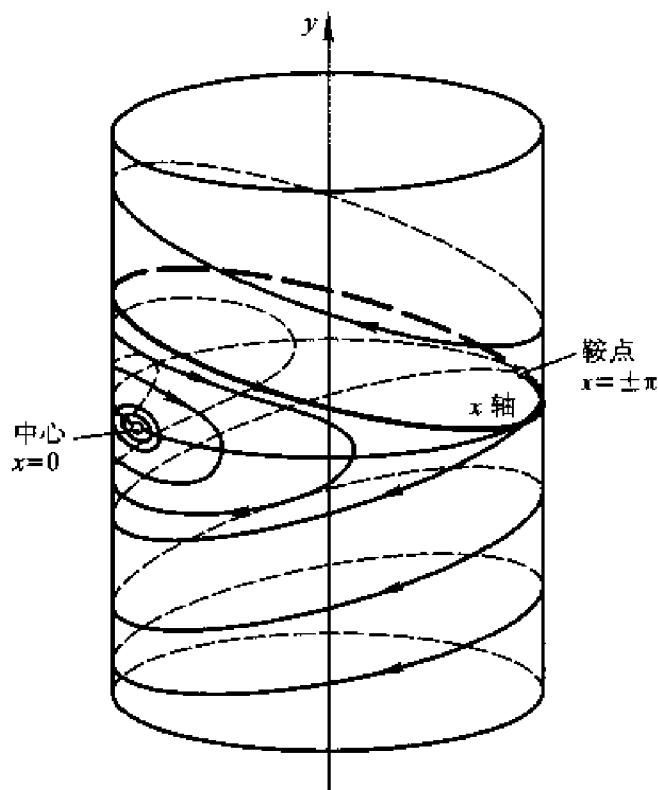


图 2.19

§ 2.4 非保守系统相迹的性质

耗散系统是非保守系统的一种,其主要特征是系统在运动过程中存在无补偿的能量耗散,因此它不可能有严格的周期振动。非线性非保守系统的能量损失,大多是由库仑摩擦、粘滞阻尼和非弹性内阻等(见绪论)

引起的。下面用相平面法考察几个单自由度非线性非保守系统的例子。

2.4.1 振动方程

一个自由度非线性耗散系统的振动方程可写成

$$\ddot{x} + \phi(x, \dot{x}) + f(x) = 0 \quad (2.4.1)$$

且满足条件

$$\dot{x} \phi(x, \dot{x}) \begin{cases} = 0 & (\dot{x} = 0) \\ > 0 & (\dot{x} \neq 0) \end{cases} \quad (2.4.2a)$$

或

$$-\dot{x} \phi(x, \dot{x}) \leq 0 \quad (2.4.2b)$$

条件(2.4.2b)表示阻尼恒与速度反向,这是耗散系统的重要特征。与此等价的条件(2.4.2a),可作如下解释。若将方程(2.4.1)乘以 $dx = \dot{x} dt$ 得

$$\dot{x} \ddot{x} dt + \phi(x, \dot{x}) \dot{x} dt + f(x) dx = 0$$

设起始条件为 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$, 在对应的时间间隔内积分, 则得

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 \Big|_{t_0}^t + \int_{x_0}^x f(x) dx = - \int_0^t \dot{x} \phi(x, \dot{x}) dt$$

其中 $\frac{1}{2} \dot{x}^2 = T$ 是系统的动能, $\int f(x) dx = u(x)$ 是系统的势能, 故有

$$T + u(x) = h_0 - \int_0^t \dot{x} \phi(x, \dot{x}) dt \quad (2.4.3)$$

其中 $h_0 = T_0 + u(x_0)$ 是系统的起始总能量, 由起始条件确定。

又

$$\int_0^t \dot{x} \phi(x, \dot{x}) dt > 0 \quad (2.4.4)$$

表示系统由于阻尼而耗散的能量恒为正, 因而式(2.4.3)表明随着时间的增加, 系统的总能量单调递减, 故式(2.4.1)所描述的系统为耗散系统。

例1 在阻尼作用下大幅度单摆的运动

设阻尼与速度的一次方成正比, 即令

$\phi(x, \dot{x}) = b\dot{x}$ ($b > 0$ 为一常数), 则振动方程为

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0$$

显然

$$\dot{x} \phi(x, \dot{x}) = b\dot{x}^2 > 0$$

故该系统为一耗散系统。

例2 具有方程为

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (\mu > 0)$$

的系统, 若 $x^2 < 1$, 则

$$\phi(x, \dot{x}) = -\mu(1-x^2)\dot{x}$$

它与 \dot{x} 的乘积恒小于零, 即

$$\dot{x}\phi(x, \dot{x}) = -\mu(1-x^2)\dot{x}^2 < 0$$

只有当 $x^2 > 1$ 时,

$$\phi(x, \dot{x}) = \mu(x^2-1)\dot{x}$$

则

$$\dot{x}\phi(x, \dot{x}) = \mu(x^2-1)\dot{x}^2 > 0$$

所以系统不是耗散系统。

2.4.2 耗散系统相迹的性质

将方程(2.4.1)写成两个一阶微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\phi(x, y) - f(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.5)$$

两式相除, 得相迹方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\phi(x, y) - f(x)}{y} \quad (2.4.6)$$

由于 $y=0$ 时, $\phi(x, y)=0$, 所以耗散系统奇点的分布与其对应的保守系统(即 $\phi(x, y)=0$ 时的系统)

$$\dot{x}=y, \dot{y}=-f(x)$$

的奇点分布完全一致。从(2.4.5)或(2.4.6)可得积分曲线为

$$\frac{y^2}{2} + u(x) = h - \int_0^t \phi(x, y) y dt \quad (2.4.7)$$

由于 $y\phi(x, y) \geq 0$, 故知沿着积分曲线系统的能量是不断递减的, 其对应的保守系统的积分曲线(相迹)是等能量曲线, 故对于耗散系统, 随着时间 t 的增大, 其所有的相迹均将穿过对应保守系统的相迹(等能量曲线), 从高能量曲线(对应于较大的 h 值), 进入低能量曲线(对应较小的 h 值)。对这一特性的证明如下:

由式(2.4.7)可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y^2}{2} + u(x) \right) = -y\phi(x, y) < 0$$

若取

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + u(x)$$

则此不等式可写成

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} < 0 \quad (2.4.8)$$

其中 $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$ 是耗散系统的相点运动的相速度在坐标轴上的投影, 与相速

度向量方向余弦成正比,而 $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}$ 可以看成是对应的保守系统的积分曲线族(等能量曲线族)

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + u(x) = h$$

的外法线的方向余弦。因此

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

与等能量曲线的外法线和耗散系统相迹的切线之间的夹角的余弦成正比,它恒小于零,故此夹角恒为钝角(见图 2.20),所以耗散系统的相迹总是与对应的保守系统的相迹(等能量曲线族)相交且由高能量曲线进入低能量曲线。

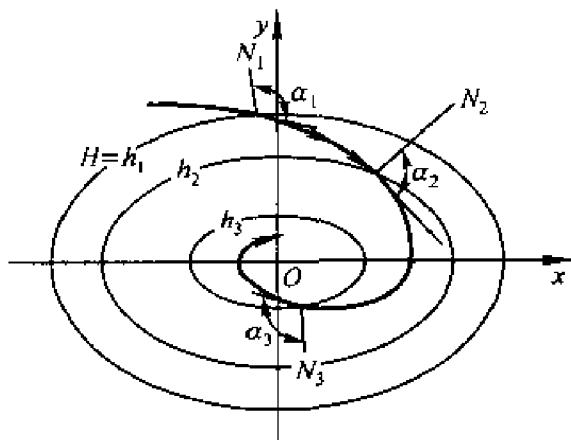


图 2.20

例如,若对应的保守系统的奇点为中心,等能量曲线为围绕中心的封闭轨线,则对耗散系统的相迹可定性的画出如图 2.20。显然,它不是封闭轨线,而是渐趋于奇点,故此时奇点为稳定焦点,或为稳定结点。

综上所述可知,耗散系统的相迹有如下特性:

- (1) 其奇点的分布与对应的保守系统相同,但奇点的性质可能不同。
- (2) 其相迹必穿过对应的保守系统的相迹(等能量曲线族),且交角(指相迹上的相速度方向与等能量曲线的外法线方向之间的夹角)恒为钝角,故必然由高能量曲线进入到低能量曲线。

2.4.3 相迹的作图方法

下面介绍画相迹的简捷方法——等倾线法和列纳(Lienard)法。

1. 等倾线法

设有一非线性自治系统,其振动方程为

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

令 $\dot{x} = y, \dot{y} = -f(x, y)$, 则有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x, y)}{y} \quad (2.4.9)$$

其中函数 $-\frac{f(x, y)}{y}$ 除了在奇点外, 可假设为单值连续的; 而在孤立奇点处, 上式成为 $\frac{0}{0}$ 型, 因而在孤立奇点上积分曲线的切线方向是不定的。

现用等倾线法求系统振动的相迹。令 (2.4.9) 的右端函数等于某已知的常数 m , 即

$$-\frac{f(x, y)}{y} = m \quad (2.4.10)$$

在相平面上代数方程 (2.4.10) 表示为一个曲线, 该曲线和 (2.4.9) 式的所有积分曲线以相同的斜率 m 相交。因此方程 (2.4.10) 叫做等倾线方程。给 m 以不同的数值 m_1, m_2, \dots, m_n , 则可在相平面上画出许多条形状不同的等倾线, 与此同时我们在每一等倾线上的各点作斜率 m_i 的微小平行线段, 这样就可以看出由方程 (2.4.9) 所定出的方向场。根据已知的起始条件 x_0 和 y_0 , 从这一起始点出发, 作曲线 L , 使它在相平面上的所有点处均与等倾线上该点的斜率微线段相重合, 这样就可近似地描述出适合给定起始条件的积分曲线 L (图 2.21)。如果等倾线在相平面中分布得比较稠密, 则所画出的相迹就比较准确, 确定所求的积分曲线也较容易一些。

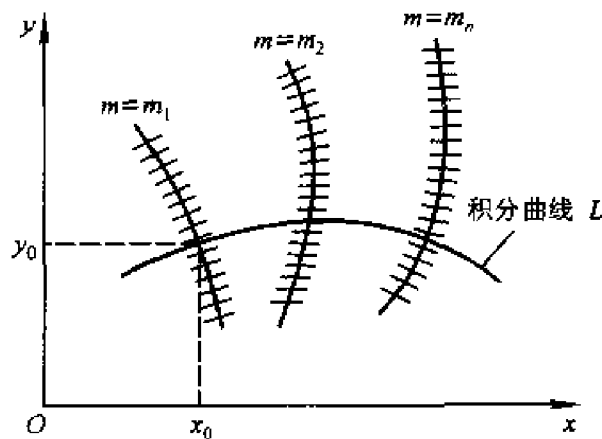


图 2.21

2. 列纳作图法

列纳作图法适用于弹性恢复力是位移 x 的线性函数、阻尼是速度 \dot{x} 的非线性函数的情况。设一个自由度非线性系统的振动方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi(y) - x}{y} \quad (2.4.11)$$

下面叙述列纳作图法：在相平面上作曲线 $x = -\varphi(y)$ ，则相平面上任一点 $P(x, y)$ 的场可如下决定，从 P 点引一平行于 x 轴的直线和曲线 $x = -\varphi(y)$ 相交于 R 点，再从 R 作 x 轴的垂线交于 S ，则 P 点场的方向垂直于直线 SP ，

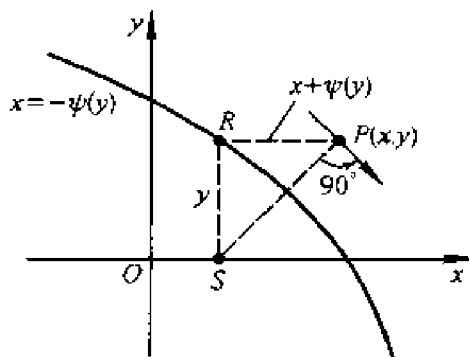


图 2.22

因为直线 SP 的斜率是 $\frac{y}{x + \varphi(y)}$ ，它和该点的场的方向垂直(图 2.22)。这样我们就可以在 P 点用一个表示场方向的微小直线段(切线)来代替经过该点

积分曲线的弧元素，然后在这个弧元素线段的末端再用列纳法定出积分曲线的下一弧元素线段；如此继续下去就可逐步取得呈折线形状的积分曲线。只要将切线段取得充分小，总可以达到一定的精度。

2.4.4 具有粘滞阻尼的耗散系统

现研究具有粘滞阻尼的单摆，其振动方程为

$$\ddot{x} + a\dot{x} + k\sin x = 0 \quad a > 0$$

如

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -ay - k\sin x \end{aligned}$$

或

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ay - k\sin x}{y}$$

其奇点的分布与对应保守系统相同，即在 Ox 轴上 $x=0$ 和 $x=\pm\pi$ 处为奇点，前者为稳定平衡(下平衡)位置，后者为不稳定平衡(上平衡)位置。

现对其相迹作定性分析，当 $x=0$ 或 $x=\pm\pi$ 时，有 $\frac{dy}{dx} = -a$ ，所以 Oy 轴和直线 $x=\pm\pi$ 均为等倾线，在其上各点相迹的切线斜率均为 $-a$ 。在 Ox 轴上除去奇点外，通过其上各点的相迹均有垂直切线。又正弦曲线

$$y = -\frac{k}{a} \sin x$$

也是等倾线，在其上各点的相迹有水平切线，显然，若 k 不变，则 a 越小，正弦波的波幅就越大， a 较小的相迹如图 2.23 所示， a 较大时的相迹如图 2.24 所示，前者稳定平衡位置为焦点，后者稳定平衡位置为结点。

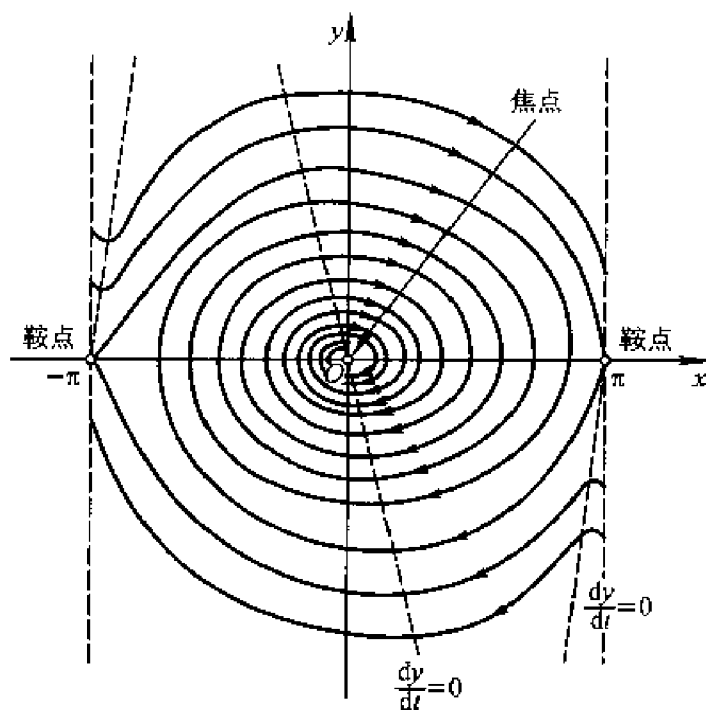


图 2.23

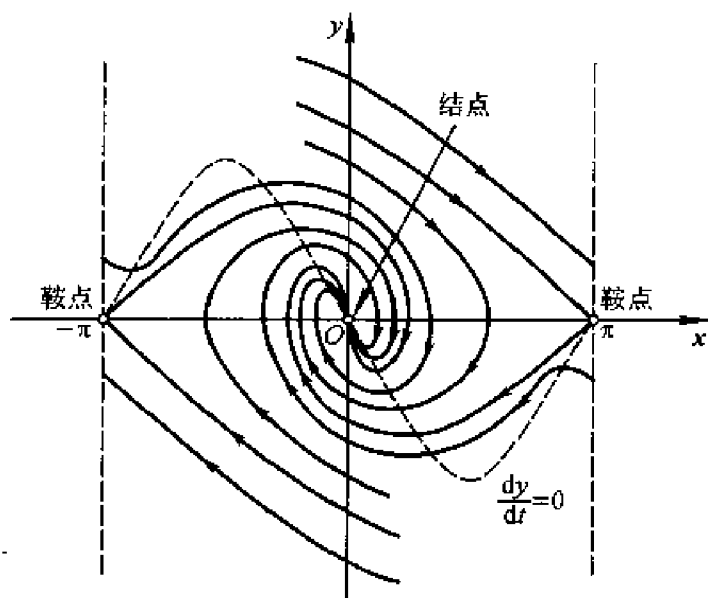


图 2.24

由此可见,此系统没有封闭相迹,即使在相柱面上,虽有包围相柱面的相迹,但也不是封闭的,所以系统没有周期运动,几乎在所有的起始条件下,系统都趋向与稳定平衡(下平衡)位置,当起始条件足够大时,单摆可能绕悬挂轴旋转一整周(或若干周)之后才进入衰减振动,这时对应的相迹就是包围相柱面的不封闭相迹。至于趋于鞍点的相迹的分支,表示

渐趋于不稳定平衡(上平衡)位置的运动,这在实际上是不可能实现的。

2.4.5 阻尼与速度平方成正比的耗散系统

此时

$$|\phi(x, \dot{x})| = \alpha \dot{x}^2 \quad (\alpha > 0 \text{ 为常数})$$

并设

$$\phi(x, \dot{x}) = \begin{cases} \alpha \dot{x}^2 & (\text{当 } \dot{x} > 0) \\ -\alpha \dot{x}^2 & (\text{当 } \dot{x} < 0) \end{cases}$$

其振动方程为

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} |\dot{x}| + f(x) = 0 \quad (2.4.12)$$

设

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) - \alpha y |y| \end{cases} \quad (2.4.13)$$

两式相除得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f(x) - \alpha y |y|}{y} \quad (2.4.14)$$

或

$$y \frac{dy}{dx} + \alpha y^2 = -f(x) \quad (y > 0) \quad (2.4.15)$$

$$y \frac{dy}{dx} - \alpha y^2 = -f(x) \quad (y < 0) \quad (2.4.16)$$

令 $z = y^2$, 则得

$$\frac{dz}{dx} + 2\alpha z = -2f(x)$$

$$\frac{dz}{dx} - 2\alpha z = -2f(x)$$

以上为常系数的一阶线性微分方程组,不难求其解,为此设起始条件为 $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, 则

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= e^{-2\alpha x} \left[y_0^2 e^{2\alpha x_0} - 2 \int_{x_0}^x f(x) e^{-2\alpha x} dx \right] \quad (y > 0) \\ y^2 &= e^{2\alpha x} \left[y_0^2 e^{-2\alpha x_0} - 2 \int_{x_0}^x f(x) e^{2\alpha x} dx \right] \quad (y < 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.17)$$

利用上式,在确定的起始条件下,可作出相迹。

例3 单摆在液体中运动,设所受的阻力与速度的平方成正比,方向与速度方向相反,振动方程为

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} |\dot{x}| + k \sin x = 0$$

根据上述方法, 则

$$\frac{d}{dx}[y^2] + 2a[y^2] = -2k \sin x \quad (y > 0)$$

$$\frac{d}{dx}[y^2] - 2a[y^2] = -2k \sin x \quad (y < 0)$$

其解为

$$y^2 = y_0^2 e^{2ax_0} e^{-2ax} - \frac{2k}{1+4a^2} (2a \sin x - \cos x - 2a \sin x_0 + \cos x_0) \quad (y > 0) \quad (a)$$

$$y^2 = y_0^2 e^{-2ax_0} e^{-2ax} + \frac{2k}{1+4a^2} (2a \sin x + \cos x - 2a \sin x_0 - \cos x_0) \quad (y < 0) \quad (b)$$

给定初始条件 x_0 和 y_0 , 利用(a)式或(b)式, 在相平面的上半平面(或下半平面)上定出一条曲线, 定出它与 Ox 轴的第一个交点, 再以此起始条件在另半平面上用另一个方程定出另一曲线, 这样交替使用(a)和(b)式, 将它们在上半平面和下半平面确定的曲线连接起来就是在给定条件下的相迹。如图 2.25 所示。

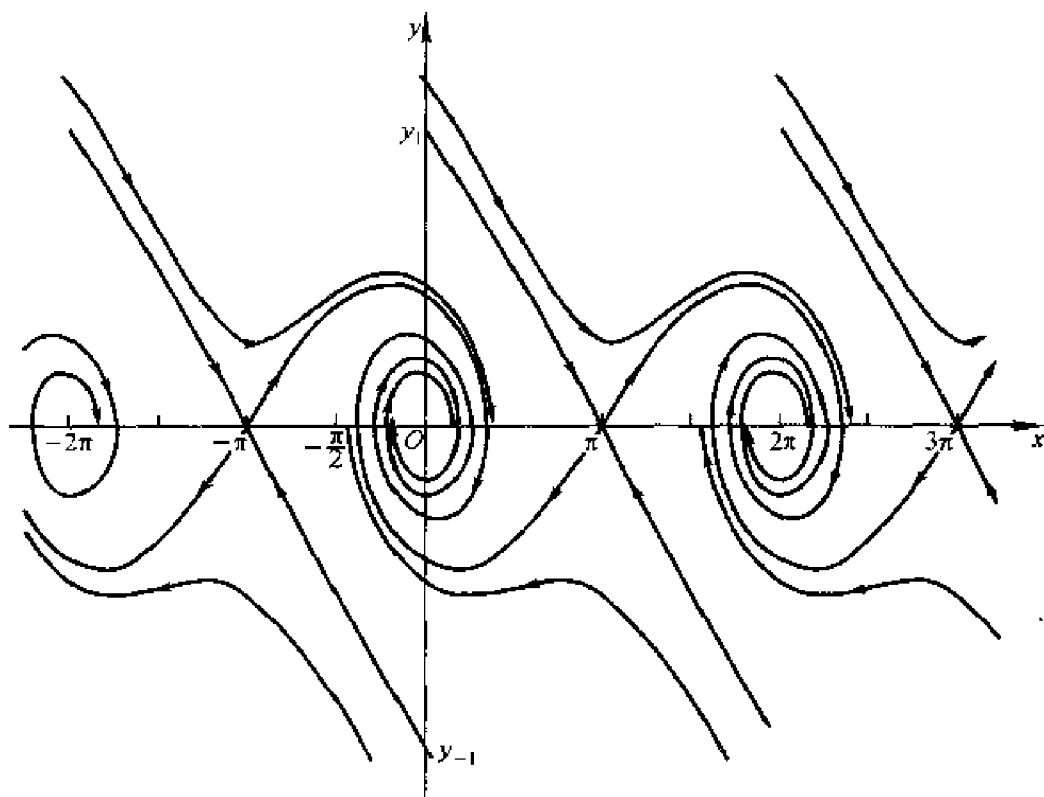


图 2.25

2.4.6 具有干摩擦的耗散系统

取系统的振动方程为

$$\ddot{x} + a \operatorname{sign}(\dot{x}) + x = 0$$

此时

$$\phi(y) = -a \operatorname{sign}(y).$$

在相平面的上半面作 $x = -a$, 下半面作 $x = a$ 的两条直线后, 如起始条件在上半面, 则以 S_1 为圆心作半圆, 交于 Ox 轴后, 再以 S_2 为圆心作下半面的相迹, 并使之与上半面的相迹相接, 逐步作图, 待相点落入 S_1 、 S_2 后, 运动即停止。 S_1 、 S_2 称为停滞区。如图 2.26 所示。此相迹也可用“缝接法”来作, 此处不再详述。从图 2.26 知, 具有干摩擦的自由振动是一个衰减振动, 每循环一次振幅减少 $4a$, 振幅是按公差级数递减的, 这一点与线性阻尼时衰减振动的振幅按对数衰减是不相同的。

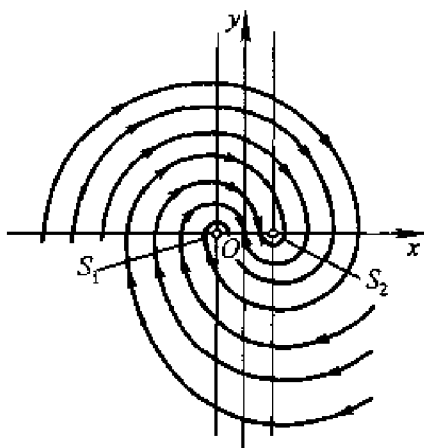


图 2.26

通过以上例题分析可以看到, 耗散系数与对应的保守系统相比, 其相迹在保守系统的中心型附近有明显的拓扑结构的变化, 中心变成了焦点或结点等, 而在保守系统中的鞍点和退化奇点附近相迹的拓扑结构不变。

§ 2.5 自激振动系统相迹的性质

在 § 1.5 中曾用分析的方法证明过范德波尔方程存在着和起始条件无关的定常解, 故称自激振动系统, 在那里曾假设非线性项较小。但是在有些自激系统中, 存在着强非线性项, 这样的自激振动系统称为张弛振动系统。对这样的系统在第一章所介绍的方法就不再适用, 下面用相平面法来分析其相迹的性质。

范德波尔方程为

$$\ddot{x} - \epsilon(1-x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (2.5.1)$$

将它化为两个一阶方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \epsilon(1-x^2)y - x \end{aligned} \right\} \quad (2.5.2)$$

上两式相除, 则得相迹的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon(1-x^2)y-x}{y} \quad (2.5.3)$$

它有唯一的奇点(0,0)。

将上式与(2.2.4)对比,有 $a_{11}=0, a_{12}=1, a_{21}=-1, a_{22}=\varepsilon, \varepsilon_1(x_1, x_2)=0, \varepsilon_2(x_1, x_2)=-\varepsilon x^2 y$, 显然有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\varepsilon x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0$$

故范德波尔方程与其一次近似系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \varepsilon y - x \end{aligned}$$

有相同的平衡点。由(2.2.18)有

$$p=\varepsilon, \quad q=1, \quad \Delta=p^2-4q=\varepsilon^2-4$$

当 $\varepsilon > 2$ 时, $\Delta > 0$; 因 $p > 0$, 平衡点(0,0)为不稳定结点。

当 $\varepsilon < 2, \Delta < 0$; 因 $p > 0$, 平衡点(0,0)为不稳定焦点。当 $\varepsilon = 2$ 时, $\Delta = 0$; 因 $p > 0$, 平衡点(0,0)为不稳定退化结点。

由此可知, 不论 ε 为何值, 平衡点(0,0)都是不稳定的, 且相迹均以平衡点为渐近点, 而相点沿相迹的运动总是背离平衡点的。

以等倾线法作其相迹如图 2.27 所示, 从图知在不同 ε 值时都得到一个孤立的封闭相迹(极限环), 并且无论起始条件在何处, 经过一段时间后运动都向极限环趋近。极限环的形状决定于参数 ε 的大小, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 极限环趋近于一个圆, 这与线性保守系统的封闭相迹相对应。在图 2.27 (a) 中 $\varepsilon = 0.1$, 其极限环接近于圆, 振动波形为正弦曲线, 但其定常振幅与起始条件无关。随着 ε 的增大, 极限环和圆的差别就愈大, 振动波形较简谐波的失真也越大, 见图 2.28。关于这个问题将在下面详细讨论。在 $\varepsilon > 0$ 时, 所有相迹不论从环外或是从环里都趋近于极限环, 且与起始条件无关, 所以 $\varepsilon > 0$ 时的极限环是稳定的。当 $\varepsilon < 0$ 时, 所有相迹都将从环外或从环里离开极限环, 此时极限环是不稳定的。

下面介绍列纳法作图, 为此应先作一变换。

设
$$x_1 = -\dot{x} + \varepsilon \left(x - \frac{x^3}{3} \right)$$

则
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x_1 + \varepsilon \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \\ \dot{x}_1 &= -\ddot{x} + \varepsilon(1-x^2)\dot{x} = x \\ \ddot{x}_1 &= \dot{x} \end{aligned}$$

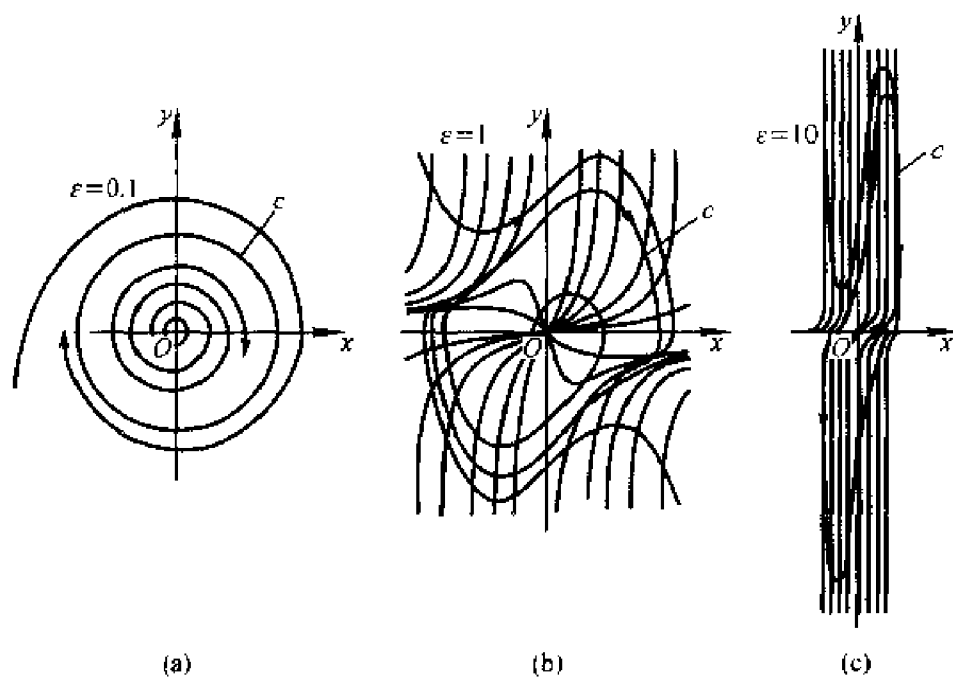


图 2.27

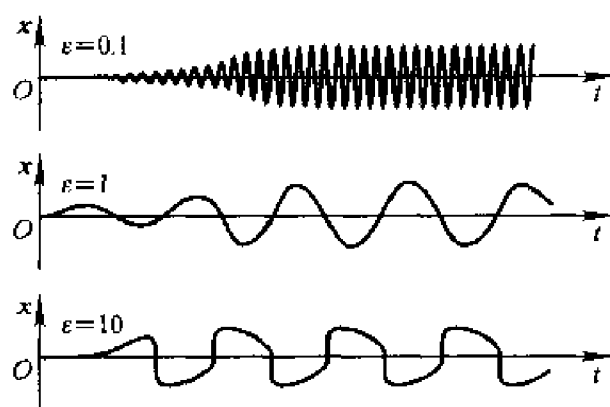


图 2.28

范德波尔方程可化为

$$\ddot{x}_1 - \epsilon \left(1 - \frac{\dot{x}_1^2}{3} \right) \dot{x}_1 + x_1 = 0 \quad (2.5.4)$$

上式称为瑞利(Rayleigh J. W. S.)方程,其一般表达式为

$$\ddot{x} + (A - B\dot{x}^2)\dot{x} + kx = 0 \quad (2.5.5)$$

将(2.5.4)化为两个一阶微分方程

$$\dot{x}_1 = y_1$$

$$\dot{y}_1 = \varepsilon \left(y_1 - \frac{y_1^3}{3} \right) - x_1$$

上两式相除,得相迹微分方程

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\varepsilon \left(y_1 - \frac{y_1^3}{3} \right) - x_1}{y_1} \quad (2.5.6)$$

为了用列纳法作相迹图,先作曲线

$$x_1 = -\varphi(y_1) = \varepsilon \left(y_1 - \frac{y_1^3}{3} \right)$$

如图 2.29 粗黑线所示,它有以下性质:

当 $y_1 = 0$ 和 $y_1 = \pm\sqrt{3}$ 时, $x_1 = 0$; 当 $y_1 = \pm 1$ 时, x_1 取极值 $x = \pm \frac{2}{3}\varepsilon$.

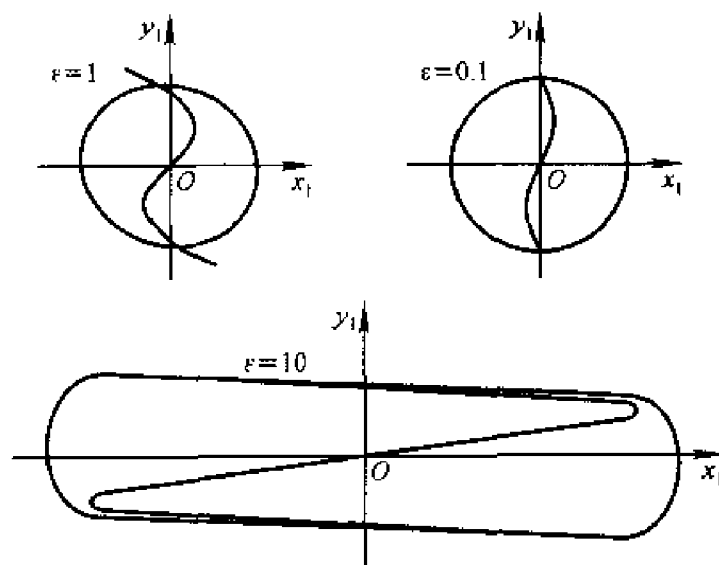


图 2.29

经过以上的分析,知方程(2.5.4)存在一个极限环,其形状不仅和系统的非线性特征有关,而且还和 ε 数值的大小有关,随着 ε 的增大,极限环的长轴将沿 x_1 轴伸长。大 ε 值的系统代表着自然界中很多振动过程,这种类型的振动称张弛振动。其特点是:外界把能量输入到系统内是缓慢的;但当能量积蓄到某一临界势能时,将立刻完全被释放出去。从振动运动的角度分析,随着 ε 的增大,振动规律与正弦型运动的偏离也愈大,如 $\varepsilon = 10$ 时见图 2.28。此时对应的运动其快慢是极端不均匀的,有变化很慢的一段,紧接着就是陡峭(很快)的变化。如自动储水箱中的积水和放水运动(水往储水箱输入是一点一滴的,当水面积蓄到一定高度时,就

一下子全部排出)。范德波尔回路中电荷在电容器上的积累和释放过程(能量在电容器上积累起来,就是运动缓慢变化的部分,而在运动陡峭变化时,能量又突然释放出来)等就属于张弛运动。

为了研究张弛振动极限环的形状,仍以瑞利方程为例,对方程(2.5.6)取 $\xi = \frac{\dot{x}_1}{\epsilon}$, $y_1 = v$, 则有

$$\frac{1}{\epsilon^2} \frac{dv}{d\xi} = \frac{v - \frac{v^3}{3} - \xi}{v} = \frac{-F(v) - \xi}{v} \quad (2.5.7)$$

方程(2.5.7)称为奇异摄动方程。这是相迹的微分方程式,代表了相迹方向场的变化规律。当 ϵ 很大时,式(2.5.7)的左端趋近于零,放得

$$-F(v) - \xi = 0 \quad (2.5.8)$$

在相平面上作曲线(2.5.8)称之为 c , 如图 2.30(a), 在此曲线上的相点满足 $\frac{dv}{d\xi} = 0$, 故在曲线 c 上一切相点的切线为水平方向。当 $\epsilon \rightarrow \infty$ 时,

在曲线 c 之外, $\frac{dv}{d\xi}$ 为 ∞ , 故所有相点的切线都是垂直的。因此对于 $\epsilon \rightarrow \infty$

时,相迹将具有如下的性质:从相平面某一点 P 出发,因它不在曲线 c 上,又因 c 之外相迹有垂直切线,可作垂直相迹与曲线 c 相交于 P_1 点, P_1 点上相迹的切线为水平,相点继续沿水平方向向前运动,故相迹沿曲线 c 的下部进行,又因在曲线 c 之外,相迹的切线是垂直的,所以相迹有跟着曲线 c 运动的趋势,一直达到 P_2 附近;由于曲线 c 转弯,相迹变成垂直向上,直到 P_3 再次与 c 相交,然后相迹又跟着 c , 并在 c 的上面,直到 P_4 , 然后又垂直向下直到 P_5 。故当 $\epsilon \rightarrow \infty$ 时,极限环为 $P_2 P_3 P_4 P_5$ 所组成的封闭曲线如图 2.30(a)所示,因当 $\epsilon \rightarrow \infty$ 时,图 2.30(a)与(b)的误差很小,所以张弛振动的极限环可由曲线 c

$$\xi = v - \frac{v^3}{3} \quad (2.5.9)$$

和铅垂线

$$\xi = \text{const} \quad (2.5.10)$$

所组成。

沿极限环进行积分,可得到张弛振动的周期 T

由

$$dt = \frac{dx}{v} = \epsilon \frac{d\xi}{v}$$

得

$$T = \epsilon \oint \frac{d\xi}{v}$$

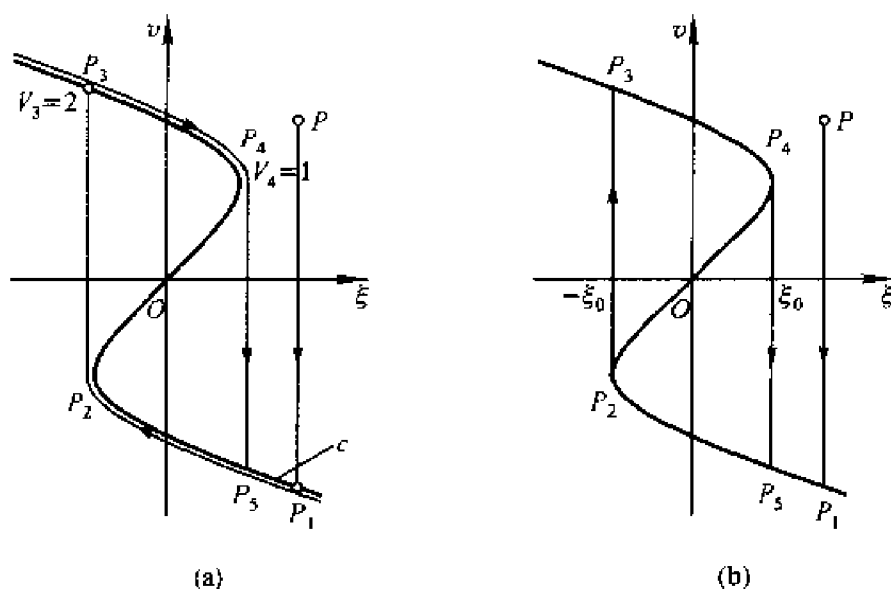


图 2.30

因为极限环的铅垂线部分对周期的影响很小,故

$$T = 2 \int_{v_3}^{v_4} \frac{d(v - v^3/3)}{v} = 2\epsilon \left(\ln v - \frac{1}{2} v^2 \right) \Big|_2^1 = 1.614\epsilon \quad (2.5.11)$$

在相平面上得到了相迹,即速度 v 和位移 ξ 的关系和振动周期后,不难建立 $\xi(t)$ 和 $v(t)$ 的曲线,如图 2.31 所示。

对 $\epsilon \gg 1$ 的情况,根据图 2.30,其振动过程是这样进行的:当 ξ 开始于一个 ξ_0 时, v 由 P_3 点所决定,此时 v 有最大值;此后,相点沿 P_3P_4 运动, ξ 增加,而 v 减小,当 ξ 达到最大值 ξ_0 时,相点从 P_4 跳到 P_5 ,在此瞬时速度 v 突然改变符号,由正变负,相点沿 P_5P_2 继续前进, ξ 由正变到 $-\xi_0$,速度不断增大;接下来,相迹由 P_2 跳跃到 P_3 ,速度由负变到正,而完成一个循环,作周期振动。

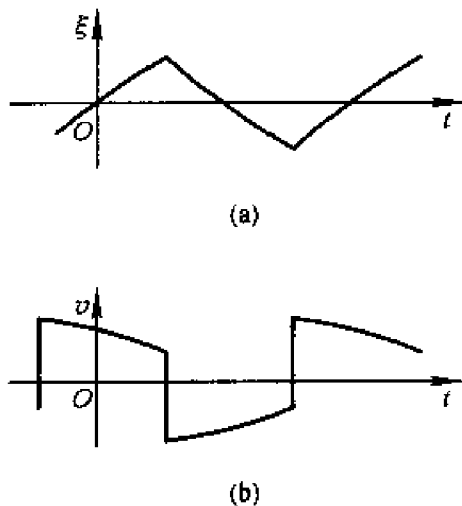


图 2.31

习 题

2.1 对于下列方程,确定它们的奇点以及类型,对于每一种情况,在相平面内绘出轨迹图和分界线($\mu > 0$)。

(a) $\ddot{u} + 2\mu\dot{u} + u + u^3 = 0$

$$(b) \quad u + 2\mu\dot{u} + u - u^3 = 0$$

$$(c) \quad \ddot{u} + 2\mu\dot{u} - u + u^3 = 0$$

$$(d) \quad \ddot{u} + 2\mu\dot{u} + u^3 = 0$$

2.2 确定系统的奇点以及它们的类型。

$$\dot{x} = x^2 - y$$

$$\dot{y} = x - y$$

在相平面内绘出轨迹图和分界线。

2.3 确定系统的奇点以及它们的类型。

$$\dot{x} = x' + y^2 - 5$$

$$\dot{y} = xy - 2$$

在相平面内绘出轨迹图和分界线。

2.4 考虑下列形式的范德波尔方程

$$\ddot{u} + \varepsilon(\beta\dot{u}^2 - 1)\dot{u} + u = 0$$

应用列纳法, 在相平面内构造两条轨线, 其中一条开始于极限环外面, 而另一条开始于原点附近。对于极限环的存在, 这种构造提供了另外一种更有说服力的论据。

2.5 考虑系统

$$\ddot{u} + \mu \sin \dot{u} + u = 0$$

应用列纳法, 构造若干轨线。并证明存在多个极限环。有些极限环是稳定的, 而其它的是不稳定的。通过检验的轨迹, 在相平面内如何确定极限环的稳定性? 指出图 E2.1 中的极限环哪些是稳定的, 哪些是不稳定的。

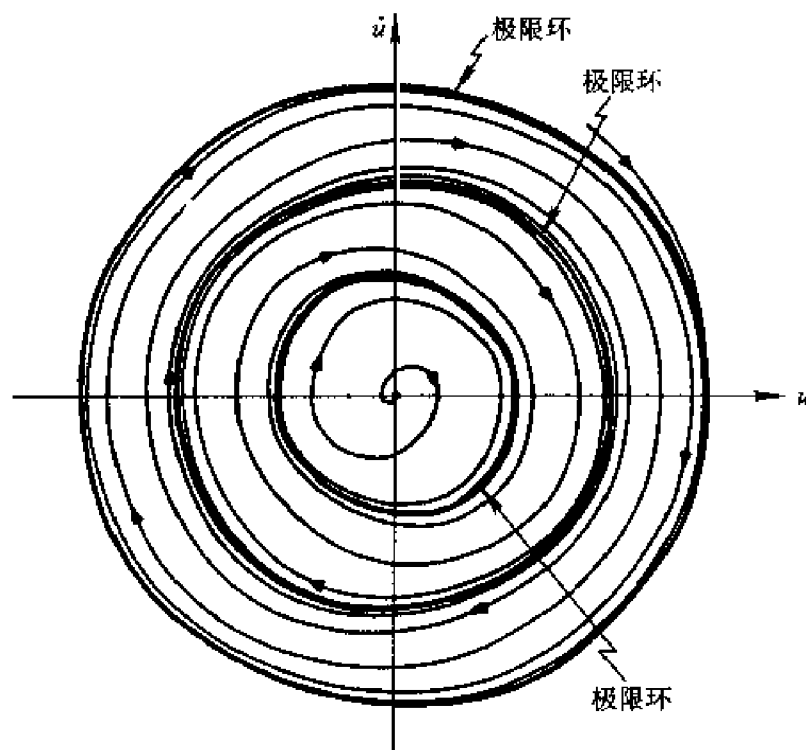


图 E2.1

2.6 考虑下列系统

$$\dot{x}_1 = -\mu x_1 + k \sin x_2$$

$$\dot{x}_2 = \sigma - \alpha x_1^2 + \frac{k}{x_1} \cos x_2$$

确定系统的奇点(提示: σ 为 x_1 的函数)。① 证明: 当 $\sigma = \frac{ak^2}{\mu^2}$ 时, x_1 的最大值为 $\frac{k}{\mu}$,

② 在下列情况下, 绘出 $x_1 - \sigma$ 和 $x_2 - \sigma$ 的图。

(a) $\alpha=1, k=1$, 和 $\mu=\frac{1}{2}$.

(b) $\alpha=0, k=1$, 和 $\mu=\frac{1}{2}$.

(c) $\alpha=-1, k=1$, 和 $\mu=\frac{1}{2}$.

③ 对于 $\alpha=1, k=1$, 和 $\mu=\frac{1}{2}$, 当 $\sigma=0, 3$, 和 4 时, 确定奇点的性质(即焦点、中心点等)。绘出每种情形的轨迹图。

2.7 考虑瑞利方程

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u - \epsilon(\dot{u} - \dot{u}^3) = 0 \quad (1)$$

令 $x_1 = u, x_2 = \dot{u}$, 研究其奇点。再考虑系统

$$\dot{a} = \frac{1}{2}\epsilon a \left(1 - \frac{3}{4}\omega_0^2 a^2 \right), \quad \dot{\beta} = 0 \quad (2)$$

证明: 当 ϵ 是小量时, 该方程与(1)是等价的。

2.8 受线性弹簧约束的质点, 在库仑阻尼和平方阻尼共同影响下, 运动方程为

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \epsilon(\mu_0 \operatorname{sgn} \dot{u} + \mu_2 \dot{u} |\dot{u}|) = 0$$

$\mu_0 > 0, \mu_2 > 0, \epsilon \ll 1$ 。

(a) 证明

$$u = a \cos(\omega_0 t + \beta) + O(\epsilon)$$

其中

$$a = -\epsilon \left(\frac{2\mu_0}{\pi\omega_0} + \frac{4}{3\pi}\mu_2\omega_0 a^2 \right)$$

$$\dot{\beta} = 0$$

(b) 证明

$$a = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{3\mu_0}{2\mu_2}} \tan \left(c - \frac{\epsilon}{\pi} \sqrt{\frac{8\mu_2\mu_0}{3}} t \right)$$

c 是积分常数。

(c) 解释运动是如何衰减的。何时停止?

2.9 应用列纳结构描述下面系统的行为

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \epsilon(2\mu_1 \dot{u} - \mu_0 \operatorname{sgn} \dot{u}) = 0$$

其中 $\epsilon \gg 1, \mu_1 > 0, \mu_0 > 0$ 。证明随着 $\epsilon \rightarrow \infty$, 运动的周期 $T \rightarrow \infty$ 。当 μ_1, μ_0 变号时, 描

述系统的运动。

2.10 应用列纳结构描述下面系统的行为

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon(\mu_2 \dot{u} | \dot{u} - 2\mu_1 \dot{u}) = 0$$

其中 $\varepsilon \gg 1, \mu_2 > 0, \mu_1 > 0$, 求出运动的周期是多少?

第三章 一个自由度非线性系统的受迫振动

§ 3.1 非共振情况的平均法

如果在振动系统上作用有外干扰力 $E \sin \nu t$, 则此振动方程为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f_1 \left(x, \frac{dx}{dt} \right) + E \sin \nu t \quad (3.1.1)$$

这是一个自由度非线性系统受迫振动的方程式。

我们知道, 在非线性系统中, 系统作受迫振动时, 定常解的频率与干扰力频率相同, 并且定常解和起始条件无关。在非线性系统中, 其受迫振动的定常解中除含有和干扰力相同的频率成分外, 还有高频成分存在, 定常解决定于起始条件。非线性系统的受迫振动还有其他一些本质的特点, 下面将依次进行分析说明。

如果干扰力频率 ν 和派生系统(当 $\epsilon=0$ 时的系统)的固有频率 ω 差值较大, 则有所谓非共振情况。在(3.1.1)中, 当 $\epsilon=0$ 时其解为

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{E}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t \\ \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin(\omega t + \varphi) + \frac{E\nu}{\omega^2 - \nu^2} \cos \nu t \end{aligned} \right\} \quad (3.1.2)$$

其中 a, φ 为任意常数。

如果 $\epsilon \neq 0$, 受迫振动的解仍取(3.1.2)的形式, 则其中的 a, φ 将为时间 t 的函数, 现以 a, φ 作为新变量, 对(3.1.1)进行变量变换。

微分(3.1.2)的第一式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \cos(\omega t + \varphi) - a \left(\omega + \frac{d\varphi}{dt} \right) \sin(\omega t + \varphi) + \frac{E\nu}{\omega^2 - \nu^2} \cos \nu t$$

令上式与(3.1.2)的第二式相等, 则有

$$\frac{da}{dt} \cos(\omega t + \varphi) - a \frac{d\varphi}{dt} \sin(\omega t + \varphi) = 0 \quad (3.1.3)$$

微分(3.1.2)的第二式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{da}{dt}\omega \sin(\omega t + \varphi) - a\omega \left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right) \cos(\omega t + \varphi) - \frac{E\nu^2}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t \quad (3.1.4)$$

将(3.1.2), (3.1.4)代入(3.1.1), 则

$$\begin{aligned} & -\frac{da}{dt}\omega \sin(\omega t + \varphi) - a\omega \frac{d\varphi}{dt} \cos(\omega t + \varphi) \\ & = \varepsilon f_1 \left[a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{E}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t, \right. \\ & \quad \left. - a\omega \sin(\omega t + \varphi) + \frac{E\nu}{\omega^2 - \nu^2} \cos \nu t \right] \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

从(3.1.3)和(3.1.5)可解出 $\frac{da}{dt}$ 和 $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f_1 \left[a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{E}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t, \right. \\ &\quad \left. - a\omega \sin(\omega t + \varphi) + \frac{E\nu}{\omega^2 - \nu^2} \cos \nu t \right] \sin(\omega t + \varphi) \\ &= \varepsilon \phi(a, \varphi, t) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a\omega} f_1 \left[a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{E}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t, \right. \\ &\quad \left. - a\omega \sin(\omega t + \varphi) + \frac{E\nu}{\omega^2 - \nu^2} \cos \nu t \right] \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \varepsilon \phi^*(a, \varphi, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.6)$$

(3.1.6)即为标准方程组。对之取一次近似的 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} a &= y + \varepsilon U_1(t, y, \vartheta) \\ \varphi &= \vartheta + \varepsilon V_1(t, y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.7)$$

并要求新变量 y, ϑ 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \varepsilon Y_1(y) + \varepsilon^2 Y^*(t, y, \vartheta, \varepsilon) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon Z_1(y) + \varepsilon^2 Z^*(t, y, \vartheta, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

其中 Y_1, Z_1 不显含 t ; U_1, V_1, Y^* 与 Z^* 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数, 以及 t 的周期函数。

将(3.1.7)代入(3.1.6), 考虑到(3.1.8), 则

$$\begin{aligned} & \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y^* + \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial y} (\varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y^*) + \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} (\varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z^*) \\ & = \varepsilon \phi_0 + \varepsilon^2 \phi_1 + \dots \\ & \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z^* + \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial y} (\varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y^*) + \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} (\varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z^*) \end{aligned}$$

$$= \epsilon \phi_0^* + \epsilon^2 \phi_1^* + \dots$$

令等式两端 ϵ 一次方的系数相等, 则可得到确定 Y_1, Z_1, U_1 及 V_1 的微分方程式

$$\left. \begin{aligned} Y_1 + \frac{\partial U_1}{\partial t} &= \phi_0 \\ Z_1 + \frac{\partial V_1}{\partial t} &= \phi_0^* \end{aligned} \right\} \quad (3.1.9)$$

其中 $\phi_1, \phi_1^*, \phi_0^*, \phi_1^*, \dots$ 为将 ϕ, ϕ^* 在 $\epsilon=0$ 的点展成泰勒级数时 $\epsilon, \epsilon^2, \dots$ 的系数。

根据 Y_1, Z_1 不显含 t 的条件, 可用下列方法确定它们

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T \phi_0 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_0 d\psi \\ Z_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T \phi_0^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_0^* d\psi \end{aligned} \right\} \quad (3.1.10)$$

和

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \int_0^t (\phi_0 - Y_1) dt - U_{10} \\ V_1 &= \int_0^t (\phi_0^* - Z_1) dt - V_{10} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.11)$$

在进行以上计算的时候, 将不显含 t 的变量当作常数看待。

求出了函数 Y_1, Z_1 后, 则第一次近似解为

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{E}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t \\ a &= y \\ \varphi &= \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (3.1.12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \epsilon Y_1(y) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \epsilon Z_1(y) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.13)$$

令上面第一式为零后, 得定常解

$$y = y_0 \quad (3.1.14)$$

将 (3.1.14) 代入 (3.1.13) 的第二式, 则有

$$\vartheta = \epsilon Z_1(y) t + \eta \quad (3.1.15)$$

η 为任意常数。

作为示例, 现求广义范德波尔方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - \epsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} = E \sin \nu t \quad (3.1.16)$$

的非共振解(即 $\nu \neq 1$, 或 ν 不与 1 接近时的解)。

为将(3.1.16)化成标准方程, 采用变换

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(t + \varphi) + \frac{E}{1-\nu^2} \sin \nu t \\ \frac{dx}{dt} &= -a \sin(t + \varphi) + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \cos \nu t \end{aligned} \right\} \quad (3.1.17)$$

微分(3.1.17)的第一式, 并使之与(3.1.17)的第二式相等, 则

$$\frac{da}{dt} \cos(t + \varphi) - a \frac{d\varphi}{dt} \sin(t + \varphi) = 0 \quad (3.1.18)$$

微分(3.1.17)的第二式后, 将之和(3.1.17)代入(3.1.16), 有

$$\begin{aligned} & \frac{da}{dt} \sin(t + \varphi) + a \frac{d\varphi}{dt} \cos(t + \varphi) \\ &= \epsilon \left\{ 1 - \left[a \cos(t + \varphi) + \frac{E}{1-\nu^2} \sin \nu t \right]^2 \right\} \times \\ & \quad \left[a \sin(t + \varphi) - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \cos \nu t \right] \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

从(3.1.18)和(3.1.19)可解出 $\frac{da}{dt}$ 和 $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \epsilon \left\{ 1 - \left[a \cos(t + \varphi) + \frac{E}{1-\nu^2} \sin \nu t \right]^2 \right\} \times \\ & \quad \left[a \sin(t + \varphi) - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \cos \nu t \right] \sin(t + \varphi) \\ &= \epsilon \left\{ \frac{a}{2} \left[1 - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)^2 \right] + \frac{a^3}{8} \cos 4(t + \varphi) + \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{4} \frac{a\nu E^2}{(1-\nu^2)^2} [\cos 2(\nu t - t - \varphi) - \cos 2(\nu t + t + \varphi)] + \dots \right\} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\epsilon}{a} \left\{ 1 - \left[a \cos(t + \varphi) + \frac{E}{1-\nu^2} \sin \nu t \right]^2 \right\} \times \\ & \quad \left[a \sin(t + \varphi) - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \cos \nu t \right] \cos(t + \varphi) \\ &= \epsilon \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)^2 \right] \sin 2(t + \varphi) - \right. \\ & \quad \left. \frac{a^2}{8} \sin 4(t + \varphi) + \frac{1}{8} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)^2 [\sin 2(\nu t + t + \varphi) + \right. \\ & \quad \left. \left. \sin 2(t + \varphi - \nu t) \right] + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.20)$$

对上述标准方程组采用 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} a &= y + \epsilon U_1(t, y, \vartheta) \\ \varphi &= \vartheta + \epsilon V_1(t, y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.21)$$

并要求新变量的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \epsilon Y_1(y) + \epsilon^2 Y^*(t, y, \vartheta, \epsilon) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \epsilon Z_1(y) + \epsilon^2 Z^*(t, y, \vartheta, \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.22)$$

其中 Y_1 和 Z_1 不显含 t , U_1, V_1, Y^* 和 Z^* 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数和 t 的以 T 为周期的周期函数。

将(3.1.21)代入(3.1.20),并考虑(3.1.22),令等式两端的 ϵ 的系数相等,则有

$$\left. \begin{aligned} Y_1 + \frac{\partial U_1}{\partial t} &= \phi_0 \\ Z_1 + \frac{\partial V_1}{\partial t} &= \phi_0^* \end{aligned} \right\} \quad (3.1.23)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{a}{2} \left[1 - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)^2 \right] + \frac{a^3}{4} \cos 4(t+\varphi) + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{a\nu E^2}{(1-\nu^2)^2} [\cos 2(\nu t - t - \varphi) - \\ &\quad \cos 2(\nu t + t + \varphi)] + \dots \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

$$\begin{aligned} \phi_0^* &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)^2 \right] \sin 2(t+\varphi) - \\ &\quad \frac{a^2}{8} \sin 4(t+\varphi) + \frac{1}{8} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)^2 [\sin 2(\nu t + t + \varphi) + \\ &\quad \sin 2(t + \varphi - \nu t)] + \dots \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

由(3.1.10)式

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{a}{2} \left[1 - \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)^2 \right] \\ Z_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.26)$$

第一次近似解为

$$a = a \cos(t+\varphi) + \frac{E}{1-\nu^2} \sin \nu t$$

其中 $\varphi = \vartheta$ 为常数; $a = y$ 由式

$$\frac{da}{dt} = \epsilon \frac{a}{2} \left[1 - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)^2 \right] \quad (3.1.27)$$

确定。

在 § 1.5 中, 根据对自激振动系统的研究知, 只有当 $\frac{da}{dt} > 0$ 时, 系统才可能自激, 故自激振动的条件是

$$\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)^2 < 2 \quad (3.1.28)$$

令 (3.1.27) 的右端等于零, 自激振动的定常解为

$$a^2 = 4 - 2 \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)^2 \quad (3.1.29)$$

如果

$$\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)^2 > 2 \quad (3.1.30)$$

则随着时间增加, 振幅将趋近于零, 此时虽有干扰力存在, 振动将逐渐消失, 因而系统发生了异步衰减振动。

§ 3.2 共振情况的平均法

在方程 (3.1.1) 中, 如果 ν 与 ω 相等或二者的差值为与 ϵ 同阶的量, 即有所谓共振情况, 此时方程的解中将出现永年项而无周期解。但是我们知道, 有很多机械系统和无线电系统在共振情况下实际上是有周期解的, 此时干扰力的幅值与 ϵ 同量级, 为此, 方程 (3.1.1) 将有如下的形式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x &= \epsilon f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \epsilon E \sin \nu t \\ &= \epsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

下面讨论上述方程在共振情况下的渐近解。

设 $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ 是 νt 的以 2π 为周期的周期函数, 并可表示为

$$f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \sum_{n=-N}^N e^{in\nu t} f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (3.2.2)$$

其中有限级数的系数 $f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ 是 x 和 $\frac{dx}{dt}$ 的多项式。

在方程 (3.2.1) 中如无干扰, 即 $\epsilon = 0$, 则系统将有简谐振动

$$x = a \cos(\omega t + \varphi)$$

将 $x, \frac{dx}{dt}$ 代入 (3.2.1), 并将 $f[\nu t, a \cos(\omega t + \varphi), -a\omega \sin(\omega t + \varphi)]$ 展成傅氏级数, 由于它对 νt 来说是周期函数, 所以其傅氏级数中将有 $\sin(n\nu$

$\sin(m\omega)t$ 和 $\cos(n\nu+m\omega)t$, 其中 n 和 m 是整数。这说明在干扰力中将有组合频率为 $n\nu+m\omega$ 的谐波成分。

很明显, 任何一个组合频率成分与固有频率相接近时, 则具有该频率成分的干扰力对振动特性将发生很显著的影响, 即将引起振幅和相位连续的、缓慢的变化, 而不管该谐波的振幅大小如何。因此在非线性系统中, 共振现象不但发生在 $\omega \approx \nu$ 时, 而且也发生在 $n\nu+m\omega \approx \omega$ 时, 故在单频干扰力作用下, 共振关系可近似取为

$$\nu = \frac{p}{q}\omega \quad (3.2.3)$$

其中 p, q 为与非线性函数有关的正的或负的互质的整数, 且有 $p = m - 1, q = 1$ 。

在一个自由度非线性系统中, 共振情况可能有如下几种:

(1) 主共振 外干扰力频率等于派生系统的固有频率, 即 $\nu \approx \omega$, 这是主共振状态;

(2) 超谐共振 外干扰力的频率为系统固有频率的真分数时所发生的危害较小的共振称为超谐共振, 此时 $\nu \approx \frac{\omega}{q}$ 。在转子和杜芬系统(Duffing system)中, 以及非线性共振筛等系统中, 可能发生这种共振现象;

(3) 亚谐共振 外干扰力的频率为系统的固有频率的整倍数, 即 $\nu \approx p\omega$ 时所发生的共振现象称为亚谐共振, 在杜芬等系统中可能发生此类共振。

(4) 分数共振 当外干扰力的频率与系统的固有频率有任意分数关系 $\nu \approx \frac{p\omega}{q}$ 时的共振称为分数共振。应指出的是, 理论上 p, q 可取所有可

能的整数, 而比值 $\frac{p}{q}$ 在适当选取 p, q 后可能有任意规定的值, 这样好像在非线性系统中在任意 p, q 的情况下都有可能发生共振现象, 实际上则不然, 因为在一个具体系统中, p, q 是和非线性函数有关的完全确定的值, 而这些确定的值只满足确定的关系(3.2.3)。

由于共振的类别很多, 所以在研究共振情况的渐近解时, 应指明研究哪一种共振类型的渐近解。现研究对应 $\omega \approx \frac{q\nu}{p}$, 即

$$\omega - \frac{q\nu}{p} = \varepsilon\sigma$$

时的渐近解, 其中 $\sigma = O(1)$ 称为调谐参数。

为将方程(3.2.1)化成标准形式的方程组, 以 α, θ 作为新变量, 取变量变换为

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right) \\ \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4)$$

微分(3.2.4)的第一式,并令其等于第二式,则

$$\frac{da}{dt} \cos \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right) - a \left(\frac{q^\nu}{p} - \omega + \frac{d\theta}{dt} \right) \sin \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right) = 0 \quad (3.2.5)$$

微分(3.2.4)的第二式后,将之和(3.2.4)代入(3.2.1),则

$$\begin{aligned} & -\frac{da}{dt} \omega \sin \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right) - a\omega \left(\frac{q^\nu}{p} - \omega + \frac{d\theta}{dt} \right) \cos \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right) \\ & = \varepsilon f \left[\nu t, a \cos \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right), -a \frac{q^\nu}{p} \sin \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right) \right] \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

将(3.2.5)和(3.2.6)对 $\frac{da}{dt}$ 和 $\frac{d\theta}{dt}$ 解出,则

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f \left[\nu t, a \cos \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right), -a \frac{q^\nu}{p} \sin \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right) \right] \sin \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{q^\nu}{p} - \frac{\varepsilon}{a\omega} f \left[\nu t, a \cos \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right), -a \frac{q^\nu}{p} \sin \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right) \right] \times \cos \left(\frac{q^\nu}{p} t + \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.7)$$

上式就是标准方程组, a, θ 的导数与 ε 成比例,故为缓慢变化的函数,对之采用二次近似的 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} a &= y + \varepsilon U_1(t, y, \vartheta) + \varepsilon^2 U_2(t, y, \vartheta) \\ \theta &= \vartheta + \varepsilon V_1(t, y, \vartheta) + \varepsilon^2 V_2(t, y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.8)$$

并要求新变量 y, ϑ 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \varepsilon Y_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Y_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Y^*(t, y, \vartheta, \varepsilon) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon Z_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Z_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Z^*(t, y, \vartheta, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.9)$$

其中 Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 不显含 $t, U_1, U_2, V_1, V_2, Y^*$ 和 Z^* 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数和 t 的周期函数。

将(3.2.8)代入(3.2.7),并考虑(3.2.9),则

$$\begin{aligned} & \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \varepsilon^3 Y^* + \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial y} (\varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \varepsilon^3 Y^*) + \\ & \quad \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} (\varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + \varepsilon^3 Z^*) + \varepsilon^2 \frac{\partial U_2}{\partial t} + \\ & \quad \varepsilon^2 \frac{\partial U_2}{\partial y} (\varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \varepsilon^3 Y^*) + \varepsilon^2 \frac{\partial U_2}{\partial \vartheta} (\varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + \varepsilon^3 Z^*) \\ & = \varepsilon \phi_0 + \varepsilon^2 \phi_1 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \epsilon Z_1 + \epsilon^2 Z_2 + \epsilon^3 Z^* + \epsilon \frac{\partial V_1}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial V_1}{\partial y} (\epsilon Y_1 + \epsilon^2 Y_2 + \epsilon^3 Y^*) + \\
& \epsilon \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} (\epsilon Z_1 + \epsilon^2 Z_2 + \epsilon^3 Z^*) + \epsilon^2 \frac{\partial V_2}{\partial t} + \\
& \epsilon^2 \frac{\partial V_2}{\partial y} (\epsilon Y_1 + \epsilon^2 Y_2 + \epsilon^3 Y^*) + \epsilon^2 \frac{\partial V_2}{\partial \vartheta} (\epsilon Z_1 + \epsilon^2 Z_2 + \epsilon^3 Z^*) \\
& = \epsilon \phi_0^* + \epsilon^2 \phi_1^* + \dots
\end{aligned}$$

其中 $\phi_0, \phi_1, \phi_0^*, \phi_1^*, \dots$ 为 (3.2.7) 右端对 ϵ 展开的泰勒级数的系数。

令等式两端 ϵ 一次方的系数相等

$$\left. \begin{aligned} Y_1 + \frac{\partial U_1}{\partial t} &= \phi_0 \\ Z_1 + \frac{\partial V_1}{\partial t} &= \phi_0^* \end{aligned} \right\} \quad (3.2.10)$$

为了使 Y_1, Z_1 满足不显含 t 的条件, 则

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_0 d\psi \\ Z_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_0^* d\psi \end{aligned} \right\} \quad (3.2.11)$$

在进行平均计算的时候, 将 y 当作常数。

从 (3.2.10) 可求出 U_1, V_1

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \int_0^t (\phi_0 - Y_1) dt - U_{10} \\ V_1 &= \int_0^t (\phi_0^* - Z_1) dt - V_{10} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.12)$$

令等式两端 ϵ^2 的系数相等

$$\left. \begin{aligned} Y_2 + \frac{\partial U_1}{\partial y} Y_1 + \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} Z_1 + \frac{\partial U_2}{\partial t} &= \phi_1 \\ Z_2 + \frac{\partial V_1}{\partial y} Y_1 + \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} Z_1 + \frac{\partial V_2}{\partial t} &= \phi_1^* \end{aligned} \right\} \quad (3.2.13)$$

为了使 Y_2, Z_2 满足不显含 t 的条件, 则

$$\left. \begin{aligned} Y_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\phi_1 - \frac{\partial U_1}{\partial y} Y_1 - \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} Z_1 \right) d\psi \\ Z_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\phi_1^* - \frac{\partial V_1}{\partial y} Y_1 - \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} Z_1 \right) d\psi \end{aligned} \right\} \quad (3.2.14)$$

和

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= \int_0^t \left(\phi_1 - \frac{\partial U_1}{\partial y} Y_1 - \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} Z_1 - Y_2 \right) dt - U_{20} \\ V_2 &= \int_0^t \left(\phi_1^* - \frac{\partial V_1}{\partial y} Y_1 - \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} Z_1 - Z_2 \right) dt - V_{20} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.15)$$

求出了函数 Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, U_1 和 V_1 后, 则近似解为

第一次近似解

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \left(\frac{q\nu}{p} t + \theta \right) \\ a &= y \\ \theta &= \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (3.2.16)$$

而

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \epsilon Y_1(y, \vartheta) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \epsilon Z_1(y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.17)$$

第二次近似解

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \left(\frac{q\nu}{p} t + \theta \right) \\ a &= y + \epsilon U_1(t, y, \vartheta) \\ \theta &= \vartheta + \epsilon V_1(t, y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.18)$$

而

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \epsilon Y_1(y, \vartheta) + \epsilon^2 Y_2(y, \vartheta) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \epsilon Z_1(y, \vartheta) + \epsilon^2 Z_2(y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.19)$$

在方程组(3.2.9)中,如其右端的函数永大于零,则振幅将不断增加;如右端函数小于零,则振幅将减小;当右端函数等于零时,振幅不变而为常数,这个不变的常数称为定常值或定常解。为了得到定常解必须令(3.2.9)的右端为0,以得到求定常解的方程式,此时我们将对微分方程(3.2.1)的积分问题,化成为解代数方程的问题。

第一次近似定常解

$$\left. \begin{aligned} x &= y \cos \left(\frac{q\nu}{p} t + \vartheta \right) \\ Y_1(y, \vartheta) &= 0 \\ Z_1(y, \vartheta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.20)$$

第二次近似定常解

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \left(\frac{q\nu}{p} t + \theta \right) \\ a &= y + \epsilon U_1(t, y, \vartheta) \\ \theta &= \vartheta + \epsilon V_1(t, y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.21)$$

其中 y, ϑ 由下式

$$\left. \begin{aligned} Y_1(y, \vartheta) + \epsilon^2 Y_2(y, \vartheta) &= 0 \\ Z_1(y, \vartheta) + \epsilon^2 Y_2(y, \vartheta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.22)$$

确定。

现研究定常解的稳定性问题, 已经证明, 在 ϵ 足够小的时候, 渐近解的稳定性可由其第一次近似方程来判定^[19], 故特征方程

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial y} - \lambda & \frac{\partial Y_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial Z_1}{\partial y} & \frac{\partial Z_1}{\partial \vartheta} - \lambda \end{vmatrix}_{\substack{y=y^0 \\ \vartheta=\vartheta^0}} = 0 \quad (3.2.23)$$

所有的根都有负实部, 则定常解稳定, 否则就不稳定。应用罗芝—胡尔维茨(Routh—Hurwitz)判据, 定常解的稳定条件是

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial \vartheta} \right)_{\substack{y=y^0 \\ \vartheta=\vartheta^0}} &< 0 \\ \left(\frac{\partial Y_1}{\partial y} \frac{\partial Z_1}{\partial \vartheta} - \frac{\partial Y_1}{\partial \vartheta} \frac{\partial Z_1}{\partial y} \right)_{\substack{y=y^0 \\ \vartheta=\vartheta^0}} &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.24)$$

§ 3.3 具有分段线性的非线性系统的受迫振动 分段弹簧间隙对系统的影响

分段线性的非线性振动系统, 在工程技术中经常遇到。现以单质量非线性共振筛为例说明其渐近解的求法, 以及非线性系统强迫振动的一些新的物理现象。

惯性驱动的非线性共振筛模型如图 3.1(a) 所示

弹性力 $S(x)$, 其非线性部分 $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} (c' - c'')x & (-e \leq x \leq e) \\ (c' - c'')e & (x \geq e) \\ -(c' - c'')e & (x \leq -e) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

阻尼函数 $f_1(\dot{x})$ 为

$$f_1(\dot{x}) = \begin{cases} h'\dot{x} & (-e \leq x \leq e) \\ h''\dot{x} & (x \geq e) \\ h'''\dot{x} & (x \leq -e) \end{cases} \quad (3.3.2)$$

根据达朗伯原理, 并在弹性力的非线性部分、阻尼力、干扰力前标以小参数 ϵ 后, 其振动方程为

$$m\ddot{x} + c''x = -\epsilon f(x) - \epsilon f_1(\dot{x}) + \epsilon p_1 \sin \nu t \quad (3.3.3)$$

其中

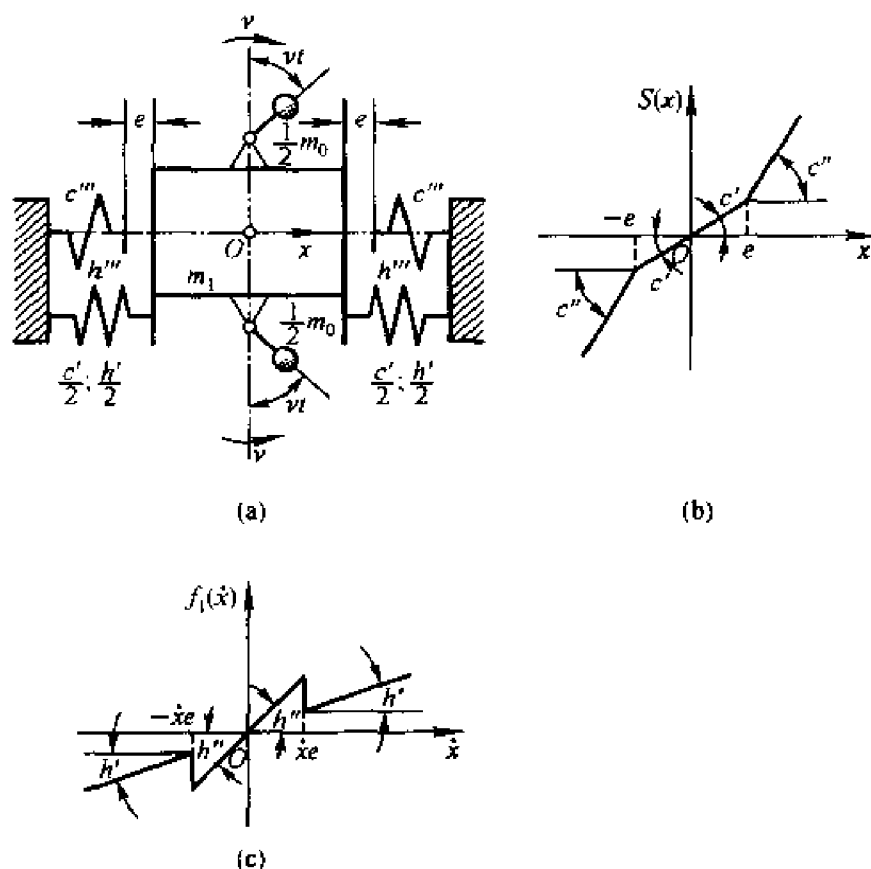


图 3.1

- m_1 ——共振筛的质量；
 c'' ——第二段簧的刚度系数；
 h'' ——第二段簧的内阻系数；
 e ——分段簧之间的间隙；
 x_0 —— m_0 相对于 m_1 的相对位移；
- m_0 ——惯性块质量；
 c' ——第一段簧的刚度系数；
 h' ——第一段簧的内阻系数；
 r ——驱动半径； ν ——惯性块角速度；
 x —— m_1 的绝对位移。

$$\left. \begin{aligned} c'' &= c' + c'' \\ h'' &= h' + h'' \\ m &= m_1 + m_0 \\ p_1 &= m_0 r \nu^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.4)$$

派生系统(当 $\varepsilon=0$ 时的系统)的固有频率为

$$\frac{c''}{m} = \omega^2 \quad (3.3.5)$$

现研究 ν 与 ω 相近时的共振情况

$$\omega - \nu = \varepsilon \sigma$$

以 a, θ 作为新变量来代替 x 和 \dot{x}

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin(\nu t + \theta) \\ \dot{x} &= a \omega \cos(\nu t + \theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.6)$$

则(3.3.3)可化成标准方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{m\omega} [f(a \sin \psi) + f_1(a \nu \cos \psi) - p_1 \sin \nu t] \cos \psi \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \nu + \frac{\varepsilon}{am\omega} [f(a \sin \psi) + f_1(a \nu \cos \psi) - p_1 \sin \nu t] \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (3.3.7)$$

其中 $\psi = \nu t + \theta$

从(3.3.7)知, a, θ 的导数与 ε 成比例, 故它们为缓慢变化的函数, 采用第一次近似的 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} a &= y + \varepsilon U(t, y, \vartheta) \\ \vartheta &= y + \varepsilon V(t, y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.8)$$

并要求新变量 y, ϑ 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \varepsilon Y_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Y^*(t, y, \vartheta, \varepsilon) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon Z_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Z^*(t, y, \vartheta, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.9)$$

其中 Y_1, Z_1 不显含 t , U, V, Y^*, Z^* 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数和 t 的周期函数。

将(3.3.8)代入(3.3.7), 并考虑(3.3.9), 则

$$\begin{aligned} & \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y^* + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} (\varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y^*) + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} (\varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z^*) \\ &= \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 \dots \\ & \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z^* + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} (\varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y^*) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \vartheta} (\varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z^*) \\ &= \varepsilon F_2 + \varepsilon^2 \dots \end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{m\omega} [f(y \sin \psi) + f_1(y \nu \cos \psi) - p_1 \sin \nu t] \cos \psi \\ F_2 &= \omega - \nu + \frac{1}{y a m} [f(y \sin \psi) + f_1(y \nu \cos \psi) - p_1 \sin \nu t] \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (3.3.10)$$

在上式两端令 ε 一次方的系数相等, 则得

$$\left. \begin{aligned} Y_1 + \frac{\partial U}{\partial t} &= F_1 \\ Z_1 + \frac{\partial V}{\partial t} &= F_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.11)$$

为了使 Y_1, Z_1 满足不显含 t 的条件, 则

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1 d\psi \\
&= -\frac{1}{2\pi m\omega} \int_0^{2\pi} f_1(y\nu\cos\psi)\cos\psi d\psi - \frac{p_1}{m(\omega+\nu)} \sin\vartheta \\
Z_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2 d\psi \\
&= \omega - \nu + \frac{1}{2\pi m\omega y} \int_0^{2\pi} f(y\sin\psi)\sin\psi d\psi - \frac{p_1}{my(\omega+\nu)} \cos\vartheta
\end{aligned}$$

在上式中应用了近似关系 $2\omega \approx \omega + \nu$ 。

在(3.3.9)中如只考虑 ϵ 的一次项, 并且将 Y_1, Z_1 代入, 则

$$\left. \begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= -\frac{\epsilon}{2\pi m\omega} \int_0^{2\pi} f_1(y\nu\cos\psi)\cos\psi d\psi - \frac{\epsilon p_1}{m(\omega+\nu)} \sin\vartheta \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \nu + \frac{\epsilon}{2\pi m\omega y} \int_0^{2\pi} f(y\sin\psi)\sin\psi d\psi - \frac{\epsilon p_1}{my(\omega+\nu)} \cos\vartheta
\end{aligned} \right\} \quad (3.3.12)$$

为了求出上式中的积分, 将 x, \dot{x} 代入(3.3.1)和(3.3.2), 并给出相应的积分界限

$$f_1(y\nu\cos\psi) = \begin{cases} h'y\nu\cos\psi & (0 \leq \psi \leq \psi_0) \\ h''y\nu\cos\psi & (\psi_0 \leq \psi \leq \pi - \psi_0) \\ h'y\nu\cos\psi & (\pi - \psi_0 \leq \psi \leq \pi) \end{cases} \quad (3.3.13)$$

和

$$f(y\sin\psi) = \begin{cases} (c' - c'')y\sin\psi & (0 \leq \psi \leq \psi_0) \\ (c' - c'')y\sin\psi_0 & (\psi_0 \leq \psi \leq \pi - \psi_0) \\ (c' - c'')y\sin\psi & (\pi - \psi_0 \leq \psi \leq \pi) \end{cases} \quad (3.3.14)$$

其中

$$\psi_0 = \sin^{-1} \frac{e}{y}$$

取 $\delta_e(y)$ ——等效线性衰减指数为

$$\begin{aligned}
\delta_e(y) &= \frac{1}{\pi m\omega y} \int_0^\pi f_1(y\nu\cos\psi)\cos\psi d\psi \\
&= \frac{1}{\pi m} \left(\int_0^{\psi_0} h' \cos^2\psi d\psi + \int_{\psi_0}^{\pi-\psi_0} h'' \cos^2\psi d\psi + \int_{\pi-\psi_0}^\pi h' \cos^2\psi d\psi \right) \\
&= \frac{h''}{2m} [1 + \mathcal{H}(\alpha, Z)] \quad (3.3.15)
\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{H}(\alpha, Z) = \frac{2(\alpha-1)}{\pi Z} \left(Z \sin^{-1} \frac{1}{Z} + \sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}} \right) \quad (3.3.16)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{h'}{h''} \\ Z &= \frac{y}{e} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.17)$$

取 $\omega_e(y)$ ——等效线性固有频率(骨干曲线方程)为

$$\begin{aligned} \omega_e(y) &= \omega + \frac{1}{\pi m \omega y} \int_0^\pi f(y \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ &= \omega + \frac{c' - c''}{\pi m \omega} \left(\int_0^{\psi_0} \sin^2 \psi d\psi + \sin \psi_0 \times \right. \\ &\quad \left. \int_{\psi_0}^{\pi - \psi_0} \sin \psi d\psi + \int_{\pi - \psi_0}^\pi \sin^2 \psi d\psi \right) \\ &= \omega + \frac{c''}{2m\omega} \mathcal{H}(\beta, Z) \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\beta, Z) &= \frac{2(\beta - 1)}{\pi Z} \left(Z \sin^{-1} \frac{1}{Z} + \sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}} \right) \\ \beta &= \frac{c'}{c''} \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

将(3.3.15)和(3.3.18)代入(3.3.12),则

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \epsilon \left[-\delta_e(y)y - \frac{p_1}{m(\omega + \nu)} \sin \vartheta \right] \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_e(y) - \nu - \frac{\epsilon p_1}{my(\omega + \nu)} \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (3.3.20)$$

令上式右端等于零,则可得到确定定常解的方程式

$$\left. \begin{aligned} -\delta_e(y)y - \frac{p_1}{m(\omega + \nu)} \sin \vartheta &= 0 \\ \omega_e(y) - \nu - \frac{p_1}{ym(\omega + \nu)} \cos \vartheta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.21)$$

在上面的第一式中,近似地取 $\omega + \nu \doteq 2\nu$,则

$$m^2 y^2 \{ [\omega_e^2(y) - \nu^2]^2 + 4\nu^2 \delta_e^2(y) \} = p_1^2$$

所以

$$y = \frac{p_1}{m \sqrt{[\omega_e^2(y) - \nu^2]^2 + 4\nu^2 \delta_e^2(y)}} \quad (3.3.22)$$

相位差为

$$\vartheta = \operatorname{tg}^{-1} \left[-\frac{2\nu \delta_e(y)}{\omega_e^2(y) - \nu^2} \right] \quad (3.3.23)$$

从(3.3.22)和(3.3.23)知,它们和线性系统强迫振动的解的表达式形式上完全相同,但因等效线性固有频率 $\omega_e(y)$ 和等效线性衰减指数 $\delta_e(y)$ 都

是振幅 y 的函数,故在研究共振曲线时,常将(3.3.22)对 ν 解出

$$\nu = \sqrt{\frac{\omega_e^2(y) - 2\delta_e^2(y) \pm \sqrt{[\omega_e^2(y) - 2\delta_e^2(y)]^2 - (1 - \lambda^2)\omega_e^4(y)}}{1 - \lambda^2}} \quad (3.3.24)$$

其中

$$\lambda = \frac{m_0 r}{m y}$$

给 y 一系列的值,计算 $\omega_e(y)$ 和 $\delta_e(y)$ 后,由(3.3.24)计算 ν ,则可画出一组参数的 $y-\nu$ 曲线——共振曲线,故方程(3.3.24)称为频率响应方程。

当系统的参数确定后,则可算出共振曲线如图 3.2。从曲线知,等效线性固有频率 $\omega_e(y)$ 采用方程(3.3.18),在 $y=e$ 时,发生突变,如 AB 。实践证明,它较等效线性固有频率平方法能更好地与实验曲线相吻合。

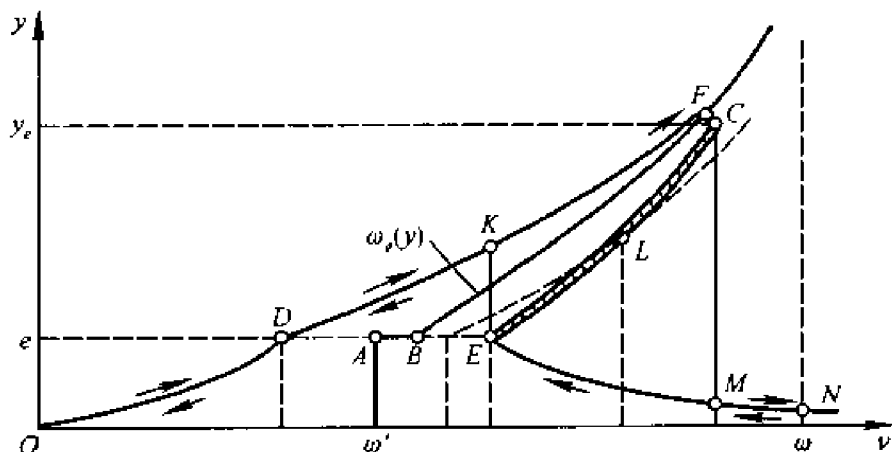


图 3.2

图 3.3 至图 3.6 给出了非线性簧刚度、阻尼系数、干扰力振幅和缓冲簧间隙对共振曲线形状的影响,根据工业生产中不同的需要,可以适当选用系统的参数。

从图 3.3 知, $\beta=1$ 为线性系统; $\beta<1$ 对应硬特性弹簧系统; $\beta>1$ 对应软特性弹簧系统。下面讨论分段线性系统中强迫振动的一些新的物理现象。

(1) 分段弹簧间隙对系统的影响

间隙 e 对共振曲线的形状,从而对系

统的性质,有很大的影响。从图 3.6 知, e 增加则线性部分固有频率曲线

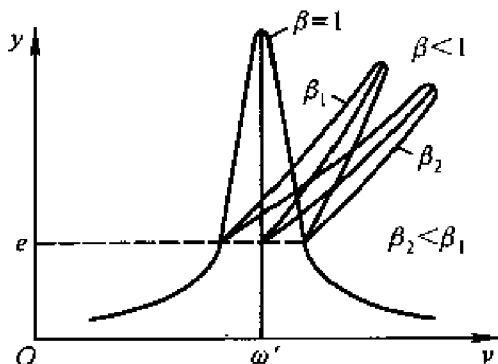


图 3.3

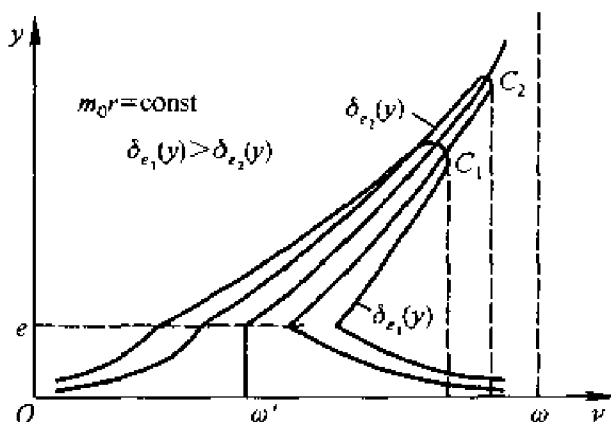


图 3.4

由 $\omega' - A_1$ 变为 $\omega' - A_2$, 如 $e_2 > e_1$, 相同振幅值对应的系统的固有频率不同, 此时有 $\omega_{e_2}(y) < \omega_{e_1}(y)$, 即不同的 e 产生了不同的固有频率, 这说明分段线性系统的固有频率与调整参数 e 有关。

(2) 共振曲线拐弯 在非线性弹性恢复力系统中, 共振曲线呈现出一个拐弯, 如图 3.3 所示。由于共振曲线的拐弯, 在干扰力频率缓慢变化时, 振幅的变化发生跳跃和滞后现象。当干扰力频率缓慢增加时, 从图 3.2 知, 振幅沿共振曲线由 D 至 K 再至 C , 跳跃至 M , 然后至 N ; 然后, 当干扰力频率缓慢减小时, 振幅沿共振曲线由 N 至 M , 至 E , 跳跃至 K , 然后至 D 。逆变过程中跳跃的发生总是落后于上述特定值的现象称为滞后。

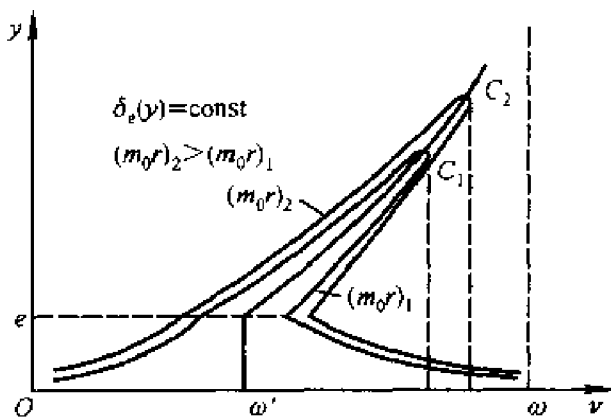


图 3.5

(3) $\omega_e(y)$ 的极限值 令 $y \rightarrow \infty$, 即 $Z \rightarrow \infty$, 由 (3.3.18) 知, $\omega_e(y) = \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, 即骨干曲线的渐近线为 $\omega_e(y) = \omega$, 振幅增加, $\omega_e(y)$ 向 ω 趋近, 由于阻尼的存在 $\omega_e(y)$ 永远不会等于 ω , 阻尼愈小则 $\omega_e(y)$ 愈大。

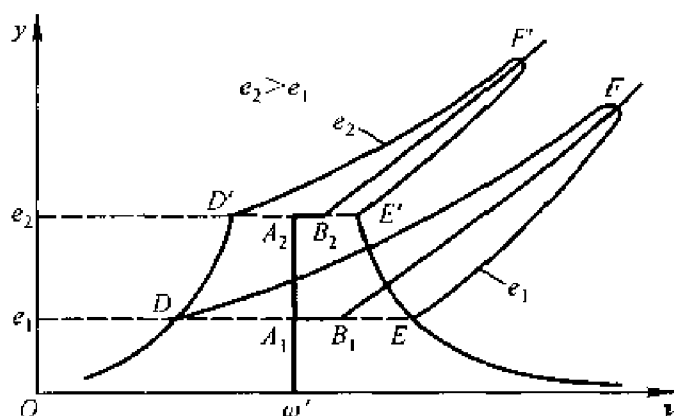


图 3.6

(4) 弹簧动刚度的影响 在硬特性弹性系统中($\beta < 1$), β 越小则拐弯越大, 振幅随着频率的变化越平缓。

(5) 干扰力幅值增加 可增加同一频率时的系统振幅。

该系统的其他一些特点, 将在第七章中进行讨论。

§ 3.4 线性非理想系统

由不平衡旋转质量所激起的振动, 是机械系统中强迫振动最常遇到的一种形式。如各种离心泵、鼓风机, 离心压气机, 分离机, 振动器等等。如果带动旋转质量的动力系统的功率是无穷大的, 或者大到被激系统对它的影响可以忽略, 则干扰力和系统的状态 x , \dot{x} 和 \ddot{x} 无关, 这种系统称为理想系统, 上一节研究的就是这种系统。如果带动旋转轴的动力系统功率不是无穷大, 而为有限值时, 由于振动系统与动力系统的相互影响, 干扰力是系统状态的函数, 这种系统称为非理想系统, 它将发生一些新的振动现象。为了从理论上说明这些现象, 以便合理地利用动力, 现研究有限功率动力系统带动的线性振动器。

惯性式振动器的力学模型如图 3.7 所示。

振动系统由质量 m_1 和刚度为 k 的弹性元件组成。电动机带动转动惯量为 J 的转子, 在距旋转中心 r 处, 有不平衡质量 m , 当不平衡质量旋转时, 其离心力的垂直分量将激起系统的强迫振动。

动力特性 $L(\dot{\varphi})$ 是已知函数, 对旋转运动的阻尼力矩是由实验确定的

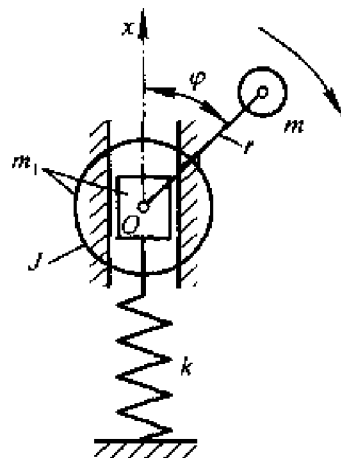


图 3.7

函数 $H(\dot{\varphi})$, 对振动运动的阻尼取 $c\dot{x}$ 。

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} - r\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 \\ E &= \frac{1}{2} k x^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.1)$$

根据拉格朗日第二类方程式, 略去高阶微量后, 得振动方程

$$\left. \begin{aligned} m_0 \ddot{x} + c\dot{x} + kx &= m r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + m r \ddot{\varphi} \sin \varphi \\ J \ddot{\varphi} + H(\dot{\varphi}) &= L(\dot{\varphi}) + m r \ddot{x} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.4.2)$$

其中

$$m_0 = m_1 + m$$

在式(3.4.2)中, $m r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi$, $m r \ddot{\varphi} \sin \varphi$ 和 $m r \ddot{x} \sin \varphi$ 表示振动系统和动力源的相互影响, 根据实验知, 在共振区中其相互影响最为显著。

假设 $\frac{m}{m_1} \ll 1$, $\frac{m}{J} \ll 1$, 并且认为 $c\dot{x}$, $m r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi$, $m r \ddot{\varphi} \sin \varphi$, $m r \ddot{x} \sin \varphi$ 和其他的力和力矩相比是很小的量。我们只研究共振情况的定常解, 在小项前引入小参数 ϵ 后, 则方程组(3.4.2)可写作如下形式

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_n^2 x &= \epsilon (q_2 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + q_3 \ddot{\varphi} \sin \varphi - 2n\dot{x}) \\ \ddot{\varphi} &= \epsilon [M_1(\dot{\varphi}) + q_3 \ddot{x} \sin \varphi] \end{aligned} \right\} \quad (3.4.3)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{k}{m_0}, \epsilon q_2 = \frac{mr}{m_0}, \epsilon q_3 = \frac{mr}{J} \\ \epsilon M_1(\dot{\varphi}) &= \frac{1}{J} [L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi})], \epsilon 2n = \frac{c}{m_0} \end{aligned} \right\} \quad (3.4.4)$$

从(3.4.3)的形式知, 当 $\epsilon = 0$ 时, 系统的振动运动为简谐运动, 而旋转速度 $\frac{d\varphi}{dt} = \text{const}$ 。而当 $\epsilon \neq 0$ 时, 很显然, 系统的振动将接近于简谐振动, 而 $\frac{d\varphi}{dt}$ 也接近于常数, 即旋转角速度为慢变函数

为了求系统的定常解, 设

$$\varphi = \Omega t + C + \epsilon W(t) \quad (3.4.5)$$

其中 Ω, C 为常数, $W(t)$ 为与 ϵ 同阶的周期函数。将它代入后, 则(3.4.3)可写成如下的拟线性方程组的形式

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_n^2 x &= \epsilon [q_2 \Omega^2 \cos(\Omega t + C) + \epsilon q_3 \ddot{W} \sin(\Omega t + C) - 2n\dot{x}] + \epsilon^2 \cdots \\ \ddot{W} &= [M_1(\Omega) + q_3 \ddot{x} \sin(\Omega t + C)] + \epsilon \cdots \end{aligned} \right\} \quad (3.4.6)$$

我们现在研究共振情况, 即取共振关系 $\omega_n - \Omega$ 为与 ϵ 同阶的小量。

当 $\epsilon = 0$ 时, 得派生方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_n^2 x &= 0 \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.4.7)$$

把上述第一式的通解视为作用于 x 和 $\frac{dx}{dt}$ 的方程组, 则有

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\Omega t + \xi) \\ \dot{x} &= -a\omega_n \sin(\Omega t + \xi) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.8)$$

按照 a, ξ 为由起始条件确定的常数, 且取 $\Omega = \omega_n$ 。

如取 a, ξ 作为新变量, 代替 x 和 $\frac{dx}{dt}$, 由于非线性项的影响, a, ξ 将是时间 t 的函数。

微分 (3.4.8) 的第一式, 得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \cos(\Omega t + \xi) - a \left(\Omega + \frac{d\xi}{dt} \right) \sin(\Omega t + \xi)$$

令它与 (3.4.8) 的第二式相等

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} \cos(\Omega t + \xi) - \frac{d\xi}{dt} a \sin(\Omega t + \xi) \\ = a(\Omega - \omega_n) \sin(\Omega t + \xi) \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

微分 (3.4.8) 的第二式, 得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{da}{dt} \omega_n \sin(\Omega t + \xi) - a\omega_n \left(\Omega + \frac{d\xi}{dt} \right) \cos(\Omega t + \xi)$$

将上式和 (3.4.8) 代入 (3.4.3), 得

$$\begin{aligned} -\frac{da}{dt} \sin(\Omega t + \xi) - \frac{d\xi}{dt} a \cos(\Omega t + \xi) + a(\omega_n - \Omega) \cos(\Omega t + \xi) \\ = \frac{\varepsilon}{\omega_n} [q_2 \Omega^2 \cos(\Omega t + C) + 2na\omega_n \sin(\Omega t + C)] + \varepsilon^2 \dots \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

将 (3.4.9) 和 (3.4.10) 对 $\frac{da}{dt}, \frac{d\xi}{dt}$ 求解, 则得到标准方程式为

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_n} [q_2 \Omega^2 \cos(\Omega t + C) + 2na\omega_n \sin(\Omega t + \xi)] \times \\ &\quad \sin(\Omega t + \xi) + \varepsilon^2 \dots \\ \frac{d\xi}{dt} &= \varepsilon \left\{ (\omega_n - \Omega) - \frac{1}{a\omega_n} [q_2 \Omega^2 \cos(\Omega t + C) + 2na\omega_n a \sin(\Omega t + \xi)] \times \right. \\ &\quad \left. \cos(\Omega t + \xi) \right\} + \varepsilon^2 \dots \end{aligned}$$

$$\ddot{W} = [M_1(\Omega) - q_3 a \omega_n \Omega \cos(\Omega t + \xi) \sin(\Omega t + C)] + \varepsilon \dots \quad (3.4.11)$$

为了保证 $W(t)$ 是时间 t 的以 T 为周期的函数, 在 (3.4.11) 的第三式

中应设

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \left[M_1(\Omega) - \frac{1}{2} q_3 a \omega_n \Omega \sin(C - \xi) - \frac{1}{2} q_3 a \omega_n \Omega \sin(2\Omega t + C + \xi) \right] dt \\ = M_1(\Omega) - \frac{1}{2} q_3 a \omega_n \Omega \sin(C - \xi) = 0 \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

考虑到关系式(3.4.12),从式(3.4.11)的第三式,得

$$W(t) = \frac{1}{8\Omega} q_3 a \omega_n \sin(2\Omega t + C + \xi) \quad (3.4.13)$$

对标准方程组(3.4.11),采用 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} a &= e + \epsilon U(t, e, \vartheta) \\ \xi &= \vartheta + \epsilon V(t, e, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.14)$$

并要求新变量 e, ϑ 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \epsilon Y(e, \vartheta) + \epsilon^2 Y^*(t, e, \vartheta, \epsilon) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \epsilon Z(e, \vartheta) + \epsilon^2 Z^*(t, e, \vartheta, \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.15)$$

其中函数 U, V, Y^* 和 Z^* 应为 t 的以 T 为周期的周期函数, ϑ, C 变量的以 2π 为周期的周期函数, Y 与 Z 不显含 t 。

将(3.4.14)代入(3.4.11),考虑到(3.4.15)得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon Y + \epsilon^2 Y^* + \epsilon \frac{\partial U}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial U}{\partial e} (\epsilon Y + \epsilon^2 Y^*) + \epsilon \frac{\partial U}{\partial \vartheta} (\epsilon Z + \epsilon^2 Z^*) \\ = \epsilon F_1 + \epsilon^3 \cdots \\ \epsilon Z + \epsilon^2 Z^* + \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial V}{\partial e} (\epsilon Y + \epsilon^2 Y^*) + \epsilon \frac{\partial V}{\partial \vartheta} (\epsilon Z + \epsilon^2 Z^*) \\ = \epsilon F_2 + \epsilon^4 \cdots \end{aligned} \right\} \quad (3.4.16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{\omega_n} [q_2 \Omega^2 \cos(\Omega t + C) + 2na\omega_n \sin(\Omega t + \vartheta)] \sin(\Omega t + \vartheta) \\ F_2 &= \omega_n - \Omega - \frac{1}{a\omega_n} [q_2 \Omega^2 \cos(\Omega t + C) + 2na\omega_n \sin(\Omega t + \vartheta)] \cos(\Omega t + \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.17)$$

令(3.4.16)中的 ϵ 的一次方的系数相等,得

$$Y + \frac{\partial U}{\partial t} = F_1, \quad Z + \frac{\partial V}{\partial t} = F_2 \quad (3.4.18)$$

为了使引入的函数满足上述条件,取 Y, Z 如下:

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{1}{T} \int_0^T F_1 dt = -\frac{1}{2\omega_n} [q_2 \Omega^2 \sin(\vartheta - C) + 2ne\omega_n] \\ Z &= \frac{1}{T} \int_0^T F_2 dt = \omega_n - \Omega - \frac{1}{2e\omega_n} q_2 \Omega^2 \cos(\vartheta - C) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.19)$$

把(3.4.19)代入(3.4.15),并且只考虑 ε 的一次项,得第一次近似方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\omega_n} [q_2 \Omega^2 \sin(\vartheta - C) + 2ne\omega_n] \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon \left[\omega_n - \Omega - \frac{1}{2e\omega_n} q_2 \Omega^2 \cos(\vartheta - C) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.4.20)$$

令该方程组的右端为零,并考虑到(3.4.12),得到求定常解的方程组为

$$\left. \begin{aligned} M_1(\Omega) - \frac{1}{2} q_3 e \omega_n \Omega \sin(C - \vartheta) &= 0 \\ q_2 \Omega^2 \sin(\vartheta - C) + 2ne\omega_n &= 0 \\ \omega_n - \Omega - \frac{1}{2e\omega_n} q_2 \Omega^2 \cos(\vartheta - C) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.21)$$

从上方程组的后两式可得

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{q_2 \Omega^2}{2\omega_n \sqrt{(\omega_n - \Omega)^2 + n^2}} \\ \operatorname{tg}(\vartheta - C) &= \frac{n}{\omega_n - \Omega} \end{aligned} \right\} \quad (3.4.22)$$

确定强迫振动频率的方程为

$$\begin{aligned} \phi(\Omega) &= L(\Omega) - H(\Omega) - \frac{q_3 \omega_n^2}{q_2 \Omega} ne^2 \\ &= L(\Omega) - H(\Omega) - \frac{cke^2}{2m_0 J \Omega} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

从(3.4.22)的第一式知,振幅的表达式与在离心力作用下的强迫振动的解的振幅完全相同,它与起始相位角 C 无关(C 为由起始条件确定任意常数)。但此时强迫振动的频率不是任意给定的,而是由式(3.4.23)确定,它和动力系统的特性、振动系统的参数和振幅有关。式(3.4.23)对 Ω 来说,可能有一个或几个根,而每一个根对应着由式(3.4.22)所确定的振幅和相位。式(3.4.23)可表示为图3.8所示的曲线。

此处函数 $S(\Omega)$ 为

$$S(\Omega) = H(\Omega) + \frac{cke^2}{2m_0 J \Omega} \quad (3.4.24)$$

$L(\Omega)$ 为动力学系统的特性,函数 $S(\Omega)$ 为旋转运动的阻尼力矩与振

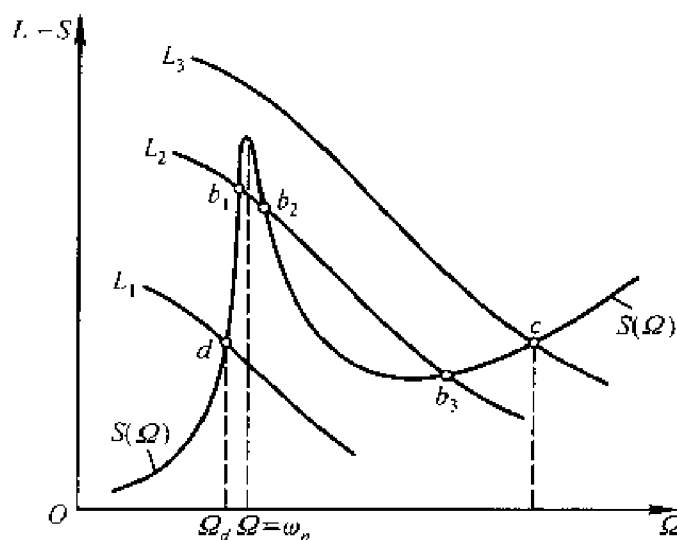


图 3.8

动运动的阻尼力矩之和,故 $S(\Omega)$ 可理解为整个系统的阻尼力矩。

曲线 $L(\Omega)$ 与 $S(\Omega)$ 的交点对应方程 (3.4.23) 的解,也即为强迫振动可能的频率值,同时图 3.8 也表示方程 (3.4.23) 的图解法。

在图 3.8 上给出了三条典型的动力特性曲线。 L_1 与 S 的交点为 d ,对应该点的 Ω 则为定常运动状态强迫振动的频率。有了 Ω_d 可根据 (3.4.22) 计算振幅和相位。动力特性 L_3 与 S 交于点 c ,对应该点的频率为 Ω 。在以上两种情况下交点只有一个,即定常振动只有惟一的一种运动状态。动力特性 L_2 与 S 交于三个点 b_1, b_2 和 b_3 。即在共振区内问题的解不是单值的,有三种运动状态可能会出现。

因此,第一次近似的定常解为

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\Omega t + \xi) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.4.25)$$

其中 $a = e, \xi = \vartheta$ 由式 (3.4.22) 确定,而 Ω 由式 (3.4.23) 确定。

为了回答在 b_1, b_2, b_3 中哪一个定常解是客观实际存在的这个问题,应该研究所有可能的定常解的运动稳定性问题。

根据胡尔维茨判据,如果函数 Y, Z 和 ϕ 的基础方程式的所有的根都有负实部的话,则定常解将是稳定的。略去中间演算过程,得定常解的稳定条件^[18]为

$$\frac{d}{d\Omega}[L(\Omega) - S(\Omega)] < 0 \quad (3.4.26)$$

根据这个条件来分析图 3.8 上 L_2 与 S 的交点 b_1, b_2 和 b_3 。从曲线的斜率看出,在 b_1 和 b_3 点 $(L-S)$ 的导数为负,故对应该两点的运动是稳

定的,而在 b_2 处, $(L-S)$ 的导数为正,此时运动不稳定。

令

$$\frac{d}{d\Omega}[L(\Omega) - S(\Omega)] = 0 \quad (3.4.27)$$

则可得到稳定与不稳定运动的边界点 T, R , 如图 3.9 所示。

动力特性曲线 L_{r1} 与 L_{r2} 与 $S(\Omega)$ 的交点正是 T 与 R 。

动力调节特性在 L, Ω 平面上表示为 L 的一系列平行线, 增加 Ω 相当于 L 自左向右平行移动, 而减小 Ω , 则相当于自右向左平行移动。所谓边界动力特性, 就是振动发生跳跃时的动力特性。

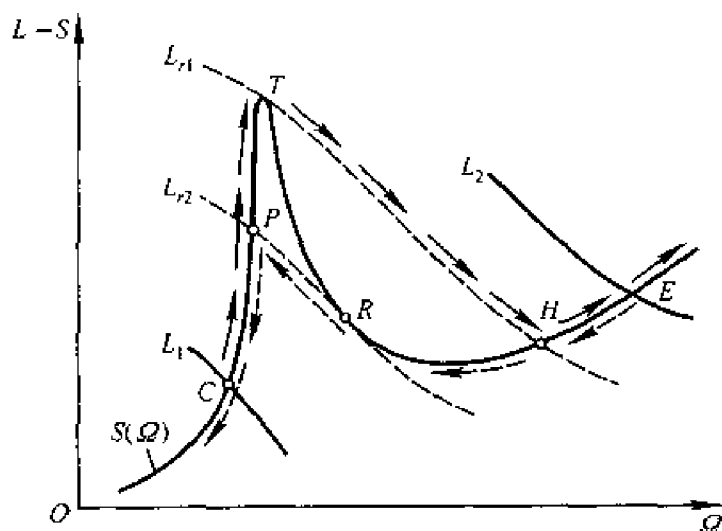


图 3.9

当动力特性平行移动的时候, L 与 S 的交点 C 将沿 $S(\Omega)$ 曲线移动, 经过 P 点, 然后到达 T 点, 在这个点系统将发生过渡过程(非定常振动过程), 即从 T 过渡到 H , 这个过渡过程进行得很快, 所以称为“跳跃”, 此后如再继续向右移动 L , 则 L 与 S 的交点从 H 沿 $S(\Omega)$ 向右继续移动。根据稳定条件(3.4.26), 在 T 与 H 间, 运动都是不稳定的, 所以不稳定的定常解在实测过程中是实现不了的解。同样对 L_{r2} 来说, 只有一个 P 点为稳定运动。所以将从 R 向 P 发生跳跃。上面所分析的跳跃现象, 对所研究的这类振动系统的共振区来说是很典型的, 这就是为什么强迫振动在 TR 区间不能实现的原因。

当缓慢地增加干扰力频率 Ω 时, TH 部分得不到稳定的强迫振动。根据(3.4.22)作的共振曲线, 如图 3.10 所示, 实线部分对应稳定运动, 而 T 与 H 间的虚线部分则表示不稳定的运动。

当缓慢减小 Ω 时, 共振曲线如图 3.11 所示。

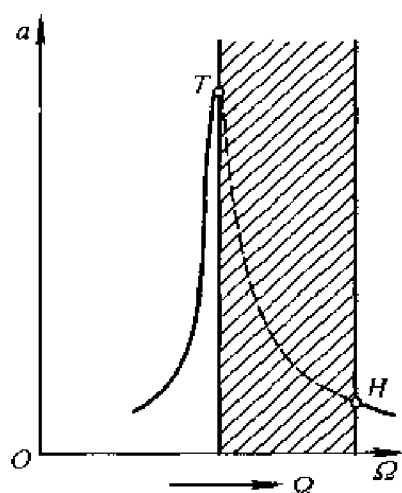


图 3.10

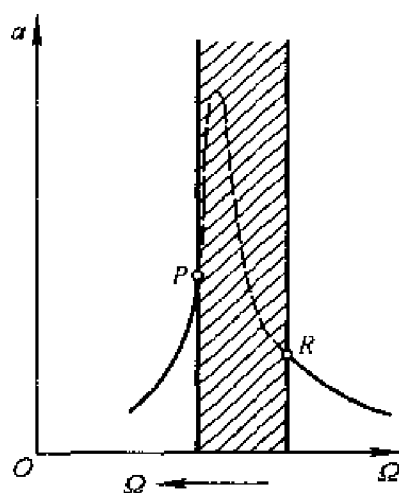


图 3.11

图上的 T, H, P, R 各点就是图 3.9 上对应的各点。

图 3.10 和图 3.11 上不稳定区的大小和动力特性, 功率储备量的大小以及系统的参数有关。

如改变动力系统功率的调节方法, 或给系统很大的功率储备量, 则不稳定区有可能完全消除。

卡纳宁柯(Конonenko B. O.) 于 1964 年就得到了以上这些重要结论。

下面简单介绍一下卡纳宁柯和卡拉布辽夫(Кораблев С. С.) 于 1959 年在机械模型上所做的试验。试验装置如图 3.12 所示。支承悬臂梁的是一块巨大的厚板, 电动机垂直安装, 在飞轮上钻孔所形成的偏心质量旋转后, 形成干扰力, 悬臂梁在干扰力的作用下作垂直于纸面方向的振动, 且在垂直于纸面方向上不受重力的影响。

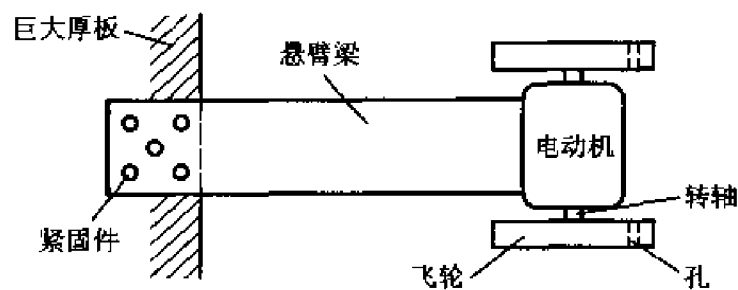


图 3.12

为了解释振动对电动机性能的影响, 首先需要了解电动机的静特性, 一般情况下, 静特性是通过试验确定的。在图 3.13 上给出了电动机发出的纯驱动力矩工作为转子转速的函数。对于每一条曲线(标号为 0, 1, 2,

..., 10), 控制器或调节器是不变的, 对于特性曲线上的每一个点, 电动机以等速旋转。故这样测得的力矩特性 $L(\Omega)$ 是静特性。

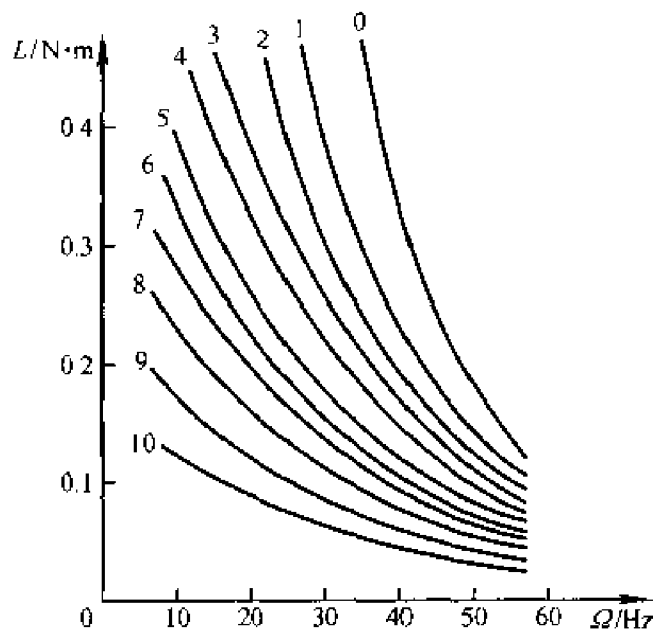


图 3.13

在电动机轴上可获得的纯机械功率是 $L\Omega$, 供给电动机的纯功率和 $L\Omega$ 之差是由电动机的各种损失(如定子和转子的电阻损失, 铁心的磁滞和涡流损失, 轴承摩擦损失等)所造成。

在图 3.14 上给出了实测共振曲线。将控制器固定在一定的位置, 待系统达到定常状态后, 测量振幅和转速。然后微小地改变控制器的位置, 到达新的定常状态, 再测新的振幅和转速。在图上这些数据用小圆圈表示。图 3.14 上图表示 Ω 增加时的实验结果, 图 3.14 下图表示 Ω 减少时的结果。从图 3.14 知, 共振曲线存在着缺口, 在缺口处不存在稳定的定常解, 图 3.14 上图和下图缺口部分是不相同的, 但在共振曲线上存在着相重叠的部分。

从图 3.14 知, 在共振曲线的左端, 输入功率相对是低的, 当输入功率增加时, 振幅显著地增加, 而频率改变很小, 在共振区内尤其如此。在共振点 T 之前, 若功率增加相当多, 则振幅也增加相当多, 而频率实际上变化不大。

在 T 点运动的特性突然改变, 此时输入功率的增加引起振幅的显著减小, 而频率显著地增加。这种现象称为索末菲(Sommerfeld)效应。

以上的实验结果与图 3.10 和图 3.11 所示的理论结果完全一致。

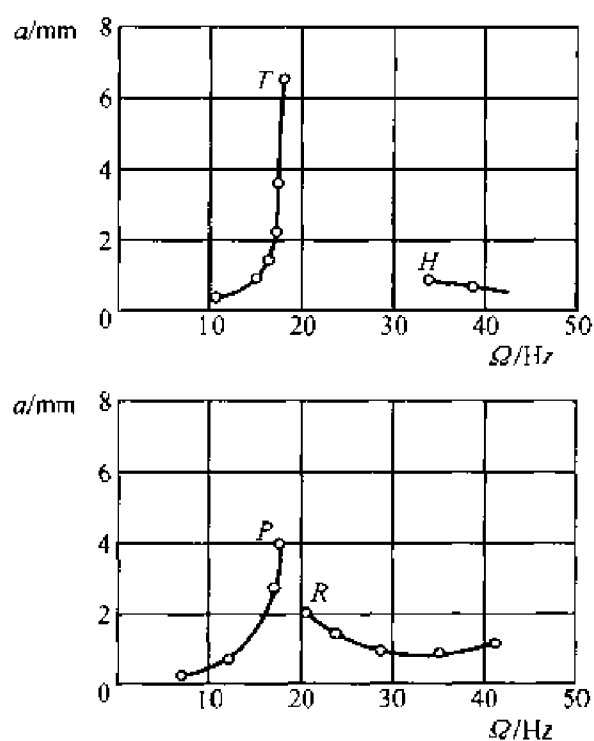


图 3.14

习 题

3.1 考虑如图 E3.1 所示具有干摩擦的结构。当谐激励作用在系统上时,运动方程为

$$m\ddot{x} + k_1 x = d + F \cos \omega t - k_2 x^3$$

其中

$$d = \begin{cases} -mg\mu & (\dot{x} > 0) \\ mg\mu & (\dot{x} < 0) \end{cases}$$

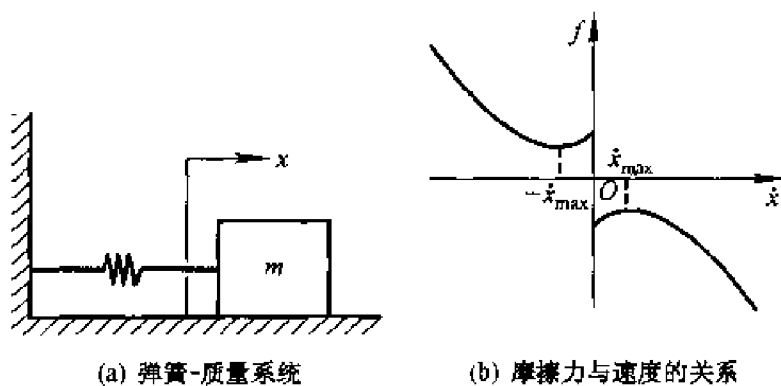


图 E3.1

(a) 证明该方程可写成无量纲形式

$$\ddot{u} + u = \epsilon(f - au^3) + 2k \cos \Omega t$$

其中

$$f = \begin{cases} -1 & (\dot{u} > 0) \\ 1 & (\dot{u} < 0) \end{cases}$$

(b) 对于近似等于 1 的 Ω , 证明

$$u = a \cos[T_0 + \beta(T_1)] + O(\epsilon)$$

其中

$$a' = -\frac{2}{\pi} + k \sin \gamma$$

$$a\gamma = a\sigma - \frac{3au^3}{8} + k \cos \gamma$$

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta$$

$$\epsilon\sigma = \Omega - 1 \quad \text{和} \quad \epsilon k = K$$

(c) 求得幅频方程。对于 $k = \frac{2}{\pi}$, $k > \frac{2}{\pi}$, 绘出幅值 a 与 δ , 相角 γ 与 δ 的关系图。

对于 $\sigma > 0$, 绘出振幅 a 与 k 的关系图。并判断在运动中有没有跳跃现象。

3.2 考虑图 E3.2 所示的结构。且弹簧的恢复力为

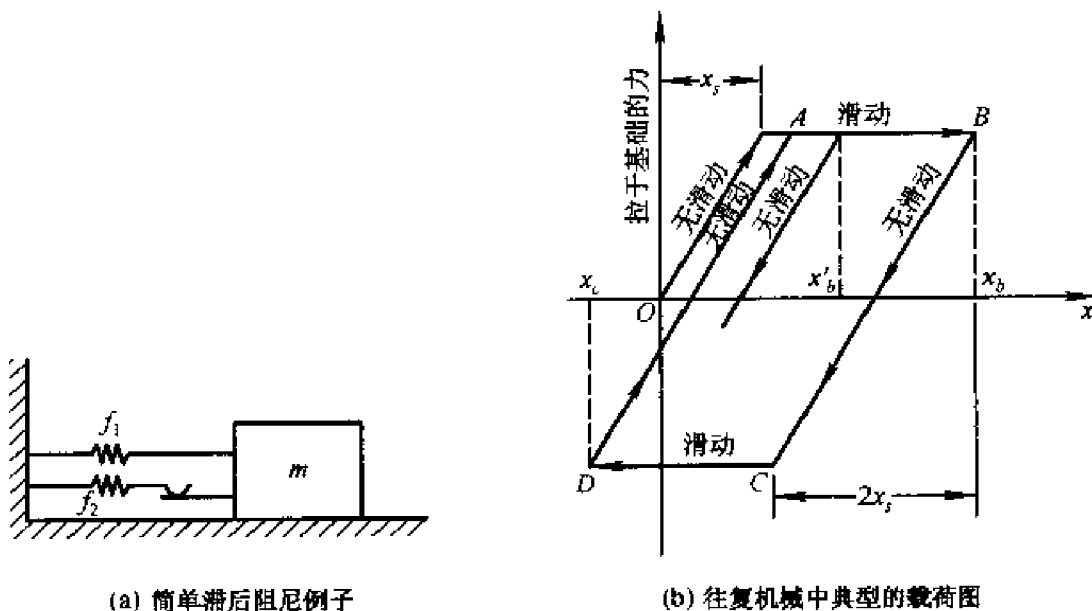


图 E3.2

$$-f = \begin{cases} x + x_s + x_b & (x_c \leq x \leq x_b) \\ -x_s & (x_d \leq x \leq x_c) \\ x - x_t - x_d & (x_d \leq x \leq x_a) \\ x_s & (x_a \leq x \leq x_b) \end{cases}$$

这是一个双线性滞后作用的例子。当谐波作用到该系统上时, 运动方程可写成无量纲形式:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f + K \cos \Omega t$$

(a) 对于近似等于 1 的 Ω , 证明

$$x = a(T_1) \cos[T_0 + \beta(T_1)] + O(\varepsilon)$$

其中

$$a' = \frac{2x_1}{a\pi}(x_1 - a) + k \sin \gamma$$

$$\gamma' = \sigma - \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{a - 2x_1}{a} - \left(1 - \frac{2x_1}{a} \right) \left[\frac{x_1}{a} - \left(\frac{x_1}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} + \frac{k}{a} \cos \gamma$$

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta, \varepsilon \sigma = \Omega - 1 \text{ 和 } 2\varepsilon k = K$$

(b) 求得频率响应方程 $k = \frac{2x_1}{\pi}$ 的重要性是什么? 解释为什么现在的分析仅能用

$$\text{于 } \frac{1}{2} + \left(\frac{k}{x_1} \right) > \sigma > \frac{1}{2} - \left(\frac{k}{x_1} \right)。$$

(c) 对于 $k < \frac{2x_1}{\pi}$ 和 $k > \frac{2x_1}{\pi}$, 分别绘出 $a - \sigma$ 的关系图和绘出 $a - k$ 的关系图。有没有跳跃现象发生?

3.3 某一系统的弹簧力为 $f(x) = -k_1 x - k_2 x|x|$, 阻尼力为 $c(\dot{x}) = -c_1 \dot{x} - c_2 \dot{x}|\dot{x}|$ 。运动方程:

$$m\ddot{x} + c_1 \dot{x} + c_2 \dot{x}|\dot{x}| + k_1 x + k_2 x|x| = K \cos \Omega t$$

(a) 证明, 该方程可写成无量纲形式:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\mu_1 \dot{x} + \varepsilon\mu_2 \dot{x}|\dot{x}| + x + \varepsilon\alpha x|x| = 2\varepsilon k \cos \Omega t$$

其中

$$2\varepsilon\mu_1 = \frac{c_1}{m\omega_0}, \varepsilon\mu_2 = \frac{c_2 L}{m}, \omega_0^2 = \frac{k_1}{m}$$

$$\varepsilon\alpha = \frac{k_2 L}{m\omega_0^2}, 2\varepsilon k = \frac{K}{m\omega_0^2} \text{ 和 } \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

(b) 对于近似等于 1 的 Ω , 证明

$$x = a(T_1) \cos \phi + O(\varepsilon)$$

其中

$$\phi = T_0 + \beta(T_1)$$

$$a' = -\mu_1 a - \frac{4\mu_2}{3\pi} a^2 + k \sin \gamma$$

$$\gamma' = \sigma - \frac{4\alpha}{3\pi} a + \frac{k}{a} \cos \gamma$$

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta, \varepsilon \sigma = \Omega - 1$$

(c) 应用上面 x 的近似表达式, 分别绘出 $x|x| - \phi$ 和 $\dot{x}|\dot{x}| - \phi$ 的草略图。

$$a_{\max} = \frac{3\pi\mu_1}{8\mu_2} - 1 + \left(1 + \frac{16k\mu_2}{3\pi\mu_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

3.4 系统方程为:

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\mu \sin \dot{u} + u = K \cos \Omega t$$

$\mu = O(1), \epsilon \ll 1$ 。

(a) 当 Ω 近似等于 1 时, 证明

$$x = a \cos \phi$$

其中

$$\phi = t + \beta(t)$$

$$\dot{a} = 2\epsilon\mu \sin(-a \sin \phi) \sin \phi - 2\epsilon k (\cos \gamma \cos \phi - \sin \gamma \sin \phi) \sin \phi$$

$$\dot{\gamma} = \epsilon\sigma - \frac{2\epsilon\mu}{a} \sin(-a \sin \phi) \cos \phi + \frac{2\epsilon k}{a} (\cos \gamma \cos \phi - \sin \gamma \sin \phi) \cos \phi$$

$$\gamma = \epsilon\sigma t - \beta, \epsilon\sigma = \Omega - 1 \text{ 和 } 2\epsilon k = K$$

(b) 在单位圆上平均后, 近似求得

$$\dot{a} = -\epsilon [2\mu J_1(a) - k \sin \gamma]$$

$$\dot{\gamma} = \epsilon \left(\sigma + \frac{k}{a} \cos \gamma \right)$$

提示: $\sin(a \sin \phi) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(a) \sin[(2n+1)\phi]$

其中, J_m 为 m 阶第一类贝塞尔函数。并判断运动中有没有跳跃现象。对于给定的 k , 有没有可能通过调节频率得到任意大的振幅 a ? 证明: 对于小 a , 展开 $\sin(-a \sin \phi)$ 并仅保留前两项或前三项, 然后在单位圆上平均。近似得到

$$\dot{a} = -\epsilon \left[\mu \left(a - \frac{1}{8}a^3 + \frac{a^5}{192} \right) + k \sin \gamma \right]$$

$$\dot{\gamma} = \epsilon \left(\sigma + \frac{k}{a} \cos \gamma \right)$$

求频率—响应方程。分别绘出 $a-\delta$ 和 $a-k$ 的关系图。

3.5 系统的基本方程为

$$\ddot{u} - \frac{1}{2}(u - u^3) = K \cos \Omega t$$

对于下列情况, 在 $u=1$ 附近, 确定描述系统响应 u 的一阶近似解

(a) Ω 近似等于 1

(b) Ω 近似等于 2

(c) Ω 近似等于 $\frac{1}{2}$

(d) Ω 近似等于 3

(e) Ω 近似等于 $\frac{1}{3}$

3.6 系统的基本方程为

$$\ddot{u} + u + au^3 = K \cos \Omega t - 2\mu \dot{u}$$

(a) 当 Ω 近似等于 1 时, 确定频率—响应方程。并画出频响曲线。

(b) 证明当 $\Omega \approx 5, 3, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{5}$ 时, 存在一阶、二阶共振。

(c) 对于二阶共振的每一种情况, 确定一阶近似的振幅和相位角方程。

3.7 系统的基本方程为

$$\ddot{u} + f(u) = K \cos \Omega t$$

其中

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = 0$$

(a) 证明: 当 $K=0$ 时, u 由下面的隐式方程所定义

$$t = \pm \int_{u_0}^u \frac{du}{[F(u_0) - F(u)]^{\frac{1}{2}}} = g_1(u)$$

其中 $\frac{1}{2}F'(u) = f(u)$ 。

(b) 利用上述初始条件作为迭代的初值, 迭代规律由

$$\ddot{u} + f_1(u) = 0$$

确定。试求出以 $f(u)$ 和 $g_1(u)$ 表示的函数 $f_1(u)$ 。并证明对于二阶近似的解可表示为

$$t = \pm \int_{u_0}^u \frac{du}{[F_1(u_0) - F_1(u)]^{\frac{1}{2}}}$$

3.8 受三个外激励同时作用的系统方程为

$$\ddot{u} + u + 2\epsilon\mu\dot{u} + \epsilon\alpha u^2 = \sum_{n=1}^3 K_n \cos(\Omega_n t + \theta_n)$$

确定下面两种情况下的一阶近似解: (a) 非共振情况; (b) 主共振情况。

3.9 受两个外激励作用的自激振子的运动方程为

$$\dot{u} + u = \epsilon \left(\dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3 \right) + \sum_{n=1}^2 K_n \cos(\Omega_n t + \theta_n)$$

其中 Ω_1 近似等于 1, Ω_2 近似等于 3。给出稳态解存在的条件, 并判断对应的响应是否为周期解。

3.10 受三个外激励作用的自激振子的运动方程为

$$\ddot{u} + u = \epsilon \left(\dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3 \right) + \sum_{n=1}^3 K_n \cos(\Omega_n t + \theta_n)$$

 Ω_1 近似等于 1, Ω_2 近似等于 $\frac{1}{3}$, Ω_3 近似等于 3。令 $\epsilon\sigma_1 = \Omega_1 - 1$, $\epsilon\sigma_2 = 3\Omega_2 - 1$, $\epsilon\sigma_3 = \Omega_3 - 3$ 。证明只有当

$$\beta = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{3}\sigma_3$$

时, 存在稳态解, 并判断对应的响应是否为周期解。

第四章 多自由度非线性系统的受迫振动

§ 4.1 多自由度系统的受迫振动

我们知道,一个 q 个自由度系统就有 q 个固有频率 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ 和 q 个相应的固有振型(或称固有模态),在非线性系统中多于一个固有频率和模态的存在,将产生许多新的物理现象,例如内共振、组合共振、饱和以及当存在正阻尼时对于周期干扰力不存在周期解等。同时,在非线性振动中多自由度问题十分普遍,所以对多自由度系统进行研究是有重要意义的。现介绍求多自由度系统渐近解的一个实用方法。

4.1.1 化成标准形式

如有典则形式的非线性方程

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^n a_{s\beta} x_\beta + f_s(\nu) + \epsilon F_s(\nu, x, \epsilon) \quad (4.1.1)$$

($s=1, 2, \dots, n; n$ 为偶数)

其中 $a_{s\beta}$ 为常数, ϵ 为小参数, f_s 和 F_s 为 ν 的以 2π 为周期的函数、 t 的周期函数、 x 的多项式及 ϵ 的解析函数。

函数 f_s 和 F_s 的有限傅氏级数为

$$\left. \begin{aligned} f_s(\nu) &= \sum_{\sigma} (f_{s\sigma} \cos \sigma \nu t + f'_{s\sigma} \sin \sigma \nu t) \\ F_s(\nu, x, \epsilon) &= F_{s0}(x, \epsilon) + \sum_{\sigma} [F_{s\sigma}(x, \epsilon) \cos \sigma \nu t + F'_{s\sigma}(x, \epsilon) \sin \sigma \nu t] \end{aligned} \right\} \quad (4.1.2)$$

其中 $F_{s\sigma}(x, \epsilon), F'_{s\sigma}(x, \epsilon)$ 为 x 的多项式(x 的最高阶数为 n)和 ϵ 的解析函数。

方程组(4.1.1)的派生系统为

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^n a_{s\beta} x_\beta + f_s(\nu) \quad (4.1.3)$$

设其齐次部分

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^n a_{s\beta} x_{\beta} \quad (4.1.4)$$

的特征方程只有简单的纯虚根 $\pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_q$ ($q = \frac{n}{2}$)。

方程(4.1.4)对应于 ω_i 的特解为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{si}(\omega_i t) &= P_{si} \cos \omega_i t - Q_{si} \sin \omega_i t \\ \varphi_{si}^*(\omega_i t) &= P_{si} \sin \omega_i t + Q_{si} \cos \omega_i t \end{aligned} \right\} \quad (4.1.5)$$

其中 P_{si} 和 Q_{si} 为实数。

假若函数 $f_s(\nu t)$ 满足(4.1.3)的通解为以 $T = \frac{2\pi}{\nu}$ 为周期的周期性条件(此条件的证明见[9])

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n f_i(\nu t) \psi_{ij}(\omega_j t) dt = 0 \quad (4.1.6)$$

则方程(4.1.3)将有周期特解 x_s^* , 其中

$$\left. \begin{aligned} \psi_{sj}(\omega_j t) &= C_{sj} \cos \omega_j t - D_{sj} \sin \omega_j t \\ \psi_{sj}^*(\omega_j t) &= C_{sj} \sin \omega_j t + D_{sj} \cos \omega_j t \end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

是和(4.1.4)共轭的方程组

$$\frac{dy_s}{dt} + \sum_{\beta=1}^n a_{s\beta} y_{\beta} = 0 \quad (4.1.8)$$

的特解。

用变换

$$x_s = \sum_{i=1}^q a_i(t) \varphi_{si}(\theta_i) + x_s^* \quad (4.1.9)$$

引入新变量 $a_1(t), \dots, a_q(t), \theta_1(t), \dots, \theta_q(t)$, 其中 $\varphi_{si}(\theta_i) = P_{si} \cos \theta_i - Q_{si} \sin \theta_i$ 。

当 $a_i = \text{const}$, $\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i$ 时, 式(4.1.9)为(4.1.3)的通解, 故 $\frac{d\varphi_{si}(\theta_i)}{d\theta_i}$

$$= -\varphi_{si}^*(\theta_i); -\sum_{i=1}^q a_i \varphi_{si}^*(\theta_i) \omega_i = \sum_{\beta=1}^n a_{s\beta} \sum_{i=1}^q a_i \varphi_{\beta i}(\theta_i)。$$

将(4.1.9)代入(4.1.1), 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \frac{da_i}{dt} \varphi_{si}(\theta_i) - \sum_{i=1}^q a_i \varphi_{si}^*(\theta_i) \left(\frac{d\theta_i}{dt} - \omega_i \right) \\ = \epsilon F_s(\nu t, a, \theta, \epsilon) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

为了将上式对 $\frac{da_i}{dt}$ 和 $\frac{d\theta_i}{dt}$ 求解, 须利用方程(4.1.8)的特解(4.1.7)。

下面先来证明在解(4.1.5)和(4.1.7)之间存在着正交性

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varphi_{si}(\theta_i) \psi_j(\theta_j) &= \sum_{i=1}^n \varphi_{si}^*(\theta_i) \psi_j^*(\theta_j) = 0 \\ \sum_{i=1}^n \varphi_{si}(\theta_i) \psi_j^*(\theta_j) &= \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^n \varphi_{si}^*(\theta_i) \psi_j(\theta_j) = -\delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.11)$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} \Delta_i & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ (将于运算过程中确定)

$$\left. \begin{aligned} \psi_j(\theta_j) &= C_j \cos \theta_j - D_j \sin \theta_j \\ \psi_{ij}^*(\theta_j) &= C_j \sin \theta_j + D_j \cos \theta_j \end{aligned} \right\} \quad (4.1.12)$$

已知方程组(4.1.4)对应频率 $\pm \omega_j$ 的复数形式的特解为

$$\left. \begin{aligned} x_{si}(t) &= (P_{si} + iQ_{si}) e^{i\omega_j t} \\ x_{si}^*(t) &= (P_{si} - iQ_{si}) e^{-i\omega_j t} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.13)$$

而方程(4.1.8)对应频率 $\pm \omega_j$ 的特解为

$$\left. \begin{aligned} y_j(t) &= (C_j + iD_j) e^{i\omega_j t} \\ y_j^*(t) &= (C_j - iD_j) e^{-i\omega_j t} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.14)$$

由共轭方程的解的性质

$$\sum_{i=1}^n x_{si}(t) y_{sj}(t) = \text{const} \quad (i, j = 1, 2, \dots, q) \quad (4.1.15)$$

当 $i \neq j$, 则

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (P_{si} + iQ_{si})(C_{sj} + iD_{sj}) \\ &= \sum_{i=1}^n (P_{si} + iQ_{si})(C_{sj} - iD_{sj}) \equiv 0 \end{aligned}$$

展开上述等式, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{si} C_{sj} &= \sum_{i=1}^n P_{si} D_{sj} = \sum_{i=1}^n Q_{si} C_{sj} \\ &= \sum_{i=1}^n Q_{si} D_{sj} = 0 \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

现详细研究(4.1.11)的和式之一, 如第一个和式, 将 $\varphi_{si}(\theta_i)$ 和 $\psi_j(\theta_j)$ 代入后, 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varphi_{si}(\theta_i) \psi_j(\theta_j) &= \sum_{i=1}^n (P_{si} \cos \theta_i - Q_{si} \sin \theta_i)(C_j \cos \theta_j - D_j \sin \theta_j) \\ &= \cos \theta_i \cos \theta_j \sum_i P_{si} C_{sj} - \cos \theta_i \sin \theta_j \sum_i P_{si} D_{sj} - \\ &\quad \sin \theta_i \cos \theta_j \sum_i Q_{si} C_{sj} + \sin \theta_i \sin \theta_j \sum_i Q_{si} D_{sj} \end{aligned}$$

由(4.1.16)知, 上式恒等于零。同理可证明, (4.1.11)的其他和式, 当 $i \neq j$ 时都恒等于零。

现来计算当 $i=j$ 时, 和式(4.1.11)的值, 由式(4.1.15), 当 $i=j$ 时, 有

$$\sum_{s=1}^n (P_{si} + iQ_{si})(C_{si} + iD_{si}) = 0$$

或

$$\sum_s (P_{si}C_{si} - Q_{si}D_{si}) = \sum_s (P_{si}D_{si} + Q_{si}C_{si}) = 0 \quad (4.1.17)$$

及

$$\sum_s (P_{si} + iQ_{si})(C_{si} - iD_{si}) \neq 0$$

或

$$\sum_s (P_{si}C_{si} + Q_{si}D_{si}) + i \sum_s (P_{si}C_{si} - Q_{si}D_{si}) \neq 0$$

下面计算, 当 $i=j$ 时, (4.1.11)的前两个和式

$$\begin{aligned} \sum_s \varphi_{si}(\theta_i) \psi_{si}(\theta_i) &= \sum_s (P_{si} \cos \theta_i - Q_{si} \sin \theta_i)(C_{si} \cos \theta_i - D_{si} \sin \theta_i) \\ &= \cos^2 \theta_i \sum_s P_{si} C_{si} - \cos \theta_i \sin \theta_i \sum_s (P_{si} D_{si} + Q_{si} C_{si}) + \\ &\quad \sin^2 \theta_i \sum_s Q_{si} D_{si} \\ \sum_s \varphi_{si}^*(\theta) \psi_{si}^*(\theta_i) &= \sum_s (P_{si} \sin \theta_i + Q_{si} \cos \theta_i)(C_{si} \sin \theta_i + D_{si} \cos \theta_i) \\ &= \sin^2 \theta_i \sum_s P_{si} C_{si} + \cos^2 \theta_i \sum_s Q_{si} D_{si} + \\ &\quad \sin \theta_i \cos \theta_i \sum_s (P_{si} D_{si} + Q_{si} C_{si}) \end{aligned}$$

考虑(4.1.17)后, 则

$$\sum_s \varphi_{si}^*(\theta_i) \psi_{si}^*(\theta_i) = \sum_s \varphi_{si}(\theta_i) \psi_{si}(\theta_i) = \sum_s Q_{si} D_{si}$$

在适当的选取 y_{si} 的系数后, 也可使 $\sum_s Q_{si} D_{si} = 0$, 以复数 $\alpha + i$ 乘解(4.1.14), 则

$$\begin{aligned} y_{si} &= (C_{si} + iD_{si})(\alpha + i)e^{m_i t} \\ &= (\alpha C_{si} - D_{si}) \cos \omega_i t - (\alpha D_{si} + C_{si}) \sin \omega_i t + \\ &\quad i[(\alpha C_{si} - D_{si}) \sin \omega_i t + (\alpha D_{si} + C_{si}) \cos \omega_i t] \end{aligned}$$

或

$$\psi_{si}(\theta_i) = (\alpha C_{si} - D_{si}) \cos \theta_i - (\alpha D_{si} + C_{si}) \sin \theta_i$$

如取

$$\alpha = - \frac{\sum_s Q_{si} C_{si}}{\sum_s Q_{si} D_{si}}$$

则

$$\sum_s \varphi_{si}(\theta_i) \psi_{si}(\theta_i) = \sum_s \varphi_{si}^*(\theta_i) \psi_{si}^*(\theta_i) = 0 \quad (4.1.18)$$

当 $i=j$ 时, (4.1.11) 的最后两个和式

$$\begin{aligned}\sum_s \varphi_{si}(\theta_i) \psi_{si}^*(\theta_i) &= \sum_s (P_{si} C_{si} - Q_{si} D_{si}) \sin \theta_i \cos \theta_i + \\ &\quad \cos^2 \theta_i \sum_s P_{si} D_{si} - \sin^2 \theta_i \sum_s Q_{si} C_{si} \\ &= - \sum_s Q_{si} C_{si} \\ \sum_s \varphi_{si}^*(\theta_i) \psi_{si}(\theta_i) &= \sin \theta_i \cos \theta_i \sum_s (P_{si} C_{si} - Q_{si} D_{si}) + \\ &\quad \cos^2 \theta_i \sum_s Q_{si} C_{si} - \sin^2 \theta_i \sum_s P_{si} D_{si} \\ &= \sum_s Q_{si} C_{si}\end{aligned}$$

将 $\psi_{si}(\theta_i)$ 和 $\psi_{si}^*(\theta_i)$ 乘以实数 $-\frac{1}{\sum_s Q_{si} C_{si}}$ 后, 则

$$\left. \begin{aligned}\sum_s \varphi_{si}(\theta_i) \psi_{si}^*(\theta_i) &= 1 \\ \sum_s \varphi_{si}^*(\theta_i) \psi_{si}(\theta_i) &= -1 \\ (i=1, 2, \dots, q)\end{aligned}\right\} \quad (4.1.19)$$

所以在和式 (4.1.11) 中, 除 (4.1.19) 所示的 n 个不等于零外, 其余都为零, 故和式 (4.1.19) 的性质可写为

$$\left. \begin{aligned}\sum_s \varphi_{si}(\theta_i) \psi_{sj}^*(\theta_j) &= \delta_{ij} \\ \sum_s \varphi_{si}^*(\theta_i) \psi_{sj}(\theta_j) &= -\delta_{ij}\end{aligned}\right\} \quad (4.1.20)$$

有了 (4.1.11)、(4.1.18) 和 (4.1.20) 后, 以 $\psi_{sj}^*(\theta_j)$ 和 $\psi_{sj}(\theta_j)$ 分别乘 (4.1.10), 再将 s 从 1 到 n 求和, 只有 $i=j$ 时不为零, 则可得方程 (4.1.1) 的标准形式如下

$$\left. \begin{aligned}\frac{da_i}{dt} &= \epsilon R_i(\nu t, a_1, \dots, a_q, \theta_1, \dots, \theta_q, \epsilon) \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= \omega_i + \epsilon S_i(\nu t, a_1, \dots, a_q, \theta_1, \dots, \theta_q, \epsilon)\end{aligned}\right\} \quad (4.1.21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}R_i &= \sum_{s=1}^n F_s(\nu t, a, \theta, \epsilon) \psi_{si}^*(\theta_i) \\ S_i &= \frac{1}{a_i} \sum_{s=1}^n F_s(\nu t, a, \theta, \epsilon) \psi_{si}(\theta_i)\end{aligned}\right\} \quad (4.1.22)$$

从上式的形式知, R_i, S_i 为 $\nu t, \theta$ 的以 2π 为周期的周期函数和 t 的周期函数。

R_i, S_i 的广义傅氏级数

$$\left. \begin{aligned} R_i(\nu t, a, \theta, 0) &= R_{i0}(a) + \sum_{\sigma} [R_{\sigma}(a) \cos \alpha_{\sigma} + R'_{\sigma}(a) \sin \alpha_{\sigma}] \\ S_i(\nu t, a, \theta, 0) &= S_{i0}(a) + \sum_{\sigma} [S_{\sigma}(a) \cos \alpha_{\sigma} + S'_{\sigma}(a) \sin \alpha_{\sigma}] \end{aligned} \right\} \quad (4.1.23)$$

其中 σ 为有限整数

$$\alpha_{\sigma} = m_1^{\sigma} \theta_1 + m_2^{\sigma} \theta_2 + \cdots + m_q^{\sigma} \theta_q + n^{\sigma} \nu t \quad (4.1.24)$$

m, n 为正的或负的整数, 而系数 R_{σ} 和 R'_{σ} 为

$$\begin{aligned} R_{\sigma} &= \frac{2\nu}{(2\pi)^{q+1}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}}}_{q\text{次}} \\ &R_i(\nu t, a, \theta, 0) \sin(m_1^{\sigma} \theta_1 + \cdots + m_q^{\sigma} \theta_q + n^{\sigma} \nu t) d\theta_1 \cdots d\theta_q dt \\ R'_{\sigma} &= \frac{2\nu}{(2\pi)^{q+1}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}}}_{q\text{次}} \\ &R_i(\nu t, a, \theta, 0) \cos(m_1^{\sigma} \theta_1 + \cdots + m_q^{\sigma} \theta_q + n^{\sigma} \nu t) d\theta_1 \cdots d\theta_q dt \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

同理, 可写出 $S_i(\nu t, a, \theta, 0)$ 的广义傅氏级数的系数。有了标准形式的方程组后, 现分别研究不同情况下的渐近解。

4.1.2 非共振情况

如派生系统的固有频率 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_q$ 和干扰力频率 ν 满足非共振关系, 即

$$m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \cdots + m_q \omega_q + n\nu \quad (4.1.26)$$

当 m, n 为正的或负的整数时, 不等于零 (而 m 和 n 的绝对值的和小于 $N + |n| + 2$), 也不是和 ϵ 同阶的小量。取 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} a_i &= y_i + \epsilon U_i(t, y, \vartheta) \\ \theta_i &= \omega_i t + \vartheta_i + \epsilon U_i(t, y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.27)$$

并要求新变量 y, ϑ 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \epsilon Y_i(y) + \epsilon^2 Y_i^*(t, y, \vartheta, \epsilon) \\ \frac{d\vartheta_i}{dt} &= \epsilon Z_i(y) + \epsilon^2 Z_i^*(t, y, \vartheta, \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.28)$$

其中 Y_i, Z_i 为 y 的函数, 且不显含 t ; U_i, V_i, Y_i^* 和 Z_i^* 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数和 t 的周期函数。

将 (4.1.27) 代入 (4.1.28), 并考虑 (4.1.28), 则

$$\left. \begin{aligned}
& \epsilon Y_i + \epsilon^2 Y_i^* + \epsilon \frac{\partial U_i}{\partial t} + \epsilon \sum_{j=1}^q \frac{\partial U_i}{\partial y_j} (\epsilon Y_j + \epsilon^2 Y_j^*) + \\
& \quad \epsilon \sum_{j=1}^q \frac{\partial U_i}{\partial \vartheta_j} (\epsilon Z_j + \epsilon^2 Z_j^*) \\
& = \epsilon \left\{ R_{i0}(y) + \sum_{\sigma} [R_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma} + R'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}] \right\} + \epsilon^2 \{ \quad \} + \cdots \\
& \epsilon Z_i + \epsilon^2 Z_i^* + \epsilon \frac{\partial V_i}{\partial t} + \epsilon \sum_{j=1}^q \frac{\partial V_i}{\partial y_j} (\epsilon Y_j + \epsilon^2 Y_j^*) + \epsilon \frac{\partial V_i}{\partial \vartheta_j} (\epsilon Z_j + \epsilon^2 Z_j^*) \\
& = \epsilon \left\{ S_{i0}(y) + \sum_{\sigma} [S_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma} + S'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}] \right\} + \epsilon^2 \{ \quad \} + \cdots \\
& \quad (i=1, 2, \cdots, q)
\end{aligned} \right\} \quad (4.1.29)$$

其中

$$\alpha_{\sigma} = (m_1^{\sigma} \omega_1 + \cdots + m_q^{\sigma} \omega_q + n^{\sigma} \nu) t + \sum_{i=1}^q m_i^{\sigma} \vartheta_i \quad (4.1.30)$$

令等式两端 ϵ 的一次幂的系数相等, 则

$$\left. \begin{aligned}
Y_i + \frac{\partial U_i}{\partial t} &= R_{i0}(y) + \sum_{\sigma} [R_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma} + R'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}] \\
Z_i + \frac{\partial V_i}{\partial t} &= S_{i0}(y) + \sum_{\sigma} [S_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma} + S'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}]
\end{aligned} \right\} \quad (4.1.31)$$

为了使 Y_i 和 Z_i 满足不显含 t 的条件, 设

$$\left. \begin{aligned}
Y_i &= R_{i0}(y) \\
Z_i &= S_{i0}(y)
\end{aligned} \right\} \quad (4.1.32)$$

和

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i}{\partial t} &= \sum_{\sigma} [R_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma} + R'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}] \\
\frac{\partial V_i}{\partial t} &= \sum_{\sigma} [S_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma} + S'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}]
\end{aligned}$$

或

$$\left. \begin{aligned}
U_i &= \sum_{\sigma} \frac{R_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma} - R'_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}}{m_1^{\sigma} \omega_1 + \cdots + m_q^{\sigma} \omega_q + n^{\sigma} \nu} \\
V_i &= \sum_{\sigma} \frac{S_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma} - S'_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}}{m_1^{\sigma} \omega_1 + \cdots + m_q^{\sigma} \omega_q + n^{\sigma} \nu}
\end{aligned} \right\} \quad (4.1.33)$$

在非共振情况下, 上式的分母每个都不为零, 也不是和 ϵ 同阶的小量, 所以 U_i 和 V_i 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数。

在(4.1.28)中丢掉以 ϵ^2 以上的项,则得第一次近似方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \epsilon Y_i(y) \\ \frac{d\vartheta_i}{dt} &= \epsilon Z_i(y) \\ (i=1, 2, \dots, q) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.34)$$

令第一式的右端等于零,则

$$Y_i(y) = 0$$

其解为

$$y_i = y_i^0 \quad (4.1.35)$$

所以,从(4.1.34)可得定常解

$$\left. \begin{aligned} y_i &= y_i^0 \\ \vartheta_i &= \epsilon Z_i(y^0)t + \epsilon_i \end{aligned} \right\} \quad (4.1.36)$$

其中有 q 个任意常数 ϵ_i 。

将(4.1.36)代入(4.1.9),则原始变量的定常解

$$\begin{aligned} x_i^0 &= \sum_{n=1}^q (y_i^0 + \epsilon U_i^n) \varphi_n(\omega_i t + \vartheta_i + \epsilon V_i^n) + x_i^* \\ &= \sum_{n=1}^q y_i^0 \varphi_n[(\omega_i + \epsilon Z_i^n)t + \epsilon_i] + x_i^* + \epsilon x_i^{(1)}(t) \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

其中

$$x_i^{(1)}(t) = \sum_{n=1}^q \{U_i^n \varphi_n[(\omega_i + \epsilon Z_i^n)t + \epsilon_i] - y_i^0 V_i^n \varphi_n^*[(\omega_i + \epsilon Z_i^n)t + \epsilon_i]\}$$

现研究定常解的稳定性。

如扰动方程的特征方程

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} - \lambda & \dots & \frac{\partial Y_1}{\partial y_q} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Y_q}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial Y_q}{\partial y_1} - \lambda \end{vmatrix}_{y_i = y_i^0} = 0 \quad (4.1.38)$$

所有的根都有负实部,则解(4.1.36)将是渐近稳定的;如特征方程有一个或一个以上的解有正实部,则定常解不稳定。

4.1.3 共振情况

设派生系统的固有频率 $\omega_1, \dots, \omega_q$ 和干扰力频率 ν 满足共振关系

$$\Delta_\epsilon = m_1^\epsilon \omega_1 + \dots + m_q^\epsilon \omega_q + n^\epsilon \nu = 0 \quad (4.1.39)$$

其中 $\epsilon = 1, 2, \dots, r (r \leq q)$, m, n 为正的或负的整数。在某些共振关系中可能不包括全部的 $\omega_1, \dots, \omega_q$,但其中至少应有一个 ω_i 的系数不为 0,如 $n =$

0, 则有所谓自治系统的内共振, 这种内共振在其线性化系统的固有频率之间存在着整数的线性关系时可能发生。如弹簧摆中, 当摆式模态和弹簧模态(呼吸模态)之间固有频率成整倍数关系时, 将发生两个模态剧烈的耦合(内共振); 另外多自由度陀螺系统等也可能发生内共振。

在共振情况下, 周期性条件将不满足, 欲有周期解, 共振干扰力的幅值必与 ϵ 同量级, 并须将之并入 F 中去。

对标准方程采用 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} a_i &= y_i + \epsilon U_i(t, y, \vartheta) \\ \theta_i &= \omega_i t + \vartheta_i + \epsilon V_i(t, y, \vartheta) \\ (i &= 1, 2, \dots, q) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.40)$$

并要求新变量 y_i 和 ϑ_i 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \epsilon Y_i(y, \vartheta) + \epsilon^2 Y_i^*(t, y, \vartheta, \epsilon) \\ \frac{d\vartheta_i}{dt} &= \epsilon Z_i(y, \vartheta) + \epsilon^2 Z_i^*(t, y, \vartheta, \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.41)$$

其中 Y_i 和 Z_i 应为 y 和 ϑ 的函数, 且不显含 t 。

将(4.1.40)代入(4.1.21), 考虑到(4.1.41), 则

$$\left. \begin{aligned} &\epsilon Y_i + \epsilon^2 Y_i^* + \epsilon \frac{\partial U_i}{\partial t} + \epsilon \sum_{j=1}^q \frac{\partial U_i}{\partial y_j} \times \\ &\quad (\epsilon Y_j + \epsilon^2 Y_j^*) + \epsilon \sum_{j=1}^q \frac{\partial U_i}{\partial \vartheta_j} (\epsilon Z_j + \epsilon^2 Z_j^*) \\ &= \epsilon \left\{ R_{i0}(y) + \sum_{\sigma} [R_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^0 + R'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^0] \right\} + \epsilon^2 \left\{ \quad \right\} + \dots \\ &\epsilon Z_i + \epsilon^2 Z_i^* + \epsilon \frac{\partial V_i}{\partial t} + \epsilon \sum_{j=1}^q \frac{\partial V_i}{\partial y_j} (\epsilon Y_j + \epsilon^2 Y_j^*) + \\ &\quad \epsilon \sum_{j=1}^q \frac{\partial V_i}{\partial \vartheta_j} (\epsilon Z_j + \epsilon^2 Z_j^*) \\ &= \epsilon \left\{ S_{i0}(y) + \sum_{\sigma} [S_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^0 + S'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^0] \right\} + \epsilon^2 \left\{ \quad \right\} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.1.42)$$

其中

$$\alpha_{\sigma}^0 = (m_1^{\sigma} \omega_1 + \dots + m_q^{\sigma} \omega_q + n^{\sigma} \nu) t + m_1^{\sigma} \vartheta_1 + \dots + m_q^{\sigma} \vartheta_q \quad (4.1.43)$$

令 ϵ 一次方的系数相等

$$\left. \begin{aligned} Y_i + \frac{\partial U_i}{\partial t} &= R_{i0}(y) + \sum_{\sigma} [R_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^0 + R'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^0] \\ Z_i + \frac{\partial V_i}{\partial t} &= S_{i0}(y) + \sum_{\sigma} [S_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^0 + S'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^0] \end{aligned} \right\} \quad (4.1.44)$$

考虑到共振关系(4.1.39),表达式(4.1.43)中将有某几个关系式和时间 t 无关,在(4.1.43)中和时间无关的表达式 α_{σ}^0 应是(4.1.39)的线性组合,即

$$m_1^{\sigma} \omega_1 + \cdots + m_q^{\sigma} \omega_q + n^{\sigma} \nu = \sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \Delta_{\epsilon} \quad (4.1.45)$$

应等于零,其中 S_{ϵ}^{σ} 为正的或负的整数。

引入符号

$$\chi_{\epsilon} = \sum_{i=1}^q m_i^{\epsilon} \vartheta_i \quad (\epsilon = 1, 2, \dots, r) \quad (4.1.46)$$

并称 χ_{σ} 为非循环坐标,设在(4.1.43)中和时间无关的 α_{σ}^0 的数目为 N^* , 给它们以指数 $\sigma^* = 1, 2, \dots, N^*$ 则

$$\alpha_{\sigma}^0 = \sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} \quad (4.1.47)$$

为了满足 Y_i, Z_i 不显含 t 的条件,则

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= R_{i0}(y) + \sum_{\sigma^*=1}^{N^*} \left[R_{i\sigma}(y) \cos \left(\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} \right) + R'_{i\sigma}(y) \sin \left(\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} \right) \right] \\ Z_i &= S_{i0}(y) + \sum_{\sigma^*=1}^{N^*} \left[S_{i\sigma}(y) \cos \left(\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} \right) + S'_{i\sigma}(y) \sin \left(\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.1.48)$$

而对 U_i, V_i 有

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \sum_{\sigma^* > N^*} [R_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^0 + R'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^0]$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = \sum_{\sigma^* > N^*} [S_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^0 + S'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^0]$$

或

$$\left. \begin{aligned} U_i &= \sum_{\sigma^* > N^*} \frac{[-R'_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^0 + R_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^0]}{m_1^{\sigma} \omega_1 + \cdots + m_q^{\sigma} \omega_q + n^{\sigma} \nu} \\ V_i &= \sum_{\sigma^* > N^*} \frac{[-S'_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^0 + S_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^0]}{m_1^{\sigma} \omega_1 + \cdots + m_q^{\sigma} \omega_q + n^{\sigma} \nu} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.49)$$

微分(4.1.46),将(4.1.41)代入后,则非循环坐标的导数为

$$\frac{d\chi_\epsilon}{dt} = \epsilon \sum_{i=1}^q m_i' Z_i + \epsilon^2 \sum_{i=1}^q m_i' Z_i^* \quad (4.1.50)$$

在(4.1.41)和(4.1.45)中,忽略 ϵ^2 以上的各项,则得第一次近似方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \epsilon Y_i(y_1, \dots, y_q, \chi_1, \dots, \chi_r) \\ \frac{d\chi_\epsilon}{dt} &= \epsilon \sum_{i=1}^q m_i' Z_i = \epsilon Z_\epsilon(y_1, \dots, y_q, \chi_1, \dots, \chi_r) \\ (i &= 1, 2, \dots, q \quad \epsilon = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.51)$$

和

$$\frac{d\vartheta_i}{dt} = \epsilon Z_i(y_1, \dots, y_q, \chi_1, \dots, \chi_r) \quad (4.1.52)$$

在方程(4.1.51)中,含有 $q+r$ 个方程,未知函数也是 $q+r$ 个,即 $y_1, \dots, y_q, \chi_1, \dots, \chi_r$

定常解

$$\left. \begin{aligned} y_i &= y_i^0 \\ \chi_\epsilon &= \chi_\epsilon^0 \\ (i &= 1, 2, \dots, q \quad \epsilon = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.53)$$

从(4.1.52)得

$$\vartheta_i = \epsilon Z_i(y^0, \chi^0) t + \epsilon_i \quad (4.1.54)$$

其中常数应满足

$$\chi_\epsilon^0 = \sum_{i=1}^q m_i' \epsilon_i \quad \epsilon = 1, 2, \dots, r \quad (4.1.55)$$

故在 r 重共振情况下,第一次近似的定常解,只包含 $q-r$ 个任意常数。

如特征方程

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} - \lambda & \dots & \frac{\partial Y_1}{\partial y_q} \frac{\partial Y_1}{\partial \chi_1} & \dots & \frac{\partial Y_1}{\partial \chi_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Y_q}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial Y_q}{\partial y_q} - \lambda & \frac{\partial Y_q}{\partial \chi_1} & \dots & \frac{\partial Y_q}{\partial \chi_r} \\ \frac{\partial Z'}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial Z'}{\partial y_q} \frac{\partial Z'}{\partial \chi_1} & - \lambda & \dots & \frac{\partial Z'}{\partial \chi_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Z'}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial Z'}{\partial y_q} \frac{\partial Z'}{\partial \chi_1} & \dots & \frac{\partial Z'}{\partial \chi_r} - \lambda \end{vmatrix}_{\substack{y_i = y_i^0 \\ \chi_\epsilon = \chi_\epsilon^0}} = 0 \quad (4.1.56)$$

所有的根都有负实部,则振动是稳定的,否则,振动是不稳定的。

4.1.4 一般情况

若需研究在共振区或从非共振区向共振区靠近时的振动性质,设某些频率 $\omega_1^0, \dots, \omega_q^0$ 满足共振关系

$$\Delta_\varepsilon^0 = m_1^\varepsilon \omega_1^0 + \dots + m_q^\varepsilon \omega_q^0 + n^\varepsilon \nu = 0 \quad (4.1.57)$$

$$(\varepsilon = 1, 2, \dots, r)$$

同时, $\omega_i - \omega_i^0$ 不要求与 ε 同量级,当 $\omega_i - \omega_i^0$ 为 ε 量级时则为 ω_i 的共振区。

对标准方程,采用 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} a_i &= y_i + \varepsilon U_i(t, y, \vartheta) \\ \theta_i &= \omega_i^0 t + \vartheta_i + \varepsilon V_i(t, y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.58)$$

并要求新变量 y_i, ϑ_i 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \varepsilon Y_i(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Y_i^*(t, y, \vartheta, \varepsilon) \\ \frac{d\vartheta_i}{dt} &= \omega_i - \omega_i^0 + \varepsilon Z_i(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Z_i^*(t, y, \vartheta, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.59)$$

其中 Y_i, Z_i 不显含 t , 而 U_i, V_i, Y_i^* 和 Z_i^* 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数和 t 的周期函数。

将(4.1.58)代入(4.1.21),并考虑(4.1.59),令 ε 一次方的系数相等,则

$$\left. \begin{aligned} Y_i + \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^q \frac{\partial U_i}{\partial \vartheta_j} (\omega_j - \omega_j^0) \\ = R_{i0}(y) + \sum_{\sigma} [R_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^0 + R'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^0] \\ Z_i + \frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^q \frac{\partial V_i}{\partial \vartheta_j} (\omega_j - \omega_j^0) \\ = S_{i0}(y) + \sum_{\sigma} [S_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^0 + S'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^0] \end{aligned} \right\} \quad (4.1.60)$$

其中

$$\alpha_{\sigma}^0 = (m_1^{\sigma} \omega_1^0 + \dots + m_q^{\sigma} \omega_q^0 + n^{\sigma} \nu) t + m_1^{\sigma} \vartheta_1 + \dots + m_q^{\sigma} \vartheta_q \quad (4.1.61)$$

和上节相同,上式中和时间无关的量 α_{σ}^0 应是(4.1.57)的线性组合

$$m_1^{\sigma} \omega_1^0 + \dots + m_q^{\sigma} \omega_q^0 + n^{\sigma} \nu = S_1^{\sigma} \Delta_1^0 + \dots + S_r^{\sigma} \Delta_r^0 \quad (4.1.62)$$

设和时间无关的 α_{σ}^0 共有 N 个,以(4.1.46)引入新变量 χ_{ε} ,为了使(4.1.60)满足,设

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= R_{i0}(y) + \sum_{\sigma^*=1}^N \left[R_{i\sigma}(y) \cos \left(\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} \right) + R'_{i\sigma}(y) \sin \left(\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} \right) \right] \\ Z_i &= S_{i0}(y) + \sum_{\sigma^*=1}^N \left[S_{i\sigma}(y) \cos \left(\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} \right) + S'_{i\sigma}(y) \sin \left(\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.1.63)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^q \frac{\partial U_i}{\partial t} (\omega_j - \omega_j^0) \\ &= \sum_{\sigma^* > N} [R_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^j + R'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^j] \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^q \frac{\partial V_i}{\partial t} (\omega_j - \omega_j^0) \\ &= \sum_{\sigma^* > N} [S_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^j + S'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^j] \end{aligned} \right\} \quad (4.1.64)$$

从(4.1.63)和(4.1.64),可研究非共振情况、共振情况及从非共振区向共振区靠近时的振动情况。

在(4.1.63)和(4.1.64)中,设 $N=0$,则得到和非共振情况完全相同的表达式(4.1.32)和(4.1.33)。设 $\omega_i = \omega_i^0$,则得到和(4.1.48)、(4.1.49)完全相同的表达式,这是共振情况。顺次赋给 ω_i^0 一系列不同的值,则可研究从非共振区向共振区靠近时的振动性质。

(4.1.63)从形式上与共振情况的表达式(4.1.48)相同。周期函数(4.1.64)较(4.1.49)的形式复杂,因(4.1.64)右端是简单三角函数的和式,故设

$$\left. \begin{aligned} U_i &= \sum_{\sigma^* > N} [\alpha_{i\sigma} \cos \alpha_{\sigma}^0 + \alpha'_{i\sigma} \sin \alpha_{\sigma}^0] \\ V_i &= \sum_{\sigma^* > N} [\beta_{i\sigma} \cos \alpha_{\sigma}^0 + \beta'_{i\sigma} \sin \alpha_{\sigma}^0] \end{aligned} \right\} \quad (4.1.65)$$

其中 $\alpha_{i\sigma}, \alpha'_{i\sigma}, \beta_{i\sigma}$ 和 $\beta'_{i\sigma}$ 为待定常数。

将(4.1.65)代入(4.1.64),则

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma^* > N} \left\{ \left[\sum_{i=1}^q m_i^{\sigma} \omega_i^0 + n^{\sigma} \nu + \sum_{i=1}^q m_i^{\sigma} (\omega_i - \omega_i^0) \right] \times (-\alpha_{i\sigma} \sin \alpha_{\sigma}^0 + \alpha'_{i\sigma} \cos \alpha_{\sigma}^0) \right\} \\ &= \sum_{\sigma^* > N} [R_{i\sigma}(y) \cos \alpha_{\sigma}^0 + R'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_{\sigma}^0] \\ &\sum_{\sigma^* > N} \left\{ \left[\sum_{i=1}^q m_i^{\sigma} \omega_i^0 + n^{\sigma} \nu + \sum_{i=1}^q m_i^{\sigma} (\omega_i - \omega_i^0) \right] \times (-\beta_{i\sigma} \sin \alpha_{\sigma}^0 + \beta'_{i\sigma} \cos \alpha_{\sigma}^0) \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\sigma^* > N} [S_{i\sigma}(y) \cos \alpha_\sigma^0 + S'_{i\sigma}(y) \sin \alpha_\sigma^0]$$

和

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i\sigma} &= \frac{-R'_{i\sigma}(y)}{\sum_i m_i^{\sigma} \omega_i + n^{\sigma} \nu} \\ \alpha'_{i\sigma} &= \frac{R_{i\sigma}(y)}{\sum_i m_i^{\sigma} \omega_i + n^{\sigma} \nu} \\ \beta_{i\sigma} &= \frac{-S'_{i\sigma}(y)}{\sum_i m_i^{\sigma} \omega_i + n^{\sigma} \nu} \\ \beta'_{i\sigma} &= \frac{S_{i\sigma}(y)}{\sum_i m_i^{\sigma} \omega_i + n^{\sigma} \nu} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.66)$$

将上式代入(4.1.65), 则

$$\left. \begin{aligned} U_i &= \sum_{\sigma^* > N} \frac{-R'_{i\sigma}(y) \cos \alpha_\sigma^0 + R_{i\sigma}(y) \sin \alpha_\sigma^0}{\sum_i m_i^{\sigma} \omega_i + n^{\sigma} \nu} \\ V_i &= \sum_{\sigma^* > N} \frac{-S'_{i\sigma}(y) \cos \alpha_\sigma^0 + S_{i\sigma}(y) \sin \alpha_\sigma^0}{\sum_i m_i^{\sigma} \omega_i + n^{\sigma} \nu} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.67)$$

微分(4.1.46), 将 $\frac{d\vartheta_i}{dt}$ 代入, 丢掉 ϵ^2 以上的项, 则

$$\frac{d\chi_\epsilon}{dt} = \sum_{i=1}^q m_i^{\epsilon} (\omega_i - \omega_i^0) + \epsilon Z^{\epsilon}(y, \chi) = 0$$

其中 $Z^{\epsilon}(y, \chi) = \sum_i m_i^{\epsilon} Z_i$

第一次近似的定常解可从下式

$$\left. \begin{aligned} Y_i(y_1, \dots, y_q, \chi_i, \dots, \chi_r) &= 0 \\ \sum_{i=1}^q m_i^{\epsilon} (\omega_i - \omega_i^0) + \epsilon Z^{\epsilon}(y_1, \dots, y_q, \chi_i, \dots, \chi_r) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1.68)$$

得到

$$\left. \begin{aligned} y_i &= y_i^0 \\ \chi_{\epsilon} &= \chi_{\epsilon}^0 \\ (i=1, 2, \dots, q \quad \epsilon=1, 2, \dots, r) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.69)$$

和

$$\begin{aligned} \vartheta_i &= (\omega_i - \omega_i^0)t + \epsilon Z(y^0, \chi^0)t + g_i \\ (i=1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

若特征方程

$$\begin{vmatrix}
 \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} - \lambda \dots \frac{\partial Y_1}{\partial y_q} \frac{\partial Y_1}{\partial \chi_1} \dots \frac{\partial Y_1}{\partial \chi_r} \\
 \dots \dots \dots \\
 \frac{\partial Y_q}{\partial y_1} \dots \dots \frac{\partial Y_q}{\partial y_q} - \lambda \frac{\partial Y_q}{\partial \chi_1} \dots \frac{\partial Y_q}{\partial \chi_r} \\
 \frac{\partial Z^1}{\partial y_1} \dots \dots \frac{\partial Z^1}{\partial y_q} \frac{\partial Z^1}{\partial \chi_1} - \lambda \dots \frac{\partial Z^1}{\partial \chi_r} \\
 \dots \dots \dots \\
 \frac{\partial Z^r}{\partial y_1} \dots \frac{\partial Z^r}{\partial y_q} \frac{\partial Z^r}{\partial \chi_1} \dots \frac{\partial Z^r}{\partial \chi_r} - \lambda
 \end{vmatrix}
 \begin{matrix}
 y_1 = y_1^0 \\
 \vdots \\
 \chi_r = \chi_r^0
 \end{matrix} = 0 \quad (4.1.70)$$

所有的根都有负实部,则振动是稳定的,否则是不稳定的。

§ 4.2 两自由度分段线性系统

在工程中有很多类型的机械,其振动原理可简化成两个自由度分段线性系统,如双质量非线性共振筛、卧式振动离心脱水机、双质量非线性离心摇床、振动给料机、汽车整车的振动以及带有扭振减震器和弹性联轴器的高速大功率柴油机的扭振系统等,作为方程(4.1.1)的特例,我们研究两自由度分段线性系统的渐近解。

4.2.1 建立振动方程式

由分段线性弹性元件相联系的两个质量,如安装时保证二个质量只产生两个自由度振动,一般意义下其力学模型可取如图 4.1 所示。

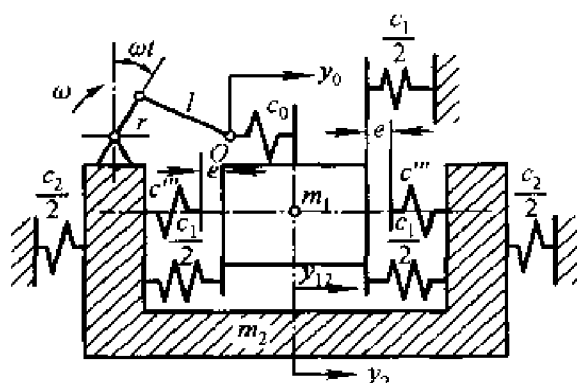


图 4.1

由达朗伯原理,得振动方程如下

$$\begin{aligned}
 m_1 (\ddot{y}_2 + \ddot{y}_{12}) + S(y_{12}) + f_1 (\dot{y}_{12}) + c_1 (y_2 + y_{12}) + \mu_1 c_1 (\dot{y}_2 + \dot{y}_{12}) \\
 = -c_0 (y_{12} - y_0) - \mu_0 c_0 (\dot{y}_{12} - \dot{y}_0) m_2 \ddot{y}_2 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & S(y_{12}) + c_2 y_2 + \mu_2 c_2 \dot{y}_2 - f_1(\dot{y}_{12}) \\
 & = c_0(y_{12} - y_0) + \mu_0 c_0(\dot{y}_{12} - \dot{y}_0)
 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

其中 m_1, m_2 —— 机体质量；

c_1, c_2 —— 两质量支承簧的动刚度系数；

μ_1, μ_2 —— 两质量支承簧单位刚度的内阻尼系数；

c' —— 第一段连接弹簧的动刚度系数；

μ' —— 第一段连接弹簧单位刚度的内阻尼系数；

c'' —— 第二段连接弹簧的动刚度系数；

μ'' —— 第二段连接弹簧的单位刚度的内阻尼系数；

c_0 —— 驱动弹簧的刚度系数；

μ_0 —— 驱动弹簧单位刚度的内阻尼系数；

y_2 —— m_2 的绝对位移；

y_{12} —— m_1 相对 m_2 的相对位移；

y_0 —— 驱动机构端点相对 m_2 的位移；

$S(y_{12})$ —— 分段线性的非线性弹性恢复力函数；

$f_1(\dot{y}_{12})$ —— 分段线性弹性元件内阻尼函数。

为将系统化为拟线性系统, 取

$$\left. \begin{aligned}
 S_1(y_{12}) &= S(y_{12}) + c_0 y_{12} = c_1'' y_{12} + \epsilon f_3(y_{12}) \\
 f_2(\dot{y}_{12}) &= f_1(\dot{y}_{12}) + \mu_0 c_0 \dot{y}_{12} \\
 c_1'' &= c_0 + c' + c'' = c' + c''
 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.2)$$

其中 $S_1(y_{12})$ 和 $f_2(\dot{y}_{12})$ 如图 4.2 所示。

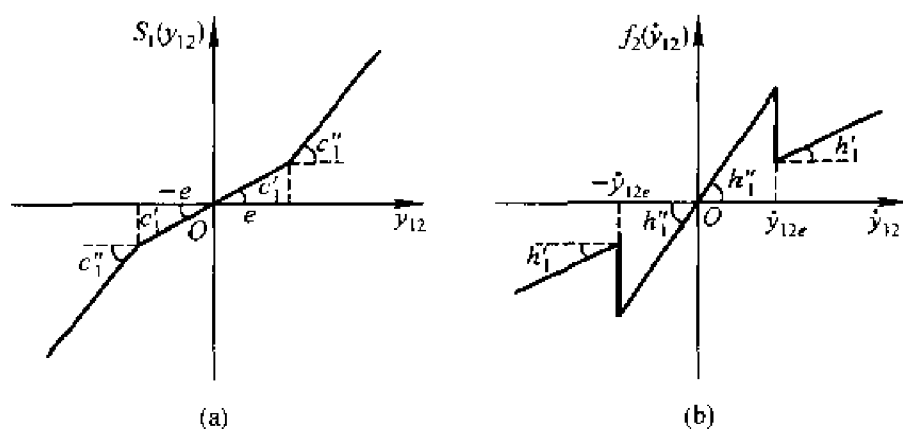


图 4.2

其表达式为

$$f_3(y_{12}) = \begin{cases} (c'_1 - c''_1)y_{12} & (-e \leq y_{12} \leq e) \\ (c'_1 - c''_1)e & (e \leq y_{12}) \\ -(c'_1 - c''_1)e & (y_{12} \leq -e) \end{cases} \quad (4.2.3)$$

$$f_2(\dot{y}_{12}) = \begin{cases} h'_1 \dot{y}_{12} & (-e \leq y_{12} \leq e) \\ h''_1 \dot{y}_{12} & (e \leq y_{12}) \\ h'''_1 \dot{y}_{12} & (y_{12} \leq -e) \end{cases} \quad (4.2.4)$$

将(4.2.2)代入(4.2.1),并将阻尼、干扰力、弹性力的非线性部分等与惯性力、弹性力的线性部分相比而较小的项前标以小参数 ϵ , 则

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_{12} + \ddot{y}_2 + \frac{c_1}{m_1} y_2 + \frac{c''_1}{m_1} y_{12} &= \frac{\epsilon}{m_1} [c_3(y_0 + \mu_0 \dot{y}_0) - f_3(y_{12}) - f_2(\dot{y}_{12}) - \mu_1 c_1(\dot{y}_{12} + \dot{y}_1)] \\ \ddot{y}_2 + \frac{c_2}{m_2} y_2 + \frac{c''_1}{m_2} y_{12} &= \frac{\epsilon}{m_2} [f_3(y_{12}) + f_2(\dot{y}_{12}) - c_0(y_0 + \mu_0 \dot{y}_0) - \mu_2 c_2 \dot{y}_2] \end{aligned} \right\} \quad (4.2.5)$$

其中

$$c''_1 = c'_1 + c_1$$

在不同的具体机械结构中,系统所含的参数可能不同,如在扭振系统中, m_1 和 m_2 应表示转动惯量, c_1 和 c_2 可取为零,干扰力为周期函数。

4.2.2 将振动方程组化成标准方程组

为了将振动方程组(4.2.5)化成以振幅、相位为未知函数的标准方程组,须首先将其化成典则方程式,设

$$y_{12} = x_1, \quad \dot{y}_{12} = x_2, \quad y_2 = x_3, \quad \dot{y}_2 = x_4$$

则得典则方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -a'_1 x_1 + a'_2 x_3 + \epsilon F'_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} &= b_1 x_1 - a_2 x_3 + \epsilon F_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{m_1} [\epsilon_0 (y_1 + \mu_0 \dot{y}_1) - f_1(x_1) - f_2(x_2)] \\ F_2 &= -kF_1 - \frac{\mu_2 \epsilon_2}{m_2} x_4 \\ F_3 &= (1+k)F_1 - \frac{\mu_1 \epsilon_1}{m_2} x_2 + \left(\frac{\mu_2 \epsilon_2}{m_2} - \frac{\mu_1 \epsilon_1}{m_1} \right) x_1 \\ a'_1 &= \frac{\epsilon''_1}{m_1} + \frac{\epsilon''_1}{m_2}, \quad a'_2 = \frac{\epsilon_2}{m_2} - \frac{\epsilon_1}{m_1} \\ b_1 &= \frac{\epsilon''_1}{m_2}, \quad a_2 = \frac{\epsilon_2}{m_2} \\ k &= \frac{m_1}{m_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.7)$$

对典则方程(4.2.6), 采用变换

$$x_s = \sum_{k=1}^2 A_k \varphi_{sk}(\theta_k) \quad (s=1, 2, 3, 4) \quad (4.2.8)$$

所引入的新变量 A_1, A_2 为振幅, θ_1, θ_2 为相位, 它们都是时间 t 的函数。

函数 $\varphi_{sk}(\theta_k)$, 当 $\frac{d\theta_k}{dt} = \lambda_k$ 时, 为(4.2.6)的派生组的特解, λ_k 为派生系统的固有频率, 当 A_k 为常数和 $\frac{d\theta_k}{dt} = \lambda_k$ 时, (4.2.8)为(4.2.6)的派生方程组的通解, 将(4.2.8)代入(4.2.6), 则

$$\sum_{k=1}^2 \frac{dA_k}{dt} \varphi_{sk}(\theta_k) - \sum_{k=1}^2 A_k \varphi_{sk}^*(\theta_k) \left(\frac{d\theta_k}{dt} - \lambda_k \right) = \epsilon \bar{F}, \quad (4.2.9)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 0, \quad \bar{F}_2 = F'_3 \\ \bar{F}_3 &= 0, \quad \bar{F}_4 = F_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.10)$$

为了将(4.2.9)对 $\frac{dA_k}{dt}, \frac{d\theta_k}{dt}$ 解出, 须确定函数 $\varphi_{sk}(\theta_k)$ 和 $\varphi_{sk}^*(\theta_k)$, 并需应用(4.2.6)的派生方程的共轭方程的解 $\psi_{sj}(\theta_j), \psi_{sj}^*(\theta_j)$ 与 $\varphi_{sk}(\theta_k), \varphi_{sk}^*(\theta_k)$ 的正交关系。

(4.2.6)的派生方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -a'_1 x_1 + a'_2 x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} &= b_1 x_1 + a_2 x_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.11)$$

设解

$$x_j = B_j e^{i\lambda t} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (4.2.12)$$

将(4.2.12)代入(4.2.11), 则

$$\left. \begin{aligned} iB_1\lambda - B_2 &= 0 \\ -a'_1 B_1 - i\lambda B_2 + a'_2 B_3 &= 0 \\ iB_3\lambda - B_4 &= 0 \\ b_1 B_1 - a_2 B_3 - i\lambda B_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.13)$$

由上式得

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= i\lambda B_1 \\ B_3 &= \frac{1}{a'_2} (a'_1 - \lambda^2) B_1 \\ B_4 &= \frac{i\lambda}{a_2} (a'_1 - \lambda^2) B_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.14)$$

在(4.2.13)中, 如 $B_1 \sim B_4$ 有非零解, 则得频率方程式

$$\begin{vmatrix} i\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -a'_1 & -i\lambda & a'_2 & 0 \\ 0 & 0 & i\lambda & -1 \\ b_1 & 0 & -a_2 & -i\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \lambda^2(a'_1 + a_2) + a'_1 a_2 - b_1 a'_2 = 0$$

所以

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[(a'_1 + a_2) \mp \sqrt{(a'_1 + a_2)^2 - 4(a'_1 a_2 - b_1 a'_2)} \right] \quad (4.2.15)$$

将(4.2.14)代入(4.2.12), 取 $B_1 = 1$, 令其实部为 φ_k , 虚部为 φ_k^* , 则它们是派生方程(4.2.11)的特解, 有时称这些函数为派生方程(4.2.11)的基础解系, 其表达式为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1k} &= \cos \lambda_k t, & \varphi_{1k}^* &= \sin \lambda_k t \\ \varphi_{2k} &= -\lambda_k \sin \lambda_k t, & \varphi_{2k}^* &= \lambda_k \cos \lambda_k t \\ \varphi_{3k} &= \frac{1}{a'_2} (a'_1 - \lambda_k^2) \cos \lambda_k t, & \varphi_{3k}^* &= \frac{1}{a'_2} (a'_1 - \lambda_k^2) \sin \lambda_k t \\ \varphi_{4k} &= -\frac{\lambda_k}{a_2} (a'_1 - \lambda_k^2) \sin \lambda_k t, & \varphi_{4k}^* &= \frac{\lambda_k}{a_2} (a'_1 - \lambda_k^2) \cos \lambda_k t \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2) \quad (4.2.16)$$

(4.2.11)的共轭方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a'_1 y_2 - b_1 y_4 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_1 \\ \frac{dy_3}{dt} &= -a'_2 y_2 + a_2 y_4 \\ \frac{dy_4}{dt} &= -y_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.17)$$

同理,可得共轭方程组的基础解系为

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1k} &= \cos \lambda_k t, & \psi_{1k}^* &= \sin \lambda_k t \\ \psi_{2k} &= -\frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t, & \psi_{2k}^* &= \frac{1}{\lambda_k} \cos \lambda_k t \\ \psi_{3k} &= \frac{1}{b_1} (a'_1 - \lambda_k^2) \cos \lambda_k t, & \psi_{3k}^* &= \frac{1}{b_1} (a'_1 - \lambda_k^2) \sin \lambda_k t \\ \psi_{4k} &= -\frac{1}{b_1 \lambda_k} (a'_1 - \lambda_k^2) \sin \lambda_k t, & \psi_{4k}^* &= \frac{1}{b_1 \lambda_k} (a'_1 - \lambda_k^2) \cos \lambda_k t \end{aligned} \right\} \quad (k=1,2) \quad (4.2.18)$$

求出派生方程和其共轭方程的基础解系后,可证明其正交性,即当 $i \neq j$ 时,有

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^4 \varphi_u(\theta_i) \psi_y(\theta_j) &= \sum_{s=1}^4 \varphi_u(\theta_i) \psi_{ys}^*(\theta_j) \\ &= \sum_s \varphi_u^*(\theta_i) \psi_{ys}^*(\theta_j) = \sum_s \varphi_u^*(\theta_i) \psi_y(\theta_j) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

将(4.2.16)和(4.2.18)代入

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^4 \varphi_u(\theta_i) \psi_y(\theta_j) &= \frac{1}{a'_2 b_1} \left(\cos \theta_i \cos \theta_j + \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \sin \theta_i \sin \theta_j \right) \times \\ &\quad [a'_2 b_1 + (a'_1 - \lambda_i^2)(a'_1 - \lambda_j^2)] \end{aligned}$$

现证明上式的方括号部分等于零。频率方程可写成

$$\lambda^2(\lambda^2 - a'_1) - a_2(\lambda^2 - a'_1) - a'_2 b_1 = 0$$

因 λ_i, λ_j 都是上方程的根,从对应 λ_i 式中求出 a_2 ,并将之代入 λ_j ,则

$$\begin{aligned} \lambda_j^2(\lambda_j^2 - a'_1) - \frac{\lambda_i^2(\lambda_i^2 - a'_1) - a'_2 b_1}{(\lambda_i^2 - a'_1)}(\lambda_j^2 - a'_1) - a'_2 b_1 \\ = (\lambda_j^2 - \lambda_i^2)[a'_2 b_1 + (\lambda_j^2 - a'_1)(\lambda_i^2 - a'_1)] = 0 \end{aligned}$$

因 $i \neq j$,所以 $\lambda_i \neq \lambda_j$,如上式成立,必有

$$[a'_2 b_1 + (\lambda_i^2 - a'_1)(\lambda_j^2 - a'_1)] = 0 \quad (4.2.20)$$

此时 $\sum_s \varphi_u(\theta_i) \psi_y(\theta_j) = 0$ 已证明,同理可证明(4.2.19)中其余几个和式

都等于零。用同样的方法可证明, 当 $i=j$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} \sum_s \varphi_{is}^*(\theta_i) \psi_{is}(\theta_i) &= \sum_s \varphi_{is}(\theta_i) \psi_{is}^*(\theta_i) \equiv 0 \\ \sum_s \varphi_{is}^*(\theta_i) \psi_{is}^*(\theta_i) &= \sum_s \varphi_{is}(\theta_i) \psi_{is}(\theta_i) \\ &= 1 + \frac{1}{a_2' b_1} (a_1' - \lambda_i^2)^2 = \Delta_i' \end{aligned} \right\} \quad (4.2.21)$$

分别以 $\varphi_{is}(\theta_i), \psi_{is}^*(\theta_i)$ 乘式(4.2.9), 并将 s 从 1 到 4 求和, 由基础解系的正交关系(1.2.19), (4.2.21)则得标准方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_k}{dt} &= \frac{\epsilon}{\Delta_k'} \sum_s \bar{F}_s \psi_{ks}(\theta_k) = \epsilon \phi_k(A, \theta) \\ \frac{d\theta_k}{dt} &= \lambda_k - \frac{\epsilon}{\Delta_k' A_k} \sum_s \bar{F}_s \psi_{ks}^*(\theta_k) = \lambda_k - \epsilon \phi_k^*(A, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.22)$$

从(4.2.22)的形式知, A_k 的导数是与 ϵ 成正比的量, 即 A_k 是随着时间而缓慢变化的函数。

4.2.3 共振情况的定常解

在振动理论中, 共振现象是人们最感兴趣的问题之一, 在共振机械中利用共振点工作, 可达到节省功率、提高劳动生产率的目的。为求主共振情况的定常解, 取 $\lambda_k = \omega$ 为与 ϵ 同阶的小量, 即 $\lambda_k = \omega = \epsilon H_k$ 。

对方程(4.2.22)采用 KB 变换

$$\begin{aligned} A_k &= y_k + \epsilon U_k(t, y, \vartheta) \\ \theta_k &= \omega t + \vartheta_k + \epsilon V_k(t, y, \vartheta) \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

并要求新变量 y_k, ϑ_k 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dy_k}{dt} &= \epsilon Y_k(y, \vartheta) + \epsilon^2 Y_k^*(t, y, \vartheta, \epsilon) \\ \frac{d\vartheta_k}{dt} &= \lambda_k - \omega + \epsilon Z_k(y, \vartheta) + \epsilon^2 Z_k^*(t, y, \vartheta, \epsilon) \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

其中 Y_k, Z_k 不显含 t , U_k, V_k, Y_k^* 和 Z_k^* 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数和 t 的周期函数。

将(4.2.23)代入(4.2.22), 考虑到(4.2.24)之后, 得

$$\begin{aligned} \epsilon Y_k + \epsilon^2 Y_k^* + \epsilon \frac{\partial U_k}{\partial t} + \epsilon \sum_{j=1}^2 \frac{\partial U_k}{\partial y_j} (\epsilon Y_j + \epsilon^2 Y_j^*) + \\ \epsilon \sum_{j=1}^2 \frac{\partial U_k}{\partial \vartheta_j} (\epsilon Z_j + \epsilon^2 Z_j^* + \lambda_j - \omega) = \epsilon \phi_k + \epsilon^2 \dots \\ \epsilon Z_k + \epsilon^2 Z_k^* + \epsilon \frac{\partial V_k}{\partial t} + \epsilon \sum_{j=1}^2 \frac{\partial V_k}{\partial y_j} (\epsilon Y_j + \epsilon^2 Y_j^*) + \end{aligned}$$

$$\varepsilon \sum_{j=1}^2 \frac{\partial V_k}{\partial \vartheta_j} (\varepsilon Z_j + \varepsilon^2 Z_j^* + \lambda_j - \omega) = \dots \varepsilon \phi_k^* + \dots$$

令上式中 ε 的一次方的系数相等

$$\left. \begin{aligned} Y_k + \frac{\partial U_k}{\partial t} &= \phi_k \\ Z_k + \frac{\partial V_k}{\partial t} &= \dots \phi_k^* \end{aligned} \right\} \quad (4.2.25)$$

为了使函数 Y_k, Z_k 满足不显含 t 的条件, 可用如下的方法来确定它们

$$Y_k = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_k dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_k d\psi, \quad -Z_k = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_k^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_k^* d\psi \quad (4.2.26)$$

为了求出以上积分, 令 $k=2$, 首先写出 ϕ_2 的表达式

$$\begin{aligned} \phi_2 = \frac{1}{\Delta_2'} \sum_i \bar{F}_i \phi_{2i}(\theta_2) = \frac{1}{\Delta_2' \lambda_2} & \left\{ \frac{1}{m_1} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \right. \\ & \frac{c_0 r}{2} [\cos \vartheta_2 - \cos(2\omega t + \vartheta_2) + \mu_0 \omega \sin(2\omega t + \vartheta_2) + \\ & \mu_0 \omega \sin \vartheta_2] - f_3(A, \theta) \sin \theta_2 - f_2(A, \theta) \sin \theta_2 + \\ & \frac{\mu_1 c_1}{m_1} \left[-\lambda_1 A_1 \left(1 + \frac{a_1' - \lambda_1^2}{a_2'} \right) \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \right. \\ & \left. \lambda_2 A_2 \left(1 + \frac{a_1' - \lambda_2^2}{a_2'} \right) \sin^2 \theta_2 \right] + \left(\frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) \frac{\mu_2 c_2}{m_2} \times \\ & \left[\frac{\lambda_1}{a_2'} (\lambda_1^2 - a_1') A_1 [\cos(\theta_2 - \theta_1) - \right. \\ & \left. \cos(\theta_2 + \theta_1)] + \frac{\lambda_2 A_2}{a_2'} (\lambda_2^2 - a_1') \sin^2 \theta_2 \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

为了使函数 Y_2, Z_2 满足不显含 t 的条件, 则

$$\begin{aligned} Y_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_2 d\psi = \frac{1}{\Delta_2' \lambda_2} & \left\{ \frac{1}{m_1} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \right. \\ & \left[\frac{c_0 r}{2} (\cos \vartheta_2 + \mu_0 \omega \sin \vartheta_2) + \frac{1}{2} A_2 \lambda_2 h''_1 [\alpha - \mathcal{H}(\alpha, Z)] \right] - \\ & \frac{\mu_1 c_1 \lambda_2 A_2}{2m_1} \left(1 + \frac{a_1' - \lambda_2^2}{a_2'} \right) + \frac{\mu_2 c_2}{m_2} \frac{\lambda_2 A_2}{2a_2'} \times (\lambda_1^2 - a_1') \left(\frac{a_1' - \lambda_2^2}{a_2'} - 1 \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

同理

$$\begin{aligned} Z_2 = \frac{1}{m_1 \Delta_2' \lambda_2 A_2} & \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \\ & \left\{ -\frac{c_0 r}{2} (\sin \vartheta_2 - \mu_0 \omega \cos \vartheta_2) + \frac{c''_1 A_2}{2} [\mathcal{H}(\beta, Z) + 1 - \beta] \right\} \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

在以上的积分中应用了非线性弹性恢复力 $f_1(A, \theta)$ 和阻尼 $f_2(A, \theta)$ 的傅氏级数

$$\left. \begin{aligned} f_1(A, \theta) &= A_2 c_1'' [\beta - 1 - \mathcal{H}(\beta, Z)] \cos \theta + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_2}{n(n+1)(2n+1)} \frac{(c_1' - c_1'')}{\pi} \times \\ &\quad [n \sin(2n+2)\theta_0 - (n+1) \sin 2n \theta_0] \cos(2n+1)\theta \\ f_2(A, \theta) &= -\lambda_2 A_2 h_1'' [\alpha - \mathcal{H}(\beta, Z)] \sin \theta - \\ &\quad \lambda_2 A_2 h_1'' \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n} \sin 2n \theta_0 - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2(n+1)} \sin(2n+2)\theta_0 \right] \sin(2n+1)\theta \end{aligned} \right\} \quad (4.2.30)$$

其中因只考虑 λ_2 的共振区间, 取 $y_{12} \approx A_2 \cos \theta_2 = A_2 \cos \theta$, θ_0 是 $y_{12} = e$ 时对应的 θ 值, 且

$$\mathcal{H}(\alpha, Z) = \frac{2}{\pi Z} (\alpha - 1) \left(Z \cos^{-1} \frac{1}{Z} - \sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}} \right) \quad (4.2.31)$$

同理

$$\mathcal{H}(\beta, Z) = \frac{2}{\pi Z} (\beta - 1) \left(Z \cos^{-1} \frac{1}{Z} - \sqrt{1 - \frac{1}{Z^2}} \right) \quad (4.2.32)$$

在方程组(4.2.24)中, 如只考虑 ϵ 的一次项, 则得到确定的一次近似解的方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_2}{dt} &= \frac{\epsilon}{\Delta_2' \lambda_2} \left\{ \frac{1}{m_1} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \right. \\ &\quad \left[\frac{c_1 r}{2} (\cos \vartheta_2 + \mu_1 \omega \sin \vartheta_2) + \frac{1}{2} A_2 \lambda_2 h_1'' [\alpha - \mathcal{H}(\alpha, Z)] \right] - \\ &\quad \frac{\mu_1 c_1 \lambda_2 A_2}{2m_1} \left(1 + \frac{a_1' - \lambda_2^2}{a_2'} \right) + \\ &\quad \left. \left(-1 + \frac{a_2' - \lambda_2^2}{b_1} \right) (\lambda_2^2 - a_1') \frac{\mu_2 c_2 \lambda_2 A_2}{2m_2 a_2'} \right\} \\ \frac{d\vartheta_2}{dt} &= \lambda_2 - \omega + \frac{1}{m_1 \Delta_2' \lambda_2 A_2} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \\ &\quad \left\{ -\frac{c_3 r}{2} (\sin \vartheta_2 - \mu_0 \omega \cos \vartheta_2) + \frac{c_1'' A_2}{2} [\mathcal{H}(\alpha, Z) + 1 - \beta] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.33)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \mu_0 c_0, & h' &= \mu' c' \\ h''' &= \mu''' c''', & h'_1 &= h_0 + h' \\ h''_1 &= h'_1 + h''', & \alpha &= \frac{h'_1}{h''_1} \\ \beta &= \frac{c'_1}{c''_1}, & Z &= \frac{\Lambda_2}{e} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.34)$$

设 $\delta_e(A_2)$ 为等效线性衰减指数, 其表达式

$$\begin{aligned} \delta_e(A_2) &= \frac{1}{\Delta'_2 \lambda_2} \left\{ \left(\frac{a'_1 - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) (a'_1 - \lambda_2^2) \frac{\mu_2 c_2 \lambda_2}{2 a'_2 m_2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{m_1} \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_2 h''_1}{2} [\alpha - \mathcal{H}(\alpha, Z)] + \frac{\mu_1 c_1 \lambda_2}{2 m_1} \left(1 + \frac{a'_1 - \lambda_2^2}{a'_2} \right) \right\} \quad (4.2.35) \end{aligned}$$

设 $p_e(A_2)$ 为等效线性固有频率, 在考虑到本系统的特点后, 等效线性固有频率方程, 即共振曲线的“骨干方程”取

$$p_e(A_2) = \lambda_2 + \frac{1}{m_1 \Delta'_2 \lambda_2} \left\{ \frac{c''_1}{2} \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times [1 - \beta + \mathcal{H}(\beta, Z)] \right\} \quad (4.2.36)$$

在上式中, 当 $Z=1$ 时, 即 $x_1 \leq e$ 时, 则 $\mathcal{H}(\beta, Z)=0$, 所以

$$p_e(A_2) = \lambda'_2 + \frac{1}{m_1 \Delta'_2 \lambda_2} \frac{c''_1}{2} \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] (1-\beta)$$

如 λ'_2 为 $c'''=0$ 时系统的二阶固有频率, 从上式知, $p_e(A_2) > \lambda'_2$, 当 $Z=1$ 时, 即非线性簧即将起作用时, $p_e(A_2)$ 不是 λ'_2 , 而发生了突变, 这是由于 $x_1=e$ 时弹性元件的刚度突然变化所引起的。

将 (4.2.35), (4.2.36) 代入 (4.2.33), 则得第一次近似的方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_2}{dt} &= -\delta_e(A_2) A_2 + \frac{c_0 r B}{2 m_1 \Delta'_2 \lambda_2} \times \\ &\quad \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \cos(\vartheta_2 - \alpha) \\ \frac{d\vartheta_2}{dt} &= p_e(A_2) - \omega - \frac{c_0 r B}{2 m_1 \Delta'_2 A_2 \lambda_2} \times \\ &\quad \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \sin(\vartheta_2 - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.37)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} B &= \sqrt{1 + \mu_0^2 \omega^2} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \mu_0 \omega \end{aligned} \right\} \quad (4.2.38)$$

因我们只研究共振情况,在(4.2.37)的第一式中可令 $2\lambda_2 \approx 2\omega$, 在第二式中可令 $2\lambda_2 \approx p_e(A_2) + \omega$, 并令(4.2.37)的右端等于零, 则可得到求定常解的方程

$$\begin{aligned} 2\omega\delta_e(A_2)A_2 &= \frac{c_0 r B}{m_1 \Delta'_2} \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \cos(\vartheta_2 - \alpha) \\ [p_e^2(A_2) - \omega^2]A_2 &= \frac{c_0 r B}{m_1 \Delta'_2} \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \sin(\vartheta_2 - \alpha) \end{aligned}$$

取上方程组的平方, 等式左、右端分别相加

$$\begin{aligned} A_2^2 \{ [p_e^2(A_2) - \omega^2]^2 + 4\delta_e^2(A_2)\omega^2 \} \\ = \left(\frac{c_0 r B}{m_1 \Delta'_2} \right)^2 \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right]^2 \end{aligned}$$

则定常解为

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{\left(\frac{c_0 r B}{m_1 \Delta'_2} \right) \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right]}{\sqrt{[p_e^2(A_2) - \omega^2]^2 + 4\delta_e^2(A_2)\omega^2}} \\ \vartheta_2 &= \text{ctg}^{-1} \frac{2\omega\delta_e(A_2)}{p_e^2(A_2) - \omega^2} + \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.2.39)$$

应特别指出, $p_e^2(A_2)$ 已不是一次近似值, 如文献[10]、[21]中所取的那样, 此处考虑了 $x_1 = e$ 时弹性参数突然变化的影响后, $p_e(A_2)$ 是由(4.2.36)所确定的。

因 $\delta_e(A_2)$ 和 $p_e(A_2)$ 都是振幅的函数, 所以求解时利用(4.2.39)并不方便, 通常对 ω 解出

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{[p_e^2(A_2) - 2\delta_e^2(A_2)] \pm \sqrt{[p_e^2(A_2) - 2\delta_e^2(A_2)]^2 - \left[p_e^4(A_2) - \frac{P_1^2}{A_2^2} \right]}} \\ \vartheta_2 &= \text{ctg}^{-1} \frac{2\omega\delta_e(A_2)}{p_e^2(A_2) - \omega^2} + \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.2.40)$$

其中

$$P_1 = \frac{c_0 r B}{m_1 \Delta'_2} \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right]$$

给 A_2 一系列不同的值, 由(4.2.35)和(4.2.36)算出 $\delta_e(A_2)$ 和 $p_e(A_2)$, 再由(4.2.40)算出对应的 ω , 则可画出 $A_2 - \omega$ 曲线(共振曲线), 由之分析非线性振动过程, 从而判断系统的动力学参数选择得是否合理。在共振机械中, 根据不同的系统动力学参数算出共振曲线, 由它分析所选工作点的工作平稳性(工作频率的微小波动引起振幅的微小波动, 则工作平稳性好), 及其频率储备量(振幅向下跳跃频率 ω_T 与工作频率 ω 之差。

以 $\frac{\omega}{\omega_{\text{下}}}$ 表示)是否合理,并可分析确定合理的系统的参数范围和有效、合理的现场工作参数调整方法。

4.2.4 应用举例

1. 为了验证以上所引入的理论分析方法,我们进行了三平方米双质量非线性共振筛振动特性实验研究(详见第十一章)。为了与实验结果进行比较,我们将该模型的八组试验参数都进行了计算,理论计算结果与实验结果吻合得很好,将一组计算参数列下

$$\begin{aligned} m_1 &= 71.9 \text{ kg}, & m_2 &= 71.1 \text{ kg} \\ c_1 &= c_2 = 526 \text{ kg/cm}, & k &= m_1/m_2 = 1.0112 \\ c_0 &= 353 \text{ kN/m}, & c' &= 344 \text{ kN/m} \\ c'' &= 2035 \text{ kN/m}, & \mu_0 &= 0.00059 \text{ s} \\ \mu' &= 0.00046 \text{ s}, & \mu'' &= 0.00026 \text{ s} \\ \mu_1 &= \mu_2 = 0.00059 \text{ s}, & e &= 0.15 \text{ cm} \\ r &= 0.4 \text{ cm} \end{aligned}$$

将以上参数代入(4.2.35),则等效线性衰减指数 $\delta_e(A_2)$ 为

$$\delta_e(A_2) = 2.10333 + 14.1206[0.23484 - \mathcal{H}(\alpha, Z)]$$

由(4.2.36),得骨干方程

$$p_e(A_2) = 91.5 - 41.7261[0.74488 + \mathcal{H}(\beta, Z)]$$

根据(4.2.20)的数值计算结果见表4.1。

表 4.1

Z	A/cm	$p_e/(\text{r/min})$	$\omega_1/(\text{r/min})$	$\omega_2/(\text{r/min})$
1.0	0.15	575	305	755
1.5	0.225	645	501	737
2.0	0.3	694	601	774
2.5	0.375	727	658	789
3.0	0.45	750	695	799
3.5	0.525	768	722	809
4.0	0.6	780	749	816
4.5	0.675	791	759	820
5.0	0.75	798	771	825
5.5	0.825	805	782	828

续表

Z	A/cm	$p_e/(\text{r/min})$	$\omega_1/(\text{r/min})$	$\omega_2/(\text{r/min})$
6.0	0.9	810	789	830
6.5	0.975	816	797	834
7.0	1.05	821	804	835
7.5	1.125	823	809	836
8.0	1.2	824	814	837
8.5	1.275	830	820	838
9.0	1.35	832	823	839
9.5	1.425	834	829	838
10.0	1.5	836	836	836

和以上这一组原始参数相对应的模型筛试验结果见表 4.2。

将理论、实验共振曲线画于图 4.3 上。

表 4.2

测点振幅 cm 转速 /(r/min)	$A_{\text{上}}$ (上箱入料 端侧帮双 振幅)	$A_{\text{下}}$ (上箱入料 端侧帮双 振幅)	$A_{\text{上、下}}$ (相对 振幅)	测点振幅 cm 转速 /(r/min)	$A_{\text{上}}$ (上箱入料 端侧帮双 振幅)	$A_{\text{下}}$ (上箱入料 端侧帮双 振幅)	$A_{\text{上、下}}$ (相对 振幅)
420	0.112	0.335	0.224	1260	0.074	0.014	0.044
490	0.174	0.377	0.220	1200	0.087	0.014	0.050
500	0.211	0.391	0.300	1150	0.099	0.014	0.055
560	0.260	0.447	0.350	1100	0.099	0.014	0.055
570	0.297	0.475	0.386	1050	0.099	0.028	0.064
600	0.322	0.517	0.471	1000	0.112	0.042	0.076
650	0.397	0.587	0.490	950	0.136	0.112	0.124
700	0.496	0.698	0.600	870	0.211	0.168	0.190
740	0.682	0.838	0.760	830	0.360	0.210	0.285
760	0.818	1.060	0.940	750	0.719	0.866	0.795
780	0.917	1.172	1.045	720	0.570	0.824	0.700
800	1.053	1.410	1.230	690	0.471	0.698	0.584
820	1.363	1.760	1.560	630	0.359	0.559	0.459
840	1.512	1.982	1.750				

对比理论和实验共振曲线,可得以下几点结论:

(1) 用本节所给的方法计算的理论共振曲线从定性和定量的角度与实验曲线都吻合得较好;共振曲线的极值和跳跃转速 n_T (振幅突然下跳转速),理论计算值和实验值基本重合,故所给的理论分析方法能较精确地说明实验现象。

(2) 在(4.2.36)中考虑 $x_1 = e$ 时,弹性元件刚度突变的影响,这不但提高了计算精度,而且理论分析结果从定性的方面能在全动力学过程上与实验结果吻合较好。

(3) 从理论共振曲线上,可以确定合理的工作转速,并可检查频率储备量是否合理。如根据现采用的一组原始参数所画的共振曲线看,工作转速选在 $600 \sim 700$ r/min 较好,因在该区间共振曲线较平坦,因而工作平稳性较好,同时在此区间工作,频率储备量也够大,其值约为 $855 - 700 = 155$ r/min。

在设计过程中,改变系统的参数,将每组参数对应,当共振曲线计算出来,可选择一组平稳性好、频率储备合力的参数作为设计用参数。由于图 4.3 所示的共振曲线在工作区间内 $\frac{dA}{d\omega}$ 很大,所以该组参数不宜作为设计参数。

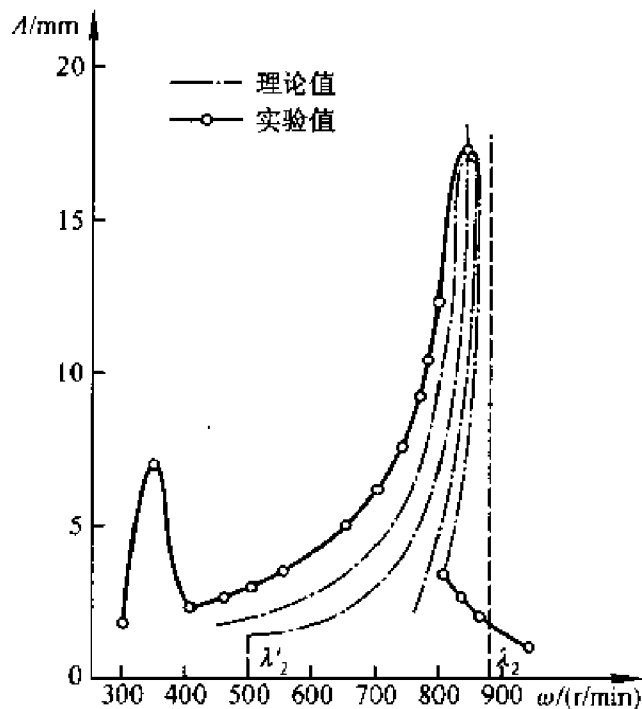


图 4.3

(4) 在图 4.3 上,不同转速下振幅的理论计算值比实验值小(一般小 $0.1 \sim 0.15$ cm),这个系统误差(20%~30%)的出现,可能是由于理论计

算间隙和模型筛的实际间隙的差别所引起的,此处理论计算间隙为 0.15 cm,但从实验结果分析,实际间隙约为 0.32 cm,从[36]的实验结果知,间隙增大,相当于将共振曲线向上平移。另外,测试系统也可能造成系统误差;理论计算所采用的公式只考虑了基波振幅,根据对高次近似解的分析,在解中尚有高次谐波存在,这也导致一次近似的理论结果出现误差。

2. 高次谐波解

将 Y_2 和 ϕ_2 , 以及 $f_2(A, \theta)$ 代入(4.2.25), 积分后则得

$$\begin{aligned}
 U_2 = & \frac{1}{m_1 \Delta_2' \lambda_2^2} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \left\{ -\frac{c_0 r}{2} \left[\frac{\mu_0 \omega}{2} \cos(2\omega t + \vartheta_2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{2} \sin(2\omega t + \vartheta_2) \right] + \frac{1}{4} A \cos 2\theta + \frac{1}{4} C \sin 2\theta + \frac{1}{2} B \times \right. \\
 & \left. \left[\frac{1}{(2n+1)} \cos 2(n+1)\theta - \frac{1}{2n} \sin 2n\theta \right] + \right. \\
 & \left. \frac{D}{4} \left[\frac{1}{n+1} \sin(2n+1)\theta - \frac{1}{n} \sin 2n\theta \right] \right\} - \\
 & \frac{\mu_2 c_2 A_2}{4m_2 a_2' \Delta_2' \lambda_2^2} \left(\frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) (\lambda_2^2 - a_1') \sin 2\theta + \\
 & \frac{\mu_1 c_1 A_2}{4m_1 \lambda_2 \Delta_2' r} \left(1 + \frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} \right) \sin 2\theta \quad (4.2.41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_2 = & \frac{1}{A_2 \Delta_2' \lambda_2^2 m_1} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \left\{ \frac{c_0 r}{4} [\mu_0 \omega \times \right. \\
 & \left. \sin(2\omega t + \vartheta_2) - \cos(2\omega t + \vartheta_2)] + \frac{1}{4} A \sin 2\theta - \frac{1}{4} C \times \right. \\
 & \left. \cos 2\theta + \frac{1}{2} B \left[\frac{1}{2(n+1)} \sin 2(n+1)\theta + \frac{1}{2n} \sin 2n\theta \right] - \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} D \left[\frac{1}{2(n+1)} \cos 2(n+1)\theta + \frac{1}{2n} \cos 2n\theta \right] \right\} - \\
 & \frac{\mu_2 c_2}{4a_2' m_2 \Delta_2' \lambda_2^2} \left(\frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) (\lambda_2^2 - a_1') \cos 2\theta + \\
 & \frac{\mu_1 c_1}{4m_1 \lambda_2 \Delta_2' r} \left(1 + \frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} \right) \cos 2\theta \quad (4.2.42)
 \end{aligned}$$

将 $A_2 = y_2 + \epsilon U_2$

$$\theta_2 = \theta = \lambda_2 t + \vartheta_2 + \epsilon V_2 = \varphi_2 + \epsilon V_2$$

代入 $x_1 = A_1 \varphi_{11}(\theta_1) + A_2 \varphi_{12}(\theta_2) \approx A_2 \cos \theta_2$

则

$$x_1 = (y_2 + \epsilon u_2) \cos(\varphi_2 + \epsilon V_2)$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ y_2 - \frac{1}{4m_1 \lambda_2' \Delta_2'} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \right. \\
&\quad \left[c_0 r(\mu_0 \omega \cos \omega t + \sin \omega t) \frac{1}{\cos \varphi_2} + \frac{1}{4} B_1 + \frac{1}{4} D_1 \right] \Big\} \cos \varphi_2 + \\
&\quad \left\{ \frac{1}{8m_1 \lambda_2^2 \Delta_2'} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \right. \\
&\quad \left[2A_1 - \frac{1}{8} B_2 - \frac{1}{8} D_2 + 2[C - (I)] \operatorname{tg} 3\varphi_2 \right] \cos 3\varphi_2 + \\
&\quad \left. \frac{1}{m_1 \lambda_2^2 \Delta_2'} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \left(\frac{1}{8} B_1 + \frac{1}{8} D_1 \right) \right\} \cos 5\varphi_2 + \dots
\end{aligned} \tag{4.2.43}$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
A &= A_2 c_1'' [\beta - 1 - \mathcal{H}(\beta, Z)] \\
B_1 &= \frac{A_2 (c_1' - c_1'')}{6\pi} (\sin 4\theta_0 - 2\sin 2\theta_0) \\
B_2 &= \frac{A_2 (c_1' - c_1'')}{30\pi} \left(2\sin 6\theta_0 - \frac{1}{2}\sin 4\theta_0 \right) \\
C &= -\lambda_2 A_2 h_1'' [\alpha - \mathcal{H}(\alpha, Z)] \\
D_1 &= -\lambda_2 A_2 h_1'' \frac{1-\alpha}{\pi} \left(\sin 2\theta_0 - \frac{1}{2}\sin 4\theta_0 \right) \\
D_2 &= -\lambda_2 A_2 h_1'' \frac{1-\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{2}\sin 4\theta_0 - \frac{1}{3}\sin 6\theta_0 \right) \\
(I) &= \frac{\mu_2 c_2 A_2}{8a_2' m_2 \Delta_2' \lambda_2} \left(\frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) (\lambda_2^2 - a_1')
\end{aligned} \right\} \tag{4.2.44}$$

(4.2.43)是改善的第一次近似解。

从式(4.2.43)知,一阶谐波成分与三阶谐波成分相位相同,而五阶谐波成分反相位,因此,在做动态应力分析时,三阶惯性力是不可忽视的,如将上面的已知参数代入,则三阶惯性力与一阶惯性力振幅之比约为20%,故知高阶惯性力引起的应力占有很大的比重,这与大量的应力测量结果是符合的。

§ 4.3 多自由度非线性系统实例

作为多自由度系统的一个实例,现研究双质量非线性振动输送机械,包括非线性共振筛、给料机等,这类机械在系统的第二振型作平行振动,

能达到理想的工作效果。实践证明,双质量各自的重心位置、隔振簧、导向簧和驱动簧的刚度以及支承点位置不对称等因素对系统的转动等振动特性,从而对振动输送、筛分机械的工作性能有很大的影响。不少研究工作者对系统的理想工作条件(或称平行振动条件)进行过研究,但所得结论互异。下面利用平均法求其定常解,并研究其平行振动条件。

4.3.1 振动方程及其标准形式

根据双质量非线性共振筛的实际工作情况,考虑上、下筛箱作 α 方向的移动和系统的整体转动,其力学模型取如图 4.4 所示。

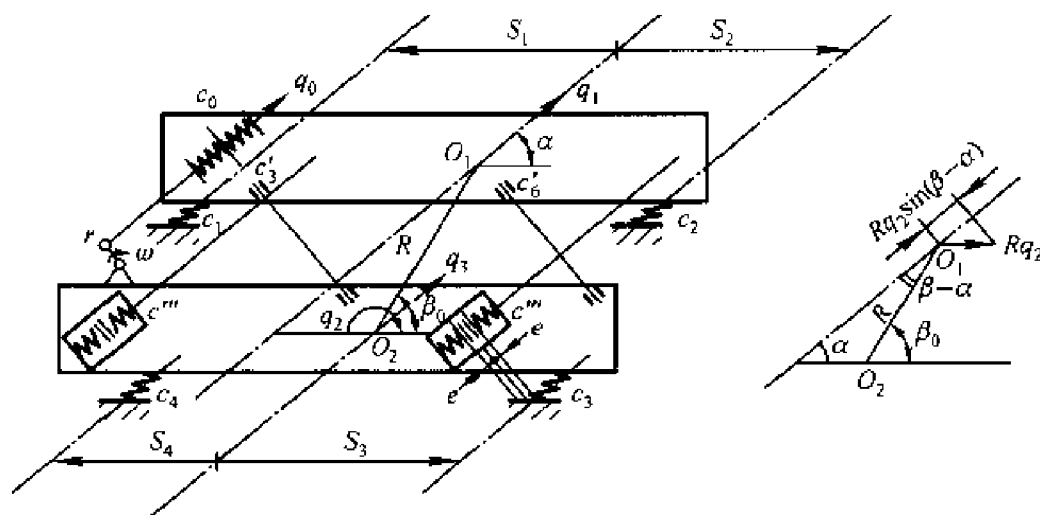


图 4.4

系统的动能 T

$$T = \frac{1}{2} m_1 [\dot{q}_1 + \dot{q}_3 + R\dot{q}_2 \sin(\beta - \alpha)]^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2$$

系统的弹性势能 E

$$E = \frac{1}{2} c_1 [q_1 + q_3 + Rq_2 \sin(\beta - \alpha) + l_1 q_2]^2 + \frac{1}{2} c_2 [q_1 + q_3 - l_2 q_2 + Rq_2 \sin(\beta - \alpha)]^2 + \frac{1}{2} c_3 (q_3 - l_2 q_2)^2 + \frac{1}{2} c_4 (q_3 + l_1 q_2)^2 + \frac{1}{2} c'_5 q_1^2 + \frac{1}{2} c'_6 q_1^2 + \frac{1}{2} c''_5 (q_1 - e)^2 + \frac{1}{2} c''_6 (q_1 - e)^2 + \frac{1}{2} c_0 (q_3 - q_0)^2$$

弹性元件内阻的耗散函数

$$R = \frac{1}{2} \mu \{ c_1 [\dot{q}_1 + \dot{q}_3 + R\dot{q}_2 \sin(\beta - \alpha) + l_1 \dot{q}_2]^2 + \\ c_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_3 + R\dot{q}_2 \sin(\beta - \alpha) - l_2 \dot{q}_2]^2 + \\ c_3 (\dot{q}_3 - l_3 \dot{q}_2)^2 + c_4 (\dot{q}_3 + l_4 \dot{q}_2)^2 \} + \\ \frac{1}{2} [\mu_0 c_0 (\dot{q}_1 - \dot{q}_0)^2 + \mu'_5 c'_5 \dot{q}_1^2 + \mu'_6 c'_6 \dot{q}_1^2 + \\ \mu''_5 c''_5 \dot{q}_1^2 + \mu''_6 c''_6 \dot{q}_1^2]$$

由拉格朗日第二类方程, 得振动方程为

$$m_1 \ddot{q}_1 + \left[\mu_0 c_0 (1 + k) + \mu (c_1 + c_2) - \frac{\mu m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_1 l_1 - c_2 l_2) + \right. \\ \left. \frac{c_0 \mu_0 m_1 R^2 \sin^2(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} \right] \dot{q}_1 + \left\{ \mu [c_1 R \sin(\beta - \alpha) + \right. \\ \left. c_2 R \sin(\beta - \alpha) + c_1 l_1 - c_2 l_2] + \mu k (c_3 l_3 - c_4 l_4) - \right. \\ \left. \frac{\mu m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} [R \sin(\beta - \alpha) (c_1 l_1 - c_2 l_2) + c_1 l_1^2 + \right. \\ \left. c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2] - \frac{\mu m_1 R^2 \sin^2(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} [c_1 l_1 - \right. \\ \left. c_2 l_2] \right\} \dot{q}_2 + \left[\mu (c_1 + c_2) - \mu k (c_3 + c_4) - \frac{\mu m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} \times \right. \\ \left. (c_1 l_1 - c_2 l_2 - c_3 l_3 + c_4 l_4) \right] \dot{q}_3 + \left[c_1 + c_0 (1 + k) + c_2 - \right. \\ \left. \frac{m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_1 l_1 - c_2 l_2) + \frac{m_1 R^2 \sin^2(\beta - \alpha) c_0}{J_1 + J_2} \right] \dot{q}_1 + \\ \left[R (c_1 + c_2) \sin(\beta - \alpha) + c_1 l_1 - c_2 l_2 + k (c_3 l_3 + c_4 l_4) - \right. \\ \left. \frac{m_1 R^2 \sin^2(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_1 l_1 - c_2 l_2) - \frac{m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + \right. \\ \left. c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \right] \dot{q}_2 + \left[c_1 + c_2 - k (c_3 + c_4) + \right. \\ \left. \frac{m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (-c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 - c_4 l_4) \right] \dot{q}_3 + \\ \left\{ 1 + k + \frac{m_1 R^2 \sin^2(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} [S(q_1) + f_1(\dot{q}_1)] \right\} - c_0 q_0 - \mu_0 c_0 \dot{q}_0 - \\ c_0 k q_0 - \mu_0 c_0 k \dot{q}_0 - \frac{m_1 R^2 \sin^2(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_0 q_0 + \mu_0 c_0 \dot{q}_0) = 0 \quad (4.3.1) \\ (J_1 + J_2) \ddot{q}_2 + \mu [R \sin(\beta - \alpha) (c_1 l_1 - c_2 l_2) + c_1 l_1^2 + \\ c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2] \dot{q}_2 + [c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2 +$$

$$\begin{aligned}
& (c_1 l_1 - c_2 l_2) R \sin(\beta - \alpha)] \dot{q}_1 + R c_0 \sin(\beta - \alpha) (\dot{q}_0 + \\
& \mu \dot{q}_3) - R \sin(\beta - \alpha) [S(q_1) + f_1(\dot{q}_1)] + [c_1 l_1 - c_2 l_2 - \\
& R c_0 \sin(\beta - \alpha)] \dot{q}_1 + (c_1 l_1 - c_2 l_2 - c_3 l_3 + c_4 l_4) \dot{q}_3 + \\
& \mu \left[(c_1 l_1 - c_2 l_2 - R \sin(\beta - \alpha) \frac{\mu_0 c_0}{\mu}) \dot{q}_1 + \mu (c_1 l_1 - \right. \\
& \left. c_2 l_2 - c_3 l_3 + c_4 l_4) \dot{q}_3 \right] = 0 \quad (4.3.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 \ddot{q}_3 + \mu (c_3 + c_4) \dot{q}_3 + (c_3 + c_4) q_3 - S(q_1) - f_1(\dot{q}_1) + (c_1 l_1 - \\
c_2 l_2) \dot{q}_2 + \mu (c_1 l_1 - c_3 l_3) \dot{q}_2 - \mu_0 c_0 \dot{q}_0 - c_0 q_1 - \mu_0 c_0 \dot{q}_1 + c_0 q_0 = 0 \quad (4.3.3)
\end{aligned}$$

其中 m_1, J_1 —— 上筛箱的质量及绕其横向重心轴的转动惯量；

m_2, J_2 —— 下筛箱的质量及绕其横向重心轴的转动惯量；

c_1, c_2, c_3, c_4 —— 隔振簧沿 α 方向的动刚度系数；

μ —— 隔振簧单位刚度内阻尼系数；

$$l_i = \frac{S_i}{\sin \alpha} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

c' —— 支板簧的刚度系数；

c'' —— 缓冲簧的动刚度系数；

c_0 —— 驱动簧的动刚度系数；

μ' —— 支板簧单位刚度内阻尼系数；

μ'' —— 缓冲簧单位刚度内阻尼系数；

μ_0 —— 驱动簧单位刚度内阻尼系数；

q_1 —— 上筛箱相对下筛箱沿 α 方向的相对位移；

q_2 —— 下筛箱对自己质心横向轴的转动角位移；

q_3 —— 下筛箱沿 α 方向的绝对位移；

q_0 —— 连杆相对下筛箱的相对位移；

$S(q_1)$ —— 支板簧与缓冲簧的弹性恢复力函数；

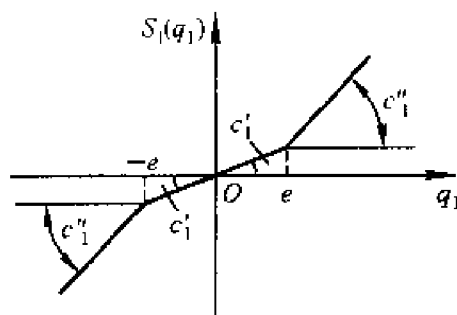
$f_1(\dot{q}_1)$ —— 支板簧与缓冲簧的内阻尼函数。

为将系统化成拟线性系统, 取

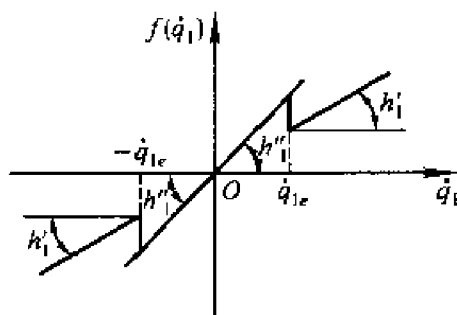
$$\left. \begin{aligned}
S_1(q_1) &= S(q_1) + c_0 q_1 = c''_1 q_1 + \epsilon f_3(q_1) \\
f_2(\dot{q}_1) &= f_1(\dot{q}_1) + \mu_0 c_0 \dot{q}_1 \\
c''_1 &= c_0 + c' + c'' = c'_1 + c'' \\
c'''_1 &= c''_1 + c_1 + c_2
\end{aligned} \right\} \quad (4.3.4)$$

其中 $f_3(q_1)$ 和 $f_2(\dot{q}_1)$ 如图 4.5 所示, 其表达式为

$$\left. \begin{aligned} f_1(q_1) &= \begin{cases} (c'_1 - c''_1)q_1 & (-e \leq q_1 \leq e) \\ (c'_1 - c''_1)e & (q_1 \geq e) \\ -(c'_1 - c''_1)e & (q_1 \leq -e) \end{cases} \\ f_2(\dot{q}_1) &= \begin{cases} h'_1 \dot{q}_1 & (-e \leq q_1 \leq e) \\ h''_1 \dot{q}_1 & (q_1 \geq e) \\ h'_1 \dot{q}_1 & (q_1 \leq -e) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.5)$$



(a)



(b)

图 4.5

关于上、下筛箱不产生摇摆振动几何条件的研究:如果上、下筛箱发生摇摆振动,由于筛面上各处的振幅不同,将显著地影响筛选、输送效果,摇摆振动对进、出料端的影响最大,从筛箱摇摆振动的方程(4.3.2)知,如取

$$\alpha = \beta, \quad c_1 s_1 = c_2 s_2, \quad c_3 s_3 = c_4 s_4 \quad (4.3.6)$$

则(4.3.2)式成为只含 \ddot{q}_2 , \dot{q}_2 和 q_2 的自由衰减振动微分方程了,此时筛箱的摇摆振动将为自由衰减振动,因而如果摇摆振动一旦发生,将很快衰减,故不影响共振筛的输送效果和筛选效果,这些条件的物理意义为:

(1) $\alpha = \beta$ 上、下筛箱重心连线应和工作时振动方向相平行。

(2) $c_1 s_1 = c_2 s_2$ 支承簧沿振动方向的刚度系数与它们到上筛箱重心垂直距离成反比——上筛箱支承条件对称。

(3) $c_3 s_3 = c_4 s_4$ 下筛箱支承条件对称。

(4) 条件平行振动如存在以上的几项偏差,可调整正、负号,以使 N

$=0$, 见式(4.3.4), 以达到消除转动的目的。以上第一个条件与很多研究工作者所得的结果相同; 第二、三个条件则不同, 一般只给了支承簧垂直刚度系数与它们到其重心的垂直距离成反比的结论, 这是由于没有考虑到支承簧各向异性的特点所致。另外, 还有的研究工作者提出需满足 $s_1 = s_4, s_2 = s_3$ 和 $R=0$, 根据我们的分析, 这些条件是不必要的。第四个条件尚无人提出过。

实际上由于存在加工和装配的误差, 有时在结构设计上也不能完全满足以上要求的几何条件, 同时在输送、筛选过程中物料的粒度、湿度、粘度等条件不可能完全均匀一致, 所以条件(4.3.6)只能得到近似的满足, 故需研究条件(4.3.6)的偏差对振动过程的影响, 并需知在大多数偏差时输送、筛分过程仍正常地工作, 以便使现场调整工作更有效和简便。为此, 只将双质量共振筛作两个自由度进行研究就不够了, 故需研究多自由度时的振动过程。

将(4.3.4)代人(4.3.1), (4.3.2), (4.3.3), 并将阻尼力、干扰力、弹性力的非线性部分及 $c_1 l_1 - c_2 l_2, c_3 l_3 - c_4 l_4, R \sin(\beta - \alpha)$ 等与惯性力、弹性力的线性部分相比而较小的项之前标以小参数, 并略去 ϵ^2 以上的各项, 则振动方程为

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + [c_1 + c_2 + (1+k)c_1''] q_1 + [c_1 + c_2 - k(c_3 + c_4)] q_3 \\ = \epsilon \left\{ -\mu(c_1 + c_2) \dot{q}_1 + \frac{\mu m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + \right. \\ c_3 l_3^2 - c_4 l_4^2) \dot{q}_2 - \mu [c_1 + c_2 - k(c_3 + c_4)] \dot{q}_3 - \left[R(c_1 + \right. \\ c_2) \sin(\beta - \alpha) + c_1 l_1 - c_2 l_2 + k(c_3 l_3 - c_4 l_4) - \\ \left. \frac{m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \right] q_2 - \\ \left. (1+k)[f_3(q_1) + f_2(\dot{q}_1)] + (1+k)(c_0 q_0 + \mu_0 c_0 \dot{q}_0) \right\} \quad (4.3.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_1 + J_2) \ddot{q}_2 + (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) q_2 \\ = \epsilon \{ -\mu(c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \dot{q}_2 + [R \sin(\beta - \alpha) c_1' - \\ c_1 l_1 - c_2 l_2] q_1 - R c_0 q_0 \sin(\beta - \alpha) - (c_1 l_1 - c_2 l_2 - \\ c_3 l_3 - c_4 l_4) q_3 \} \quad (4.3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{q}_3 + (c_3 + c_4) q_3 - c_1'' q_1 \\ = \epsilon [-\mu(c_3 + c_4) \dot{q}_3 + f_3(q_1) + f_2(\dot{q}_1) + (c_3 l_3 - c_4 l_4) q_2 + \\ \mu_0 c_0 \dot{q}_1 - c_1(q_0 + \mu_0 \dot{q}_0)] \quad (4.3.9) \end{aligned}$$

为了将振动方程(4.3.7), (4.3.8)与(4.3.9)化成以振幅、相位为未知函数的标准方程组, 设

$$q_1 = x_1, \dot{q}_1 = x_2, q_3 = x_3, \dot{q}_3 = x_4, q_2 = x_5, \dot{q}_2 = x_6$$

可将(4.3.7), (4.3.8), (4.3.9)化成典则形式的方程, 对典则方程采用变换

$$x_s = \sum_{k=1}^2 A_k \varphi_{sk}(\theta_k) \quad (s=1, 2, 3, 4) \quad (4.3.10)$$

$$x_{4+i} = A_i \varphi_{i+1,3}(\theta_3) \quad (i=1, 2) \quad (4.3.11)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \frac{dA_k}{dt} \varphi_{sk}(\theta_k) - \sum_{k=1}^2 \varphi_{sk}^*(\theta_k) \left(\frac{d\theta_k}{dt} - \lambda_k \right) &= \varepsilon F_s \\ \frac{dA_i}{dt} \varphi_{i+1,3}(\theta_3) - \varphi_{i+1,3}^*(\theta_3) \left(\frac{d\theta_3}{dt} - \lambda_3 \right) &= \varepsilon F_{3+i} \\ (s=1, 2, 3, 4 \quad i=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1k} &= \cos \lambda_k t \\ \varphi_{1k}^* &= \sin \lambda_k t \\ \varphi_{2k} &= -\lambda_k \sin \lambda_k t \\ \varphi_{2k}^* &= \lambda_k \cos \lambda_k t \\ \varphi_{3k} &= \frac{1}{a_2'} (a_1' - \lambda_k^2) \cos \lambda_k t \\ \varphi_{3k}^* &= \frac{1}{a_2'} (a_1' - \lambda_k^2) \sin \lambda_k t \\ \varphi_{4k} &= -\frac{\lambda_k}{a_2'} (a_1' - \lambda_k^2) \sin \lambda_k t \\ \varphi_{4k}^* &= \frac{\lambda_k}{a_2'} (a_1' - \lambda_k^2) \cos \lambda_k t \\ \varphi_{53} &= \cos \lambda_3 t \\ \varphi_{53}^* &= \sin \lambda_3 t \\ \varphi_{63} &= -\lambda_3 \sin \lambda_3 t \\ \varphi_{63}^* &= \lambda_3 \cos \lambda_3 t \end{aligned} \right\} \quad (4.3.13)$$

为典则方程组的派生方程的基础解系, 且 $\frac{d\theta_k}{dt} = \lambda_k$, 其中 $\frac{d\theta_3}{dt} = \lambda_3$ 为派生系统的固有频率

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= \frac{1}{2} \left[(a_1' + a_2) \pm \sqrt{(a_1' + a_2)^2 - 4(a_1' a_2 - b_1 a_2')} \right] \\ \lambda_3 &= \sqrt{d} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a'_1 &= \frac{1}{m_1} [c_1 + c_2 + (1+k)c''_1] \\ a'_2 &= -\frac{1}{m_1} [c_1 + c_2 - k(c_3 + c_4)] \\ b_1 &= \frac{c''_1}{m_2} \\ a_2 &= \frac{1}{m_2} (c_3 + c_4) \\ d &= \frac{1}{J_1 + J_2} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.15)$$

在(4.3.12)中,

$$F_1 = F_3 = F_5 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{m_1} \left\{ (1+k)[c_0 q_0 + \mu_0 c_0 \dot{q}_0 - f_3(x_1) - f_2(x_2)] - \right. \\ &\quad \mu(c_1 + c_2)x_2 - \mu[c_1 + c_2 - k(c_3 + c_4)]x_4 + \\ &\quad \frac{\mu m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + \\ &\quad c_4 l_4^2)x_6 - [R(c_1 + c_2) \sin(\beta - \alpha) + c_1 l_1 - \\ &\quad c_2 l_2 + k(c_3 l_3 - c_4 l_4) - \frac{m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_1 l_1^2 + \\ &\quad c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2)]x_5 \left. \right\} \\ F_4 &= \frac{1}{m_2} [f_3(x_1) + f_2(x_2) + \mu_0 c_3 x_2 - \mu(c_3 + c_4)x_1 + \\ &\quad (c_3 l_3 - c_4 l_4)x_5 - c_0(q_0 + \mu_0 \dot{q}_0)] \\ F_6 &= \frac{1}{J_1 + J_2} \{ [Rc''_1 \sin(\beta - \alpha) - c_1 l_1 + c_2 l_2]x_1 - (c_1 l_1 - \\ &\quad c_2 l_2 - c_3 l_3 + c_4 l_4)x_3 - \mu(c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + \\ &\quad c_4 l_4^2)x_6 - c_0 q_0 R \sin(\beta - \alpha) \} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.16)$$

分别以 $\psi(\theta)$, $\psi^*(\theta)$ 乘式(4.3.12), 并对 s, i 分别求和, 考虑基础解系的正交性, 则得标准方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_k}{dt} &= \epsilon \frac{1}{\Delta'_k} \sum_{s=1}^4 F_s \psi_{sk}(\theta_k) = \epsilon \phi_k(A, \theta) \\ \frac{d\theta_k}{dt} &= \lambda_k - \frac{\epsilon}{\Delta'_k A_k} \sum_{s=1}^4 F_s \psi_{sk}^*(\theta_k) = \lambda_k - \epsilon \phi_k^*(A, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.17)$$

($k=1, 2$)

和

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_s}{dt} &= \varepsilon \frac{1}{\Delta'_{s,1 \rightarrow s}} \sum_{j=1}^n F_{1 \dots \psi_{s-1},s}(\theta_s) = \varepsilon \phi_s(A, \theta) \\ \frac{d\theta_s}{dt} &= \lambda_s + \frac{\varepsilon}{\Delta'_{s,1 \rightarrow s} A_{s,1 \rightarrow s}} \sum_{j=1}^n F_{1 \dots \psi_{s-1},s}(\theta_s) = \lambda_s + \varepsilon \psi_s(A, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.18)$$

从(4.3.17)、(4.3.18)的形式知,振幅和相位的导数是与 ε 成正比的量,即振幅和相位是随着时间而缓慢变化的函数。

$\phi(\theta)$ 和 $\psi^*(\theta)$ 为典则方程派生方程的共轭方程的基础解系,其表达式为

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1k} &= \cos \lambda_k t, & \psi_{1k}^* &= \sin \lambda_k t \\ \psi_{2k} &= -\frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t, & \psi_{2k}^* &= \frac{1}{\lambda_k} \cos \lambda_k t \\ \psi_{3k} &= \frac{1}{b_1} (a_1' - \lambda_k^2) \cos \lambda_k t \\ \psi_{3k}^* &= \frac{1}{b_1} (a_1' - \lambda_k^2) \sin \lambda_k t \\ \psi_{4k} &= -\frac{1}{b_1 \lambda_k} (a_1' - \lambda_k^2) \sin \lambda_k t \\ \psi_{4k}^* &= \frac{1}{b_1 \lambda_k} (a_1' - \lambda_k^2) \cos \lambda_k t \\ \psi_{5,3} &= \cos \lambda_3 t, & \psi_{5,3}^* &= \sin \lambda_3 t \\ \psi_{6,3} &= -\frac{1}{\lambda_3} \sin \lambda_3 t, & \psi_{6,3}^* &= \frac{1}{\lambda_3} \cos \lambda_3 t \end{aligned} \right\} \quad (4.3.19)$$

同样有

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \lambda_k, \quad \frac{d\theta_3}{dt} = \lambda_3$$

在(4.3.17)和(4.3.18)中:

$$\left. \begin{aligned} \Delta'_1 &= 1 + \frac{1}{a_2' b_1} (a_1' - \lambda_1^2)^2 \\ \Delta'_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.20)$$

4.3.2 共振情况的定常解

如 $\lambda_k = \omega = \varepsilon H_k$ 满足,则称为共振情况,其中 H_k 为任意常数.现研究共振情况下的定常解。

采用 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} A_k &= y_k + \varepsilon U_k(t, y, \vartheta) \\ \theta_k &= \lambda_k t + \vartheta_k + \varepsilon V_k(t, y, \vartheta) \\ (k &= 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.21)$$

并要求新变量 y_k, ϑ_k 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_k}{dt} &= \varepsilon Y_k(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Y_k^*(t, y, \vartheta, \varepsilon) \\ \frac{d\vartheta_k}{dt} &= \lambda_k - \omega + \varepsilon Z_k(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Z_k^*(t, y, \vartheta, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.22)$$

其中 Y_k 和 Z_k 不显含 t ; U_k, V_k, Y_k^* 和 Z_k^* 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数和 t 的周期函数。

将(4.3.21)代入(4.3.17)和(4.3.18), 考虑(4.3.22), 并令等式两端 ε 一次方的系数相等

$$\left. \begin{aligned} Y_k + \frac{\partial U_k}{\partial t} &= \phi_k \\ Z_k + \frac{\partial V_k}{\partial t} &= -\phi_k^* \end{aligned} \right\} \quad (4.3.23)$$

为了对以上微分方程组求解, 先将非线性函数 $f_3(x_1)$ 和 $f_2(x_2)$ 展成傅氏级数

$$\begin{aligned} f_3(x_1) &= A \cos \theta_2 + B \cos(2n+1)\theta_2 \\ f_2(x_2) &= C \sin \theta_2 + D \sin(2n+1)\theta_2 \end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \lambda_i t + \vartheta_i, \quad h_2 = \mu_2 c_2 \\ h' &= \mu' c', \quad h'' = \mu'' c'' \\ h'_1 &= h_1 + h', \quad h''_1 = h'_1 + h'' \\ \alpha &= \frac{h'_1}{h''_1}, \quad \beta = \frac{c'_1}{c''_1}; z = \frac{y_2}{e} \\ C &= -\lambda_2 y_2 h''_1 [\alpha - \mathcal{H}(\alpha, z)] \\ A &= y_2 c''_1 [\beta - 1 - \mathcal{H}(\beta, z)] \\ B &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_2}{n(n+1)(2n+1)} \frac{c'_1 - c''_1}{\pi} [n \sin 2(n+1)\theta_0 - (n+1) \sin 2n\theta_0] \\ D &= -\lambda_2 y_2 h''_1 \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n} \sin 2n\theta_0 - \frac{1}{2n+2} \sin 2(n+1)\theta_0 \right] \\ \mathcal{H}(\alpha, z) &= \frac{2(\alpha-1)}{\pi z} \left(z \cos^{-1} \frac{1}{z} - \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}} \right) \\ \mathcal{H}(\beta, z) &= \frac{2(\beta-1)}{\pi z} \left(z \cos^{-1} \frac{1}{z} - \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.24)$$

由(4.3.17)和(4.3.18), ϕ, ϕ^* 的表达式为

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{1}{\Delta_2'} \sum_{i=1}^4 F_i \phi_{i2}(\theta_2) \\
&= \frac{1}{m_1 \Delta_2' \lambda_2} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \left\{ \frac{c_0 r}{2} [\cos \vartheta_2 - \right. \\
&\quad \cos(2\omega t + \vartheta_2) + \mu_0 \omega \sin(2\omega t + \vartheta_2) + \mu_0 \omega \sin \vartheta_2] - \\
&\quad \frac{A}{2} \sin 2\theta_2 - \frac{B}{2} [\sin 2(n+1)\theta_2 - \sin 2n\theta_2] - \\
&\quad \frac{C}{2} (1 - \cos 2\theta_2) - \frac{D}{2} [\cos 2n\theta_2 - \cos 2(n+1)\theta_2] \Big\} + \\
&\quad \frac{1}{m_1 \Delta_2' \lambda_2} \left\{ \mu_0 c_0 \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] - \mu(c_1 + c_2) \right\} \times \\
&\quad (\lambda_1 y_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \lambda_2 y_2 \sin^2 \theta_2) + \\
&\quad \frac{\mu}{m_1 \Delta_2' \lambda_2} \left[k(c_3 + c_4) \left(\frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) + c_1 + c_2 \right] \times \\
&\quad \left\{ \frac{\lambda_1}{a_2} (\lambda_1^2 - a_1') y_1 [\cos(\theta_2 - \theta_1) - \cos(\theta_1 + \theta_2)] + \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda_2 y_2}{a_2} (\lambda_2^2 - a_1') \sin^2 \theta_2 \right\} + \frac{1}{m_1 \lambda_2 \Delta_2'} \left[R(c_1 + c_2) \sin(\beta - \alpha) + \right. \\
&\quad c_1 l_1 - c_2 l_2 + k(c_3 l_3 - c_4 l_4) \left(1 + \frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} \right) - \\
&\quad \frac{m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \Big] y_3 \cos \theta_3 \sin \theta_2 + \\
&\quad \frac{\mu \lambda_3 R y_3 \sin(\beta - \alpha)}{\Delta_2' \lambda_2 (J_1 + J_2)} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \sin \theta_2 \sin \theta_3 \quad (4.3.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3 &= \frac{1}{\Delta_3' \lambda_3} \sum_{i=1}^6 F_{i+1} \phi_{i+1,3}(\theta_3) \\
&= -\frac{1}{\lambda_3 (J_1 + J_2)} \left\{ [R c_1'' \sin(\beta - \alpha) - c_1 l_1 + \right. \\
&\quad c_2 l_2] \frac{1}{2} [y_1 \sin(\theta_1 + \theta_3) - y_1 \sin(\theta_1 - \theta_3) + \\
&\quad y_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) - y_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] - (c_1 l_1 - \\
&\quad c_2 l_2 - c_3 l_3 + c_4 l_4) \left[\frac{a_1' - \lambda_2^2}{2a_2'} y_1 (\sin(\theta_1 + \theta_3) - \right. \\
&\quad \sin(\theta_1 - \theta_3)) + \frac{a_1' - \lambda_2^2}{2a_2'} y_2 (\sin(\theta_2 + \theta_3) - \\
&\quad \sin(\theta_2 - \theta_3)) \Big] + \frac{1}{2} R c_0 r \sin(\beta - \alpha) [\cos(\omega t + \theta_3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos(\theta_3 - \omega t) \} + \mu(c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + \\
& c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \lambda_3 y_3 \sin^2 \theta_3 \} \quad (4.3.26) \\
\phi_2^* = & \frac{1}{\Delta_2' y_2} \sum_{s=1}^4 F_s \phi_{s2}^*(\theta_2) \\
= & \frac{-1}{m_1 \Delta_2' \lambda_2 y_2} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \left\{ \frac{c_0 r}{2} [\sin(2\omega t + \vartheta_2) - \right. \\
& \left. \sin \vartheta_2] + \frac{\mu_0 c_0 r \omega}{2} [\cos(2\omega t + \vartheta_2) + \cos \vartheta_2] - \right. \\
& \frac{A}{2} (1 + \cos 2\theta_2) - \frac{B}{2} [\cos 2(n+1)\theta_2 + \cos 2n\theta_2] - \frac{C}{2} \sin 2\theta_2 - \\
& \left. \frac{D}{2} [\sin 2(n+1)\theta_2 + \sin 2n\theta_2] \right\} - \\
& \frac{1}{m_1 \Delta_2' y_2 \lambda_2} \left[\frac{\mu_0 c_0 k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - \mu_0 c_0 (1+k) - \mu(c_1 + c_2) \right] \times \\
& \left\{ \frac{1}{2} \lambda_1 y_1 [\sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin(\theta_2 - \theta_1)] + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \lambda_2 y_2 \sin 2\theta_2 \right\} - \frac{\mu}{m_1 \Delta_2' \lambda_2 y_2} \left[c_1 + c_2 + \right. \\
& \left. k(c_3 + c_4) \left(\frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) \right] \left\{ \frac{\lambda_1 y_1}{2a_2'} (a_1' - \lambda_1^2) [\sin(\theta_1 + \theta_2) - \right. \\
& \left. \sin(\theta_2 - \theta_1)] + \frac{\lambda_2 y_2}{2a_2'} (a_1' - \lambda_2^2) \sin 2\theta_2 \right\} - \\
& \frac{1}{m_1 \Delta_2' \lambda_2 y_2} \left[R(c_1 + c_2) \sin(\beta - \alpha) + \right. \\
& c_1 l_1 - c_2 l_2 + K(c_3 l_3 - c_4 l_4) \left(1 + \frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} \right) - \\
& \left. \frac{m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \right] \times \\
& \frac{y_3}{2} [\cos(\theta_2 + \theta_3) + \cos(\theta_2 - \theta_3)] - \\
& \frac{\mu R \lambda_3 y_3 \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + \\
& c_4 l_4^2) \frac{y_3}{2} [\cos(\theta_2 + \theta_3) + \cos(\theta_2 - \theta_3)] - \\
& \frac{\mu R \lambda_3 y_3 \sin(\beta - \alpha)}{2 \Delta_2' \lambda_2 y_2 (J_1 + J_2)} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_4 l_3^2 +
\end{aligned}$$

$$c_4 l_1^2) [\sin(\theta_2 + \theta_3) - \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (4.3.27)$$

$$\begin{aligned} \phi_3^* &= \frac{1}{\Delta'_3 y_3} \sum_{i=5}^6 F_{4-i, \phi_{4-i,3}}^*(\theta_3) \\ &= \frac{1}{\lambda_3 y_3 (J_1 + J_2)} \left\{ [Rc''_1 \sin(\beta - \alpha) - c_1 l_1 + \right. \\ &\quad c_2 l_2] \frac{1}{2} [y_1 \cos(\theta_1 + \theta_3) + y_1 \cos(\theta_3 - \theta_1) + \\ &\quad y_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) + y_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)] - (c_1 l_1 - \\ &\quad c_2 l_2 - c_3 l_3 + c_4 l_4) \frac{1}{2} \left[\frac{a'_1 - \lambda_2^2}{a'_2} y_1 \cos(\theta_1 + \theta_3) + \right. \\ &\quad \frac{a'_1 - \lambda_2^2}{a'_2} y_1 \cos(\theta_3 - \theta_1) + \frac{a'_1 - \lambda_2^2}{a'_2} y_2 (\cos(\theta_3 + \\ &\quad \theta_2) + \cos(\theta_3 - \theta_2)) \left. \right] - \\ &\quad \frac{1}{2} R c_0 r \sin(\beta - \alpha) [\sin(\theta_3 + \omega t) - \sin(\theta_3 - \omega t)] + \\ &\quad \left. \mu(c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \frac{1}{2} \lambda_3 y_3 \sin 2\theta_3 \right\} \quad (4.3.28) \end{aligned}$$

为了使函数 Y_k, Z_k 满足不显含 t 的条件, 则

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_2 d\psi \\ &= \frac{1}{m_1 \Delta'_2 \lambda_2} \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \\ &\quad \left\{ \frac{c_0 r}{2} (\cos \vartheta_2 + \mu_0 \omega \sin \vartheta_2) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \lambda_2 h''_1 y_2 [\alpha - \mathcal{H}(\alpha, z)] \right\} + \frac{\lambda_2 y_2}{2m_1 \Delta'_2 \lambda_2} \times \\ &\quad \left\{ \mu_0 c_0 \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] - \mu(c_1 + c_2) \right\} + \\ &\quad \frac{\mu}{m_1 \Delta'_2 \lambda_2} \left[k(c_3 + c_4) \left(\frac{a'_1 - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) + c_1 + c_2 \right] \\ &\quad \frac{\lambda_2 y_2}{2a'_2} (\lambda_2^2 - a'_1) + E \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) + F \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) \quad (4.3.29) \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} Y_3 &= G \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) - \left[-\frac{1}{2} R c_0 r \sin(\beta - \alpha) \cos \vartheta_3 + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \mu \lambda_3 y_3 (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \right] \times \frac{1}{\lambda_3 (J_1 + J_2)} \quad (4.3.30) \\ Z_2 &= \frac{1}{2m_1 \Delta'_2 \lambda_2 y_2} \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{-c_0 r \sin \vartheta_2 + \mu_0 c_0 r \omega \cos \vartheta_2 - y_2 c''_1 [\beta - \\ & 1 - \mathcal{H}(\beta, z)]\} + \frac{1}{y_2} E \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) - \\ & \frac{1}{y_2} F \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

$$\begin{aligned} Z_3 = & \frac{G}{y_3} \cos(\vartheta_3 - \vartheta_2) - \frac{1}{2} R c_0 r \sin(\beta - \alpha) \sin \vartheta_3 \times \\ & \frac{1}{\lambda_3 (J_1 + J_2) y_3} \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

其中

$$\begin{aligned} E = & \frac{y_3}{2m_1 \Delta'_2 \lambda_2} \left[R(c_1 + c_2) \sin(\beta - \alpha) + c_1 l_1 - \right. \\ & c_2 l_2 + k(c_3 l_3 - c_4 l_4) \left(1 + \frac{a'_1 - \lambda_2^2}{b_1} \right) - \\ & \left. \frac{m_1 R \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \right] \\ F = & \frac{R \mu \lambda_3 y_3 \sin(\beta - \alpha)}{2 \Delta'_2 \lambda_2 (J_1 + J_2)} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \\ G = & \frac{-1}{\lambda_3 (J_1 + J_2)} \left\{ \frac{-y_2}{2} [R c''_1 \sin(\beta - \alpha) - c_1 l_1 + c_2 l_2] + \right. \\ & \left. (c_1 l_1 - c_2 l_2 - c_3 l_3 + c_4 l_4) \frac{y_2 (a'_1 - \lambda_2^2)}{2 a'_2} \right\} \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

在(4.3.22)中,如只考虑 ϵ 的一次项,则

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \frac{dy_2}{dt} &= \epsilon Y_2, \quad \frac{d\vartheta_2}{dt} = \lambda_2 - \omega + \epsilon Z_2 \\ \frac{dy_3}{dt} &= \epsilon Y_3, \quad \frac{d\vartheta_3}{dt} = \lambda_3 - \omega + \epsilon Z_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.34) \end{aligned}$$

取等效线性衰减指数为

$$\begin{aligned} \delta_{e2}(y_2) = & \frac{a'_1 - \lambda_2^2}{2 a'_2} \frac{\mu}{m_1 \Delta'_2} \left[k(c_3 + c_4) \times \right. \\ & \left. \left(\frac{a'_1 - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) + c_1 + c_2 \right] - \\ & \frac{1}{2 m_1 \Delta'_2} \left\{ \mu_0 c_0 \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. (1 + k) \right] - \mu(c_1 + c_2) \right\} - \frac{h''_1}{2 m_1 \Delta'_2} \times \\ & \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1 + k) \right] [\alpha - \mathcal{H}(\alpha, z)] \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

$$\delta_{e3}(y_3) = \frac{\mu}{2(J_1 + J_2)} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 + c_4 l_4^2) \quad (4.3.36)$$

等效线性固有频率为

$$p_{e2}(y_2) = \lambda_2 + \frac{c_1''}{2m_1\Delta_2'\lambda_2} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \\ [1 - \beta + \mathcal{H}(\beta, \alpha)] \quad (4.3.37)$$

$$p_{e3}(y_3) = \lambda_3 \quad (4.3.38)$$

则(4.3.34)有如下形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_2}{dt} &= -\delta_{e2}(y_2)y_2 + \frac{c_0 r B}{2m_1\Delta_2'\lambda_2} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \\ &\quad \cos(\vartheta_2 - \alpha) + E \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) + F \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) \\ \frac{dy_3}{dt} &= -\delta_{e3}(y_3)y_3 + \frac{Rc_0 r \sin(\beta - \alpha)}{2\lambda_3(J_1 + J_2)} \cos \vartheta_3 + \\ &\quad G \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) \\ \frac{d\vartheta_2}{dt} &= p_{e2}(y_2) - \omega - \frac{c_0 r B}{2m_1\Delta_2'\lambda_2 y_2} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \\ &\quad \sin(\vartheta_2 - \alpha) + E \frac{1}{y_2} \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) - \\ &\quad \frac{F}{y_2} \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) \\ \frac{d\vartheta_3}{dt} &= p_{e3}(y_3) - \omega - \frac{Rc_0 r \sin(\beta - \alpha)}{2\lambda_3 y_3 (J_1 + J_2)} \sin \vartheta_3 - \frac{G}{y_3} \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.39)$$

其中

$$B = \sqrt{1 + \mu_0^2 \omega^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \mu_0 \omega$$

为了得到定常解,令以上方程组右端等于零,并在第一个方程式中令 $2\lambda_2 = 2\omega$;在第三个方程式中令 $2\lambda_3 = p_{e2}(y_2) + \omega$;第二、四个方程以同样的方法处理,则

$$\left. \begin{aligned} 2\omega \delta_{e2}(y_2)y_2 &= H \cos(\vartheta_2 - \alpha) + 2\lambda_2 E \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) + \\ &\quad 2\lambda_2 F \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) \\ y_2 [p_{e2}^2(y_2) - \omega^2] &= H \sin(\vartheta_2 - \alpha) - 2\lambda_2 E \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) + \\ &\quad 2\lambda_2 F \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.40)$$

和

$$\left. \begin{aligned} 2\omega \delta_{e3}(y_3)y_3 &= \frac{Rc_0 r \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} \cos \vartheta_3 + \\ &\quad 2\lambda_3 G \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) \\ y_3 [p_{e3}^2(y_3) - \omega^2] &= \frac{Rc_0 r \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} \sin \vartheta_3 + \\ &\quad 2\lambda_3 G \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.41)$$

其中

$$H = \frac{c_0 B r}{m_1 \Delta_2'} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \quad (4.3.42)$$

四个未知数 y_2, y_3, ϑ_2 和 ϑ_3 有四个方程(4.3.40)和(4.3.41),但由于该方程组很复杂,很难求出这些未知函数的显式。为了克服这一困难,我们建议用迭代渐近法来求解。我们首先将(4.3.41)中代 G 的非线性部分取为 0,以得到 y_3, ϑ_3 的试算值 $y_3^{(0)}, \vartheta_3^{(0)}$;将此值代入(4.3.40),则可得 $y_2^{(0)}, \vartheta_2^{(0)}$;再将 $y_2^{(0)}, \vartheta_2^{(0)}$ 代入(4.3.41)得 $y_3^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}$,然后将 $y_3^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}$ 代入(4.3.40)得 $y_2^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}$ 。一般第一次近似值基本可满足工程需要,否则,可继续算下去,直至达到满意的精度为止。

为了求得 y_3, ϑ_3 的试算值 $y_3^{(0)}, \vartheta_3^{(0)}$,在式(4.3.41)中令 $G=0$,则

$$\left. \begin{aligned} y_3^{(0)} &= \frac{\frac{R c_0 r \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2}}{\sqrt{[p_{e3}^2(y_3) - \omega^2]^2 + 4\omega^2 \delta_{e3}^2(y_3)}} \\ \vartheta_3^{(0)} &= \operatorname{ctg}^{-1} \frac{2\omega \delta_{e3}}{p_{e3}^2 - \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.43)$$

不难证明,当 $\frac{\omega}{\lambda_3} > 2$ 时, ϑ_3 可认为是常数,在方程组(4.3.40)中视 $\vartheta_3^{(0)}$ 为常量,整理后

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{[p_{e2}^2(y_2^{(0)}) - 2\delta_{e2}^2(y_2^{(0)})] \pm \sqrt{[p_{e2}^2(y_2^{(0)}) - 2\delta_{e2}^2(y_2^{(0)})]^2 - [p_{e2}^4(y_2^{(0)}) - \frac{W^2}{y_2^{2(0)}}]}} \\ \vartheta_2^{(0)} &= \operatorname{ctg}^{-1} \frac{2\omega \delta_{e2}(y_2^{(0)})}{p_{e2}^2(y_2^{(0)}) - \omega^2} + r \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} W &= \sqrt{I^2 + J^2} \\ I &= H - 2\lambda_2 E \sin \vartheta_3^{(0)} + 2\lambda_2 F \cos \vartheta_3^{(0)} \\ J &= \mu_0 \omega H + 2\lambda_2 E \cos \vartheta_3^{(0)} + 2\lambda_2 F \sin \vartheta_3^{(0)} \\ \operatorname{tg} r &= \frac{J}{I} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.45)$$

将 $y_2^{(0)}, \vartheta_2^{(0)}$ 代入(4.3.41),可得 y_3, ϑ_3 的第一次近似 $y_3^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}$

$$\left. \begin{aligned} y_3^{(1)} &= \frac{N}{\sqrt{(\lambda_3^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \delta_{e3}^2(y_3^{(0)})}} \\ \vartheta_3^{(1)} &= \operatorname{ctg}^{-1} \frac{2\omega \delta_{e3}(y_3^{(0)})}{\lambda_3^2 - \omega^2} - \xi \end{aligned} \right\} \quad (4.3.46)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} N &= \sqrt{L^2 + 4\lambda_3^2 G^2 \cos^2 \vartheta_2^{(0)}} \\ L &= \frac{Rc_0 r \sin(\beta - \alpha)}{J_1 + J_2} + 2\lambda_3 G \sin \vartheta_2^{(0)} \\ \xi &= \lg^{-1} \frac{2\lambda_3 G \cos \vartheta_2^{(0)}}{L} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.47)$$

从上式知, 当 $\vartheta_2^{(0)}$ 接近 90° 时, $N \approx L$, 即

$$\begin{aligned} N \approx L &= \frac{R}{J_1 + J_2} (c_1 r + c''_1 y_2^{(0)} \sin \vartheta_2^{(0)}) \sin(\beta - \alpha) - \\ &\quad \frac{y_2^{(0)} \sin \vartheta_2^{(0)}}{J_1 + J_2} \left(\frac{a'_1 - \lambda_2^2}{a'_2} + 1 \right) (c_1 l_1 - c_2 l_2) + \\ &\quad \frac{y_2^{(0)} (a'_1 - \lambda_2^2) \sin \vartheta_2^{(0)}}{a'_2 (J_1 + J_2)} (c_3 l_3 - c_4 l_4) \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

从上式知, N 与 $\beta - \alpha$, $c_1 l_1 - c_2 l_2$, $c_3 l_3 - c_4 l_4$ 分别成线性关系, 故可分别求出 $\beta - \alpha$, $c_1 l_1 - c_2 l_2$, $c_3 l_3 - c_4 l_4$ 对 N 的影响, 根据叠加原理, 考虑正负号后, 可求出质心连线及支承条件偏差对转动振动的影响。很明显, 如 $\beta = \alpha$, $c_1 l_1 = c_2 l_2$, $c_3 l_3 = c_4 l_4$, 则 $N = 0$, 此时不产生摇摆振动, 这些条件和 (4.3.6) 完全相同。另外, 如以上各项偏差不为 0, 调整其大小而使 $N = 0$, 也可消除摇摆振动, 我们称它是“条件平行振动”。

利用和上节同样的方法, 解的高次谐波为

$$\begin{aligned} q_1 = x_1 &= \left\{ y_2 - \frac{1}{4m_1 \lambda_2^2 \Delta_2'} \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \times \right. \\ &\quad \left[c_0 r (\mu \omega \cos \omega t + \sin \omega t) \frac{1}{\cos \varphi_2} + \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{4} B_1 + \frac{1}{4} D_1 \right] \right\} \cos \varphi_2 + \frac{1}{8m_1 \lambda_2^2 \Delta_2'} \times \\ &\quad \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \left[2A - \frac{1}{8} B_2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{8} D_2 + \frac{2C \sin 3\varphi_2}{\cos 3\varphi_2} - (I) \frac{2 \sin 3\varphi_2}{\cos 3\varphi_2} \right] \cos 3\varphi_2 + \\ &\quad \left\{ \frac{1}{m_1 \lambda_2^2 \Delta_2'} \left[\frac{k(a'_1 - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \left(\frac{1}{8} B_1 + \frac{1}{8} D_1 \right) \right\} \cos 5\varphi_2 + \cdots \end{aligned} \quad (4.3.49)$$

其中 B_1, B_2, D_1, D_2 为 (4.3.24) 中当 $n=1, 2$ 时对应的 B, D

$$(I) = \frac{\mu_2 c_2 y_2}{8a'_2 m_2 \Delta_2' \lambda_2} \left(\frac{a'_1 - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) (\lambda_2^2 - a'_1)$$

振动规律中含有明显的占比例相当大的高次谐波, 这是由于分段线性的非线性特性所引起, 在做动态响应分析时应加以考虑。

4.3.3 数值计算举例与实验结果的对比

为了验证以上所给的理论分析方法,进行了双质量共振筛振动特性试验研究^[46],对比后知,理论计算结果与实验结果是一致的。

在上节数据的基础上补充实验筛参数如下

$$s_1 = 89.4 \text{ cm}, \quad s_3 = 107.8 \text{ cm}$$

$$s_2 = 110.6 \text{ cm}, \quad s_4 = 92.2 \text{ cm}$$

$$J_1 = 0.637\,403 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad J_2 = 0.844\,347 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

对比以上结果,知计算结果与实验结果是一致的。

将以上参数代入(4.3.15)及(4.3.14),则得线性化系统的固有频率

$$n_1 = 259 \text{ rpm}, \quad n_2 = 874 \text{ rpm}, \quad n_3 = 361.39 \text{ rpm}$$

测试结果为(见图 4.6):

$$n_2 = 860 \text{ rpm}, \quad n_3 = 350 \text{ rpm}$$

利用计算值方程式(4.3.43)计算 $\vartheta_3^{(0)}$, 知在 $\frac{\omega}{\lambda_3}$ 在 1.4~2.0 的范围内, $\vartheta_3^{(0)}$ 的波动范围为 $0.93^\circ - 0.13^\circ = 0.8^\circ$, 如取 $\vartheta_3^{(0)}$ 的平均值为 88.53° , 并将之视为常量,可能造成的最大角度误差为 $\frac{0.4}{88.53} \approx 0.005$, 因此,可视 $\vartheta_3^{(0)}$ 为常数,而 $y_3^{(0)} = 0.000\,28 \sin(\beta - \alpha)$ 。

有了 $y_3^{(0)}$ 和 $\vartheta_3^{(0)}$ 后,可利用(4.3.44)计算 $y_2^{(0)}$, $\vartheta_2^{(0)}$, 为此应先计算 E , F , H , I , J , W 等参数,由(4.3.33)式

$$E = 0.007\,59[-33\,606.2 \sin(\beta - \alpha) + c_1 l_1 - c_2 l_2 + 1.010\,12(c_3 l_3 - c_4 l_4)] y_3^{(0)}$$

由上式知, E 与 $\beta - \alpha$, $l_1 - l_2$, $l_3 - l_4$ 和 $y_3^{(0)}$ 有关,如取 $|l_1 - l_2| = |l_3 - l_4|$, 则上式可写为

$$\begin{aligned} E &= -0.007\,59 \times 33\,606.2 \sin(\beta - \alpha) y_3^{(0)} - \\ &\quad 0.007\,59 \times 2.010\,12 |l_i - l_{i+1}| y_3^{(0)} \\ &= E_1 + E_2 \end{aligned}$$

其中

$$F = 0.044\,28 y_3^{(0)} \sin(\beta - \alpha)$$

根据制造和安装工艺达到的水平,取

$$\beta - \alpha = 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$$

$$s_{i+1} - s_i = 10 \text{ cm}, 20 \text{ cm}, 40 \text{ cm}, 60 \text{ cm}$$

下面列表进行计算,结果见表 4.3。

表 4.3

① $\beta-\alpha$	10°	15°	20°				
② $\sin (\beta-\alpha)$	0.173 6	0.258 8	0.342 0				
③ $y_3^{(0)}=0.002\ 8\times$ 上行	0.000 04	0.000 07	0.000 09				
④ $F=0.044\ 28\times$ ② \times ③ cm	0.000 000 3	0.000 000 8	0.000 001 4				
⑤ $E_2=0.007\ 59\times$ $33\ 606.2\times$ ② \times ③ cm	0.001 77	0.007 85	0.004 62				
⑥ $(s_{i+1}-s_i)$ cm				10	20	40	60
⑦ $E_1=5.674\ 6\times$ ⑥ \times ③ cm				0.002 3	0.004 6	0.009 2	0.013 8
⑧ $E_{10}=(E_1+E_2)$ cm	0.004 07	0.007 08	0.010 43				
E_{20} cm	0.006 43	0.009 38	0.012 74				
E_{40} cm	0.011 03	0.013 98	0.017 34				
E_{60} cm	0.015 63	0.018 58	0.021 94				

由(4.3.42)式 $H=-394.97$

由(4.3.45)式 $I\approx-394.97-182.945E$

$$J=-14.641\ 7+4.8495E$$

对应于不同的 $\beta-\alpha$ 和 $s_{i+1}-s_i$ 的计算值见表 4.4。

为了计算 $A_2^{(0)}-\omega$ 曲线,由(4.3.35)式得

$$\delta_{e2}(y_2)=0.508\ 88+1.271\ 27[\alpha-\mathcal{H}(\alpha,z)]$$

由(4.3.37)式得

$$p_{e2}(y_2)=91.5-41.726\ 1[0.744\ 88+\mathcal{H}(\beta,z)]$$

表 4.4

$\beta-\alpha$	10°			15°		
$s_{i+1}-s_i$ /cm	20	40	60	20	40	60
I	-396.146	-396.978	-397.829	-396.686	-397.527	-398.369
I^2	156 931.7	157 598.7	158 267.9	157 359.8	258 027.7	158 697.9
J	-14.610 5	-14.588 2	-14.565 9	-14.596 2	-14.573 9	-14.551 6
J^2	213.466	212.815	212.165	213.049	212.398	211.749

续表

$\beta-\alpha$	10°			15°		
$s_{i+1}-s_i/\text{cm}$	20	40	60	20	40	60
I^2+J^2	157 145	157 811	158 480	157 573	158 240	158 909
$W^{(0)}=\sqrt{I^2+J^2}$	396.4	397.2	398.10	397	397.8	398.6
$\beta-\alpha$	20°					
$s_{i+1}-s_i/\text{cm}$	20		40		60	
I	-397.3		-398.142		-398.983	
I^2	157 847.3		158 517		159 187.4	
J	-14.579 9		-14.557 6		-14.535 3	
J^2	212.573		211.923		211.274	
I^2+J^2	158 060		158 279		159 399	
$W^{(0)}=\sqrt{I^2+J^2}$	397.6		397.9		399.2	

系统参数不变时,对应不同的 $W^{(0)}$ 值,则可得到不同的共振曲线,下面给出其中的一组,以便于进行对比,见表 4.5。

表 4.5

z	A/cm	p_a/rpm	ω_1/rpm		ω_2/rpm	
			$\beta-\alpha=0$	$\beta-\alpha=10^\circ$	(I)	(II)
			$s_{i+1}-s_i=0(\text{I})$	$s_{i+1}-s_i=10(\text{II})$		
1.0	0.15	575	305	303.5	756	757.3
1.5	0.225	645	501	501.3	737	756.3
2.0	0.3	694	601	600.6	774	774.4
2.5	0.375	727	658	658.9	789	788.8
3.0	0.45	750	695	696.2	799	799.7
3.5	0.525	768	722	722.9	809	807.9
4.0	0.6	780	749	743.9	816	814.6
4.5	0.675	791	759	760.1	820	821.2
5.0	0.75	798	771	771.6	825	824.1
5.5	0.825	805	782	783	828	827.9
6.0	0.9	810	789	790.7	830	828.9
6.5	0.975	816	797	798.3	834	831.7

续表

z	A/cm	p_{e2}/rpm	ω_1/rpm		ω_2/rpm	
			$\beta-\alpha=0$ $s_{i+1}-s_i=0(\text{I})$	$\beta-\alpha=10^\circ$ $s_{i+1}-s_i=10(\text{II})$	(I)	(II)
7.0	1.05	821	804	805	835	833.6
7.5	1.125	823	809	810.7	836	834.6
8.0	1.20	824	814		837	
8.5	1.275	830	820	823.1	838	835.6
9.0	1.35	832	823	827	839	836.5
9.5	1.425	834	829		838	
10.0	1.5	836	836		836	

从上表可以看出,质心位置偏差及支承条件偏差将使共振曲线变瘦,这与实验研究^[36]的定性地一致,现给出实验研究的一组曲线如图 4.6。

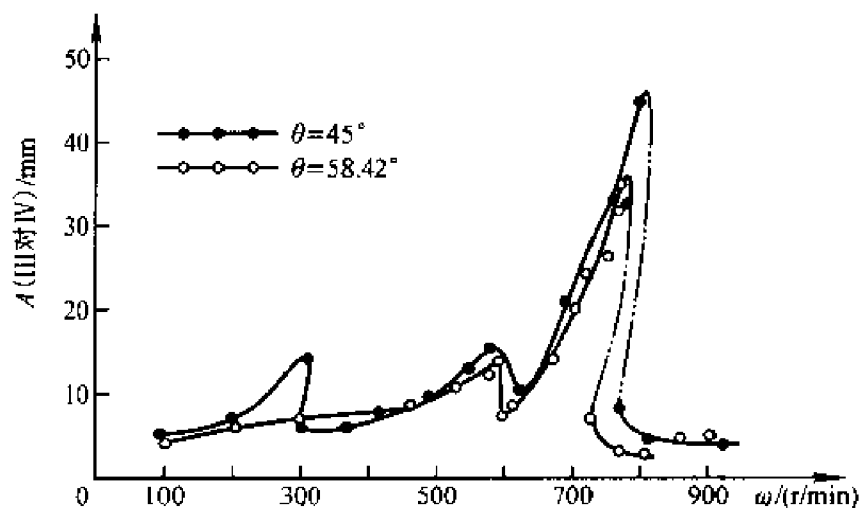


图 4.6

为了计算 A_3, ϑ_3 的第一次近似值,取 $\beta-\alpha=10^\circ, s_{i+1}-s_i=20\text{ cm}, \omega_{\text{工作}}=600\text{ rpm}, y_2^{(0)}=0.3\text{ cm}, \vartheta_2^{(0)}$ 计算值为

$$\vartheta_2^{(0)} = \text{ctg}^{-1} \frac{2\omega\delta_{e2}}{P_{e2}^2 - \omega_{\text{工作}}^2} + \text{tg}^{-1} \frac{J}{I} = 84^\circ 6'$$

将 $y_2^{(0)}, \vartheta_2^{(0)}$ 及 $\beta-\alpha=10^\circ, s_{i+1}-s_i=20\text{ cm}, \omega_{\text{工作}}=600\text{ rpm}$ 代入 (4.3.47) 式

$$N = \sqrt{L^2 + 4\lambda_3^2 G^2 \cos^2 \vartheta_2^{(0)}} = 1.05$$

而

$$L = 1.046\ 02$$

故知

$$N \approx L$$

计算 $y_3^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}$

$$y_3^{(1)} = \frac{N}{\sqrt{(\lambda_3^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \delta_{e3}^2}} = 0.00043 \text{ rad}$$

$$\vartheta_3^{(1)} = \text{ctg}^{-1} \frac{2\omega \delta_{e3}}{\lambda_3^2 - \omega^2} - \text{tg}^{-1} \frac{2\lambda_3 G \cos \vartheta_2^{(0)}}{L} = 83^\circ 10'$$

将 $y_3^{(1)}$ 和 $\vartheta_3^{(1)}$ 代入 (4.3.44), 则共振曲线的数据与表 4.5(I) 几乎完全相同, 故此处不再列出。与以上相同步骤, 在 $\omega_{\text{作}} = 600 \text{ rpm}$ 时

$$\vartheta_2^{(1)} = 84^\circ 6'$$

$$y_2^{(1)} = 0.3 \text{ cm}$$

和

$$y_3^{(2)} = \frac{1.0507}{2515} = 0.00043 \text{ rad}$$

$$\vartheta_3^{(2)} = 88^\circ 32' - 5^\circ 33' = 82^\circ 59'$$

比较 $A_3^{(1)}$ 与 $A_3^{(2)}$; $\vartheta_3^{(1)}$ 与 $\vartheta_3^{(2)}$; $y_2^{(0)}$ 与 $y_2^{(1)}$; $\vartheta_2^{(0)}$ 与 $\vartheta_2^{(1)}$ 知, 第二次近似值与第一次近似值基本相同, 故知, 所使用的迭代渐近法收敛是很快的。

质心位置偏差、支承条件影响的计算

系统参数同上式, 设 $\beta - \alpha = 0$, $\Delta s = s_{i+1} - s_i = 20, 40, 60 \text{ cm}$, 则对应的 $N = 0.30029, 0.60059, 0.90098$; 而对应的 $A_3 = 0.00011, 0.00023, 0.00035 \text{ rad}$; 将此数据画成线性, 如图 4.7。

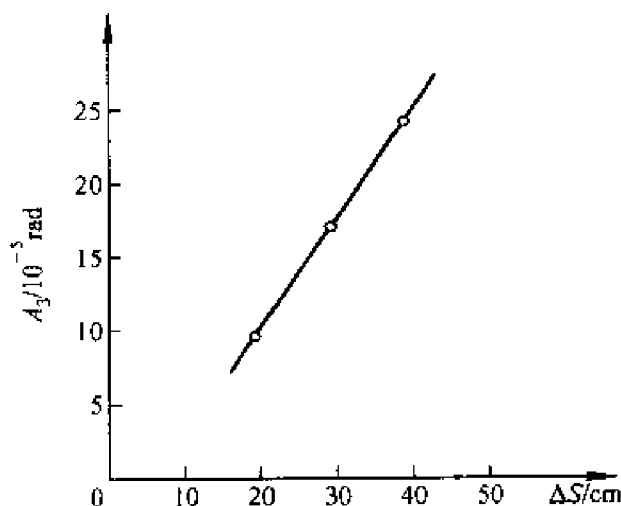


图 4.7

从上图知, A_3 与 ΔS 成直线关系, 如 $s_{i+1} - s_i$ 一定, 即支承点距离偏差一定, 则由式 (4.3.38) 可证明, A_3 与 C 即摇动振幅与支承簧动刚度成线性关系。

如设 $\Delta S = 0$, 而 $\beta - \alpha = 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$, 则对应的 $N = 0.75, 1.12, 1.478$. 而对应的 $A_3 = 0.00029, 0.00044, 0.00058 \text{ (rad)}$, 其 $A_3 - (\beta - \alpha)$ 关系见图 4.8。

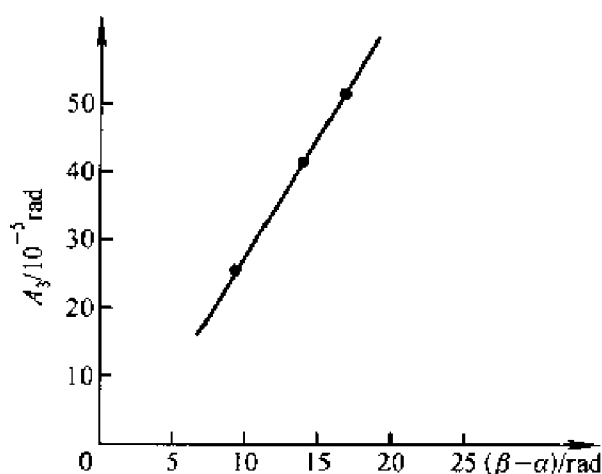


图 4.8

当系统的基本参数确定后,可将以上两组直线作出,如实际存在着几种偏差,则可从以上两组曲线查得对应的 A_3 , 考虑其正负号,然后进行叠加。应该指出,为了使 N 为零,即为了使共振筛不发生摇摆振动,也可在它们存在偏差的条件下,调整(4.3.48)式中各项的符号,以使 $N=0$ 。我们称这类平移振动为条件平行振动,在现场实验研究中^[38],我们就是用这种方法来消除摇摆振动的,并达到了预期的效果。

§ 4.4 具有任意个准循环坐标非线性系统的概周期解

如果一个函数 $f(t)$ 满足下列条件:

无论正数 ϵ 怎样小,总可找出正数 $L=L(\epsilon)$,使得在每个长为 L 的区间内,至少有一个 $\tau(\epsilon)$,满足不等式

$$|f(t+\tau)-f(t)|<\epsilon, \quad (\forall t \in \mathbf{R})$$

则函数 $f(t)$ 称为概周期函数, $\tau(\epsilon)$ 称为 $f(t)$ 的概周期。可以看出概周期不是一个确定的数,而是一个数集。

如函数 $\sum_{i=1}^n a_i \cos \omega_i t$, 当 ω_i 之间不可公约时(n 为有限的数),该和式即为概周期函数。

一个非线性系统受到周期干扰力的作用,在一定的条件下,将作稳定的周期振动,同样,一个系统受到概周期干扰力的作用,在一定条件下,也将作稳定的概周期振动。现在研究非线性系统的概周期振动,该非线性系统中除 x_1, x_2, \dots, x_n 等 n 个未知函数外,还有描述旋转运动的角坐标 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_v$, 当小参数为零时角坐标是时间的线性函数,这种角坐标称为

准循环坐标。如具有动偏心质量的转子是大型旋转轴自动平衡的结构之一,它的振动由具有准循环坐标的非线性方程组来描述^[22],在研究线性,非线性,参数及其他振动系统与有限功率发动机的相互影响时,也遇到了具有一个准循环坐标的非线性方程组^[19],其他当研究激振器的同步问题,研究装在同一基础上或相互联系的基础上的数个旋转机器的同步问题时,都遇到了与上述方程类型相同的振动问题,这样的系统也可称为具有多个非理想动力的多自由度系统,因此研究具有准循环坐标的拟线性方程组的渐近解是有广泛意义的。

4.4.1 化成标准形式

设已知具有准循环坐标的非线性方程组为

$$\frac{d^2 \varphi_p}{dt^2} = \varepsilon \phi_p \left(t, x_1, \dots, x_n, \varphi_1, \dots, \varphi_v, \frac{d\varphi_1}{dt}, \dots, \frac{d\varphi_v}{dt}, \varepsilon \right) \quad (4.4.1)$$

($p=1, \dots, v$)

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} = & \sum_{\beta=1}^n a_{s\beta} x_\beta + f_s \left(t, \varphi_1, \dots, \varphi_v, \frac{d\varphi_1}{dt}, \dots, \frac{d\varphi_v}{dt} \right) + \\ & \varepsilon F_s^* \left(t, x_1, \dots, x_n, \varphi_1, \dots, \varphi_v, \frac{d\varphi_1}{dt}, \dots, \frac{d\varphi_v}{dt}, \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

($s=1, \dots, n$)

其中 φ 为准循环坐标, x 为振动位移, ε 为小参数, a 为常系数, ϕ, F^* 和 f 是时间 t 的概周期函数和变量 φ 的以 2π 为周期的周期函数以及 x 与 $\dot{\varphi}$ 的多项式,并且是 ε 的解析函数。

函数 ϕ_p, f_s, F_s^* 的广义傅氏级数

$$\left. \begin{aligned} & \phi_p(t, x, \varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon) \\ &= \phi_{p0}(x, \dot{\varphi}, \varepsilon) + \sum_{\sigma} [\phi_{p\sigma}(x, \dot{\varphi}, \varepsilon) \cos \bar{\alpha}_{\sigma} + \\ & \quad \phi'_{p\sigma}(x, \dot{\varphi}, \varepsilon) \sin \bar{\alpha}_{\sigma}] \\ & f_s(t, \varphi, \dot{\varphi}) = f_{s0}(\dot{\varphi}) + \sum_{\sigma} [f_{s\sigma}(\dot{\varphi}) \cos \bar{\alpha}_{\sigma} + \\ & \quad f'_{s\sigma}(\dot{\varphi}) \sin \bar{\alpha}_{\sigma}] \\ & F_s^*(t, x, \varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon) \\ &= F_{s0}^*(x, \dot{\varphi}, \varepsilon) + \sum_{\sigma} [F_{s\sigma}^*(x, \dot{\varphi}, \varepsilon) \cos \bar{\alpha}_{\sigma} + \\ & \quad F'_{s\sigma}^*(x, \dot{\varphi}, \varepsilon) \sin \bar{\alpha}_{\sigma}] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.3)$$

其中 $\bar{\sigma}$ 是有限数, $\phi_{p\sigma}, \phi'_{p\sigma}, F_{s\sigma}^*$ 和 $F'_{s\sigma}^*$ 均为 x 和 $\dot{\varphi}$ 的多项式、 ε 的解析函数,而 $f_{s\sigma}$ 和 $f'_{s\sigma}$ 为 $\dot{\varphi}$ 的多项式。

$$\bar{\alpha}_v = \omega_v t + l_1^{(v)} \varphi_1 + \cdots + l_v^{(v)} \varphi_v \quad (4.4.4)$$

其中 $\omega_1, \cdots, \omega_v$ 是相互不可公约的任意有限的数; $l_v^{(v)}$ 为整数。

为求系统的定常解, 取变换

$$\varphi_p = \Omega_p t + C_p + \epsilon W_p(t, x, \Omega, C, \epsilon) \quad (4.4.5)$$

其中 Ω_p 和 C_p 是在下面运算过程中确定的常数, 而 $W_p(t, x, \Omega, C, \epsilon)$ 是时间 t 的概周期函数, 其平均值应等于零。

把(4.4.5)代入(4.4.2), 得到

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} x_\beta + f_i(t, \Omega t + C, \Omega) + \epsilon F_i(t, x, \Omega t + C, \Omega, W, \dot{W}, \epsilon) \quad (4.4.6)$$

其中

$$\begin{aligned} F_i = & \sum_{j=1}^v \left[\frac{\partial f_i}{\partial \varphi_j} W_j(t) \right]_{\varphi_j = n_j t + C_j} + \sum_{j=1}^v \left[\frac{\partial f_i}{\partial \dot{\varphi}_j} \dot{W}_j(t) \right]_{\varphi_j = n_j t + C_j} + \\ & F_i^*(t, x_1, \cdots, x_n, \Omega_1 t + C_1, \Omega_2 t + \\ & C_2, \Omega_1, \cdots, \Omega_v, W_1, \cdots, W_v, \dot{W}_1, \cdots, \dot{W}_v, \epsilon) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

方程(4.4.6)的派生系统是

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} x_\beta + f_i(t, \Omega t + C, \Omega) \quad (4.4.8)$$

设在方程组(4.4.8)中, 其齐次部分的特征方程只有纯虚根 $i\lambda_1, \cdots, \pm i\lambda_q \left(q = \frac{n}{2} \right)$, 并且它们只对应简单的初等因子。如果函数 $f_i(t, \Omega t + C, \Omega)$ 满足概周期性条件^[9]。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{i=1}^n f_i(t, \Omega t + C, \Omega) \psi_j(\lambda_i t) dt = 0 \quad (4.4.9)$$

$$(j=1, \cdots, n)$$

则方程(4.4.8)将有概周期特解 x_i^* 。在(4.4.9)中, 当 $j=q+1, q+2, \cdots, n$ 时, 函数 $\psi_q(\lambda_j t)$ 对应着函数 $\psi_q^*(\lambda_1 t)$, 而在 $\psi_q(\lambda_1 t)$ 中, 则有 $j=1, 2, \cdots, q$ 。

取新变量 $A_1(t), \cdots, A_q(t), \theta_1(t), \cdots, \theta_q(t)$ 后, 采用变换

$$x_i = \sum_{i=1}^q A_i(t) \varphi_{ii}(\theta_i) + x_i^* \quad (4.4.10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ii}(\theta_i) &= P_{ii} \cos \theta_i - Q_{ii} \sin \theta_i \\ \varphi_{ii}^*(\theta_i) &= P_{ii} \sin \theta_i + Q_{ii} \cos \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (4.4.11)$$

当 $\frac{d\theta_i}{dt} = \lambda_i$ 和 A_i 为常数时, (4.4.10)便是方程(4.4.8)的通解, $P_{ii},$

Q_i 是实常数。

适当选择方程(4.4.8)齐次部分共轭方程的特解 $\phi_j(\lambda_j t)$ 与 $\phi_j^*(\lambda_j t)$, 经过和 § 4.1 中相同的运算之后, 可得方程组(4.4.1), (4.4.2)的标准形式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_p}{dt^2} &= \phi_p(\omega_1 t, \dots, \omega_p t, A_1, \dots, A_q, \theta_1, \dots, \theta_q, \\ &\quad \Omega_1 t + C_1, \Omega_2 t + C_2, \Omega_1, \dots, \Omega_v, W_1, \dots, W_v, \\ &\quad \dot{W}_1, \dots, \dot{W}_v, \epsilon) \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Lambda_i}{dt} &= \epsilon R_i(\omega_1 t, \dots, \omega_p t, A_1, \dots, A_q, \theta_1, \dots, \theta_q, \\ &\quad \Omega_1 t + C_1, \Omega_2 t + C_2, \Omega_1, \dots, \Omega_v, \dot{W}_1, \dots, \dot{W}_v, \epsilon) \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= \lambda_i + \epsilon S_i(\omega_1 t, \dots, \omega_p t, A_1, \dots, A_q, \theta_1, \dots, \theta_q, \\ &\quad \Omega_1 t + C_1, \dots, \Omega_v t + C_v, \Omega_1, \dots, \Omega_v, W_1, \dots, W_v, \\ &\quad \dot{W}_1, \dots, \dot{W}_v, \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R_i &= \sum_{s=1}^n F_i(t, A, \theta, \Omega + C, \Omega, W, \dot{W}, \epsilon) \phi_{si}^*(\theta_i) \\ S_i &= \frac{1}{A} \sum_{s=1}^n F_i(t, A, \theta, \Omega + C, \Omega, W, \dot{W}, \epsilon) \phi_{si}(\theta_i) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.14)$$

从式(4.4.12), (4.4.13)和(4.4.14)可以看出, ϕ_p, R_i, S_i 是时间 t 的概周期函数和变量 θ, φ 的以 2π 为周期的周期函数。

当 $\epsilon=0$ 时, ϕ_p, R_i 和 S_i 的广义傅氏级数为

$$\left. \begin{aligned} &\phi_p(t, A, \theta, \Omega t + C, \Omega, 0) \\ &= \phi_{p0}(A, \Omega) + \sum_{\sigma} [\phi_{p\sigma}(A, \Omega) \cos \alpha_{\sigma} + \phi'_{p\sigma}(A, \Omega) \sin \alpha_{\sigma}] \\ &R_i(t, A, \theta, \Omega t + C, \Omega, 0) \\ &= R_{i0}(A, \Omega) + \sum_{\sigma} [R_{i\sigma}(A, \Omega) \cos \alpha_{\sigma} + R'_{i\sigma}(A, \Omega) \sin \alpha_{\sigma}] \\ &S_i(t, A, \theta, \Omega t + C, \Omega, 0) \\ &= S_{i0}(A, \Omega) + \sum_{\sigma} [S_{i\sigma}(A, \Omega) \cos \alpha_{\sigma} + S'_{i\sigma}(A, \Omega) \sin \alpha_{\sigma}] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.15)$$

其中 σ 为有限的整数;

$$\alpha_\sigma = m_1^\sigma \theta_1 + \cdots + m_q^\sigma \theta_q + (n_1^\sigma \omega_1 + \cdots + n_p^\sigma \omega_p + l_1^\sigma \Omega_1 + \cdots + l_v^\sigma \Omega_v)t + \sum_{\rho=1}^v l_\rho^\sigma C_\rho \quad (4.4.16)$$

m, n 和 l 是正的或负的整数; 系数 $\phi_{\rho\sigma}$ 和 $\phi'_{\rho\sigma}$ 如下式所示

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\rho\sigma} &= \frac{2\omega_1 \cdots \omega_p \Omega_1 \cdots \Omega_v}{(2\pi)^{p+q+v}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}_q \underbrace{\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_1}} \cdots \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_v}}}_{v} \underbrace{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdots \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_p}}}_p \\ &\quad \left\{ \phi_\rho(t, A, \theta, \Omega t + C, \Omega, 0) \cos \left[m_1^\sigma \theta_1 + \cdots + m_q^\sigma \theta_q + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. n_1^\sigma \omega_1 t + \cdots + n_p^\sigma \omega_p t + (l_1^\sigma \Omega_1 + \cdots + l_v^\sigma \Omega_v)t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{\rho=1}^v l_\rho^\sigma C_\rho \right] dt_1 \cdots dt_p d(t+C_1) \cdots d(t+C_v) d\theta_1 \cdots d\theta_q \right\} \\ \phi'_{\rho\sigma} &= \frac{2\omega_1 \cdots \omega_p \Omega_1 \cdots \Omega_v}{(2\pi)^{p+q+v}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}_q \underbrace{\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_1}} \cdots \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_v}}}_{v} \underbrace{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdots \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_p}}}_p \\ &\quad \left\{ \phi_\rho(t, A, \theta, \Omega t + C, \Omega, 0) \sin \left[m_1^\sigma \theta_1 + \cdots + m_q^\sigma \theta_q + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. n_1^\sigma \omega_1 t + \cdots + n_p^\sigma \omega_p t + (l_1^\sigma \Omega_1 + \cdots + l_v^\sigma \Omega_v)t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{\rho=1}^v l_\rho^\sigma C_\rho \right] dt_1 \cdots dt_p d(t+C_1) \cdots d(t+C_v) d\theta_1 \cdots d\theta_q \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.17)$$

同理可以写出函数 $R_i(t, A, \theta, \Omega t + C, \Omega, 0)$ 和 $S_i(t, A, \theta, \Omega t + C, \Omega, 0)$ 的广义傅氏级数的系数。

4.4.2 共振情况

若派生系统的固有频率 $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$, 干扰力 $\omega_1, \cdots, \omega_p$ 和准循环频率 $\Omega_1, \cdots, \Omega_p, \cdots, \Omega_v$ 满足 r 个共振关系

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon &= m_1^\varepsilon \lambda_1 + \cdots + m_q^\varepsilon \lambda_q + n_1^\varepsilon \omega_1 + \cdots + n_p^\varepsilon \omega_p + \\ &\quad l_1^\varepsilon \Omega_1 + \cdots + l_v^\varepsilon \Omega_v = 0 \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

$$(\varepsilon = 1, \cdots, r; r \leq q)$$

其中 m, n 和 l 绝对值的总和不超过某一数值, 该数值的大小与原始方程中非线性函数有关。

在(4.4.18)的某几个式子中也可能不包括所有的 λ_i , 但至少有一个 m_i 不为零。若所有的 n_1, \cdots, n_p 都为零, 将有自治系统。在自治系统中, 如要求 $\Omega_1 = \Omega_2 = \cdots = \Omega_v$, 则为概周期状态下的自同步问题。在共振关系(4.4.18)中, 也可能 $n_1, \cdots, n_p, l_1, \cdots, l_v$ 都等于零, 当系统的固有频率之

间存在着线性关系时,就会出现这种所谓内共振的情形。

对标准方程(4.4.12)和(4.4.13)采用 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} A_i &= y_i + \varepsilon U_i(t, y_1, \dots, y_q, \vartheta_1, \dots, \vartheta_q, \Omega_1 t + C_1, \dots, \Omega_v t + \\ &\quad C_v, \Omega_1, \dots, \Omega_v) \\ \vartheta_i &= \lambda_i t + \vartheta_i + \varepsilon V_i(t, y_1, \dots, y_q, \vartheta_1, \dots, \vartheta_q, \Omega_1 t + C_1, \dots, \Omega_v t + \\ &\quad C_v, \Omega_1, \dots, \Omega_v) \\ &\quad (i=1, 2, \dots, q) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.19)$$

并要求新变量 y_i, ϑ_i 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \varepsilon Y_i(y, \vartheta, \Omega, C) + \varepsilon^2 Y_i^*(t, y, \vartheta, \Omega t + C, \Omega, W, \varepsilon) \\ \frac{d\vartheta_i}{dt} &= \varepsilon Z_i(y, \vartheta, \Omega, C) + \varepsilon^2 Z_i^*(t, y, \vartheta, \Omega t + C, \Omega, W, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.20)$$

将(4.4.19)代入(4.4.12)和(4.4.13),并考虑(4.4.20),令 ε 一次方的系数相等,则

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 W_p}{dt^2} &= \phi_{ps}(y, \Omega) + \sum_s [\phi_{ps}(y, \Omega) \cos \alpha_s^0 + \phi'_{ps}(y, \Omega) \sin \alpha_s^0] \\ Y_i + \frac{\partial U_i}{\partial t} &= R_{is}(y, \Omega) + \sum_s [R_{is}(y, \Omega) \cos \alpha_s^0 + R'_{is}(y, \Omega) \sin \alpha_s^0] \\ Z_i + \frac{\partial V_i}{\partial t} &= S_{is}(y, \Omega) + \sum_s [S_{is}(y, \Omega) \cos \alpha_s^0 + S'_{is}(y, \Omega) \sin \alpha_s^0] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.21)$$

其中

$$\alpha_s^0 = (m_1^s \lambda_1 + \dots + m_q^s \lambda_q + n_1^s \omega_1 + \dots + n_p^s \omega_p + l_1^s \Omega_1 + \dots + l_v^s \Omega_v) t + \sum_{i=1}^q m_i^s \vartheta_i + \sum_{p=1}^v l_p^s C_p \quad (4.4.22)$$

其中 Y_i, Z_i 不显含 t, U_i, V_i, Y_i^* 和 Z_i^* 是时间 t 的概周期函数、变量 ϑ_i 及 φ_p 的以 2π 为周期的周期函数。

考虑到共振关系(4.4.18),上式中某些量 α_s^0 将与时间无关,很显然,对这些与时间无关的量 α_s^0 来说,在式(4.4.22)的圆括号中的表达式应是共振关系(4.4.18)的线性组合,即

$$\sum_{i=1}^q m_i^s \lambda_i + \sum_{\omega=1}^p n_{\omega}^s \omega_{\omega} + \sum_{p=1}^v l_p^s \Omega_p = \sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^s \Delta_{\epsilon} \quad (4.4.23)$$

其中 S_{ϵ}^s 是正的或负的整数。

引入符号

$$\chi_\varepsilon = \sum_{i=1}^q m_i^* \vartheta_i, \quad \Lambda_\varepsilon = \sum_{p=1}^v l_p^* C_p \quad (4.4.24)$$

并称 χ_ε 为非循环坐标, Λ_ε 为准循环相位的线性组合。若和时间无关的 α_σ^0 的数目为 N , 并设 $\delta=1, \dots, N$, 则得

$$\alpha_\sigma^0 = \sum_{\varepsilon=1}^r S_\varepsilon^* \chi_\varepsilon + \sum_{\varepsilon=1}^r S_\varepsilon^* \Lambda_\varepsilon \quad (4.4.25)$$

在共振情况下, 为了使 Y_i, Z_i 不显含 $t, W(t, y, \vartheta, \Omega, C)$ 的平均值为零, 应设

$$\begin{aligned} \phi_p = \phi_{p0}(y, \Omega) + \sum_{\sigma=1}^N \left\{ \phi_{p\sigma}(y, \Omega) \cos \left[\sum_{\varepsilon=1}^r S_\varepsilon^* (\chi_\varepsilon + \Lambda_\varepsilon) \right] + \right. \\ \left. \phi'_{p\sigma}(y, \Omega) \sin \left[\sum_{\varepsilon=1}^r S_\varepsilon^* (\chi_\varepsilon + \Lambda_\varepsilon) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

和

$$\begin{aligned} Y_i = R_{i0}(y, \Omega) + \sum_{\sigma=1}^N \left\{ R_{i\sigma}(y, \Omega) \cos \left[\sum_{\varepsilon=1}^r S_\varepsilon^* (\chi_\varepsilon + \Lambda_\varepsilon) \right] + \right. \\ \left. R'_{i\sigma}(y, \Omega) \sin \left[\sum_{\varepsilon=1}^r S_\varepsilon^* (\chi_\varepsilon + \Lambda_\varepsilon) \right] \right\} \\ Z_i = S_{i0}(y, \Omega) + \sum_{\sigma=1}^N \left\{ S_{i\sigma}(y, \Omega) \cos \left[\sum_{\varepsilon=1}^r S_\varepsilon^* (\chi_\varepsilon + \Lambda_\varepsilon) \right] + \right. \\ \left. S'_{i\sigma}(y, \Omega) \sin \left[\sum_{\varepsilon=1}^r S_\varepsilon^* (\chi_\varepsilon + \Lambda_\varepsilon) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

将(4.4.26), (4.4.27)代入(4.4.21), 则

$$\begin{aligned} W_p = \sum_{\sigma \geq N} \frac{-[\phi_{p\sigma}(y, \Omega) \cos \alpha_\sigma^0 + \phi'_{p\sigma}(y, \Omega) \sin \alpha_\sigma^0]}{(m_1^* \lambda_1 + \dots + m_q^* \lambda_q + n_1^* \omega_1 + \dots + n_p^* \omega_p + l_1^* \Omega_1 + \dots + l_v^* \Omega_v)} \\ U_i = \sum_{\sigma \geq N} \frac{R_{i\sigma}(y, \Omega) \sin \alpha_\sigma^0 - R'_{i\sigma}(y, \Omega) \cos \alpha_\sigma^0}{(m_1^* \lambda_1 + \dots + m_q^* \lambda_q + n_1^* \omega_1 + \dots + n_p^* \omega_p + l_1^* \Omega_1 + \dots + l_v^* \Omega_v)} \\ V_i = \sum_{\sigma \geq N} \frac{S_{i\sigma}(y, \Omega) \sin \alpha_\sigma^0 - S'_{i\sigma}(y, \Omega) \cos \alpha_\sigma^0}{(m_1^* \lambda_1 + \dots + m_q^* \lambda_q + n_1^* \omega_1 + \dots + n_p^* \omega_p + l_1^* \Omega_1 + \dots + l_v^* \Omega_v)} \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

将函数 χ_ε 对 t 微分, 并将表达式(4.4.20)代入, 可得到非循环坐标的导数为

$$\frac{d\chi_\varepsilon}{dt} = \varepsilon \sum_{i=1}^q m_i^* Z_i + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^q m_i^* Z_i^* \quad (4.4.29)$$

在式(4.4.20)中, 丢掉 ε^2 以上的项, 可得第一次近似方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \varepsilon Y_i(y, \Omega, \chi, \Lambda) \\ \frac{d\chi_\varepsilon}{dt} &= \varepsilon \sum_{i=1}^q m_i^\varepsilon Z_i(y, \Omega, \chi, \Lambda) = \varepsilon Z^\varepsilon(y, \Omega, \chi, \Lambda) \\ (i &= 1, \dots, q; \varepsilon = 1, \dots, r) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.30)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_i}{dt} &= \varepsilon Z_i(y, \Omega, \chi, \Lambda) \\ (i &= 1, \dots, q) \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

令方程组(4.4.30)的右端等于零,再考虑(4.4.26),从 $q+v+r$ 个代数方程中,可得定常解

$$\left. \begin{aligned} \Omega_p &= \Omega_p^0, \quad y_i = y_i^0, \quad \chi_\varepsilon = \chi_\varepsilon^0 \\ \vartheta_i &= \varepsilon Z_i(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)t + \varepsilon_i \\ (p &= 1, \dots, v; i = 1, \dots, q; \varepsilon = 1, \dots, r) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.32)$$

从上式可以看出,定常解与准循环相位 C_1, \dots, C_v 是有关系的,即不同的准循环相位对应着不同的定常解。

q 个常数 ε_i 应满足

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon^0 &= \sum_{i=1}^q m_i^\varepsilon \varepsilon_i \\ (\varepsilon &= 1, \dots, r) \end{aligned} \quad (4.4.33)$$

所以 q 个常数 ε_i 中,只有 $q-r$ 个是任意的。

为了研究定常解(4.4.23)的稳定性,根据实际需要,对解 y_i^0, ϑ_i^0 和 $\frac{d\varphi_p^0}{dt}$ 建立扰动方程。把扰动量

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_p}{dt} - \frac{d\varphi_p^0}{dt} &= \beta_p, \quad y_i - y_i^0 = \alpha_i \\ \chi_\varepsilon - \chi_\varepsilon^0 &= \delta \end{aligned} \right\} \quad (4.4.34)$$

代入方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_p}{dt^2} &= \varepsilon \left\{ \phi_p(y, \Omega, \chi, \Lambda) + \sum_{\sigma \in N} [\phi_{p\sigma}(y, \Omega) \cos \alpha_\sigma + \right. \\ &\quad \left. \phi_{p\sigma}(y, \Omega) \sin \alpha_\sigma] \right\} \\ \frac{dy_i}{dt} &= \varepsilon Y_i(y, \Omega, \chi, \Lambda) \\ \frac{d\chi_\varepsilon}{dt} &= \varepsilon Z^\varepsilon(y, \Omega, \chi, \Lambda) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.35)$$

则扰动方程为

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_i}{dt} &= \varepsilon \left\{ \sum_{j=1}^q \frac{\partial Y_i(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial y_j^0} \alpha_j + \right. \\
&\quad \sum_{p=1}^v \frac{\partial Y_i(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial \Omega_p^0} \beta_p + \\
&\quad \left. \sum_{\epsilon=1}^r \frac{\partial Y_i(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial \chi_\epsilon^0} \delta_\epsilon + \rho_i(\alpha, \beta, \delta) \right\} \\
\frac{d\delta_\epsilon}{dt} &= \varepsilon \left\{ \sum_{j=1}^q \frac{\partial Z^\epsilon(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial y_j^0} \alpha_j + \right. \\
&\quad \sum_{p=1}^v \frac{\partial Z^\epsilon(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial \chi_\epsilon^0} \delta_\epsilon + \\
&\quad \left. \sum_{p=1}^v \frac{\partial Z^\epsilon(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial \Omega_p^0} \beta_p + \rho(\alpha, \beta, \delta) \right\} \\
\frac{d\beta_p}{dt} &= \varepsilon \left[\sum_{j=1}^q \frac{\partial \phi_p(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial y_j^0} \alpha_j + \right. \\
&\quad \sum_{p=1}^v \frac{\partial \phi_p(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial \Omega_p^0} \beta_p + \\
&\quad \left. \sum_{p=1}^r \frac{\partial \phi_p(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial \chi_\epsilon^0} \delta_\epsilon + \rho_p^{(1)}(\alpha, \beta, \delta) \right] + \\
&\quad \sum_{\alpha \geq N} \left\{ \left[\sum_j \frac{\partial \phi_{ps}(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial y_j^0} \alpha_j + \right. \right. \\
&\quad \sum_p \frac{\partial \phi_{ps}(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial \Omega_p^0} \beta_p + \\
&\quad \left. \sum_\epsilon \frac{\partial \phi_{ps}(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial \chi_\epsilon^0} \delta_\epsilon \right] \cos \alpha_s^0 + \\
&\quad \left[\sum_j \frac{\partial \phi'_{ps}(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial y_j^0} \alpha_j + \right. \\
&\quad \sum_p \frac{\partial \phi'_{ps}(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial \Omega_p^0} \beta_p + \\
&\quad \left. \sum_\epsilon \frac{\partial \phi_{ps}(y^0, \Omega^0, \chi^0, \Lambda)}{\partial \chi_\epsilon^0} + \delta_\epsilon \right] \sin \alpha_s^0 + \\
&\quad \left. \psi_p(t, \alpha, \beta, \delta) \right\} + \varepsilon^2 \{ \dots \} + \dots
\end{aligned} \tag{4.4.36}$$

其中 $\psi_p(t, \alpha, \beta, \delta)$ 是时间 t 的概周期函数及 α, β 和 δ 的解析函数。

α_s^0 如式(4.4.22)所示。

将方程组(4.4.36)的右边加以平均, 则受扰动方程为

一般情况和非共振情况下的渐近解,可参照 § 4.1 的方法来求,此处不再叙述了。

习 题

4.1 考虑如图 E4.1 所示无弹簧的双摆,其运动方程为

$$\ddot{\theta}_1 + g l_1^{-1} \sin \theta_1 + \alpha \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \alpha \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 + g l_2^{-1} \sin \theta_2 + l_1 l_2^{-1} \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + l_1 l_2^{-1} \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

式中 $\alpha = m_2 l_2 l_1^{-1} (m_1 + m_2)^{-1}$ 。

- 确定线性系统的固有频率,并求出使原系统产生 3:1 内共振的系统参数。
- 确定小振幅情况下的近似解(考虑内共振情况)。

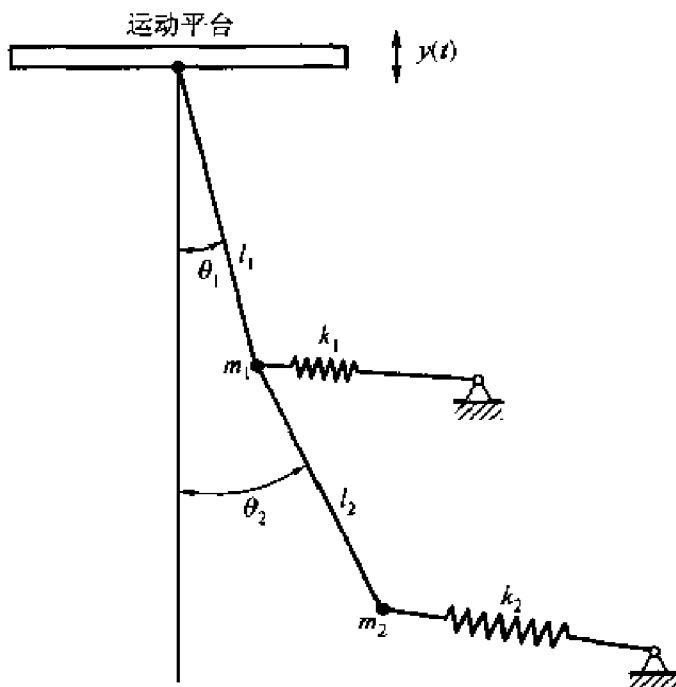


图 E4.1

4.2 质点 m_1 固定于杆长为 l 可在垂直面内自由转动的轻质刚性杆上,如图 E4.2 所示。一质量为 m_2 的珠子在弹簧的作用下可沿光滑直杆滑动。

- 给出运动方程为

$$\dot{u} + \omega_1^2 u - u \dot{\theta}^2 + \omega_2^2 (1 - \cos \theta) = \omega_2^2 u_e$$

$$(1 + mu^2) \ddot{\theta} + (1 + mu) \omega_2^2 \sin \theta + 2mu \dot{u} \dot{\theta} = 0$$

式中 $\omega_1^2 = \frac{k}{m_2}$, $\omega_2^2 = \frac{g}{l}$, $m = \frac{m_2}{m_1}$, $u = \frac{x}{l}$, 且 u_e 是平衡位置。

- 当 $\omega_1 \approx 2\omega_2$ 时,确定一阶近似解。

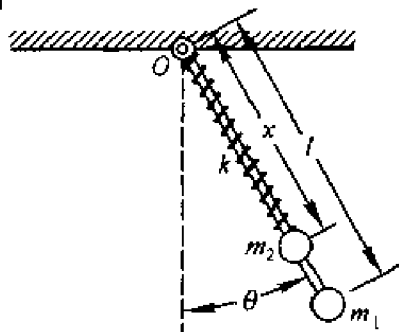


图 E4.2

(c) 对于一阶近似,判断是否存在其他的共振形式。

4.3 如图 E4.3 所示,一刚性梁被弹性系数为 k_1 和 k_2 的两弹簧支撑,系统被固定在垂直面内,中心 G 只能垂直移动。

(a) 给出运动方程

$$mx + (k_1 + k_2)x + (k_1 l_1 - k_2 l_2) \sin \theta = -mg$$

$$I\ddot{\theta} + (k_1 l_1 - k_2 l_2)x \cos \theta + \frac{1}{2}(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \sin 2\theta = 0$$

式中 I 是梁的转动惯量, m 是它的质量。

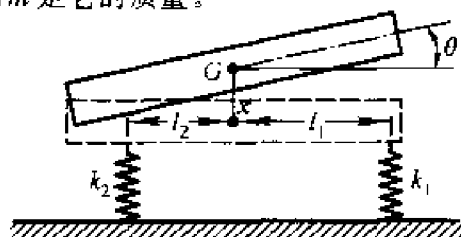


图 E4.3

(b) 确定线性系统的频率和所有可能的共振。

(c) 对于包含模态耦合的有界小振幅情况,确定一阶近似解。

4.4 考虑下面形式的系统

$$m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1^n + \alpha_1 (u_1 - u_2)^n = 0$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + k_2 u_2^n - \alpha_1 (u_1 - u_2)^n = 0$$

式中 n 为奇数。

(a) 证明该系统有与 $u_1 = cu_2$ 相关的解,式中常数 c 由下式确定。

$$m_2 [k_1 c^n + \alpha_1 (c-1)^n] = m_1 c [k_2 - \alpha_1 (c-1)^n]$$

(b) 证明 u_2 可由

$$\ddot{u}_2 + [k_2 - \alpha_1 (c-1)^n] m_2^{-1} u_2^n = 0$$

求出。找到该方程的四次精确解并写出 u_1 。

4.5 如图 E4.4 所示,圆柱体在圆形表面做纯滚动

(a) 忽略滑块与地面之间的摩擦,给出运动方程

$$\ddot{u} + m\ddot{\theta} \cos \theta - m\dot{\theta}^2 \sin \theta + \omega_0^2 u = f(t)$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta + \frac{2}{3} \ddot{u} \cos \theta = 0$$

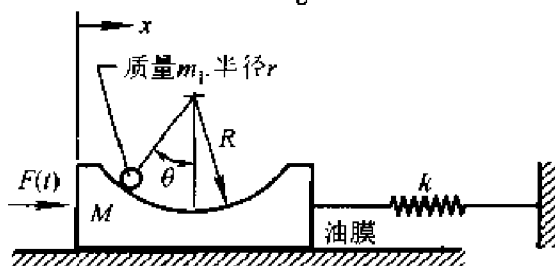


图 E4.4

式中 $u = \frac{x}{R-r}$, $\omega_1^2 = \frac{k}{m_1+M}$, $\omega_2^2 = \frac{2}{3} \frac{k}{R-r}$, $m = \frac{m_1}{m_1+M}$, 和 $f(t) = \frac{F(t)}{(R-r)(m_1+M)}$ 。

(b) 考虑粘性影响(假设摩擦力具有 $-c\dot{x}$ 的形式), 写出系统的运动方程

(c) 当 $\omega_1 \approx 3\omega_2$ 时, 证明一阶内共振发生。

(d) 如果 $f(t) = \sum_{n=1}^3 K_n \cos(\Omega_n t + \theta_n)$, 当只有下面的共振存在时, 确定稳态振动和存在粘性影响的稳定性。

(i) $\Omega_1 \approx \omega_1$

(ii) $\Omega_1 \approx 3\omega_1$

(iii) $\Omega_1 \approx \frac{1}{3}\omega_1$

(iv) $\Omega_1 \approx \omega_2$ 和 $\omega_1 \approx 3\omega_2$

(v) $\Omega_1 \approx 3\omega_2$ 和 $\omega_1 \approx 3\omega_2$

(vi) $\Omega_1 \approx \frac{1}{3}\omega_2$ 和 $\omega_1 \approx 3\omega_2$

(vii) $\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 \approx \omega_1$

(viii) $\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 \approx \omega_1$ 和 $\omega_1 \approx 3\omega_2$

(ix) $\Omega_1 - \Omega_2 \approx \omega_1 + \omega_2$

(x) $\Omega_1 + \Omega_2 \approx \omega_1 + \omega_2$ 和 $\omega_1 \approx 3\omega_2$

(xi) $\Omega_1 + \Omega_2 \approx 2\omega_1$ 和 $\omega_1 \approx 3\omega_2$

(xii) $\Omega_1 + \Omega_2 \approx 2\omega_1$, $\omega_2 \approx \frac{1}{3}\Omega_2$, 和 $\omega_1 \approx 3\omega_2$

4.6 图 E4.5 所示系统包含有两个质点 m_1 和 m_2 的可伸长金属丝, 质点只能在可伸长的位置运动

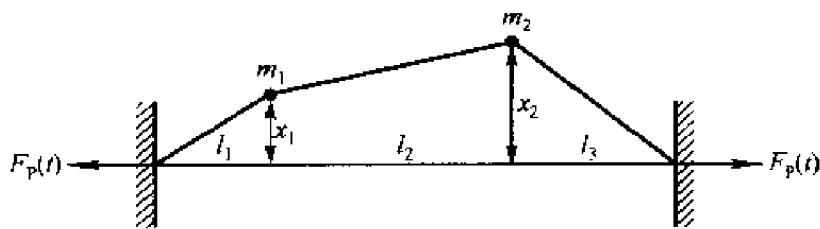


图 E4.5

(a) 给出运动方程为

$$m_1 \ddot{x}_1 + F_p x_1 (l_1^2 + x_1^2)^{-\frac{1}{2}} + F_p (x_1 - x_2) [l_2^2 + (x_2 - x_1)^2]^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - F_p x_2 (l_3^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} + F_p (x_2 - x_1) [l_2^2 + (x_2 - x_1)^2]^{-\frac{1}{2}} = 0$$

(b) 当 $F_p = F_{p_0} = \text{const}$, 确定频率 ω_1 和 ω_2 , 并确定系统参数使之可产生内共振。

(c) 确定有界小振幅下的一阶近似解(考虑内共振情况 $F_p = F_{p_0} = \text{const}$)。

(d) 当 $F_p = F_{p_0} (1 + \epsilon \cos \Omega t)$ 和 $x_n = O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$, 对于下列情况确定一阶近似解

(i) $\Omega_1 \approx 2\omega_1$ 无内共振。

(ii) $\Omega_1 \approx \omega_2 - \omega_1$ 无内共振。

(iii) $\Omega \approx \omega_2 - \omega_1$ 和 $\omega_2 \approx 3\omega_1$

4.7 两自由度受迫系统方程为

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x &= -4\cos 2t + \epsilon \left[\frac{4}{3}\dot{y} - (1-x^2)\dot{x} \right] \\ \ddot{y} + \frac{1}{4}y &= 5\cos 2t + \frac{4}{3}\epsilon [(1-x^2)\dot{x} - \dot{y}]\end{aligned}$$

对 $\epsilon \ll 1$, 确定一阶近似解, 判断其稳态运动。

4.8 考虑三自由度系统的受迫振动, 基本方程为

$$\begin{aligned}u_1 + \omega_1^2 u_1 &= -2\epsilon\mu_1 \dot{u}_1 - \alpha_1 u_1 u_3 - \frac{1}{2}\alpha_2 u_1 \ddot{u}_3 - 2K_1 \cos \Omega t \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 &= -2\epsilon\mu_2 \dot{u}_2 - \alpha_2 u_2 u_3 - \frac{1}{2}\alpha_2 u_2 \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_3 + \omega_3^2 u_3 &= -2\epsilon\mu_3 \dot{u}_3 - \frac{1}{2}\alpha_1 (u_1^2 + u_2^2) - \frac{1}{2}\alpha_2 \frac{d}{dt}(u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2) + 2K_3 \cos \Omega t\end{aligned}$$

其中 $\omega_2 = \omega_1$, $\omega_3 = 2\omega_1 + \epsilon\sigma$, $\Omega = \omega_1 + \epsilon\sigma$, s 为整数。

- (a) 当 $s=3$, 确定一阶近似的稳态运动。发生饱和现象吗?
 (b) 当 $s=1$, 确定描述长时间行为的方程。
 (c) 是否对于所有的参数都存在稳态周期解?

4.9 三自由度系统强迫振动方程为

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 &= -2\epsilon\mu_1 \dot{u}_1 + \epsilon u_2 u_3 + 2\epsilon k_1 \cos \Omega t \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 &= -2\epsilon\mu_2 \dot{u}_2 + \epsilon u_1 u_3 + 2\epsilon k_2 \cos \Omega t \\ \ddot{u}_3 + \omega_3^2 u_3 &= -2\epsilon\mu_3 \dot{u}_3 + \epsilon u_1 u_2 + 2\epsilon k_3 \cos \Omega t\end{aligned}$$

其中对于某些 n , $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 + \epsilon\sigma$, $\Omega = \omega_n + \epsilon\sigma_n$ 。

- (a) 当 $n=3$, 确定运动的长时间行为。 a_3 饱和吗?
 (b) 当 $n=1$, 确定描述长时间行为的方程。

4.10 圆盘振动稳定性问题可简化为

$$\begin{aligned}\ddot{u} + u + 8\epsilon(u^3 + uv^2) &= 2\epsilon k \cos \omega t \\ \ddot{v} + v + 8\epsilon(v^3 + u^2 v) &= 0\end{aligned}$$

给定

$$\begin{aligned}u &= a \cos(t + \alpha) + O(\epsilon) \\ v &= b \cos(t + \beta) + O(\epsilon)\end{aligned}$$

其中 $\epsilon\sigma = \omega - 1$, 和

$$\begin{aligned}a' &= -ab^2 \sin \gamma + k \sin v \\ aa' &= 3a^3 + 2ab^2 + ab^2 \cos \gamma - k \cos v \\ b' &= a^2 b \sin \gamma \\ bb' &= 3b^3 + 2a^2 b + a^2 b \cos \gamma \\ \gamma &= 2\beta - 2\alpha, \quad v = \sigma T_1 - \alpha\end{aligned}$$

- (a) 对于稳态运动, 证明或是 $b=0, a \neq 0$, 或是 $b \neq 0, a \neq 0$ 。
 (b) 当 $b=0$, 和 $a \neq 0$ 或 $b \neq 0 \neq a$, 证明频率 响应方程为

$$\sigma = 3a' - \frac{k}{a} \cos v, \quad v = 0 \text{ 或 } \pi$$

并证明当 $v=0$ 时, $a > a_A = \left(\frac{1}{2}k\right)^{\frac{1}{3}}$, 或当 $v=\pi$ 时, 对 $a > a_C$ 该响应是不稳定的。

(c) 当 $b \neq 0$, 证明稳态解是由 $\gamma=\pi$ 和以下方程决定。

$$\sigma = 4a^2 - \frac{3k}{2a} \cos v$$

$$b^2 = a^2 - \frac{k}{2a} \cos v$$

其中 $v=0$ 或 π 。证明当 $a > a_A, v=0$, 或 $a_E < a \leq a_D = \left(\frac{3}{16}k\right)^{\frac{1}{3}}, v=\pi$ 时, 该系统的解是稳定的。其中 $a_E \approx 0.564k^{\frac{1}{3}}$ 。

第五章 带有慢变参数的 非线性系统

建立高速大功率的动力机械、工作机械以及设计陀螺仪系统时,提出了减轻重量和简化结构的任务,因此,必须考虑在振动过程中所发生的一切现象并进行精确的计算,在干扰力变频情况下通过共振区的非定常过程的研究,乃是振动理论的重要课题之一。其他如从一个定常过程转移到另一个定常过程,振动系统的质量、刚度、干扰力振幅、频率等参数随时间发生变化时,都将发生非定常过程;系统解的三要素都随时间而变化,这样的解称为非定常解,很明显它不是周期性的。

当发生非定常过程时,在结构中往往发生应力瞬时超过其平均值的现象,这种与非定常过程有关的瞬时超载现象重复多次,也可能引起某些结构部件的破坏,与非定常过程有关也可能发生某些奇异的振动现象。因此研究非定常振动过程乃是现代技术和物理科学中十分迫切而有意义的工作。

米特罗波尔斯基在克雷洛夫—包戈留包夫渐近法的基础上,建立了求具有慢变系数的非线性振动方程的非定常解的方法^[16]。米特罗波尔斯基详细研究了一个自由度系统和多自由度系统单频的非定常过程的解,并假定单频振动具有永远稳定的性质,他的解法是十分有效的。米特罗波尔斯基的方法建立的时间虽然不长,但已经有了广泛的应用,如哥劳包夫(Гробов В. А.)用这个方法研究了具有陀螺效应的转子振动的非定常过程,卡纳宁柯研究了非理想系统的非定常过程,本书作者研究了具有任意个准循环坐标的多自由度系统的非定常解等等。

本章介绍具有慢变参数的非线性系统非定常解的建立方法。

§ 5.1 一个自由度系统非定常解的渐近法

在很多情况下,具有慢变系数的一个自由度非线性系统的非定常过程由下列方程来描述:

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right] + c(\tau)x = \epsilon F\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (5.1.1)$$

其中 t 是时间; x 为线位移、扭转角或电流; $m(\tau)$ 为振动质量、转动惯量或自感系数; $c(\tau)$ 为刚度或电容的倒数; θ 为干扰力的相位角 ($\frac{d\theta}{dt} = \nu(t)$ 是干扰力的瞬时频率); $\tau = \epsilon t$, ϵ 为小参数; $m(\tau)$, $c(\tau)$ 和 $\nu(\tau)$ 是慢变时间 τ 的函数, 即对时间 t 的导数与 ϵ 成比例

$$\frac{dm(\tau)}{dt} = \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \epsilon \frac{dm(\tau)}{d\tau} \quad (5.1.2)$$

$m(\tau)$, $c(\tau)$ 在所研究的时间区间上是正的; $F(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt})$ 是 θ 的以 2π 为周期的周期函数; $m(\tau)$, $c(\tau)$, $\theta(\tau)$, F 和 $\nu(\tau)$ 在所研究的 $0 < \tau < L$ 上, 关于 τ 存在足够高阶的导数 (但在关于 $x, \frac{dx}{dt}$ 不可微的某些情况下, 仍可构造渐近解, 例如恢复力为分段线性)。

在方程 (5.1.1) 中, 设 $\epsilon = 0$, 并认为 τ 是与 t 无关的参数, 则

$$m(\tau) \frac{d^2 x}{dt^2} + c(\tau) x = 0 \quad (5.1.3)$$

其解为

$$x = a(\tau) \cos[\omega(\tau)t + \varphi(\tau)] \quad (5.1.4)$$

其中 $a(\tau)$, $\varphi(\tau)$ 是由起始条件所确定的常数

$$\omega(\tau) = \sqrt{\frac{c(\tau)}{m(\tau)}}$$

很显然, 在 (5.1.3) 和 (5.1.4) 中, 设 $\tau = \epsilon t$ 后, 则 (5.1.4) 只能近似地满足 (5.1.3), 其精度与 ϵ 的一次方成比例。

在 (5.1.1) 中, 如设 τ 为常参数, 当 $\epsilon \neq 0$ 时为具有常系数的非线性方程式, 如 § 1.1 中所指出的, 在非线形系统中, 振幅、频率都是时间 t 的函数, 振动周期与振幅互相影响, 出现高次谐波等。在 $\tau = \epsilon t$ 的情况下, 除了以上特点外, $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{c(\tau)}{m(\tau)}}$ 也是慢变的; 干扰力频率 $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ 与时间有关, 且这个因素对振幅变化的影响很大等等。

在我们所研究的系统中, 当有外干扰力时, 共振关系取

$$s\nu - r\omega = 0 \quad (5.1.5)$$

其中 s, r 为正的或负的互质的整数。

根据渐近法, (5.1.1) 式的解可取为

$$x = a \cos(s\varphi + \psi) + \epsilon U_1(\tau, \theta, a, s\varphi + \psi) + \epsilon^2 U_2(\tau, \theta, a, s\varphi + \psi) + \dots \quad (5.1.6)$$

其中 U_1, U_2 是 $\theta, s\varphi + \psi$ 的以 2π 为周期的周期函数; a, ψ 是时间的函数, 应满足下列方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \epsilon A_1(\tau, a, \psi) + \epsilon^2 A_2(\tau, a, \psi) + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{s}{r} \nu(\tau) + \epsilon B_1(\tau, a, \psi) + \\ &\quad \epsilon^2 B_2(\tau, a, \psi) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.1.7)$$

其中 $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots$ 与 θ 无关; 差值 $\omega(\tau) - \frac{s}{r} \nu(\tau)$ 可为任意值, 如差值为零, 则得共振情况 $\phi = \frac{s}{r} \theta = s\varphi$ 。

在确定了函数 A, B 和 U 后, 就相当于利用变换 (5.1.6) 把方程 (5.1.1) 变成简单的方程组 (5.1.7) 了。现利用 (5.1.7) 来确定 $\frac{d^2 a}{dt^2}, \frac{d^2 \psi}{dt^2}$, 且只考虑 ϵ 的一次项。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= \epsilon \left(\epsilon \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\partial A_1}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial A_1}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} \right) + \epsilon^2 \{ \dots \} + \dots \\ &= \epsilon \left[\left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} \right] + \epsilon^2 \{ \dots \} + \dots \\ \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= \epsilon \frac{d\omega}{d\tau} - \epsilon \frac{s}{r} \frac{d\nu}{d\tau} + \epsilon \left(\epsilon \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{\partial B_1}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial B_1}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} \right) + \epsilon^2 \{ \dots \} + \dots \\ &= \epsilon \left[\frac{d\omega}{d\tau} - \frac{s}{r} \frac{d\nu}{d\tau} + \left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \frac{\partial B_1}{\partial \psi} \right] + \epsilon^2 \{ \dots \} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.1.8)$$

微分 (5.1.6), 并只考虑 ϵ 的一次项, 则得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} \cos(s\varphi + \psi) - a \left(\frac{s}{r} \nu + \frac{d\psi}{dt} \right) \times \sin(s\varphi + \psi) + \\ &\quad \epsilon \left[\epsilon \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \nu + \frac{\partial U_1}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial U_1}{\partial (s\varphi + \psi)} \frac{d(s\varphi + \psi)}{dt} \right] + \epsilon^2 \dots \\ &= -\omega a \sin(s\varphi + \psi) + \epsilon \left[-a B_1 \sin(s\varphi + \psi) + \right. \\ &\quad \left. A_1 \cos(s\varphi + \psi) + \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \nu + \frac{\partial U_1}{\partial (s\varphi + \psi)} \omega \right] + \epsilon^2 \dots \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -a \omega^2 \cos(s\varphi + \psi) + \epsilon \left\{ \left[-2a \omega B_1 + a \left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} \right] \right. \\ &\quad \left. \cos(s\varphi + \psi) - \left[2A_1 \omega + a \left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \frac{\partial B_1}{\partial \psi} + a \frac{d\omega}{d\tau} \right] \right. \\ &\quad \left. \sin(s\varphi + \psi) + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} \nu^2 + \frac{2\partial^2 U_1}{\partial \theta \partial (s\varphi + \psi)} \omega \nu + \frac{\partial^2 U_1}{\partial (s\varphi + \psi)^2} \omega^2 \right\} + \epsilon^2 \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.1.9)$$

把(5.1.6)和(5.1.9)代入(5.1.1)的左端,整理后只留 ϵ 的一次项

$$\begin{aligned}
 & m \frac{d^2 x}{dt^2} + \epsilon \frac{dx}{dt} \frac{dm}{d\tau} + cx \\
 &= \epsilon \left\{ m \left[\left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} - 2a\omega B_1 \right] \cos(s\varphi + \psi) - \right. \\
 & \quad m \left[a \left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \frac{\partial B_1}{\partial \psi} + 2A_1 \omega \right] \sin(s\varphi + \psi) - \\
 & \quad a \frac{d(m\omega)}{d\tau} \sin(s\varphi + \psi) + \\
 & \quad m \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} \nu^2 + \frac{2\partial^2 U_1 \nu \omega}{\partial \theta \partial (s\varphi + \psi)} + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{\partial^2 U_1}{\partial (s\varphi + \psi)^2} \omega^2 + \omega^2 U_1 \right] \right\} + \epsilon^2 \dots \quad (5.1.10)
 \end{aligned}$$

把(5.1.6)和(5.1.9)代入(5.1.1)的右端,并对 ϵ 展成泰勒级数

$$\begin{aligned}
 \epsilon F \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right) &= \epsilon F_0 \left[\tau, \theta, a \cos(s\varphi + \psi), \right. \\
 & \quad \left. - a\omega \sin(s\varphi + \psi) \right] + \epsilon^2 \dots \\
 &= \epsilon F_0(\tau, \theta, a, s\varphi + \psi) + \epsilon^2 \dots \quad (5.1.11)
 \end{aligned}$$

很显然, F_0 是 θ 和 $s\varphi + \psi$ 的以 2π 为周期的周期函数。

为了使(5.1.6)满足方程(5.1.1),应使(5.1.10)和(5.1.11)中 ϵ 同阶的系数相等

$$\begin{aligned}
 & m \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} \nu^2 + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta \partial (s\varphi + \psi)} \omega \nu + \right. \\
 & \quad \left. \frac{\partial^2 U_1}{\partial (s\varphi + \psi)^2} \omega^2 + \omega^2 U_1 \right] \\
 &= F_0(\tau, \theta, a, s\varphi + \psi) - \\
 & \quad m \left[\left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} - 2B_1 a \omega \right] \cos(s\varphi + \psi) + \\
 & \quad m \left[a \left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \frac{\partial B_1}{\partial \psi} + 2A_1 \omega \right] \sin(s\varphi + \psi) + \\
 & \quad a \frac{d(m\omega)}{d\tau} \sin(s\varphi + \psi) \quad (5.1.12)
 \end{aligned}$$

下面利用等式两端同次谐波的系数相等来确定函数 U_1, A_1 和 B_1 。

因 F_0 是 θ 和 $s\varphi + \psi$ 以 2π 为周期的周期函数,故其傅氏级数可表为

$$\begin{aligned}
 & F_0(\tau, \theta, a, s\varphi + \psi) \\
 &= \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} F_{0m,n} e^{i[n\theta + m(s\varphi + \psi)]} \quad (5.1.13)
 \end{aligned}$$

其中

$$F_{0m,n}(\tau, a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\tau, \theta, a, s\varphi + \psi) e^{[n\theta + m(s\varphi + \psi)]} d\theta d(s\varphi + \psi) \quad (5.1.14)$$

同理 $U_1(\tau, a, \theta, s\varphi + \psi)$ 也可表为傅氏级数

$$U_1(\tau, a, \theta, s\varphi + \psi) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} g_{mn} e^{[n\theta + m(s\varphi + \psi)]} \quad (5.1.15)$$

其中 g_{mn} 为待定系数。

将(5.1.13)和(5.1.15)代入(5.1.12),得

$$\begin{aligned} m(\tau) \sum_{m,n} [-n^2 \nu^2 - 2mn\omega\nu - m^2 \omega^2 + \\ \omega^2] g_{mn} e^{[n\theta + m(s\varphi + \psi)]} = \sum_{m,n} F_{0m,n} e^{[n\theta + m(s\varphi + \psi)]} \times \\ m(\tau) \left[\left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} - 2a\omega B_1 \right] \times \\ \cos(s\varphi + \psi) + m(\tau) \left[a \left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \frac{\partial B_1}{\partial \psi} - 2\omega A_1 \right] \times \\ \sin(s\varphi + \psi) + a \frac{d[m(\tau)\omega]}{d\tau} \sin(s\varphi + \psi) \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

令上式中同次谐波的系数相等,则

$$g_{m,n} = \frac{F_{0m,n}}{m(\tau) [\omega^2 - (m\omega + n\nu)^2]} \quad (5.1.17)$$

因 U_1 应为 $\theta, s\varphi + \psi$ 的以 2π 为周期的周期函数,所以式(5.1.16)的分母不应等于零。

当(5.1.16)的分母等于零时,有

$$\omega + m\omega + n\nu = 0$$

$$m\omega - \omega + n\nu = 0$$

将 $\omega = \frac{s}{r} \nu$ 代入上式,则(5.1.16)分母不为零的条件应为

$$nr + (m \pm 1)s \neq 0 \quad (5.1.18)$$

上式相当于

$$n\nu + m\omega \neq \pm \omega = \pm \frac{s}{r} \nu$$

上式即证明了 U_1 中不应含有 $s\varphi + \psi$ 的一阶谐波。反之,如含有 $s\varphi + \psi$ 的

一阶谐波, 则必满足

$$n\nu + (m \pm 1)\omega = 0$$

当 m, n 满足式(5.1.18)时, 则

$$U_1 = \sum_{m, n} \frac{F_{0m, n}}{m(\tau)[\omega^2 - (m\omega + n\nu)^2]} e^{j[n\theta - 1 - m(s\varphi + \psi)]} \quad (5.1.19)$$

在(5.1.16)中, 因 U_1 不含 $s\varphi + \psi$ 项, 故其右端 $\cos(s\varphi + \psi)$ 和 $\sin(s\varphi + \psi)$ 的系数应等于零。现将 F_0 中 $\cos(s\varphi + \psi)$, $\sin(s\varphi + \psi)$ 项写出来, 因

$$\begin{aligned} & e^{j[n\theta - m(s\varphi + \psi)]} \\ &= e^{j[n\theta + (m \pm 1)s\varphi + s\varphi - \psi \pm \psi - m\psi]} = e^{j[\mp(s\varphi + \psi) + (m \pm 1)\psi]} \\ &= e^{j\sigma r \psi} [\cos(s\varphi + \psi) \mp i \sin(s\varphi + \psi)] \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

其中

$$\sigma r = m \pm 1$$

故

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \sum_{m, n} e^{j[n\theta - m(s\varphi + \psi)]} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-j[n\theta + m(s\varphi + \psi)]} d\theta d(s\varphi + \psi) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{j\sigma r \psi} [\cos(s\varphi + \psi) \mp i \sin(s\varphi + \psi)] \times \\ & \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-j\sigma r \psi} [\cos(s\varphi + \psi) \pm \\ & \quad i \sin(s\varphi + \psi)] d\theta d(s\varphi + \psi) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{j\sigma r \psi} [\cos(s\varphi + \psi) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-j\sigma r \psi} \times \\ & \quad [\cos(s\varphi + \psi) + i \sin(s\varphi + \psi)] d\theta d(s\varphi + \psi) + \\ & \quad \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{j\sigma r \psi} \cos(s\varphi + \psi) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-j\sigma r \psi} \times \\ & \quad [\cos(s\varphi + \psi) - i \sin(s\varphi + \psi)] d\theta d(s\varphi + \psi) - \\ & \quad \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{j\sigma r \psi} i \sin(s\varphi + \psi) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-j\sigma r \psi} \times \\ & \quad [\cos(s\varphi + \psi) + i \sin(s\varphi + \psi)] d\theta d(s\varphi + \psi) + \\ & \quad \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{j\sigma r \psi} i \sin(s\varphi + \psi) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-j\sigma r \psi} \times \\ & \quad [\cos(s\varphi + \psi) - i \sin(s\varphi + \psi)] d\theta d(s\varphi + \psi) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{j\sigma r \psi} \cos(s\varphi + \psi) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-j\sigma r \psi} \times \\ & \quad \cos(s\varphi + \psi) d\theta d(s\varphi + \psi) + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma r\psi} \sin(s\varphi + \psi) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-i\sigma r\psi} \times \\ \sin(s\varphi + \psi) d\theta d(s\varphi + \psi) \quad (5.1.21)$$

考虑(5.1.21)后,令(5.1.16)右端 $\cos(s\varphi + \psi)$ 的系数为零得

$$\left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} - 2a\omega B_1 \\ = \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma r\psi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-i\sigma r\psi} \times \\ \cos(s\varphi + \psi) d\theta d(s\varphi + \psi) \\ = \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma r\psi} D_1 \quad (5.1.22)$$

其中

$$D_1 = \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-i\sigma r\psi} \times \\ \cos(s\varphi + \psi) d\theta d(s\varphi + \psi) \quad (5.1.23)$$

令(5.1.16)的右端 $\sin(s\varphi + \psi)$ 的系数为零得

$$a \left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \frac{\partial B_1}{\partial \psi} + 2\omega A_1 \\ = -\frac{a}{m(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega]}{d\tau} - \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \times \\ \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma r\psi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 \sin(s\varphi + \psi) e^{-i\sigma r\psi} d\theta d(s\varphi + \psi) \\ = -\frac{a}{m(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega]}{d\tau} - \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma r\psi} D_2 \quad (5.1.24)$$

其中

$$D_2 = \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-i\sigma r\psi} \sin(s\varphi + \psi) d\theta d(s\varphi + \psi) \quad (5.1.25)$$

在(5.1.22)~(5.1.25)中,在求 $A_1(\tau, a, \psi)$, $B_1(\tau, a, \psi)$ 时,因为仅对 ψ 求积,故 τ, a 可认为是常数, D_1, D_2 为傅氏级数的系数故也为常数。

将(5.1.22)对 ψ 求导,两端乘以 $\left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right)$ 后,从(5.1.24)式将

$\left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \psi}$ 代入,则

$$\left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right)^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \psi^2} + 4\omega^2 A_1$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} i\sigma r D_1 \left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) e^{i\sigma r \psi} - \\
&2\omega \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma r \psi} D_2 - \frac{2a\omega}{m(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega]}{d\tau}
\end{aligned} \quad (5.1.26)$$

上式对 A_1 来说是线性非齐次方程式,其对应于常数项的特解为

$$A_1 = -\frac{a}{2\omega m(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega]}{d\tau} \quad (5.1.27)$$

对应于含 ψ 的项,设

$$A_1 = \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} K_{\sigma} e^{i\sigma r \psi}$$

将之代入(5.1.26),则

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma} K_{\sigma} \sigma^2 r^2 \left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right)^2 e^{i\sigma r \psi} + \sum_{\sigma} K_{\sigma} 4\omega^2 e^{i\sigma r \psi} \\
&= \sum_{\sigma} e^{i\sigma r \psi} \left[\left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) i\sigma r D_1 - 2\omega D_2 \right]
\end{aligned}$$

对任意的 σ , 则

$$K_{\sigma} = \frac{i\sigma(\omega r - s\nu)D_1 - 2\omega D_2}{4\omega^2 - (\omega r - s\nu)^2 \sigma^2} \quad (5.1.28)$$

故

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{a}{2\omega m(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega]}{d\tau} + \\
&\sum_{\sigma} \frac{[(i\sigma\omega r - s\nu)D_1 - 2\omega D_2]}{4\omega^2 - (\omega r - s\nu)^2 \sigma^2} e^{i\sigma r \psi}
\end{aligned} \quad (5.1.29)$$

把上式代入(5.1.24),积分则得

$$B_1 = \frac{-1}{a} \sum_{\sigma} \frac{[(\omega r - s\nu)i\sigma D_2 + 2\omega D_1]}{4\omega^2 - (\omega r - s\nu)^2 \sigma^2} e^{i\sigma r \psi} \quad (5.1.30)$$

求得了 A_1, B_1 和 U_1 后,则改善的第一次近似解为

$$x = a \cos(s\varphi + \psi) + \varepsilon U_1(\tau, a, \theta, s\varphi + \psi) \quad (5.1.31)$$

其中 a, ψ 由下式确定

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \psi) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - \frac{s}{r} \nu + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi) \end{aligned} \right\} \quad (5.1.32)$$

如在(5.1.31)中,如不考虑 U_1 , 则得到第一次近似解。

继续求解过程可求得其高次近似解。

所得到的第一次或高次近似方程,一般不能得到显式的解析解,即不能直接积分为封闭形式。因此,对之或是定性地进行研究,或是用数值积分以得到定量的解。应该指出,对(5.1.32)作数值积分,并不需计算很多点,因其中的变量为振幅和相位这样的缓变函数。

在以上的演算过程中,如设 τ 为常参数,则所介绍的方法可用来求一个自由度非线性系统的受迫振动。

§ 5.2 求非定常解的平均法

现在讨论对应用来说较为方便的平均法。和常系数振动方程一样,对慢变系数的微分方程,也是先将振动方程化成标准形式,再采用KB变换,用平均法确定 ϵ 的系数,具有慢变参数的振动方程为

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+c(\tau)x=\epsilon F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)$$

或

$$m(\tau)\frac{d^2x}{dt^2}+c(\tau)x=\epsilon\left[F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)-\frac{dm}{d\tau}\frac{dx}{dt}\right] \quad (5.2.1)$$

在(5.2.1)中,设 $\epsilon=0$,并认为 τ 是与 t 无关的参数,则其解为

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \phi \\ \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (5.2.2)$$

其中 $\omega(\tau)=\sqrt{\frac{c(\tau)}{m(\tau)}}$, $\phi=\omega t+\psi$, a,ψ 为由起始条件确定的常数。

当 $\epsilon\neq 0$ 和 $\tau=\epsilon t$ 时, a,ϕ 将为 t 的函数,现以 a,ϕ 作为新变量,以(5.2.2)作为变量变换。

微分(5.2.2)的第一式,并与其第二式比较,则

$$\frac{da}{dt}\cos\phi - a\left(\frac{d\phi}{dt}-\omega\right)\sin\phi=0 \quad (5.2.3)$$

微分(5.2.2)的第二式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{da}{dt}\omega\sin\phi - \epsilon a\frac{d\omega}{d\tau}\sin\phi - a\omega\frac{d\phi}{dt}\cos\phi \quad (5.2.4)$$

把 $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ 代入(5.2.1),则

$$-m\frac{da}{dt}\omega\sin\phi - ma\left(\frac{d\phi}{dt}-\omega\right)\omega\cos\phi$$

$$= \epsilon \left[F(\tau, \theta, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) - \frac{dm}{d\tau} \frac{dx}{dt} + ma \frac{d\omega}{d\tau} \sin \phi \right] \quad (5.2.5)$$

从(5.2.3)和(5.2.5)可解出 $\frac{da}{dt}, \frac{d\phi}{dt}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\epsilon}{m\omega} \left(F - \frac{dm}{d\tau} \frac{dx}{dt} + ma \frac{d\omega}{d\tau} \sin \phi \right) \sin \phi \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega - \frac{\epsilon}{ma\omega} \left(F - \frac{dm}{d\tau} \frac{dx}{dt} + ma \frac{d\omega}{d\tau} \sin \phi \right) \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (5.2.6)$$

上式中括号里的函数可写为

$$\begin{aligned} F - \frac{dm}{d\tau} \frac{dx}{dt} + a \frac{d\omega}{d\tau} \sin \phi &= F(\tau, \theta, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) + \\ &+ a\omega \frac{dm}{d\tau} \sin \phi + am \frac{d\omega}{d\tau} \sin \phi \\ &= F(\tau, \theta, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) + a \frac{d(m\omega)}{d\tau} \sin \phi \\ &= F^*(\tau, \theta, a, \phi) \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

其中 $a \frac{d(m\omega)}{d\tau} \sin \phi$ 是由于慢变函数引起的附加项。

在共振情况下,取 $\omega - \frac{s}{r}\nu = \epsilon\sigma(\tau)$, 对(5.2.6)采用 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} a &= A + \epsilon U(\tau, \theta, A, s\varphi + \psi) \\ \phi &= s\varphi + \vartheta + \epsilon V(\tau, \theta, A, s\varphi + \psi) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.8)$$

并要求新变量 A, ϑ 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \epsilon Y_1(\tau, A, \vartheta) + \epsilon^2 Y^*(\tau, \theta, A, s\varphi + \vartheta, \epsilon) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{s}{r}\nu + \epsilon Z_1(\tau, A, \vartheta) + \epsilon^2 Z^*(\tau, \theta, A, s\varphi + \vartheta, \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.9)$$

其中 $\varphi = \frac{1}{r}\theta, \frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ 为外干扰力瞬时频率, U, V, Y^* 和 Z^* 为 $\theta, s\varphi + \vartheta$

的以 2π 为周期的周期函数, Y_1, Z_1 不显含 t 。

把(5.2.8)代入(5.2.6),并考虑式(5.2.9),则

$$\begin{aligned} \epsilon Y_1 + \epsilon^2 Y^* + \epsilon \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \epsilon + \frac{\partial U}{\partial \theta} \nu + \frac{\partial V}{\partial A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} \right) \\ = -\epsilon \frac{F^*}{m\omega} \sin[(s\varphi + \vartheta) + \epsilon V] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon Z_1 + \epsilon^2 Z^* + \epsilon \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} \epsilon + \frac{\partial V}{\partial \theta} \nu + \frac{\partial V}{\partial A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) \\ = -\epsilon \frac{F^*}{m\omega a} \cos[(s\varphi + \vartheta) + \epsilon V] \end{aligned}$$

在上述方程中,令等式两端 ϵ 一阶项的系数相等

$$\left. \begin{aligned} Y_1 + \frac{\partial U}{\partial \theta} \nu + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \\ = -\frac{1}{m\omega} F_0^* [\tau, \theta, A \cos(s\varphi + \vartheta), \\ - A \omega \sin(s\varphi + \vartheta)] \sin(s\varphi + \vartheta) \\ Z_1 + \frac{\partial V}{\partial \theta} \nu + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \left(\omega - \frac{s}{r} \nu \right) \\ = -\frac{1}{am\omega} F_0^* [\tau, \theta, A \cos(s\varphi + \vartheta), \\ - A \omega \sin(s\varphi + \vartheta)] \cos(s\varphi + \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.10)$$

如 Y_1, Z_1 满足不显含 θ 的条件,因函数 F_0^* 中与 θ 有关的自变量为 θ 和 φ ,则

$$\left. \begin{aligned} Y_1 = -\frac{1}{4\pi^2 m\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0^* [\tau, \theta, A \cos(s\varphi + \vartheta), \\ - A \omega \sin(s\varphi + \vartheta)] \sin(s\varphi + \vartheta) d\theta d(s\varphi + \vartheta) \\ Z_1 = -\frac{1}{4\pi^2 m\omega A} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0^* [\tau, \theta, A \cos(s\varphi + \vartheta), \\ - A \omega \sin(s\varphi + \vartheta)] \cos(s\varphi + \vartheta) d\theta d(s\varphi + \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.11)$$

将(5.2.11)代入(5.2.10),参照多自由度系统受迫振动一节中一般情况时 U, V 的求法,在(5.2.10)中,设 U, V 为 θ 和 $s\varphi + \vartheta$ 的傅氏级数,根据等式两端同阶谐波系数相等的原理,即可确定 U, V 中的系数,此处就不详细叙述了。

故第一次近似的非定常解为

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos(s\varphi + \vartheta) \\ \frac{dA}{dt} &= \epsilon Y_1(\tau, A, \vartheta) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{s}{r} \nu + \epsilon Z_1(\tau, A, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.12)$$

从上式知,它和(5.1.32)完全相同,需以数值积分的方法来求其定量的解。

§ 5.3 具有任意个准循环坐标的多自由度系统的非定常解

在具有准循环坐标的系统中,系统的质量、刚度、干扰力的振幅、频率,以及准循环频率等参数都可能随着时间发生变化。如果数个干扰力的瞬时频率之间不可公约,则将发生在概周期振动状态下的非定常过程。例如某些化工、医药制造工程中用的离心机的振动系统,高速纱锭的振动等都是具有变质量的振动系统;由发动机带动的旋转机械,发动机曲轴风扇系统等启动和停止运行的过程都是属于变干扰力频率引起的非定常振动过程。如果以上这些机构再受支座振动的影响,那么,这些系统的非定常过程就不只是个别干扰力而引起,而是同时受数个变干扰力的作用。具有有限功率的发动机所带动的这些机构的振动是由准循环坐标系统来描述的。当系统的准循环坐标为零时,则为多自由度系统多频状态下的非定常过程问题。

设具有变系数的非线性方程组有如下的形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_p}{dt^2} &= \epsilon \phi_p \left(\tau, \beta_1, \dots, \beta_p, x_1, \dots, x_n, \varphi_1, \dots, \varphi_r, \right. \\ &\quad \left. \frac{d\varphi_1}{dt}, \dots, \frac{d\varphi_r}{dt}, \epsilon \right) \\ \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{\beta=1}^n a_{s\beta}(\tau) x_\beta + \epsilon F_s \left(\tau, \beta_1, \dots, \beta_p, x_1, \dots, x_n, \right. \\ &\quad \left. \varphi_1, \dots, \varphi_r, \frac{d\varphi_1}{dt}, \dots, \frac{d\varphi_r}{dt}, \epsilon \right) \\ &\quad \left(p = 1, \dots, \nu; s = 1, \dots, n; q = \frac{n}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.3.1)$$

其中 $a_{s\beta}(\tau), \frac{d\beta_s}{dt} = \nu_s(\tau)$ (干扰力的瞬时频率) 是慢变时间 $\tau = \epsilon t$ 的函数,

$\phi_p \left(\tau, \beta, x, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right)$ 和 $F_s \left(\tau, \beta, x, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right)$ 是 β_i, φ_p 的以 2π 为周期的周

期函数;而函数 $a_{s\beta}(\tau), \frac{d\beta_s}{dt} = \nu_s(\tau), \phi_p \left(\tau, \beta, x, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right), F_s \left(\tau, \beta, x, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right)$

在 $0 \leq \tau \leq \xi$ 及自变量定义域上,有足够数量的有限阶导数, ϵ 为小参数。

函数 $\phi_p \left(\tau, \beta, x, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right)$ 和 $F_s \left(\tau, \beta, x, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right)$ 的广义傅氏级数有以下形式

$$\left. \begin{aligned}
 & \phi_p \left(\tau, \beta, x, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right) \\
 &= \phi_{p_0} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right) + \sum_{\sigma_1} \left[\phi_{p_{\sigma_1}} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right) \cos \bar{\alpha}_{\sigma_1} + \right. \\
 & \quad \left. \phi'_{p_{\sigma_1}} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right) \sin \bar{\alpha}_{\sigma_1} \right] \\
 & F_s \left(\tau, \beta, x, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right) \\
 &= F_{s_0} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right) + \sum_{\sigma_2} \left[F_{s_{\sigma_2}} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right) \cos \bar{\alpha}_{\sigma_2} + \right. \\
 & \quad \left. F'_{s_{\sigma_2}} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right) \sin \bar{\alpha}_{\sigma_2} \right]
 \end{aligned} \right\} (5.3.2)$$

其中 σ_1, σ_2 是有限的数, $\phi_{p_{\sigma_1}} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right), \phi'_{p_{\sigma_1}} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right), F_{s_{\sigma_2}} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right)$ 和 $F'_{s_{\sigma_2}} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right)$ 是 $x, \frac{d\varphi}{dt}$ 的多项式和 ε 的解析函数, 如

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_{p_{\sigma_1}} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{p_{\sigma_1}}^{(i)} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt} \right) \varepsilon^i \\
 F_{s_{\sigma_2}} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} F_{s_{\sigma_2}}^{(i)} \left(\tau, x, \frac{d\varphi}{dt} \right) \varepsilon^i
 \end{aligned} \right\} (5.3.3)$$

并且

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\alpha}_{\sigma_1} &= \beta_{\sigma_1} + l_1^{0\sigma_1} \varphi_1 + \cdots + l_v^{0\sigma_1} \varphi_v \\
 \bar{\alpha}_{\sigma_2} &= \beta_{\sigma_2} + l_1^{0\sigma_2} \varphi_1 + \cdots + l_v^{0\sigma_2} \varphi_v
 \end{aligned} \right\} (5.3.4)$$

而 $\nu_1(\tau), \dots, \nu_{\sigma_1}(\tau); \nu_1(\tau), \dots, \nu_{\sigma_2}(\tau)$ 在整个区间 $0 \leq \tau \leq \xi$ 上是彼此不可公约的外干扰频率, 为简单起见, 在下面的演算中被 $\bar{\alpha}_{\sigma_1} = \bar{\alpha}_{\sigma_2} = \alpha_s$ 。

方程组(5.3.1)的派生系统是

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= 0 \\
 \frac{dx_i}{dt} &= a_{i1}(\tau) x_1 + \cdots + a_{in}(\tau) x_n
 \end{aligned} \right\} (5.3.5)$$

在上式中, 如我们假设 τ 是不变化的参数, 那么, 上述方程组的第二组方程就是具有常系数的齐次方程, 现设其特征方程只有简单的纯虚根 $\pm i\omega_1(\tau), \dots, \pm i\omega_q(\tau)$, 并且其基础解系为

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_{\alpha}(\tau, t) &= P_{\alpha}(\tau) \cos \omega_i(\tau) t - Q_{\alpha}(\tau) \sin \omega_i(\tau) t \\
 \varphi_{\alpha}^*(\tau, t) &= P_{\alpha}(\tau) \cos \omega_i(\tau) t + Q_{\alpha}(\tau) \sin \omega_i(\tau) t
 \end{aligned} \right\} (5.3.6)$$

和

$$\varphi_p = \Omega_p t + C_p \quad (5.3.7)$$

其中 Ω_p 和 C_p 为待定常数。

如果在(5.3.5)和(5.3.6)中,设 $\tau = \epsilon t$,那么 $\varphi_{si}(\tau, t), \varphi_{si}^*(\tau, t)$ 将以与 ϵ 同阶的精度近似地满足方程组(5.3.5)。

由于振动系统的质量、刚度、外干扰力的振幅、频率以及准循环频率等参数都是慢变函数,因此,将引起一些新的振动现象,如 § 5.1 中所述。现以 $A_1(t), \dots, A_q(t), \theta_1(t), \dots, \theta_q(t)$ 作为新变量,采用下列变换

$$x_s(\tau, t) = \sum_{i=1}^q A_i(t) \varphi_{si}(\tau, \theta_i) \quad (s=1, \dots, n) \quad (5.3.8)$$

把上式代入(5.3.1)的第二式,并认为 φ_p 与 ϵ 无关,则得

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{dA_i}{dt} \varphi_{si}(\tau, \theta_i) - \sum_i A_i \varphi_{si}^*(\tau, \theta_i) \left(\frac{d\theta_i}{dt} - \omega_i \right) \\ = \epsilon \left[F_s \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right) - \sum_i A_i \frac{\partial \varphi_{si}}{\partial \tau} \right] \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

其中当 $\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i$ 时, $\varphi_{si}(\tau, t)$ 满足齐次方程(5.3.5)

$$\frac{\partial \varphi_{si}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{si}}{\partial \theta_i} \omega_i = \sum_p a_{ip}(\tau) \varphi_{sp}(\tau, \theta_i)$$

而

$$\frac{\partial \varphi_{si}(\tau, \theta_i)}{\partial \theta_i} = -\varphi_{si}^*(\tau, \theta_i)$$

利用和具有常系数微分方程组同样的方法,可证明在方程组(5.3.5)的基础解系和其共轭方程组的基础解系之间,以 ϵ 一次方的精度满足正交关系,利用此关系可将(5.3.9)对 $\frac{dA_i}{dt}$ 和 $\frac{d\theta_i}{dt}$ 解出

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_i}{dt} &= \epsilon R_i \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right) \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= \omega_i(\tau) + \epsilon S_i \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, \dots, q) \quad (5.3.10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R_i &\left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right) \\ &= \sum_{s=1}^n \left[F_s \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right) - \sum_{i=1}^q A_i \frac{\partial \varphi_{si}}{\partial \tau} \right] \varphi_{si}^*(\tau, \theta_i) \\ S_i &\left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right) \\ &= \sum_{s=1}^n \left[F_s \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right) - \sum_{i=1}^q A_i \frac{\partial \varphi_{si}}{\partial \tau} \right] \varphi_{si}(\tau, \theta_i) \end{aligned} \right\} \quad (5.3.11)$$

其中 $\psi_{ii}^*(\tau, \theta_i)$ 和 $\psi_{ii}(\tau, \theta_i)$ 为 (5.3.5) 的共轭方程的基础解系

$$\left. \begin{aligned} \psi_{ii}(\tau, \theta_i) &= C_{ii}(\tau) \cos \theta_i - D_{ii}(\tau) \sin \theta_i \\ \psi_{ii}^*(\tau, \theta_i) &= C_{ii}(\tau) \sin \theta_i + D_{ii}(\tau) \cos \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (5.3.12)$$

式 (5.3.11) 与定常过程所对应的函数不同, 除含 τ 之外, 还出现了 $-\sum_{i=1}^q A_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau}$ 的项, 从其结构可以看出, 函数 R_i 和 S_i 对变量 θ, β, φ 的以 2π 为周期的周期函数, 其广义傅氏级数为

$$\left. \begin{aligned} R_i \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, 0 \right) \\ = R_{i0} \left(\tau, A, \frac{d\varphi}{dt} \right) + \sum_{\sigma} \left[R_{i\sigma} \left(\tau, A, \frac{d\varphi}{dt} \right) \cos \alpha_{\sigma} + R'_{i\sigma} \left(\tau, A, \frac{d\varphi}{dt} \right) \sin \alpha_{\sigma} \right] \\ S_i \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, 0 \right) \\ = S_{i0} \left(\tau, A, \frac{d\varphi}{dt} \right) + \sum_{\sigma} \left[S_{i\sigma} \left(\tau, A, \frac{d\varphi}{dt} \right) \cos \alpha_{\sigma} + S'_{i\sigma} \left(\tau, A, \frac{d\varphi}{dt} \right) \sin \alpha_{\sigma} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.3.13)$$

其中 σ 是有限的数;

$$\alpha_{\sigma} = m_1^{\sigma} \theta_1 + \cdots + m_q^{\sigma} \theta_q + n_1^{\sigma} \beta_1 + \cdots + n_p^{\sigma} \beta_p + l_1^{\sigma} \varphi_1 + \cdots + l_v^{\sigma} \varphi_v$$

m, n, l 是正的或负的互质的整数; 而 $R_{i\sigma}$ 和 $R'_{i\sigma}$ 为

$$\left. \begin{aligned} R_{i\sigma} \left(\tau, A, \frac{d\varphi}{dt} \right) &= \frac{2}{(2\pi)^{p+q+v}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}_{p+q+v \text{ 次}} R_i \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, 0 \right) \times \\ &\quad \cos(m_1^{\sigma} \theta_1 + \cdots + m_q^{\sigma} \theta_q + n_1^{\sigma} \beta_1 + \cdots + n_p^{\sigma} \beta_p + l_1^{\sigma} \varphi_1 + \cdots + l_v^{\sigma} \varphi_v) d\theta_1 \cdots d\theta_q d\beta_1 \cdots d\beta_p d\varphi_1 \cdots d\varphi_v \\ R'_{i\sigma} \left(\tau, A, \frac{d\varphi}{dt} \right) &= \frac{2}{(2\pi)^{p+q+v}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}_{p+q+v \text{ 次}} R_i \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, 0 \right) \times \\ &\quad \sin(m_1^{\sigma} \theta_1 + \cdots + m_q^{\sigma} \theta_q + n_1^{\sigma} \beta_1 + \cdots + n_p^{\sigma} \beta_p + l_1^{\sigma} \varphi_1 + \cdots + l_v^{\sigma} \varphi_v) d\theta_1 \cdots d\theta_q d\beta_1 \cdots d\beta_p d\varphi_1 \cdots d\varphi_v \end{aligned} \right\} \quad (5.3.14)$$

用同样的方法可解出以下函数的广义傅氏级数的系数。

$$S_i \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, 0 \right), \dot{\phi}_p \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, 0 \right)$$

考虑 φ_p 的二阶导数与 ϵ 成正比后, 我们所求 (5.3.1) 的标准形式的方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_p}{dt^2} &= \epsilon \phi_p \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right) \\ \frac{dA_i}{dt} &= \epsilon R_i \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right) \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= \omega_i(\tau) + \epsilon S_i \left(\tau, A, \theta, \beta, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \epsilon \right) \end{aligned} \right\} \quad (p=1, \dots, v; \quad i=1, \dots, q) \quad (5.3.15)$$

为了求得上方程组在共振情况下的非定常解,设在所研究的区间 $0 \leq \tau \leq \xi$ 上,干扰力的瞬时频率 $\nu_1(\tau), \dots, \nu_p(\tau)$, 准循环瞬时频率 $\Omega_1(\tau), \dots, \Omega_v(\tau)$, 以及某一组角频率 $\lambda_1^0, \dots, \lambda_q^0$ 满足下列 r 个共振关系

$$\left. \begin{aligned} \Delta_\epsilon &= m_1^* \lambda_1^0 + \dots + m_q^* \lambda_q^0 + n_1^* \nu_1(\tau) + \dots + n_p^* \nu_p(\tau) + \\ &\quad l_1^* \Omega_1(\tau) + \dots + l_v^* \Omega_v(\tau) = 0 \\ &\quad (\epsilon = 1, \dots, r) \end{aligned} \right\} \quad (5.3.16)$$

其中 $r < q, m, n, l$ 是正的或负的互质的整数,其绝对值的总和不超过某一数值,该数值的大小与原始振动方程中非线性函数有关。

现对(5.3.15)采用 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} \varphi_p &= \int_{t_1}^t \Omega_p(\tau) dt + C_p + \epsilon W_p(\tau, t, y, \vartheta, \Omega, C, \epsilon) \\ A_i &= y_i + \epsilon U_i(\tau, t, y, \vartheta, \Omega, C) \\ \theta_i &= \lambda_i^0 t + \vartheta_i + \epsilon V_i(\tau, t, y, \vartheta, \Omega, C) \end{aligned} \right\} \quad (5.3.17)$$

并要求 Ω_p, y_i 和 ϑ_i 的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega_p}{dt} &= \epsilon B_p^{(1)}(\tau, y, \vartheta, \Omega, C) + \epsilon^2 B_p^* \left(\tau, t, y, \vartheta, \Omega, C, \omega, \frac{dW}{dt}, \epsilon \right) \\ \frac{dy_i}{dt} &= \epsilon Y_i(\tau, y, \vartheta, \Omega, C) + \epsilon^2 Y_i^* \left(\tau, t, y, \vartheta, \Omega, C, \omega, \frac{dW}{dt}, \epsilon \right) \\ \frac{d\vartheta_i}{dt} &= \omega_i(\tau) - \lambda_i^0 + \epsilon Z_i(\tau, y, \vartheta, \Omega, C) + \\ &\quad \epsilon^2 Z_i^* \left(\tau, t, y, \vartheta, \Omega, C, \omega, \frac{dW}{dt}, \epsilon \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.3.18)$$

函数 $U_i, V_i, W_p, B_p^*, Y_i^*$ 和 Z_i^* 应该是时间 t 的概周期函数,是 ϑ 和 $\int_{t_1}^t \Omega_p(\tau) dt + C_p$ 的以 2π 为周期的周期函数, $B_p^{(1)}, Y_i$ 和 Z_i 不显含 t , 为 $\tau, y, \vartheta, \Omega$ 与 C 的函数。

将(5.3.17)和(5.3.18)代入(5.3.15),考虑到共振关系(5.3.16),为使函数 W_p, U_i, V_i, Y_i, Z_i 和 $B_p^{(1)}$ 满足所规定的条件,并满足 ϵ 的一次幂

的系数所组成的偏微分方程组,可设

$$\begin{aligned}
 B_p^{(1)} &= \phi_{ps}(\tau, y, \Omega) + \sum_{\sigma=1}^N \left\{ \phi_{ps}(\tau, y, \Omega) \times \right. \\
 &\quad \cos \left[\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} + \sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \Lambda_{\epsilon} \right] + \phi'_{ps}(\tau, y, \Omega) \times \\
 &\quad \left. \sin \left[\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} + \sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \Lambda_{\epsilon} \right] \right\} \\
 Y_i &= R_{i0}(\tau, y, \Omega) + \sum_{\sigma=1}^N \left[R_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \times \right. \\
 &\quad \cos \left(\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} + \sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \Lambda_{\epsilon} \right) + S'_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \times \\
 &\quad \left. \sin \left(\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} + \sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \Lambda_{\epsilon} \right) \right] \\
 Z_i &= S_{i0}(\tau, y, \Omega) + \sum_{\sigma=1}^N \left[S_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \times \right. \\
 &\quad \cos \left(\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} + \sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \Lambda_{\epsilon} \right) + S'_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \times \\
 &\quad \left. \sin \left(\sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \chi_{\epsilon} + \sum_{\epsilon=1}^r S_{\epsilon}^{\sigma} \Lambda_{\epsilon} \right) \right]
 \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

和

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 W_p^0}{\partial t^2} + 2 \sum_{j=1}^q \frac{\partial^2 W_p^0}{\partial t \partial \vartheta_j} (\omega_j + \lambda_j^0) + \sum_{j,k=1}^q \frac{\partial^2 W_p^0}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} \times \\
 &\quad (\omega_j - \lambda_j^0) (\omega_k - \lambda_k^0) \\
 &= \sum_{\sigma > N} [\phi_{ps}(\tau, y, \Omega) \cos \alpha_{\sigma}^0 + \phi'_{ps}(\tau, y, \Omega) \sin \alpha_{\sigma}^0] \frac{\partial U_i}{\partial t} + \\
 &\quad \sum_{j=1}^q \frac{\partial U_i}{\partial \vartheta_j} (\omega_j - \lambda_j^0) \\
 &= \sum_{\sigma > N} [R_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \cos \alpha_{\sigma}^0 + R'_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \sin \alpha_{\sigma}^0] \frac{\partial V_j}{\partial t} + \\
 &\quad \sum_{j=1}^q \frac{\partial V_j}{\partial \vartheta_j} (\omega_j - \lambda_j^0) \\
 &= \sum_{\sigma > N} [S_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \cos \alpha_{\sigma}^0 + S'_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \sin \alpha_{\sigma}^0]
 \end{aligned} \right\} \\
 &\quad (5.3.20)
 \end{aligned}$$

其中 $\sigma=1, \dots, N$, 是 α_{σ}^0 是与时间无关的数目, S_{ϵ}^{σ} 是正的或负的整数, χ_{ϵ}

是非循环坐标, Λ_i 是起始准循环组合相位角;

$$\begin{aligned} \alpha_\sigma^0 = & (m_1^\sigma \lambda_1^0 + \cdots + m_q^\sigma \lambda_q^0) t + \int_{t_j}^t [n_1^\sigma v_1(\tau) + \cdots + n_p^\sigma v_p(\tau) + \\ & l_1^\sigma \Omega_1(\tau) + \cdots + l_v^\sigma \Omega_v(\tau)] d\tau + m_1^\sigma \vartheta_1 + \cdots + m_q^\sigma \vartheta_q + \\ & l_1^\sigma c_1 + \cdots + l_v^\sigma c_v \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

为了求函数 W_p^0, U_i, V_i , 现设

$$\left. \begin{aligned} W_p^0 &= \sum_{\sigma > N} [L_{p\sigma}(\tau, y, \Omega) \cos \alpha_\sigma^0 + L'_{p\sigma}(\tau, y, \Omega) \sin \alpha_\sigma^0] \\ U_i &= \sum_{\sigma > N} [M_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \cos \alpha_\sigma^0 + M'_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \sin \alpha_\sigma^0] \\ V_i &= \sum_{\sigma > N} [\alpha_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \cos \alpha_\sigma^0 + \alpha'_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \sin \alpha_\sigma^0] \end{aligned} \right\} \quad (5.3.22)$$

其中 $L_{p\sigma}, L'_{p\sigma}, M_{i\sigma}, M'_{i\sigma}, \alpha_{i\sigma}$ 与 $\alpha'_{i\sigma}$ 是待定的系数, α_σ^0 如(5.3.21)所示。

把(5.3.22)代入(5.3.20), 令同次谐波的系数相等, 可得所求的系数为

$$\left. \begin{aligned} L_{p\sigma} &= -\frac{\phi_{p\sigma}(\tau, y, \Omega)}{E_\sigma^2}, & L'_{p\sigma} &= -\frac{\phi'_{p\sigma}(\tau, y, \Omega)}{E_\sigma^2} \\ M_{i\sigma} &= -\frac{R_{i\sigma}(\tau, y, \Omega)}{E_\sigma}, & M'_{i\sigma} &= \frac{R'_{i\sigma}(\tau, y, \Omega)}{E_\sigma} \\ \alpha_{i\sigma} &= -\frac{S_{i\sigma}(\tau, y, \Omega)}{E_\sigma}, & \alpha'_{i\sigma} &= \frac{S'_{i\sigma}(\tau, y, \Omega)}{E_\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.23)$$

把上式代入(5.3.22), 可得函数

$$\left. \begin{aligned} W_p^0 &= \sum_{\sigma > N} \frac{-[\phi_{p\sigma}(\tau, y, \Omega) \cos \alpha_\sigma^0 + \phi'_{p\sigma}(\tau, y, \Omega) \sin \alpha_\sigma^0]}{E_\sigma^2(\tau)} \\ U_i &= \sum_{\sigma > N} \frac{R_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \sin \alpha_\sigma^0 - R'_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \cos \alpha_\sigma^0}{E_\sigma(\tau)} \\ V_i &= \sum_{\sigma > N} \frac{S_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \sin \alpha_\sigma^0 - S'_{i\sigma}(\tau, y, \Omega) \cos \alpha_\sigma^0}{E_\sigma(\tau)} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.24)$$

其中

$$E_\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^q m_i^\sigma \omega_i(\tau) + \sum_{j=1}^p n_j^\sigma v_j(\tau) + \sum_{p=1}^v l_p^\sigma \Omega_p \quad (5.3.25)$$

因为 $\sigma > N$ 时, 在区间 $0 \leq \tau \leq \xi$ 上, $E_\sigma(\tau)$ 不为零, 也不可能是和 ε 同阶的小量, 所以 W_p^0, U_i 和 V_i 为 t 概周期函数, 并为 ϑ 和 $\int_{t_j}^t \Omega_p(\tau) d\tau + C_p$ 的以 2π 为周期的周期函数。

这样就得到第一次近似微分方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega_p}{dt} &= \varepsilon B_p^{(1)}(\tau, y_1, \dots, y_q, \chi_1, \dots, \chi_r, \Omega_1, \dots, \\ &\quad \Omega_p, \Lambda_1, \dots, \Lambda_r) \\ \frac{dy_i}{dt} &= \varepsilon Y_i(\tau, y_1, \dots, y_q, \chi_1, \dots, \chi_r, \Omega_1, \dots, \\ &\quad \Omega_p, \Lambda_1, \dots, \Lambda_r) \\ \frac{d\chi_\varepsilon}{dt} &= \sum_{i=1}^q m_i^\varepsilon [\omega_i(\tau) - \lambda_i^0] - \varepsilon \sum_{i=1}^q m_i^\varepsilon Z_i(\tau, y_1, \dots, \\ &\quad y_q, \chi_1, \dots, \chi_r, \Omega_1, \dots, \Omega_p, \Lambda_1, \dots, \Lambda_r) \end{aligned} \right\} \quad (5.3.26)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_i}{dt} &= \omega_i(\tau) - \lambda_i^0 + \varepsilon Z_i(\tau, y_1, \dots, y_q, \chi_1, \dots, \\ &\quad \chi_r, \Omega_1, \dots, \Omega_p, \Lambda_1, \dots, \Lambda_r) \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

在 $q+v+r$ 个方程式 (5.3.26) 中, 有 $q+v+r$ 个未知函数 $y_1, \dots, y_q, \Omega_1, \dots, \Omega_p, \chi_1, \dots, \chi_r$; 在 q 个方程式 (5.3.27) 中, 相对于 (5.3.36) 的只有 $q-r$ 个是独立的方程式。

一般地说, 在非线性系统中, 非定常过程的第一次近似方程组不能用初等积分的方法得到解, 在适当选择起始条件后, 可用数值积分的方法来得到足够精确的数值解, 因在这组方程式中变量是缓变时间 τ 的函数, 而与 t 无关, 所以在区间 $0 \leq \tau \leq \xi$ 上为了得到需要的解, 并不需要进行大量的计算工作, 一般为明显起见, 可做曲线 $\Omega(t), y(t), \chi(t), \vartheta(t)$ 。

从方程 (5.3.26) 的结构可以看出, 非定常解不但与缓变时间、瞬时准循环频率、振动系统的缓变参数有关, 而且也决定于准循环起始相位。

如果在方程组 (5.3.1) 中, 只有 $\frac{d\varphi}{dt}$ 是缓变时间 τ 的函数, 其余的系数都是常数, 就可利用本节的方法, 研究在工程技术中经常需要计算的通过共振区的过渡过程问题。

如果在非线性振动系统上所有的准循环坐标都等于零, 本节的方法可用来研究一般多自由度系统的非定常过程问题。

如果在非线性振动系统上所有的外力和准循环坐标都等于零, 则本节的方法可用来研究在内共振状态下的非定常过程问题。

利用本节的方法, 可求任意次近似的非定常解, 与定常解高次近似的求法类似, 此处不再详述。

§ 5.4 近似方程的数值积分法

所得到的第一次(或高次)近似微分方程式一般不能直接积分以得到封闭形式的解,故应用数值积分方法,下面介绍克雷洛夫所建立的数值积分法。

所得的第一次或高次近似方程组可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= f_1(\tau, a, \psi) \\ \frac{d\psi}{dt} &= f_2(\tau, a, \psi) \end{aligned} \right\} \quad (5.4.1)$$

令对应于定常过程的振幅和相位为起始值 a_0, ψ_0 , 为此设

$$\left. \begin{aligned} f_1(\tau, a, \psi) &= 0 \\ f_2(\tau, a, \psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.4.2)$$

根据系统固有频率的数值 $\omega(\tau), \nu(\tau)$ 值的取法是: 计算加速过程, 当 $t=0$ 时, 使 $\nu(\tau) < \omega(\tau)$; 计算减速过程时, 使 $\nu(\tau) > \omega(\tau)$, 然后从(5.4.2)求得 a 和 ψ 作为起始值 a_0 和 ψ_0 。

在 $t=0$ 的邻域内, 经过相等的时间间隔, 再计算三对振幅和相位的数值: $a_1, \psi_1; a_2, \psi_2$ 和 a_3, ψ_3 , 计算公式为

$$\left. \begin{aligned} a(t_0 + \Delta t) &= a(t_0) + \frac{da}{dt} \Delta t + \frac{d^2 a}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{d^3 a}{dt^3} \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \\ \psi(t_0 + \Delta t) &= \psi(t_0) + \frac{d\psi}{dt} \Delta t + \frac{d^2 \psi}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{d^3 \psi}{dt^3} \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.4.3)$$

其中 $a(t_0) = a_0, \psi(t_0) = \psi_0; \frac{da}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d^2 a}{dt^2}, \frac{d^2 \psi}{dt^2}, \frac{d^3 a}{dt^3}, \frac{d^3 \psi}{dt^3} \dots$, 是微分(5.4.1)得到的。微分后, 其中的 $t_0 = 0, a_0 = a, \psi_0 = \psi, \omega = \omega_0 = \nu$, 并将之代入(5.4.3), 令 $\Delta t = 0.1, 0.2, 0.3$, 则得 $a_1, \psi_1; a_2, \psi_2$ 和 a_3, ψ_3 。

下面作四个表, 前两个表(表 5.1、表 5.2)中含有 a, ψ , 以及它们的首次差值。后两个表(表 5.3、表 5.4)中含有 ξ, η , 以及它们的第一次、第二次、第三次差值。

表 5.1

n	a	Δa
0	a_0	
1	a_1	Δa_0
2	a_2	Δa_1
3	a_3	Δa_2

表 5.2

n	ψ	$\Delta\psi$
0	ψ_0	
1	ψ_1	$\Delta\psi_0$
2	ψ_2	$\Delta\psi_1$
3	ψ_3	$\Delta\psi_2$

表 5.3

n	ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\Delta^3\xi$
0	ξ_0			
1	ξ_1	$\Delta\xi_0$	$\Delta^2\xi_0$	
2	ξ_2	$\Delta\xi_1$	$\Delta^2\xi_1$	$\Delta^3\xi_0$
3	ξ_3	$\Delta\xi_2$		

表 5.4

n	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
0	η_0			
1	η_1	$\Delta\eta_0$	$\Delta^2\eta_0$	
2	η_2	$\Delta\eta_1$	$\Delta^2\eta_1$	$\Delta^3\eta_0$
3	η_3	$\Delta\eta_2$		

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= f_1(\tau_i, a_i, \psi_i) \Delta t \\ \eta_i &= f_2(\tau_i, a_i, \psi_i) \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (5.4.4)$$

其中, 当 $i=0$ 时, $\Delta t=0$; $i=1$ 时, $\Delta t=0.1$; $i=2$ 时, $\Delta t=0.2$; $i=3$ 时, $\Delta t=0.3$ 。

其差值为

$$\left. \begin{aligned} \Delta\xi_i &= \xi_{i+1} - \xi_i \\ \Delta^2\xi_i &= \xi_{i+1} - \Delta\xi_i \\ \Delta^3\xi_i &= \Delta^2\xi_{i+1} - \Delta^2\xi_i \\ (i=0, 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (5.4.5)$$

同样可写出 $\Delta\eta, \Delta^2\eta, \Delta^3\eta$ 的表达式。

列表 5.1~5.4 后, 可对方程组 (5.4.1) 进行数值积分, 为此, 可按

下式计算振幅和相位的增量

$$\left. \begin{aligned} \Delta a_n &= \xi_n + \frac{1}{2} \Delta \xi_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \xi_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \xi_{n-3} \\ \Delta \phi_n &= \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{n-3} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.6)$$

并把它们填入对应的表 5.1 和表 5.2 中。

将 $\Delta a_n, \Delta \phi_n$ 和 a_n, ϕ_n 相加, 则

$$\left. \begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \Delta a_n \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \Delta \phi_n \end{aligned} \right\} \quad (5.4.7)$$

将 (5.4.7) 代入 (5.4.4), 可求得 ξ_{n+1} 和 η_{n+1} , 由式 (5.4.5) 可将表 5.3 和表 5.4 增加一斜行。

然后有可能继续计算表 5.1 和表 5.2, 等等。

一般情况下, 并不需在整个时间区间上进行数值积分, 只需计算振幅和相位发生显著变化的某个时间区间, 如通过共振区的过渡过程问题等。在计算通过共振区的过渡过程时, 起始值应取共振区附近的定常解, 干扰力频率的变化率大 (相当于加速度大), 过渡时间短, 则计算的点数少, 变化率小, 过渡的时间长, 则计算的点数可多一些。

习 题

5.1 图 E5.1 所示单摆的摆长 l 缓慢变化。 $l = l(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon \ll 1$ 。设初始时摆偏离平衡位置 φ_0 , 试求近似周期运动的幅值和频率的变化规律。

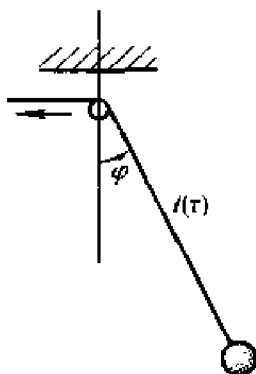


图 E5.1

第六章 参数激励系统

本章和前面受迫振动相同,我们研究系统在外干扰力作用下的运动。不同的是,在其他章节中干扰力出现在运动微分方程的非齐次项上,而在本章则出现在其系数上。从数学上说我们将讨论时变系数的微分方程,在某些动力学问题中,某些具有常系数的当其边界条件为随空间或时间而变化时的偏微分方程的解也属于这类问题。本章不讨论具有变边界条件的问题,有兴趣的读者可参看布劳英(Brillouin, 1956)和艾拉可(Elachi, 1976)的著作。因为和时间有关的激励是在运动方程的系数中出现,所以这种激励称之为参数激励。与一般外激励系统不同的是,参数激励系统当外激励的频率为系统固有频率的2倍时会激起振幅很大的响应(称为主参数共振),且其稳定性差;而一般受迫振动系统除外激励频率和系统的任意阶固有频率相重合(主共振)外,小的激励力不会激起大的响应。

我们首先介绍参数激励系统的几个工程实例;然后讨论具有周期系数的常微分方程的理论,马休方程解稳定边界的确定方法,再介绍用平均法解马休系统,并研究非线性马休系统的动态特性。

§ 6.1 工程实例

6.1.1 具有活动支承的单摆

作为第一个例子,我们讨论系于无质量杆端点的质点 m 的运动,该杆的长度为 l ,其另一端点作如图6.1所示的运动。在垂直于杆的方向由牛顿运动学第二定律得运动微分方程为

$$ml\ddot{\theta} = -m[g - y(t)]\sin\theta + mx(t)\cos\theta$$

或

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{g}{l} - \frac{y(t)}{l} \right] \sin\theta - \frac{x(t)}{l} \cos\theta = 0 \quad (6.1.1)$$

它是一个变系数的微分方程。对在 $\theta=0$ 的邻域上的微小振动,则其线性化微分方程为

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{g}{l} - \frac{y(t)}{l} \right] \theta = \frac{x(t)}{l} \quad (6.1.2)$$

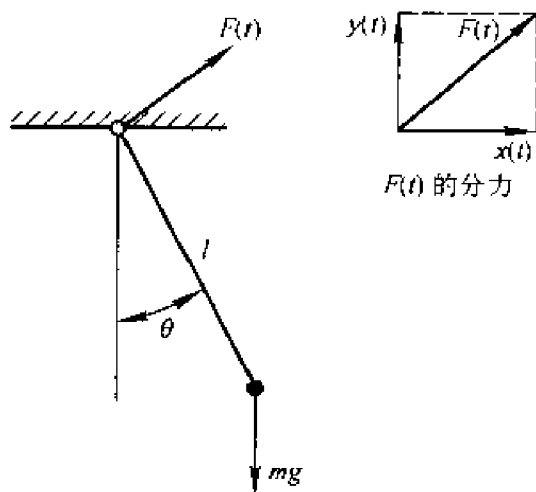


图 6.1

6.1.2 一个机—电系统

作为第二个例子,我们讨论图 6.2 所示的机—电系统。它是由 L - C 组成的回路, L 表示电感量为常数的电感,该电感与极板可移动的电容相联。若电容器上的电荷为 q ,则其电流 i 为 \dot{q} 。

感应电压为 $L \frac{di}{dt} = L\ddot{q}$, 电容电压为 $\frac{q}{C(t)}$, 在

MKS 系统中的电容量为 $C(t) = \frac{\epsilon S}{\delta(t)}$, 其中 ϵ 是

材料的介电渗透系数, S 为电容板的面积, $\delta(t)$ 为电容板之间的可变距离。因作用于两个元件的总电压为零,故 q 的方程为

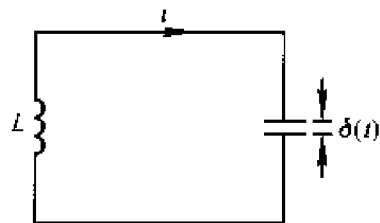


图 6.2

$$\ddot{q} + \frac{\delta(t)}{\epsilon SL} q = 0 \quad (6.1.3)$$

它是一个变系数的微分方程。

6.1.3 一个复摆

以上两个例子是单自由度系统。本节介绍一个具有两个自由度的复摆,下一节还将介绍一个压杆的横向振动问题,它是一个无限自由度系统。

现介绍一个复摆的运动,该复摆系于作垂直运动的平台上,如图 6.3 所示。两个质点 m_1 和 m_2 分别系于长度为 l_1 和 l_2 的无质量杆上,该杆悬挂于作垂直运动 $y(t)$ 的平台上,两个质点的运动受到弹簧的约束,该弹簧的起始位置是水平的,其常数为 k_1 和 k_2 ,当质点在垂直的静平衡位

置时弹簧不变形。

写出质点 m_1 和 m_2 的动能和势能后,利用拉格朗日第二类方程,则可得运动方程为

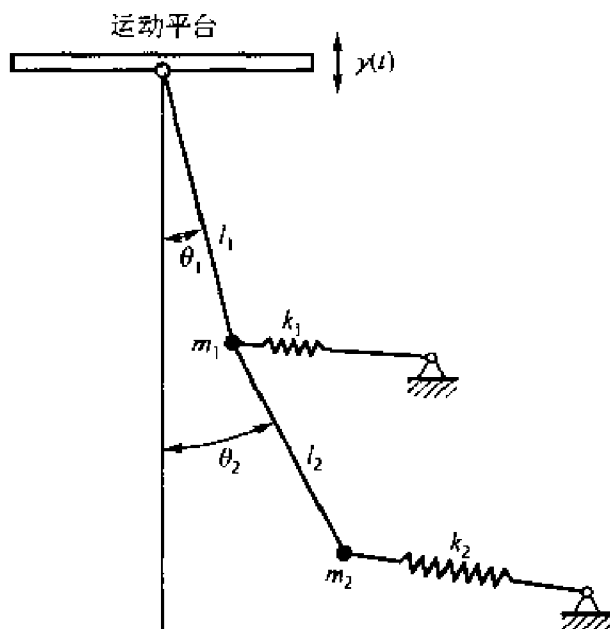


图 6.3

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 - (m_1 + m_2)\ddot{y}\theta_1 + [(m_1 + m_2)g + (k_1 + k_2)l_1]\theta_1 + k_2l_2\theta_2 = 0 \quad (6.1.4)$$

$$m_2l_2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1\ddot{\theta}_1 - m_2\ddot{y}\theta_2 + k_2l_1\theta_1 + (m_2g + k_2l_2)\theta_2 = 0 \quad (6.1.5)$$

以上是相互耦合的具有变系数的两个线性方程。故这是一个两自由度系统的例子。

6.1.4 弹性系统的动力稳定性

作为第四个例子,我们研究等截面的直杆在轴向干扰力 $F(t)$ 作用下的横向振动问题。我们考虑如图 6.4 所示的四种典型边界条件。假设平面在振动过程中仍为平面,并忽略横向剪切力和转动惯量的影响,且假设其弹性为线性的,并可忽略纵向惯性项。在这些假设条件下,在杆中的轴向力是不变的,且为 $F(t)$,参看图 6.5 由对 y 轴的势能方程为

$$-F \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (6.1.6)$$

动量矩为

$$-\frac{\partial M}{\partial x} + q = 0 \quad (6.1.7)$$

其中 ρ 为单位长度的密度, A 为横断面积, $M = -EI \frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\theta \approx \frac{\partial w}{\partial x}$ 。

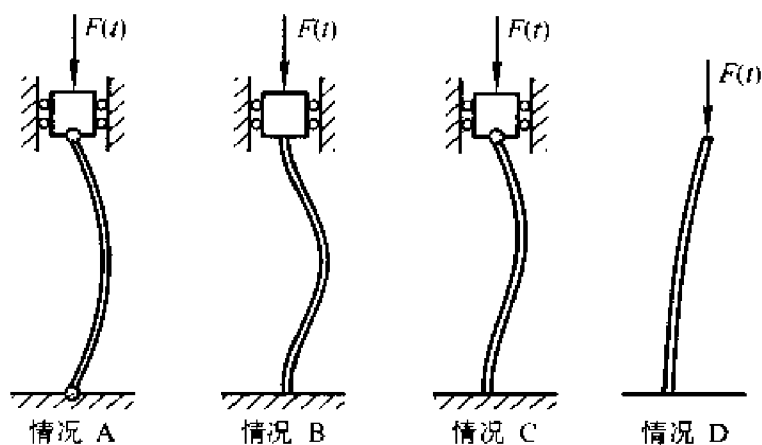


图 6.4

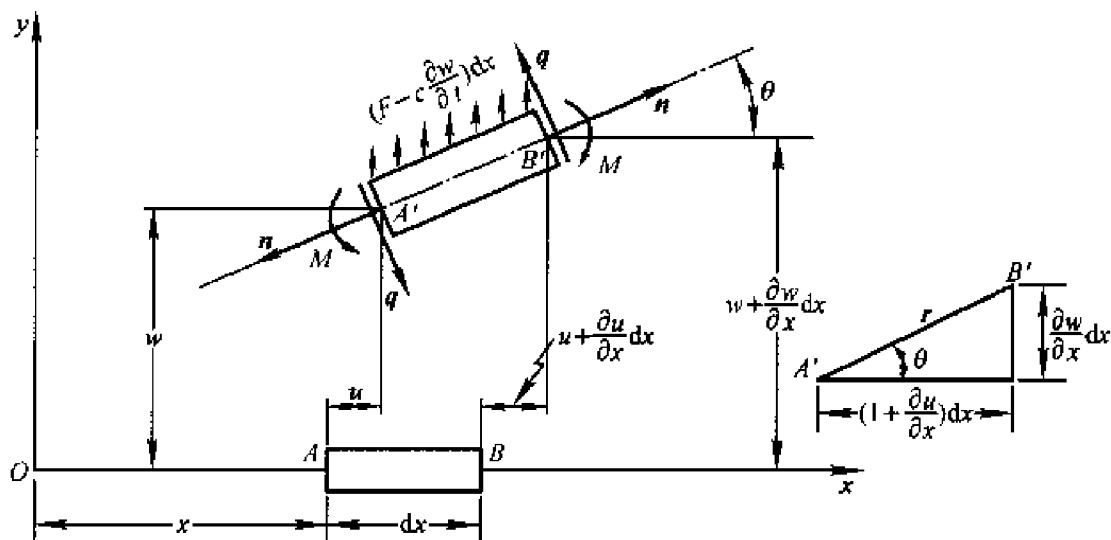


图 6.5

由(6.1.6)和(6.1.7)得

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (6.1.8)$$

设 $F(t) = F_0 + F_1(t)$, 其中 F_0 为常数。如假设(6.1.8)的解由系统自由振动的模态叠加而成, 即

$$w(x, t) = \sum_m u_m(t) \phi_m(x) \quad (6.1.9)$$

其中 ϕ_m 为方程

$$\phi^{\text{IV}} + p_0 \phi'' - K^4 \phi = 0 \quad (6.1.10)$$

的特征函数; $p_0 = \frac{F_0}{EI}$, $K^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$, ω 为特征值(称为固有频率), 不难证明特征函数是正交的。

将(6.1.9)代入(6.1.8), 得

$$\sum_m [(\ddot{u}_m + \omega_m^2 u_m) \phi_m + F(t) u_m \phi_m''] = 0 \quad (6.1.11)$$

其中

$$\omega_m' = \frac{EIK_m'}{\rho A}, \quad F(t) = \frac{F_1(t)}{\rho A} \quad (6.1.12)$$

以 ϕ_n 乘(6.1.11), 并对之从 $x=0$ 到 $x=l$ 做积分, 并利用 ϕ_m 的正交性, 则得

$$\ddot{u}_n + \omega_n^2 u_n + F(t) \sum_m f_{n,m} u_m = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (6.1.13)$$

其中

$$f_{n,m} = \left(\int_0^l \phi_n \phi_m'' dx \right) \left(\int_0^l \phi_n^2 dx \right)^{-1} \quad (6.1.14)$$

上式中的 ϕ_n 与边界条件有关。如对两端铰支的梁 $\phi_m = \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$, 故除 $n=m$ 外, $f_{n,m}=0$, 此时, 方程组(6.1.13)是不耦合的, 而其他边界条件时, 则方程组是互相耦合的。这是一个具有变系数的无限自由度的例子。但在通常情况下, 人们感兴趣的乃是前 1~2 阶模态的动态性能的研究。

§ 6.2 马休方程稳定理论

线性马休、希尔方程为

$$q'' + \omega^2 [1 - 2\mu\Phi(t)]q = 0 \quad (6.2.1)$$

其中 $\Phi(t) = \Phi(t+T)$, 而 $T = \frac{2\pi}{\nu}$; 当 $\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\nu t + b_k \sin k\nu t)$ 时, 方程(6.2.1)称为希尔方程; 当 $\Phi(t) = a \sin \nu t$ 或 $\Phi(t) = a \cos \nu t$ 时, 方程(6.2.1)称为马休方程。因以 $t+T$ 代替 t 方程不变(见图 6.6), 所以如 $q(t)$ 是(6.2.1)的解, 则 $q(t+T)$ 也是其解。

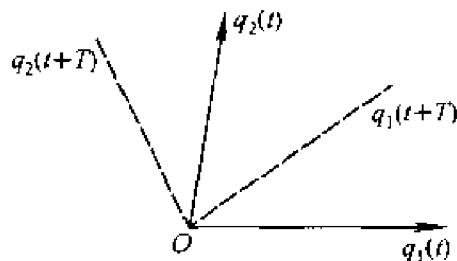


图 6.6

因(6.2.1)是二阶微分方程, 所以我们有二个独立的解 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$; 同时 $q_1(t+T)$ 和 $q_2(t+T)$ 也是其解。如以 $q_1(t+T)$ 和 $q_2(t+T)$ 定义它们, 则

$$q_1(t+T) = a_{11}q_1(t) + a_{12}q_2(t)$$

$$q_2(t+T) = a_{21}q_1(t) + a_{22}q_2(t)$$

写成矩阵的形式,则

$$\underline{q}(t+T) = \underline{A}\underline{q}(t) \quad (6.2.2)$$

其中 \underline{A} 是一个 2×2 常数阵。设 $\underline{q}^*(t)$ 为其另外的一个线性解组,并取

$$\underline{q}(t) = \underline{B}\underline{q}^*(t) \quad |\underline{B}| \neq 0 \quad (6.2.3)$$

因此有

$$\underline{q}(t+T) = \underline{B}\underline{q}^*(t+T) \quad (6.2.4)$$

与(6.2.2)对比,并考虑(6.2.3),则

$$\underline{A}\underline{B}\underline{q}^*(t) = \underline{B}\underline{q}^*(t+T), \text{ 或 } \underline{q}^*(t+T) = \underline{B}^{-1}\underline{A}\underline{B}\underline{q}^*(t) \quad (6.2.5)$$

选取矩阵 \underline{B} , 以使 $\underline{B}^{-1}\underline{A}\underline{B}$ 成为对角线形式

$$\underline{B}^{-1}\underline{A}\underline{B} = \text{diag}[\rho_1, \rho_2] \quad (6.2.6)$$

此时(6.2.5)可写为

$$q_1^*(t+T) = \rho_1 q_1^*(t), \quad q_2^*(t+T) = \rho_2 q_2^*(t) \quad (6.2.7)$$

其中 ρ_1 和 ρ_2 是特征方程

$$|\underline{A} - \rho \underline{I}| = 0 \quad (6.2.8)$$

的根。

由矩阵理论知 \underline{A} 和 $\underline{B}^{-1}\underline{A}\underline{B}$ 的特征值相同。

如取基解组 q_1 和 q_2 的起始条件是

$$q_1(0) = 1, \quad q_1'(0) = 0, \quad q_2(0) = 0, \quad q_2'(0) = 1$$

则有 $q_1(T) = a_{11}, \quad q_1'(T) = a_{12}, \quad q_2(T) = a_{21}, \quad q_2'(T) = a_{22}$

将之代入(6.2.2),则得

$$|\underline{A}| = \begin{vmatrix} q_1(T) & q_1'(T) \\ q_2(T) & q_2'(T) \end{vmatrix} \quad (6.2.9)$$

将(6.2.9)代入(6.2.8),则有

$$|\underline{A} - \rho \underline{I}| = \begin{vmatrix} q_1(T) - \rho & q_1'(T) \\ q_2(T) & q_2'(T) - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 - 2b\rho + c = 0 \quad (6.2.10)$$

其中

$$2b = q_1(T) + q_2'(T), \quad c = q_1(T)q_2'(T) - q_2(T)q_1'(T)$$

不难证明上式中的 $c = 1$; 当 $b^2 > 1$ 时, ρ_1 和 ρ_2 都为实根; $b^2 = 1$ 时, ρ_1 和 ρ_2 有相等的根; $b^2 < 1$ 时为一对纯虚根。

从具有周期系数的微分方程理论知, 方程(6.2.1)有一个如下形式的解

$$q_k(t) = \psi_k(t)e^{\lambda_k t} \quad (6.2.11)$$

其中

$$\lambda_k = \frac{1}{T} \ln(\rho_k) \quad (6.2.12)$$

将(6.2.11)代入(6.2.7)则有

$$q_k^*(t+T) = \rho_k \psi_k(t) e^{\lambda_k T}$$

将(6.2.11)中的 t 以 $t+T$ 代入, 并与上式对比, 则得

$$\psi_k(t+T) e^{\lambda_k T} = \psi_k(t) \rho_k \quad (6.2.13)$$

从(6.2.12)知, $e^{\lambda_k T} = \rho_k$, 故有

$$\psi_k(t+T) = \psi_k(t) \quad (6.2.14)$$

从上式知 $\psi_k(t)$ 是以 T 为周期的周期函数。其中 ρ_k 称为特征乘数, $\lambda_k = \frac{1}{T} \ln \rho_k$ 称为特征指数。

由 λ_k 来判断解的稳定性, 因 $\lambda = \frac{1}{T} \ln \rho$, 令 $\rho = |\rho| e^{i \arg \rho}$ (对复数)。

$$\lambda = \frac{1}{T} \{ \ln |\rho| + i \arg \rho \} \quad (6.2.15)$$

若 $\ln |\rho| < 0$, 则 λ 有负实部, 且 $|\rho| < 1$, 故解是渐近稳定的。若 $\ln |\rho| > 0$, 则 $|\rho| > 1$, 故解是不稳定的。如 $\ln |\rho| = 0$, 则 $|\rho| = 1$, 而有

$$\lambda_k = \frac{1}{T} (i \arg \rho_k) \text{ 和 } q_k = \psi_k(t) e^{i \frac{\arg \rho_k}{T} t}$$

则解是稳定的, 因而是有界的, 且该解是概周期的 [因 $\psi_k(t)$ 的周期和 $e^{i \frac{\arg \rho_k}{T} t}$ 的周期不同]。

以上是二阶周期线性系统的弗洛凯定理。

我们知道, 当 $b^2 = 1$ 时, 有重根 $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$ 。当 $\rho_1 = \rho_2 = 1$ 时存在一个以 T 为周期的周期解; 当 $\rho_1 = \rho_2 = -1$ 时, 存在一个以 $2T$ 为周期的周期解。

当 $\rho_1, \rho_2 = 1$ 时,

$$q_k = \psi_k(t) e^{i \frac{\arg \rho_k}{T} t} = \psi_k(t)$$

当 $\rho_1, \rho_2 = -1 = 1 e^{i\pi}$ 时,

$$q_k(t) = \psi_k(t) e^{i \frac{\arg \rho_k}{T} t}$$

因 $q_k(t+T) = \psi_k(t+T) e^{i \frac{\arg \rho_k}{T} (t+T)} = -\psi_k(t+T) e^{i \frac{\arg \rho_k}{T} t}$

因已证明 $\psi_k(t) = \psi_k(t+T)$, 所以有

$$q_k(t+T) = -\psi_k(t) e^{i \frac{\arg \rho_k}{T} t} = -q_k(t)$$

故

$$q_k(t+2T) = -q_k(t+T) = q_k(t)$$

即已证明在 $\rho_1 = \rho_2 = -1$ 时, 解的周期为 $2T$, 即为倍周期分岔。

§ 6.3 马休方程的稳定边界

本节研究线性马休方程

$$q'' + \omega^2(1 - 2\mu \cos \nu t)q = 0 \quad (6.3.1)$$

的稳定边界。我们曾证明当 $b=1$ 时对应周期 T 解和周期 $2T$ 解的稳定边界。下面讨论对应这些解的稳定边界的方程。

对以 $T = \frac{2\pi}{\nu}$ 为周期的解, 因

$$\begin{aligned} \sin k \frac{\nu t}{2} &= \sin k \frac{\nu}{2}(t+T) = \sin \left(\frac{k\nu t}{2} + \frac{k\nu T}{2} \right) \\ &= \sin \left(\frac{k\nu t}{2} + \frac{k\nu 2\pi}{2\nu} \right) \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

对 $k=0, 2, 4, 6, \dots$ 成立。而

$$\cos \frac{k\nu t}{2} = \cos k \frac{\nu}{2}(t+T) = \cos \left(\frac{k\nu t}{2} + k\pi \right) \quad (6.3.3)$$

也只对 $k=0, 2, 4, 6, \dots$ 成立。故可设(6.2.1)的解为

$$q(t) = b_0 + \sum_{k=\text{偶数}}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\nu t}{2} + b_k \cos \frac{k\nu t}{2} \right) \quad (6.3.4)$$

将(6.3.4)代入(6.2.1), 并按 $\sin \nu t, \cos \nu t, \sin \frac{k\nu t}{2}$ 和 $\cos \frac{k\nu t}{2}$ 进行整理, 则得

$$\begin{aligned} &(\omega^2 - \nu^2)a_2 \sin \nu t - \omega^2 \mu a_4 \sin \nu t + (\omega^2 - \nu^2)b_2 \cos \nu t - \omega^2 \mu b_0 \cos \nu t + \\ &\omega^2 \mu b_4 \cos \nu t \left[\omega^2 - \frac{(k\nu)^2}{4} \right] a_k \sin \frac{k\nu t}{2} - \omega^2 \mu \left(a_{k-2} \sin \frac{k\nu t}{2} + a_{k+2} \sin \frac{k\nu t}{2} \right) \times \\ &\left[\omega^2 - \frac{(k\nu)^2}{4} \right] b_k \cos \frac{k\nu t}{2} - \omega^2 \mu \left(b_{k-2} \cos \frac{k\nu t}{2} + b_{k+2} \cos \frac{k\nu t}{2} \right) + b_0 \omega^2 - \mu b_2 = 0 \end{aligned}$$

由谐波平衡原理, 可得

$$\left(1 - \frac{\nu^2}{\omega^2} \right) a_2 - \mu a_4 = 0, \quad k=2$$

$$\left[1 - \frac{(k\nu)^2}{4\omega^2} \right] a_k - \mu(a_{k-2} + a_{k+2}) = 0, \quad k=4, 6$$

常数项

$$b_0 - \mu b_2 = 0$$

$$\left(1 - \frac{\nu^2}{\omega^2} \right) b_2 - \mu(2b_0 + b_4) = 0, \quad k=2$$

和

$$\left[1 - \frac{(k\nu)^2}{4\omega^2} \right] b_k - \mu(b_{k-2} + b_{k+2}) = 0, \quad k=4, 6$$

把上方程写成矩阵的形式,则有

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\nu^2}{\omega^2} & -\mu & 0 & 0 \\ -\mu & 1 - \frac{4\nu^2}{\omega^2} & -\mu & 0 \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{9\nu^2}{\omega^2} & -\mu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_6 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad (6.3.5)$$

和

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2\mu & 1 - \frac{\nu^2}{\omega^2} & -\mu & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{4\nu^2}{\omega^2} & -\mu & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\mu & 1 - \frac{9\nu^2}{\omega^2} & -\mu & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_4 \\ b_6 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad (6.3.6)$$

对以 $2T$ 为周期的解可设其形式为

$$q(t) = \sum_{k \text{ 奇数}}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\nu t}{2} + b_k \cos \frac{k\nu t}{2} \right) \quad (6.3.7)$$

将(6.3.7)代入(6.2.1),用和上面同样的方法可得确定系数的矩阵方程为

$$\begin{pmatrix} 1 + \mu - \frac{\nu^2}{4\omega^2} & -\mu & \cdots & \cdots \\ -\mu & 1 - \frac{9\nu^2}{4\omega^2} & -\mu & \cdots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{25\nu^2}{4\omega^2} & -\mu \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad (6.3.8)$$

和

$$\begin{pmatrix} 1 - \mu - \frac{\nu^2}{4\omega^2} & -\mu & 0 & \cdots \\ -\mu & 1 - \frac{9\nu^2}{4\omega^2} & -\mu & \cdots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{25\nu^2}{4\omega^2} & -\mu \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_5 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad (6.3.9)$$

虽然矩阵方程(6.3.5),(6.3.6),(6.3.8)和(6.3.9)为行列式的秩为

无穷大,但不难证明它们是收敛的。也可证明,当 μ 为小参数时有

$$\nu^* = \frac{2\omega}{k} \quad (k=1,2,3\cdots)$$

下面我们分别对 $k=1,2,3,\cdots$ 时的不稳定域进行讨论。

(1) 第一个域 此时 $k=1$, 对应的解的周期为 $2T$, 从 (6.3.8) 和 (6.3.9) 得

(a) 第一次近似为

$$1 \pm \mu - \frac{\nu^2}{4\omega^2} = 0$$

或
$$\frac{\nu}{\omega} = 2 \left(1 \pm \frac{1}{2} \mu \right) \quad (6.3.10)$$

(b) 第二次近似为

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \mu - \frac{\nu^2}{4\omega^2} & -\mu \\ -\mu & 1 - \frac{9\nu^2}{4\omega^2} \end{vmatrix} = 0$$

把第一次近似 (6.3.9) 代入后, 则

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{\omega} &= 2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\pm \mu + \frac{\mu^2}{8 \pm 9\mu} \right) - \frac{1}{8} \left(\pm \mu + \frac{\mu^2}{8 \pm 9\mu} \right)^2 \right] \\ &= 2 \left(1 \mp \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{16} \mu^2 - \frac{1}{8} \mu^2 \right) = 2 \left(1 \pm \frac{1}{2} \mu - \frac{1}{16} \mu^2 \right) \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

对 $k=1$ 来说, (6.3.11) 是较 (6.3.10) 更精确的表达式。

(2) 第二个域 此时 $k=2$, 对应解的周期为 T , 从 (6.3.5) 和 (6.3.6) 可得

(a) 第一次近似为

$$1 - \frac{\nu^2}{\omega^2} = 0, \quad \therefore \frac{\nu}{\omega} = 1$$

(b) 第二次近似为

$$\left(1 - \frac{\nu^2}{\omega^2} \right) = -\frac{\mu^2}{1 - 4 \frac{\nu^2}{\omega^2}}$$

将第一次近似表达式代入上式, 并按二项式定理展开, 则得

$$\frac{\nu}{\omega} \approx 1 + \frac{1}{6} \mu^2 \quad (6.3.12)$$

和

$$\frac{\nu^2}{\omega^2} = 1 - 2\mu^2$$

或
$$\frac{\nu}{\omega} = 1 - \mu^2 \quad (6.3.13)$$

(3) 第三个域 此时 $k=3$, 对应的解的周期为 $2T$. (6.3.8) 和 (6.3.9), 我们可求在 $\nu = \frac{2\omega}{3}$ 邻域上的解

$$\begin{pmatrix} 1 \pm \mu - \frac{\nu^2}{4\omega^2} & -\mu \\ -\mu & 1 - \frac{9\nu^2}{4\omega^2} \end{pmatrix} = 0$$

或

$$1 - \frac{9}{4} \frac{\nu^2}{\omega^2} = \frac{\mu^2}{1 \pm \mu - \frac{\nu^2}{4\omega^2}}$$

将 $\nu = \frac{2\omega}{3}$ 代入上式方程的右端, 则有

$$1 - \frac{9}{4} \frac{\nu^2}{\omega^2} = \frac{9\mu^2}{8 \pm 9\mu}$$

或

$$\frac{\nu}{\omega} \approx \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left[\frac{9}{8} \mu^2 \pm \left(\frac{9}{8} \right)^2 \mu^4 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \approx \frac{2}{3} \left(1 - \frac{9}{16} \mu^2 \pm \frac{81}{128} \mu^3 \right) \quad (6.3.14)$$

根据方程 (6.3.10) ~ (6.3.14), 我们可在 $\mu - \frac{\nu}{2\omega}$ 的平面上划出其稳定域:

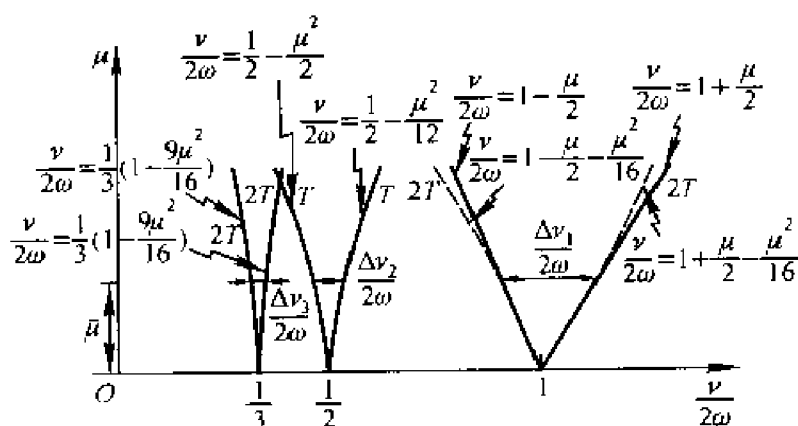


图 6.7

在图 6.7 中, 有 $\frac{\Delta \nu_1}{2\omega} = \mu$; $\frac{\Delta \nu_2}{2\omega} = \frac{7}{12} \mu^2$; $\frac{\Delta \nu_3}{2\omega} = \frac{27}{64} \mu^3$; 很显然 $\frac{\Delta \nu_k}{2\omega}$ 对应 $\frac{\nu}{2\omega} = 1$, 即 $\nu = 2\omega$ 时不稳定域最大。

§ 6.4 平均法求解马休系统

6.4.1 线性马休方程

重写线性马休方程

$$q'' + \omega^2 [1 - 2\mu \cos \nu t] q = 0 \quad (\mu \ll 1) \quad (6.2.1)$$

如用新的时间变量 $\tau = \nu t$, 则 $(\cdot)' = \frac{d}{d\tau}$, (6.2.1) 可写为

$$q'' + \frac{\omega^2}{\nu^2} (1 - 2\mu \cos \tau) q = 0 \quad (6.4.1)$$

取调谐参数 $|\lambda| \ll 1$, 使 $\nu = \omega_0 (1 - \lambda)$ 。将 ν 代入 (6.4.1), 并使 $k = \frac{\omega}{\omega_0}$, 则有

$$q'' + k^2 q = -2k^2 (\lambda - \mu \cos \tau) q \quad (6.4.2)$$

对上式取平均变换

$$q = a(\tau) \cos[k\tau + \varphi(\tau)] \quad (6.4.3a)$$

$$q' = -a(\tau) k \sin[k\tau + \varphi(\tau)] \quad (6.4.3b)$$

微分 (6.4.3a) 并与 (6.4.3b) 比较, 则得

$$a'(\tau) \cos \Phi - a(\tau) \varphi'(\tau) \sin \Phi = 0 \quad (6.4.4a)$$

其中

$$\Phi = [k\tau + \varphi(\tau)]$$

微分 (6.4.3b) 后并和 (6.4.3a) 一起代入 (6.4.2), 可得

$$a'(\tau) \sin \Phi + a(\tau) \varphi'(\tau) \cos \Phi = 2a(\tau) k (\lambda - \mu \cos \tau) \cos \Phi \quad (6.4.4b)$$

从 (6.4.4a) 和 (6.4.4b) 可解出 $a'(\tau)$ 和 $\varphi'(\tau)$ 为

$$a'(\tau) = 2a(\tau) k (\lambda - \mu \cos \tau) \cos[k\tau + \varphi(\tau)] \sin[k\tau + \varphi(\tau)] \quad (6.4.5a)$$

$$\varphi'(\tau) = 2k (\lambda - \mu \cos \tau) \cos^2[k\tau + \varphi(\tau)] \quad (6.4.5b)$$

对上式的右端进行平均, 则得第一次近似的平均方程为

$$\begin{aligned} \bar{a}' &= \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} [a(\tau) k (\lambda - \mu \cos \tau) \sin(2k\tau + 2\varphi)] d\tau \\ &= -\frac{\bar{a}\mu k}{2} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \{ \sin[(2k+1)\tau + 2\varphi] + \\ &\quad \sin[(2k-1)\tau + 2\varphi] \} d\tau \end{aligned} \quad (6.4.6a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}' &= \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \{ k (\lambda - \mu \cos \tau) [1 + \cos(2k\tau + 2\varphi)] \} d\tau \\ &= k\lambda - \frac{k\mu}{2} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \{ \cos[(2k+1)\tau + 2\varphi] + \end{aligned}$$

$$\cos[(2k-1)\tau+2\bar{\varphi}]\}d\tau \quad (6.4.6b)$$

下面讨论主参数共振情况 $k=\frac{1}{2}$ 时的解, 此时有 $\omega_1=2\omega$, 或 $\nu=2\omega$, 将 $k=\frac{1}{2}$ 代入(6.4.6a)和(6.4.6b), 并做积分, 可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}' &= -\frac{1}{2}\bar{a}\mu k \sin 2\bar{\varphi} \\ \varphi' &= k\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu \cos 2\bar{\varphi}\right) \end{aligned} \right\} \quad (6.4.7)$$

为了讨论上式定常解的稳定性, 需将方程化到直角坐标系中来, 为此取变换

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{a} \cos \bar{\varphi} \\ y &= \bar{a} \sin \bar{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (6.4.8)$$

微分(6.4.8), 并将(6.4.7)代入, 可得

$$\left. \begin{aligned} x' &= \bar{a}' \cos \bar{\varphi} - \bar{a} \bar{\varphi}' \sin \bar{\varphi} = -k\left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right) \bar{a} \sin \bar{\varphi} = -k\left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right) y \\ y' &= \bar{a}' \sin \bar{\varphi} + \bar{a} \bar{\varphi}' \cos \bar{\varphi} = k\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu\right) \bar{a} \cos \bar{\varphi} = k\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu\right) x \end{aligned} \right\} \quad (6.4.9)$$

从上式知这是一组对 x 和 y 的一阶线性微分方程组, 可设其解为

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{\rho\tau} \\ y &= c_2 e^{\rho\tau} \end{aligned}$$

将之代入(6.4.9), 则

$$\begin{vmatrix} \rho & k\left(\lambda + \frac{1}{2}\mu\right) \\ -k\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu\right) & \rho \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} = 0$$

特征方程是

$$\rho^2 + k^2\left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{4}\right) = 0 \quad (6.4.10)$$

特征值为

$$\rho_1, \rho_2 = \pm k\left(\frac{\mu^2}{4} - \lambda^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.4.11)$$

从上式知, 解的不稳定条件是

$$\frac{\mu^2}{4} - \lambda^2 > 0, \text{ 或 } \frac{\mu}{2} > |\lambda|$$

因 $\lambda = 1 - \frac{\nu}{2\omega}$, 所以得不稳定条件是

$$1 - \frac{\mu}{2} < \frac{\nu}{2\omega} < 1 + \frac{\mu}{2} \quad (6.4.12)$$

以上的条件和已得到的条件(6.3.10)相同。

6.4.2 阻尼的影响

有阻尼的马休系统是

$$\ddot{q} + 2\zeta\omega\dot{q} + \frac{\omega^2}{\nu^2}(1 - 2\mu\cos\tau)q = 0 \quad (6.4.13)$$

取 $\nu = \omega_0(1 - \lambda)$, $k = \frac{\omega}{\omega_0}$, 则阻尼马休系统成为

$$q'' + 2\zeta kq' + k^2(1 + 2\lambda)(1 - 2\mu\cos\tau)q = 0 \quad (6.4.14)$$

设上方程的解为 $q(\tau) = Q(\tau)e^{-k\zeta\tau}$, 将之代入(6.4.14)后, 则得

$$Q'' + k^2(1 + 2\lambda)(1 - 2\mu\cos\tau)Q - k^2\zeta^2Q = 0$$

如只考虑第一次近似, 则有

$$Q'' + k^2(1 + 2\lambda)(1 - 2\mu\cos\tau)Q = 0 \quad (6.4.15)$$

与无阻尼的(6.4.2)对比后知, 它们是相同的。如 ρ_1 和 ρ_2 为其特征根, 则其解为

$$q = c_1 e^{(\rho_1 - k\zeta)\tau} + c_2 e^{(\rho_2 - k\zeta)\tau} \quad (6.4.16)$$

上解是不稳定的, 若有

$$\rho_{1,2} - k\zeta > 0 \quad (6.4.17)$$

当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 对无阻尼系统从(6.4.2)有

$$\rho_{1,2} = \pm k \left(\frac{\mu^2}{4} - \lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

所以有阻尼时系统的不稳定条件从(6.4.17)得 $\pm \left(\frac{\mu^2}{4} - \lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \zeta > 0$, 如只取正号则有

$$\left[\frac{\mu^2}{4} - \left(1 - \frac{\nu}{2\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} > \zeta \quad (6.4.18)$$

其中

$$\nu = \omega_0(1 - \lambda), k = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}$$

§ 6.5 非线性马休方程

作为非线性马休系统的例子, 我们研究方程

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\omega\zeta\dot{q} + \omega^2 q(1 - 2\varepsilon h\cos\nu t + \varepsilon\gamma q^2) = 0 \quad (6.5.1)$$

有时称上系统为马休-杜芬系统。其中 ϵ 为小参数, $\mu = \epsilon h$, $\nu_j = \epsilon \gamma_j$ 。

取 $\tau = \nu t$, $\nu = \omega_0(1 - \epsilon\lambda)$, $k = \frac{\omega}{\omega_0}$, $(\cdot)' = \frac{d}{d\tau}$, 上方程可写为

$$q'' + k^2 q = -2\epsilon \frac{\omega}{\nu} \zeta q' - 2\epsilon \lambda k^2 q + 2\epsilon \frac{\omega^2}{\nu^2} h q \cos \tau - \epsilon \frac{\gamma \omega^2}{\nu^2} q^3 \quad (6.5.2)$$

为进行平均, 取变换 $q = a(\tau) \cos \Phi$, $q' = -a(\tau) k \sin \Phi$; 其中 $\Phi = (k\tau + \varphi)$, 将 q 对 τ 求导, 并与 q' 对比, 则有

$$a' \cos \Phi - a \varphi' \sin \Phi = 0 \quad (6.5.3)$$

将变换 q 和 q' 代入 (6.5.2), 则得

$$\begin{aligned} & -(a' k \sin \Phi + k^2 a \cos \Phi + a \varphi' k \cos \Phi) + k^2 a \cos \Phi \\ & = 2\epsilon \frac{\omega}{\nu} \zeta a k \sin \Phi - 2\epsilon \lambda k^2 \cos \Phi + \\ & 2\epsilon \frac{\omega^2}{\nu^2} h a \cos \Phi \cos \tau - \epsilon \gamma \frac{\omega^2}{\nu^2} a^3 \cos^3 \Phi \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

从 (6.5.3) 和 (6.5.4) 可解出 a' 和 φ' :

$$\begin{aligned} a' = \epsilon a \left\{ -\frac{\omega}{\nu} \zeta (1 - \cos 2\Phi) + \lambda k \sin 2\Phi - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\nu^2} \frac{h}{k} \{ \sin[(2k+1)\tau + 2\varphi] + \right. \\ \left. \sin[(2k-1)\tau + 2\varphi] \} + \frac{1}{4} \frac{\gamma \omega^2}{\nu^2 k} a^2 (\sin 2\Phi + \sin 4\Phi) \right\} \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

$$\begin{aligned} a \varphi' = \epsilon a \left\{ -\frac{\omega}{\nu} \zeta \sin 2\Phi + \lambda k (1 + \cos 2\Phi) - \frac{\omega^2}{\nu^2} \frac{h}{k} \cos \tau - \right. \\ \left. \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\nu^2} \frac{h}{k} \{ \cos[(2k+1)\tau + 2\varphi] + \cos[(2k-1)\tau + 2\varphi] \} + \right. \\ \left. \frac{1}{4} \frac{\gamma \omega^2}{\nu^2 k} a^2 \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\Phi + \frac{1}{2} \cos 4\Phi \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

下面从上方程组求当 $k = \frac{1}{2}$ 时 (1/2 亚谐共振) 时的第一次近似平均方程

$$\begin{aligned} a' &= \epsilon a \left(-\frac{\omega \zeta}{\nu} - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\nu^2} \frac{h}{k} \sin 2\varphi \right) \\ a \varphi' &= \epsilon a \left(\lambda k - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\nu^2} \frac{h}{k} \cos 2\varphi + \frac{3}{8} \frac{\gamma \omega^2}{\nu^2 k} a^2 \right) \end{aligned}$$

取 $\frac{\omega^2}{\nu^2} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (1 + 2\epsilon\lambda) = k^2 (1 + 2\epsilon\lambda)$, 则上式可写为 $a = a_0 \exp \left(-\frac{\epsilon \omega}{\nu} \zeta \tau \right)$,

$$a' = \epsilon a \left(-\frac{\omega \zeta}{\nu} - \frac{h}{4} \sin 2\varphi \right) \quad (6.5.7)$$

$$a \varphi' = \frac{1}{2} \epsilon a \left(\lambda + \frac{3}{8} \gamma a^2 - \frac{h}{2} \cos 2\varphi \right) \quad (6.5.8)$$

令 $a' = \varphi' = 0$, 则可得定常解:

(a) 平凡解 $a = a_0 = 0$, 即 $q(\tau) = 0$

(b) 非平凡解 从(6.5.7)等于零得 $\sin 2\varphi_0 = -4 \frac{\omega \zeta}{h\nu}$. 将 $\cos 2\varphi_0 = \pm \left[1 - \left(\frac{4\omega \zeta}{h\nu} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ 代入(6.5.8)等于零的方程, 则得

$$\lambda = -\frac{3}{8}\gamma a_0^2 \pm \left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{2\omega \zeta}{\nu} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

将 $\lambda = \left(1 - \frac{\gamma}{2\omega} \right)$ 代入上式, 则

$$\frac{\nu}{2\omega} - 1 = \frac{3}{8}\epsilon\gamma a_0^2 \mp \epsilon \left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{2\omega \zeta}{\nu} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.5.9)$$

(6.5.9)是幅频曲线方程式。该结果与包戈留包夫—米特罗波尔斯基的结果相同。

无阻尼($\zeta=0$)时的幅频方程为

$$\frac{\nu}{2\omega} - 1 = \frac{3\epsilon\gamma}{8}a_0^2 \mp \epsilon \frac{h}{2} \quad (6.5.10)$$

幅频图(1/2亚谐共振曲线)示与图6.8上。

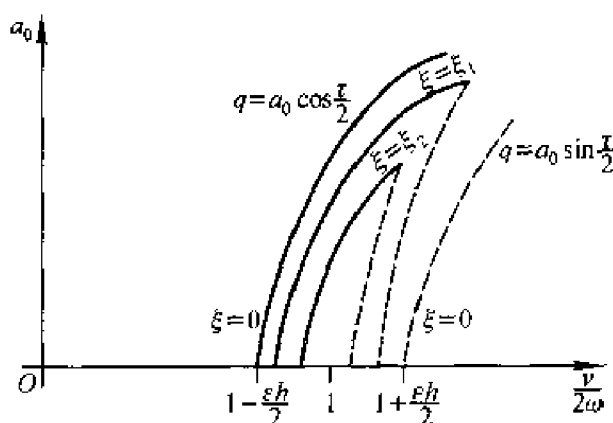


图 6.8

下面证明,主参数共振曲线的左分枝为稳定的,而右分枝是不稳定的。

给振幅和相角以扰动量, $a = a_0 + u$, $\varphi = \varphi_0 + \nu$, 从(6.5.7)可得到线性化扰动方程

$$\left. \begin{aligned} u' &= \epsilon(a_0 + u) \left[-\frac{\omega \zeta}{\nu} - \frac{h}{4} \sin(2\varphi_0 + 2\nu) \right] \\ \nu' &= \frac{1}{2}\epsilon\lambda + \frac{3}{16}\epsilon\gamma(a_0 + u)^2 - \frac{\epsilon h}{4} \cos(2\varphi_0 + 2\nu) \end{aligned} \right\} \quad (6.5.11)$$

将定常解的关系 $\frac{\omega \zeta}{\nu} = -\frac{h}{4} \sin 2\varphi_0$ 代入上式, 则

$$\left. \begin{aligned} u' &= -\epsilon a_0 \frac{h}{2} (\cos 2\varphi_0) v \\ v' &= \frac{\epsilon h}{2} (\sin 2\varphi) v + \epsilon \frac{3}{8} \gamma a_0 u + \frac{1}{2} \left(\epsilon \lambda + \frac{3}{8} \epsilon \gamma a_0^2 - \frac{\epsilon h}{2} \cos 2\varphi_0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.5.12)$$

在推导上方程时,因考虑小扰动,取 $uv = u^2 = v^2 = 0$ 。

取其解 $u = c_1 e^{\rho \tau}$, $v = c_2 e^{\rho \tau}$, 代入 (6.5.12), 则其特征方程

$$\begin{vmatrix} \rho & a_0 \frac{h}{2} \cos 2\varphi_0 \\ -\frac{3}{8} \gamma a_0 & \rho - \frac{h}{2} \sin 2\varphi_0 \end{vmatrix} = 0$$

或

$$\rho \left(\rho - \frac{h}{2} \sin 2\varphi_0 \right) + \frac{3\gamma h}{16} a_0^2 \cos 2\varphi_0 = 0 \quad (6.5.13)$$

从上方程可解出 ρ

$$\rho_{1,2} = \frac{\omega \zeta}{\nu} \pm \left[\left(\frac{\omega \zeta}{\nu} \right)^2 - \frac{3\gamma a_0^2}{4} \frac{h}{4} \cos 2\varphi_0 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.5.14)$$

对于非平凡解 $a_0 \neq 0$, 当 $\cos 2\varphi_0 < 0$ 时, 即主参数共振曲线的右分枝, 对应不稳定的解; 当 $\cos 2\varphi_0 > 0$ 时, 即对应主参数共振曲线的左分枝, 则解是稳定的。当 $\zeta = 0$ 时 (无阻尼), 则有

$$\rho = \pm i \left(\frac{3\gamma h}{16} \right)^{\frac{1}{2}} a_0 \quad (6.5.15)$$

习 题

6.1 在图 E6.1 所示倒置单摆系统中, 质量 $m = 1 \text{ kg}$ 的物块与长 $l = 0.5 \text{ m}$ 的无自重刚性杆固连, 支承点按规律 $y_0 = A_0 \sin \omega t$ 运动, 振幅 $A_0 = 10 \text{ mm}$ 。试求摆微振动稳定时 ω 所满足的条件。

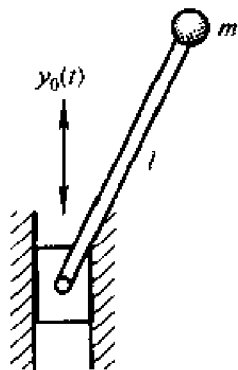


图 E6.1

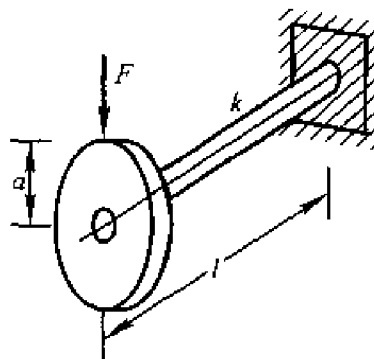


图 E6.2

6.2 图 E6.2 所示扭振中,轴的抗扭刚度为 $k=80 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$,在转动惯量为 $J=0.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的圆盘上,距轴线 $a=0.2 \text{ m}$ 处受力 $F=F_0+F_1 \sin \omega t$ 作用, $F_0=100 \text{ N}$, $F_1=40 \text{ N}$, $\omega=10 \text{ rad/s}$ 。试确定系统微幅振动的稳定性。

6.3 图 E6.3 所示完全柔性的长度为 L 的无自重弦线上吊一摆长为 l ,质量 $m=0.1 \text{ kg}$ 的单摆。摆动过程中弦张力 F 为常数。悬挂点距左端点 $a=0.3L$ 。初始时悬挂点有相对静平衡位置的铅垂位移 $y_0=0.1L$,初速度为零。对以下两种情形讨论摆的稳定性:

(a) $F=40 \text{ N}$, $l=0.3L$;

(b) $F=10 \text{ N}$, $l=0.1L$ 。

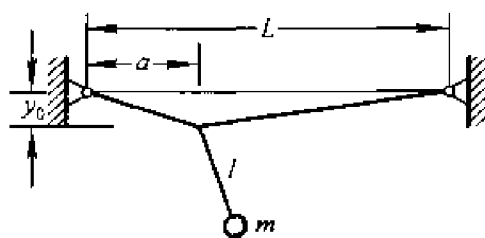


图 E6.3

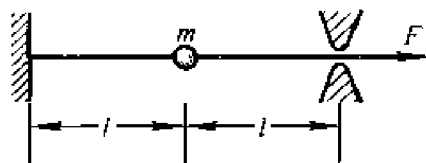


图 E6.4

6.4 图 E6.4 所示质量 $m=0.25 \text{ kg}$ 的物块吊在两根长 $l=0.2 \text{ m}$ 的弦线上。弦中张力按规律 $F=F_0+F_1 \sin \omega t$ 变化,其中 $F_0=20 \text{ N}$, $F_1=10 \text{ N}$, $\omega=25 \text{ rad/s}$ 。试确定物块作微幅铅垂振动的稳定性。

6.5 图 E6.5 所示质量 $m=500 \text{ kg}$ 的小车连接一受拉绳索,绳的另一端与半径 $R=0.1 \text{ m}$ 的鼓轮在点 A 处连接。在平衡状态 ($x=0$),绳长 $l_0=1 \text{ m}$,张力 $F_0=1000 \text{ N}$,轨道距小滑轮 $l_1=0.7 \text{ m}$,绳索截面积 $A=10^{-4} \text{ m}^2$,弹性模量 $E=2 \times 10^5 \text{ MPa}$ 。鼓轮按规律 $\varphi=\varphi_0 \sin \omega t$ 转动,其中 $\varphi_0=0.1 \text{ rad}$, $\omega=10 \text{ rad/s}$ 。试建立小车水平微幅振动的动力学方程并讨论稳定性。

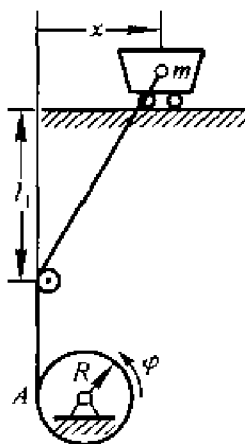


图 E6.5

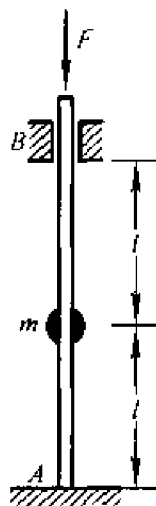


图 E6.6

6.6 在图 E6.6 所示系统中,长度为 $2l$ 的无自重弹性杆 AB 承受交变轴向力

$F = F_0 + F_1 \sin \omega t$, 其中 $F_0 = 50 \text{ N}$, $F_1 = 20 \text{ N}$, $\omega = 30 \text{ rad/s}$ 。杆的中点处固接一质量 $m = 5.2 \text{ kg}$ 的物块。杆的 A 端固定, B 端可滑动, 杆的截面二次矩 $I = 10^{-6} \text{ m}^4$, 弹性模量 $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ 。试建立物块的微幅振动微分方程并讨论稳定性。

6.7 无自重梁在自由端固定一质量 $m = 2 \text{ kg}$ 的物块, 如图 E6.7 所示。梁的截面二次矩 $I = 10^{-8} \text{ m}^4$, 弹性模量 $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ 。梁的长度按规律 $l = l_0 + l_1 \sin \omega t$ 随时间变化, 其中 $l_0 = 1 \text{ m}$, $l_1 = 0.2 \text{ m}$, $\omega = 20 \text{ rad/s}$ 。试讨论物块微幅铅垂振动的稳定性。

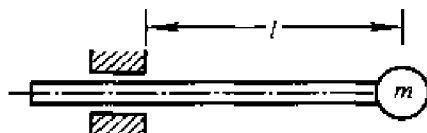


图 E6.7

6.8 研究非线性振动系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (x + \epsilon x^2) = F \cos \omega t$$

周期为 $\frac{4\pi}{\omega}$ 的亚谐解的稳定性。

6.9 对于有弱非线性项的参激振动系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + \epsilon \cos \omega t) x + \epsilon (C \dot{x} + \dot{x}^2 \operatorname{sgn} \dot{x} + B x^3) = 0$$

其中 $\omega \approx 2\omega_0$ 。分别讨论零解和非零周期解的稳定性。

6.10 试用平均法建立参激振动

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 + 2\epsilon \cos 3t) x = 0$$

振幅和相位缓慢变化所满足的微分方程。

第七章 多尺度法

根据以上的分析知,系统的周期解可写为 $x(\mu, t)$ 或 $x(\mu, \tau)$ (其中 τ 为变换尺度后的时间变量),也就是说其解是一个自变量的函数。如果我们对系统引入多个自变量(或多个不同尺度的时间变量,即多个不同单位的时间变量),那么其解也将成为多个自变量的函数,这种将解的展开式考虑成为多个时间自变量函数的方法称为多尺度法。用该法解非保守系统更加方便,也可用它来求具有缓变参数非线性系统的非定常解。

根据式

$$T_n = \epsilon^n t \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (7.0.1)$$

引进一些新的自变量 T_0, T_1, T_2, \dots 。因此对于 t 的导数变为对于 T_n 的偏导数的展开式,即

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \epsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.0.2)$$

设一个自由度非线性振动方程的解可表示成多个不同时间尺度的函数

$$x(t, \epsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (7.0.3)$$

在上式中所需的独立时间尺度变量的个数,取决于需求到哪一阶近似解。如果(7.0.3)算到 $O(\epsilon^2)$,那么独立时间变量应为 T_0 和 T_1 。在式(7.0.3)中如算到 $O(\epsilon^3)$,所以我们需要 T_0, T_1 和 T_2 。

为了确定函数 x_0, x_1, x_2, \dots ,将(7.0.2)和(7.0.3)代入原振动方程式,把所有各项移到方程的左端后,令 $\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2, \dots$ 的系数为零,则可得到 x_0, x_1, x_2, \dots 的线性微分方程组,各方程的解中含有待确定的任意函数,这些任意函数又为不同尺度的时间变量 T_0, T_1, T_2, \dots 的函数,利用消除解中出现的永年项的条件就可确定这些函数。

下面利用多尺度法来分别研究单自由度保守系统、非保守系统、受迫振动系统和具有缓变参数系统、参激系统,以及多自由度系统的解。

§ 7.1 保守系统

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (7.1.1)$$

设非线性函数 $f(x)$ 在原点可展成泰勒级数, 则上式可写为

$$\ddot{x} + \sum_{n=1}^N a_n x^n = 0 \quad (7.1.2)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \quad (7.1.3)$$

而 $f^{(n)}$ 是对于变量 x 的 n 阶导数, 对于原点有 $f(0) = 0$, 且 $f'(0) > 0$. 假设 (7.1.2) 的解可表示为

$$x(t, \epsilon) = \epsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^3 x_3(T_0, T_1, T_2) \quad (7.1.4)$$

将上式和 (7.0.2) 代入 (7.1.2), 并令 $\epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3$ 的系数为零, 则得

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad (7.1.5)$$

$$D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = -2D_0 D_1 x_1 - \alpha_2 x_1^2 \quad (7.1.6)$$

$$D_0^2 x_3 + \omega_0^2 x_3 = -2D_0 D_1 x_2 - D_1^2 x_1 - 2D_1 D_2 x_1 - 2\alpha_2 x_1 x_2 - \alpha_3 x_1^3 \quad (7.1.7)$$

对多尺度法我们取 (7.1.5) 的解为

$$x_1 = A(T_1, T_2) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A} \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (7.1.8)$$

其中 A 为 T_1, T_2 的复函数, 而 \bar{A} 为 A 的共轭函数。 A 将由 x_2 和 x_3 的周期条件来确定。

将 (7.1.8) 代入 (7.1.6) 的右端, 则得

$$D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = -2i\omega_0 D_1 A \exp(i\omega_0 T_0) - \alpha_2 [A^2 \exp(2i\omega_0 T_0) + A\bar{A}] + cc \quad (7.1.9)$$

其中 cc 表示前面各项的共轭函数。

为了使 x_2 的解中不出现永年项, 必有

$$D_1 A = 0 \quad (7.1.10)$$

此时 (7.1.9) 的解可取为

$$x_2 = \frac{\alpha_2 A^2}{3\omega_0^2} \exp(2i\omega_0 T_0) - \frac{\alpha_2}{\omega_0^2} A\bar{A} + cc \quad (7.1.11)$$

将 x_1, x_2 的表达式代入 (7.1.7), 并考虑 (7.1.10), 则得

$$\begin{aligned} D_0^2 x_3 + \omega_0^2 x_3 &= - \left(2i\omega_0 D_2 A - \frac{10\alpha_2^2 - 9\alpha_3 \omega_0^2}{3\omega_0^2} A^2 \bar{A} \right) \exp(i\omega_0 T_0) - \end{aligned}$$

$$\frac{3\alpha_3\omega_1'+2\alpha_2^2}{3\omega_3^2}A^3\exp(3i\omega_0T_1)+cc \quad (7.1.12)$$

为了使解 x_3 中不出现永年项, 必须

$$2i\omega_3D_2A+\frac{9\alpha_3\omega_0^2-10\alpha_2^2}{3\omega_3^2}A^2\dot{A}=0 \quad (7.1.13)$$

设 A 为指数函数的形式, 即

$$A=\frac{1}{2}a\exp(i\beta) \quad (7.1.14)$$

其中 a, β 是 T_2 的实函数。将上式代入(7.1.13), 将实部和虚部分开, 得

$$\left. \begin{aligned} a\alpha' &= 0 \\ \omega_3a\beta' + \frac{10\alpha_2^2-9\alpha_3\omega_0^2}{24\omega_3^2}a^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.1.15)$$

上式中 a, β 右上角的一小撇表示对 T_2 的导数。

从上式知, a 是常数。

故

$$\beta = \frac{9\alpha_3\omega_0^2-10\alpha_2^2}{24\omega_3^2}a^2T_2 + \beta_0$$

其中 β_0 是任意常数。将 β 和 $T_2 = \epsilon^2 t$ 代入(7.1.14)

则得

$$A = \frac{1}{2}a\exp\left(i\frac{9\alpha_3\omega_0^2-10\alpha_2^2}{24\omega_3^2}\epsilon^2a^2t + i\beta_0\right) \quad (7.1.16)$$

将 x_1 和 x_2 及 A 代入(7.1.4), 则有

$$x = \epsilon a \cos(\omega t + \beta) - \frac{\epsilon^2 a^2 \alpha_2}{2\alpha_1} \left[1 - \frac{1}{3} \cos(2\omega t + 2\beta_0) \right] + O(\epsilon^3) \quad (7.1.17)$$

其中

$$\omega = \sqrt{\alpha_1} \left[1 + \frac{9\alpha_3\alpha_1-10\alpha_2^2}{24\alpha_1^2} \epsilon^2 a^2 \right] + O(\epsilon^3) \quad (7.1.18)$$

§ 7.2 非保守系统

如果系统中存在各种类型的阻尼, 则其振动方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon f(x, \dot{x}) \quad (7.2.1)$$

其中 $f(x, \dot{x})$ 是 x 和 \dot{x} 的非线性函数, 对 x 来说指数大于 1。

将(7.0.2)和(7.0.3)代入(7.2.1), 并令等式两端 ϵ 同次幂的系数相等, 可得

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (7.2.2)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + f(x_0, D_0 x_0) \quad (7.2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 x_n + \omega_0^2 x_n &= F(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \\ (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (7.2.4)$$

(7.2.2)的通解仍可写为复数形式

$$x_0 = A(T_1, T_2, \dots) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}(T_1, T_2, \dots) \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (7.2.5)$$

函数 A 将由高次近似解中消去永年项的条件来确定。

将 x_0 代入(7.2.3), 则得

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= -2i\omega_0 D_1 A \exp(i\omega_0 T_0) + \\ &2i\omega_0 D_1 \bar{A} \exp(-i\omega_0 T_0) + f[A \exp(i\omega_0 T_0) + \\ &A \exp(-i\omega_0 T_0), i\omega_0 A \exp(i\omega_0 T_0) - i\omega_0 \bar{A} \exp(-i\omega_0 T_0)] \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

上式中的 $\exp(\pm i\omega_0 T_0)$ 在解 x_1 中将引起永年项, 我们必须适当选择函数 A , 使得 x_1 中不出现永年项, 为此将 $f(x_0, D_0 x_0)$ 展成傅氏级数

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(A, \bar{A}) \exp(in\omega_0 T_0) \quad (7.2.7)$$

其中

$$f_n(A, \bar{A}) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f \exp(-in\omega_0 T_0) dT_0 \quad (7.2.8)$$

所以消除永年项的条件是

$$2iD_1 A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f \exp(-i\omega_0 T_0) dT_0 \quad (7.2.9)$$

如果我们只求第一次近似, 可设 A 仅为 T_1 的函数, 并且将计算到这一项为止。为解方程(7.2.9), 可将 $A(T_1)$ 表示为指数函数的形式

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) \exp[i\beta(T_1)] \quad (7.2.10)$$

此时(7.2.5)式可写为

$$x_0 = a(T_1) \cos \phi, \quad \phi = \omega_0 T_0 + \beta(T_1) \quad (7.2.11)$$

将(7.2.10)代入(7.2.9), 等式两端乘以 $\exp[-i\beta(T_1)]$, 可得

$$i(a' + ia\beta') = \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) \exp(-i\phi) d\phi$$

将实部和虚部分开, 此处及下面的讨论中, 小撇表示对 T_1 的求导, 有

$$a' = -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin \phi f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) d\phi \quad (7.2.12)$$

$$\beta' = -\frac{1}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} \cos \phi f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) d\phi \quad (7.2.13)$$

所以(7.2.11)的第一次近似解为

$$x = a(T_1) \cos[\omega_0 T_1 + \beta(T_1)] + O(\epsilon) \quad (7.2.14)$$

其中 a 和 β 由式(7.2.12)和(7.2.13)确定。

§ 7.3 受迫振动

现用多尺度法研究达芬方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\epsilon\mu\dot{x} - \epsilon\alpha x^3 + K \cos \Omega t \quad (7.3.1)$$

其中 $\mu > 0$, 而 α 可为正(硬式弹性特性), 或为负(软式弹性特性)。

下面研究主共振情况下的近似解。

$$\text{取} \quad \Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma \quad (7.3.2)$$

其中 $\sigma = O(1)$ 。调谐参数 σ 是 Ω 和 ω_0 接近程度的定量描述。参数 σ 还将帮助我们识别导致永年项的一些因素。如欲使共振干扰力不引起永年项, 应设 $K = \epsilon k$ 。

如果我们只采用两个不同的时间尺度 T_0, T_1 , 则(7.0.3)将变成下列形式

$$x(t, \epsilon) = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) + \cdots \quad (7.3.3)$$

干扰力也用 T_0, T_1 表示

$$K \cos \Omega t = \epsilon k \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (7.3.4)$$

将(7.3.3)和(7.3.4)代入(7.3.1), 令等式两端的 ϵ^j, ϵ 的系数相等, 则得

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (7.3.5)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - 2\mu D_0 x_0 - \alpha x_0^3 + k \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (7.3.6)$$

(7.3.5)的通解可写为

$$x_0 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}(T_1) \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (7.3.7)$$

其中 $A(T_1)$ 将由 x_1 的周期性条件确定。将 $\cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)$ 用复数形式表示, 并把 x_0 代入(7.3.6), 则得

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -[2i\omega_0(A' + \mu A) + 3\alpha A^2 \bar{A}] \exp(i\omega_0 T_0) - \alpha A^3 \exp(3i\omega_0 T_0) + \frac{1}{2} k \exp[i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)] + cc \quad (7.3.8)$$

其中 cc 代表前面各项的共轭复数。欲使 x_1 有周期解, 应设

$$2i\omega_0(A' + \mu A) + 3\alpha A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} k \exp(i\sigma T_1) = 0 \quad (7.3.9)$$

为了求出函数 A , 现将 A 表示为指数函数

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta) \quad (7.3.10)$$

其中 a, β 都是实数, 将上式代入 (7.3.9), 将实部和虚部分开, 得到

$$\left. \begin{aligned} a' &= -\mu a + \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta) \\ a\beta' &= \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 - \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (7.3.11)$$

如设

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta \quad (7.3.12)$$

则 (7.3.11) 将变为

$$\left. \begin{aligned} a' &= -\mu a + \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \sin \gamma \\ a\gamma' &= \sigma a - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 + \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (7.3.13)$$

上式和我们用平均法研究一个自由度分段线性系统的受迫振动时所得的结果类似。根据 § 2.1 知, 方程 (7.3.13) 即相迹方程。

为了得到定常解, 令 (7.3.13) 的右端等于零, 则得

$$\left[\mu^2 + \left(\sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^2 \right)^2 \right] a^2 = \frac{k^2}{4\omega_0^2} \quad (7.3.14)$$

这是振幅 a 作为调谐参数 σ (即干扰力频率) 和干扰力振幅 K 的隐函数方程, 或称为共振曲线方程。为了计算共振曲线, 常将式 (7.3.14) 对 σ 解出

$$\sigma = \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^2 \pm \left(\frac{k^2}{4\omega_0^2 a^2} - \mu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.3.15)$$

大量的计算结果表明, 共振曲线所发生的拐弯、跳跃和滞后等现象, 与 § 3.3 中的结论相类似。

令 α 和 μ 值固定不变, 对于几个不同的 σ 值, 可从式 (7.3.14) 计算响应振幅随着干扰力幅值的变化规律 (如图 7.1 所示)。从图 7.1 知, 随着 σ 值的不同, 有些曲线是多值的, 而另一些则是单值的。

以上的理论结果, 不难用实验证明, 如果做试验时干扰力频率 Ω 保持不变, 令干扰力幅值缓慢地变化, 则可以观察到类似的跳跃现象。设试验从图 7.2 上面的点 1 开始, 到 K 增加时, 振幅 a 沿曲线缓慢地增加, 经过点 2 达到点 3, K 继续增加时, 发生从点 3 到 4 的跳跃现象, 此时振幅突然增大, 同时 r 也产生大的位移。此后 a 缓慢地随着 K 的增加而增加。如果这个过程反过来, 则当 K 减少时, a 缓慢地从 5 减到 6 点, 在 6 点发生跳跃而到点 2, 此时伴随着 a 的突然减小和 r 的大移位, 此后 a 缓

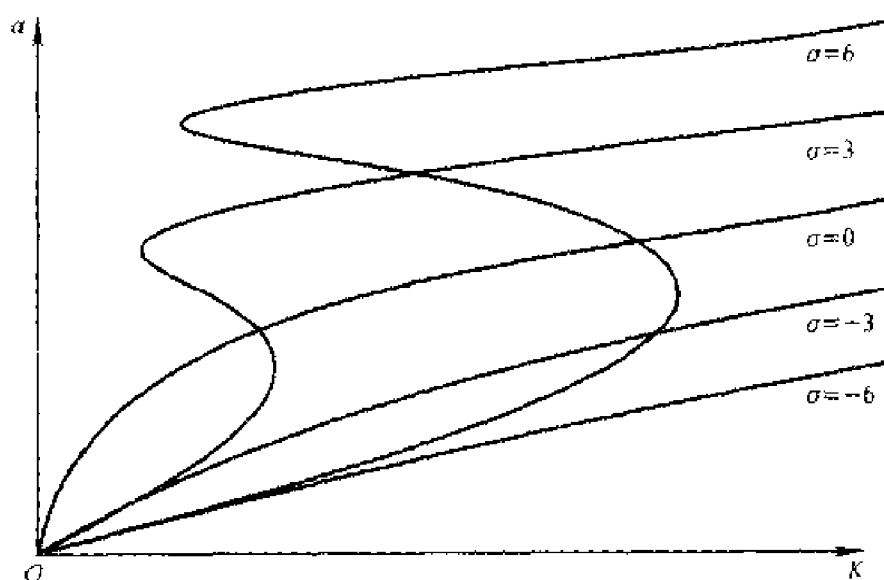


图 7.1

慢地随 K 减小而减小。

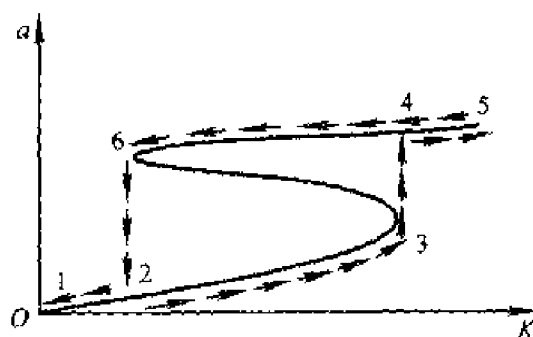
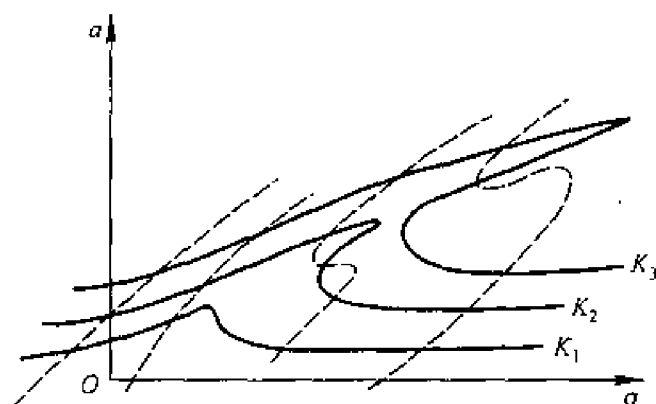


图 7.2

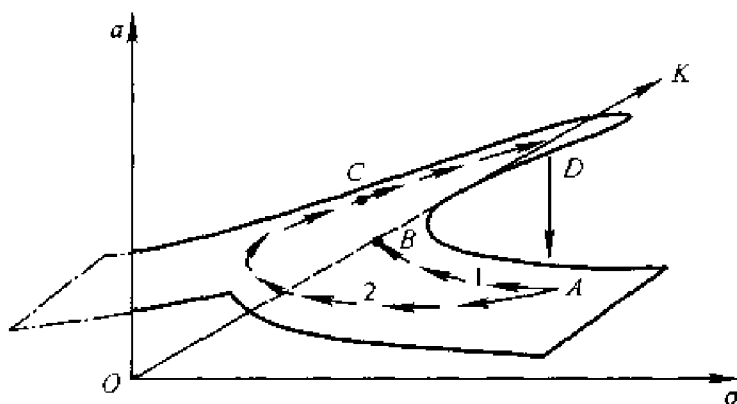
在同一 K 值存在两个以上的定常解时,由起始条件决定哪一个解代表系统的真实响应。因而与线性系统不同,非线性系统的定常解决定于起始条件,在下面讨论存在两个定常解情况的状态平面时,将进一步讨论这个问题。

还可利用突变理论来研究跳跃现象。如 μ 和 α 值给定,则(7.3.14)式表示曲面 $[a=a(\sigma, k)]$ 的方程。在图 7.3(a)上, K 为常数值的几个平面和此曲面的交线用实线表示;而 σ 为常数值的平面与此曲面的交线则用虚线表示。前者是很明显的 $K_1 < K_2 < K_3$,后者就是图 7.1 上的曲线。

在图 7.3(b)上,如果定常过程从 A 点出发,沿路径 1(只有 σ 变化)进行,那么将发生从点 B 到点 C 的跳跃(突变)。另一方面,如果从 A 点出发沿路径 2(要求 K, σ 两者都变化)进行,那么振幅将缓慢地增加到 C 点,然后至 D 点,就存在一个跳跃(突变)。用这种方法,所有可能响应和定



(a)



(b)

图 7.3

常过程都可以用单个曲面表示出来,并且可同时进行观察。

跳跃现象是(7.3.13)第二个方程中指出的相位和振幅的非线性相互影响的结果。

对于有正阻尼的线性系统,定常受迫振动的解和起始条件无关。而在非线性系统中,起始条件则起着决定性的作用。每当存在多于一个稳定的定常解时,起始条件就决定了系统的物理上实现哪一个定常解。存在这样的例子,即起始条件的微小改变会引起系统定常解的很大的改变。为了说明这个问题,利用方程(7.3.13)计算状态平面的轨线, σ 值取在共振曲线的拐弯区间(即此时一个 σ 值有三个不同的振幅值)。这些轨线示于图 7.4 上。

P_1 、 P_3 点是稳定焦点, P_2 是鞍点。在阴线区域内所有的起始条件都导致共振曲线上分支 P_1 上的稳定解,因非阴线区域内的所有起始条件都导致共振曲线下分支 P_3 上的定常解。箭头指示了运动的方向,因而整个阴线区域构成了 P_1 点的吸引区域,整个非阴线区域构成了 P_3 点的

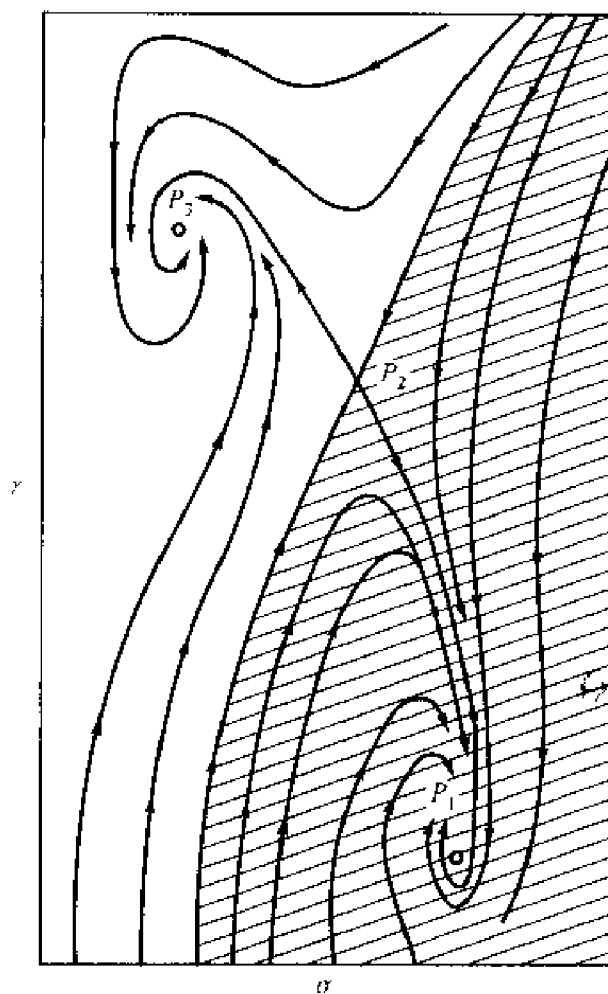


图 7.4

吸引区域。

总之,对于小扰动的稳定性问题较容易处理,因为扰动方程可线性化。但为了弄清大范围的稳定性问题,并确定起始条件和系统参数的影响,就必须利用上面所用的状态平面,或导出一些运动的初积分,或总能量,或李雅普诺夫函数。正如本节分析所证明的,由两个一阶微分方程所确定的振动运动,用相平面研究是非常合适的。虽然其他方法不受系统自由度数的限制,但却受能否找到运动初积分或李雅普诺夫函数的限制。对正则系统来说,可以利用某些形式的哈密顿函数,但对一般系统,仅有极少数几个问题才知运动初积分和李雅普诺夫函数。

§ 7.4 非定常振动

在第五章中我们曾经用渐近法和平均法研究了带有慢变参数的非线性振动系统,在本节中我们用多尺度法来研究这个问题。为简单起见,设

在具有常参数的非线性系统上作用有频率和振幅都依赖于时间的干扰力,此时系统的振动方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) + 2\varepsilon k(\varepsilon t) \cos[\theta(t, \varepsilon t)] \quad (7.4.1)$$

其中 $\dot{\theta} = \Omega$ 是干扰力瞬时频率,在共振区中它接近于固有 ω_0 。

用多尺度法,对方程(7.4.1)求形式为

$$x = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \cdots \quad (7.4.2)$$

的近似解。将上式代入(7.4.1),并将导数展开,令等式两端 ε 同次幂的系数相等,则得

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (7.4.3)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + f(x_0, D_0 x_0) + 2K(T_1) \cos[\theta(T_0, T_1)] \quad (7.4.4)$$

设(7.4.3)的解为

$$x_0 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + cc \quad (7.4.5)$$

将上式代入(7.4.4),则有

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= -2i\omega_0 A' \exp(i\omega_0 T_0) + K \exp(i\theta) + \\ &cc + f[A \exp(i\omega_0 T_0) + cc, i\omega_0 A \exp(i\omega_0 T_0) + cc] \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

因我们只研究 $\dot{\theta}$ 接近 ω_0 的情况,且因 $\dot{\theta}$ 是慢变的,可设

$$\theta = \omega_0 T_0 + \nu(T_1) \quad (7.4.7)$$

所以

$$\dot{\theta} = \omega_0 + \varepsilon \nu'(T_1) = \omega_0 + \varepsilon \sigma(T_1)$$

上式中一小点表示对 t 求导,一小撇表示对 T_1 求导。在(7.4.6)中为了使 x_1 不产生永年项,必使

$$2i\omega_0 A' - K \exp(i\nu) - f_1(A, \bar{A}) = 0 \quad (7.4.8)$$

将 $f(x_0, D_0 x_0)$ 展成傅氏级数

$$f(x_0, D_0 x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n(A, \bar{A}) \exp(in\omega_0 T_0) + cc]$$

故

$$\begin{aligned} f_1(A, \bar{A}) &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[A \exp(i\omega_0 T_0) + cc, \\ &i\omega_0 A \exp(i\omega_0 T_0) + cc] \exp(-i\omega_0 T_0) dT_0 \end{aligned} \quad (7.4.9)$$

把 A 表示成指数函数

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta)$$

其中 a, β 都是 T_1 的实函数,则(7.4.8)变成

$$i\omega_0(a' - ia\beta') - K \exp[i\gamma(T_1)] - f_1(A, \bar{A}) \exp(-i\beta) = 0 \quad (7.4.10)$$

其中 $r(T_1) = \nu(T_1) - \beta(T_1) \quad (7.4.11)$

设 $\psi = \omega_0 T_0 + \beta(T_1)$, 故 $d\psi = [\omega_0 + O(\epsilon)]dT_0$, (7.4.9) 乘以 $\exp(-i\beta)$, 可得

$$f_1 \exp(-i\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi+\beta} f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) (\cos \psi - i \sin \psi) d\psi + O(\epsilon)$$

考虑上式的结果, 将(7.4.10)分成实部和虚部, 则得

$$a' = \frac{K \sin \gamma}{\omega_0} - \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (7.4.12)$$

和

$$\gamma' = \sigma + \frac{K \cos \gamma}{a\omega_0} + \frac{1}{2a\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (7.4.13)$$

故第一次近似的非定常解为

$$x_0 = a \cos(\theta - \gamma) + O(\epsilon) \quad (7.4.14)$$

其中 a 和 γ 由式(7.4.13)和(7.4.14)确定。

§ 7.5 参激系统

为研究非线性特性对参激系统的影响, 现讨论方程

$$\ddot{u} + (\delta + 2\epsilon \cos 2t)u = \epsilon f(u, \dot{u}) \quad (7.5.1)$$

它是一个非线性马休系统。

下面我们讨论系统的主参数共振即 $\delta \approx 1$, 并求其第一次近似解。

为考虑非线性项和参激项对解的振幅和相位的影响, 以多尺度法求解时设

$$u(t, \epsilon) = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_1, T_1) + \dots \quad (7.5.2)$$

其中 $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t$ 。将(7.5.2)代入(7.5.1), 并令等式两端 ϵ^0 和 ϵ 的系数相等, 则有

$$D_0^2 u_0 + \delta u_0 = 0 \quad (7.5.3)$$

$$D_0^2 u_1 + \delta u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2u_0 \cos 2T_0 + f(u_0, D_0 u_0) \quad (7.5.4)$$

(7.5.3)的通解可设为

$$u_0 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}(T_1) \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (7.5.5)$$

其中 $\delta = \omega_0^2$, 将(7.5.5)代入(7.5.4)

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2i\omega A' \exp(i\omega T_0) - \bar{A} \exp[i(\omega + 2)T_0] - \bar{A} \exp[-i(\omega + 2)T_0] + cc + f\{A \exp(i\omega T_0) + \bar{A} \exp(-i\omega T_0), i\omega[A \exp(i\omega T_0) - \bar{A} \exp(-i\omega T_0)]\} \quad (7.5.6)$$

其中的 $(\cdot)'$ 表示对 T_1 的微分,为表示 δ 在1的邻域上,设

$$1 \approx \omega + \varepsilon\sigma \quad (7.5.7)$$

则 $(2-\omega)T_0$ 可表示为

$$(2-\omega)T_0 = \omega T_0 + 2\varepsilon\sigma T_0 = \omega T_0 + 2\sigma T_1 \quad (7.5.8)$$

为消除(7.5.6)中的永年项,考虑(7.5.8)后,得

$$2i\omega A' = -A \exp(2i\sigma T_1) + \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \exp(-i\omega T_0) dT_0 \quad (7.5.9)$$

设 $A = \frac{1}{2}a \exp(i\beta)$,其中 a 和 β 为实数,代入上式并将其实部和虚部分离,则有

$$a' = -\frac{a}{2\omega} \sin(2\sigma T_1 - 2\beta) - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \sin \phi f(a \cos \phi, -\omega a \sin \phi) d\phi \quad (7.5.10)$$

$$a\beta' = +\frac{a}{2\omega} \cos(2\sigma T_1 - 2\beta) - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \cos \phi f(a \cos \phi, -\omega a \sin \phi) d\phi \quad (7.5.11)$$

其中 $\phi = \omega T_0 + \beta$,故第一次近似解为

$$u = a \cos(\omega T_0 + \beta) + O(\varepsilon) \quad (7.5.12)$$

其中 a 和 β 由(7.5.10)和(7.5.11)确定,它们可化成自治系统

$$a' = -\frac{a}{2\omega} \sin \phi - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \sin \phi f(a \cos \phi, -\omega a \sin \phi) d\phi \quad (7.5.13)$$

$$a\phi' = 2\sigma a - \frac{a}{\omega} \cos \phi + \frac{1}{\pi\omega} \int_0^{2\pi} \cos \phi f(a \cos \phi, -\omega a \sin \phi) d\phi \quad (7.5.14)$$

$$\text{其中} \quad \phi = 2\sigma T_1 - 2\beta \quad (7.5.15)$$

从(7.5.12)和(7.5.13)可消掉 β ,则

$$u = a \cos\left(t - \frac{1}{2}\phi\right) + O(\varepsilon) \quad (7.5.16)$$

下面利用(7.5.13)和(7.5.14)来研究马休-达芬系统。对具有线性阻尼的达芬系统,有 $f = -\alpha u^3 - 2\mu\dot{u}$,将之代入(7.5.13)和(7.5.14),则得

$$a' = -\frac{\alpha a}{2\omega} \sin \phi - \mu a \quad (7.5.17)$$

$$a\psi' = 2\sigma a - \frac{a}{\omega} \cos \psi - \frac{3\alpha}{4\omega} a^3 \quad (7.5.18)$$

在这种情况下,非线性弹性特性是通过相角 ψ 的变化来影响振幅的。为求定常解,令 $a' = \psi' = 0$, 其非平凡解确定于下列方程

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi &= -2\omega\mu \\ \cos \psi &= 2\sigma\omega - \frac{3}{4}\alpha a^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.5.19)$$

以上的结果和上一章用平均法研究非线性马休时所得的结果完全相同。

取 $\omega = 1 + \varepsilon\sigma$ 后, 则第一次近似定常解的振幅为

$$a = \left[\frac{8\sigma}{3\alpha} \pm \frac{4}{3\alpha} (1 - 4\mu^2)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{1}{2} \quad (7.5.20)$$

只有当 a 为正时,才存在定常解。因此, 2μ 必须小于 1, 即激励的幅值必须大于阻尼系数。当该条件满足时, 当 $\sigma > 0$ 时, 如 $|\sigma| < \frac{1}{2}(1 - 4\mu^2)^{\frac{1}{2}}$ 则

只可能有一个定常解; 若 $\sigma > \frac{1}{2}(1 - 4\mu^2)^{\frac{1}{2}}$ 则同时可能有两个解。若这些

解都是稳定的, 则一个应能在实验中看到。定常解的稳定条件也和上章完全相同, 这里就不再重复了。由 (7.5.20) 画的幅频曲线示于图 7.5 上^[32]。

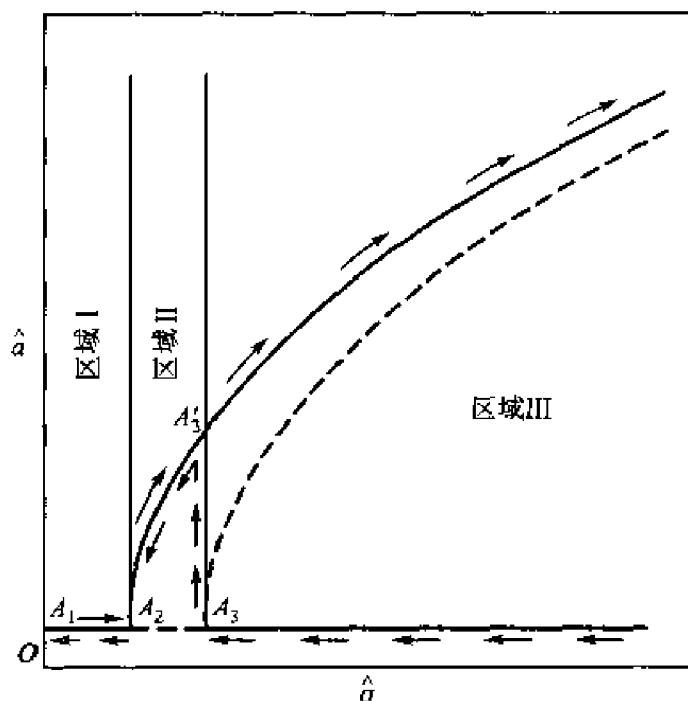


图 7.5

§ 7.6 多自由度受迫振动系统

作为多自由度受迫振动系统的例子,我们讨论具有立方非线性项的两自由度受迫振动系统

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = -2\hat{\mu}_1 \dot{u}_1 + \alpha_1 u_1^3 + \alpha_2 u_1^2 u_2 + \alpha_3 u_1 u_2^2 + \alpha_4 u_2^3 + F_1 \cos(\Omega t + \tau_1) \quad (7.6.1)$$

$$\ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = -2\hat{\mu}_2 \dot{u}_2 + \alpha_5 u_1^3 + \alpha_6 u_1^2 u_2 + \alpha_7 u_1 u_2^2 + \alpha_8 u_2^3 + F_2 \cos(\Omega t + \tau_2) \quad (7.6.2)$$

假设 $\omega_2 > \omega_1$, 我们研究主共振 $\omega_1 \approx \Omega$ 或 $\omega_2 \approx \Omega$ 情况下的解,为此,设解的形式为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \epsilon u_{11}(T_0, T_2) + \epsilon^3 u_{13}(T_0, T_2) + \cdots \\ u_2 &= \epsilon u_{21}(T_0, T_2) + \epsilon^3 u_{23}(T_0, T_2) + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (7.6.3)$$

因非线性项是立方的,所以在解中将不会出现 T_1 。此外,为了使阻尼、非线性和激励等因素将同时出现在摄动方程中,我们设 $\hat{\mu}_n = \epsilon^2 \mu_n$ 和 $F_n = \epsilon^2 f_n$ 。将(7.6.3)代入(7.6.1)和(7.6.2),并令等式两端 ϵ 的同阶的系数相等,则有 ϵ 阶方程

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} &= 0 \\ D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.6.4)$$

ϵ^3 阶方程

$$D_0^2 u_{13} + \omega_1^2 u_{13} = -2D_0(D_1 u_{11} + \mu_1 u_{11}) + \alpha_1 u_{11}^3 + \alpha_2 u_{11}^2 u_{21} + \alpha_3 u_{11} u_{21}^2 + \alpha_4 u_{21}^3 + f_1 \cos(\Omega T_0 + \tau_1) \quad (7.6.5)$$

$$D_0^2 u_{23} + \omega_2^2 u_{23} = -2D_0(D_1 u_{21} + \mu_2 u_{21}) + \alpha_5 u_{11}^3 + \alpha_6 u_{11}^2 u_{21} + \alpha_7 u_{11} u_{21}^2 + \alpha_8 u_{21}^3 + f_2 \cos(\Omega T_0 + \tau_2) \quad (7.6.6)$$

设(7.6.4)的解为

$$\left. \begin{aligned} u_{11} &= A_1(T_2) \exp(i\omega_1 T_0) + cc \\ u_{21} &= A_2(T_2) \exp(i\omega_2 T_0) + cc \end{aligned} \right\} \quad (7.6.7)$$

如果在系统中存在内共振关系, $\omega_2 \approx 3\omega_1$, 并引入调谐参数 σ_1 , 则有

$$\omega_2 = 3\omega_1 + \epsilon^2 \sigma_1 \quad (7.6.8)$$

下面分别讨论 $\omega_1 \approx \Omega$ 和 $\omega_2 \approx \Omega$ 时的渐近解。

7.6.1 $\Omega \approx \omega_1$ 情况

引入第二个调谐参数 σ_2 , 设

$$\Omega = \omega_1 + \epsilon^2 \sigma_2 \quad (7.6.9)$$

将(7.6.7)代入(7.6.5)和(7.6.6),在考虑关系(7.6.8)和(7.6.9)后可解条件为

$$\left. \begin{aligned} & -2i\omega_1(A_1' + \mu_1 A_1) + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + 2\alpha_3 A_2 \bar{A}_2 A_1 + \\ & \quad \alpha_2 A_2 \bar{A}_1^2 \exp(i\sigma T_2) + \frac{1}{2} f_1 \exp(i\sigma_2 T_2 + \tau_1) = 0 \\ & -2i\omega_2(A_2' + \mu_2 A_2) + \alpha_5 A_1^3 \exp(-i\sigma T_2) + \\ & \quad 3\alpha_8 A_2^2 \bar{A}_2 + 2\alpha_6 A_1 \bar{A}_1 A_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.6.10)$$

设 $A_n = \frac{1}{2} a_n \exp(i\theta_n)$ (其中 a_n 和 θ_n 都为实数), 代入上式, 将实部和虚部分开后则得

$$8\omega_1(a_1' + \mu_1 a_1) = a_2 a_1^2 a_2 \sin \gamma_1 + 4f_1 \sin \gamma_2 \quad (7.6.11)$$

$$8\omega_2(a_2' + \mu_2 a_2) = -\alpha_5 a_1^3 \sin \gamma_1 \quad (7.6.12)$$

$$8\omega_1 a_1 \theta_1' = -(3\alpha_1 a_1^2 + 2\alpha_3 a_2^2) a_1 - \alpha_2 a_1^2 a_2 \cos \gamma_1 - 4f_1 \cos \gamma_2 \quad (7.6.13)$$

$$8\omega_2 a_2 \theta_2' = -(3\alpha_8 a_2^2 + 2\alpha_6 a_1^2) a_2 - \alpha_5 a_1^3 \cos \gamma_1 \quad (7.6.14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1 \\ \gamma_2 &= \sigma_2 T_2 - \theta_1 + \tau_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.6.15)$$

令 $a_n' = \theta_n' = 0$, 则可得确定定常解的方程

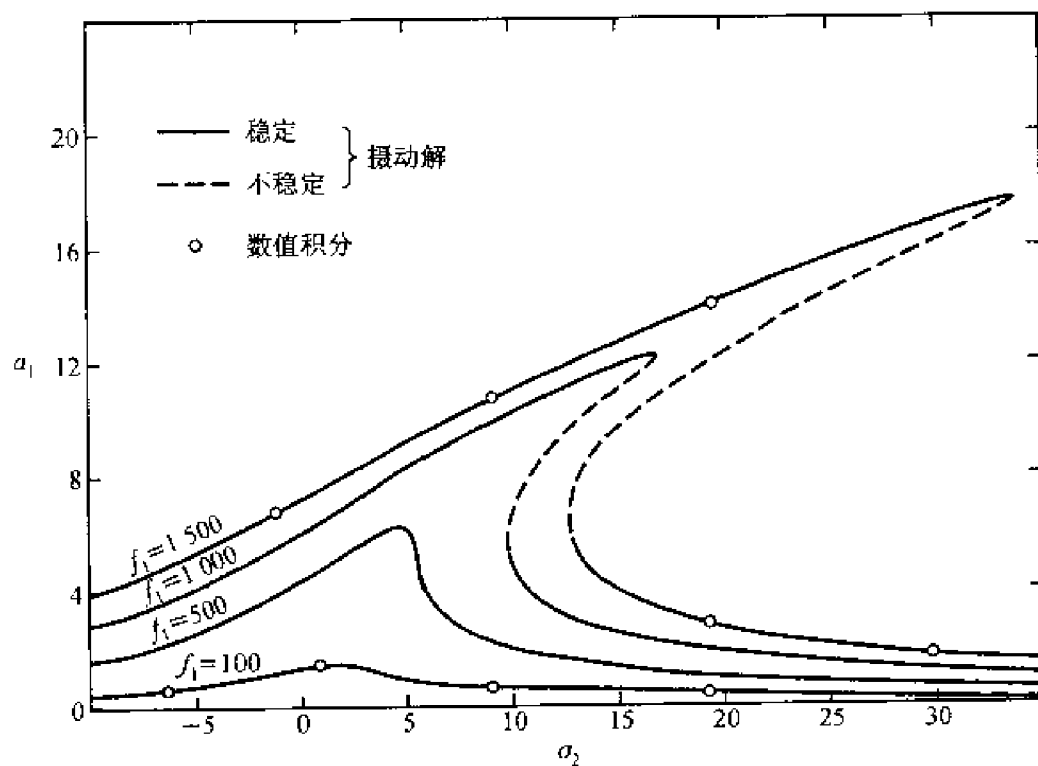
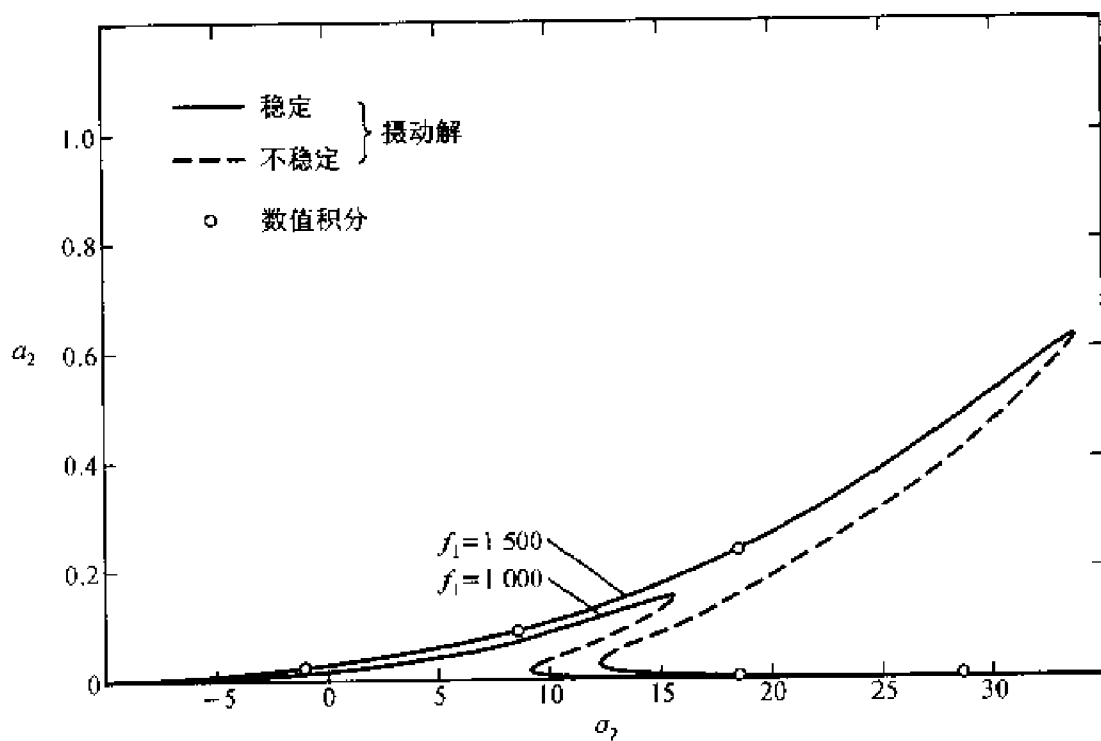
$$8\omega_1 \mu_1 a_1 - \alpha_2 a_1^2 a_2 \sin \gamma_1 - 4f_1 \sin \gamma_2 = 0 \quad (7.6.16)$$

$$8\omega_2 \mu_2 a_2 + \alpha_5 a_1^3 \sin \gamma_1 = 0 \quad (7.6.17)$$

$$8\omega_1 a_1 a_2 + (3\alpha_1 a_1^2 + 2\alpha_3 a_2^2) a_1 + \alpha_2 a_1^2 a_2 \cos \gamma_1 + 4f_1 \cos \gamma_2 = 0 \quad (7.6.18)$$

$$8\omega_2 a_2 (3\sigma_2 - \sigma_1) + (3\alpha_8 a_2^2 + 2\alpha_6 a_1^2) a_2 + \alpha_5 a_1^3 \cos \gamma_1 = 0 \quad (7.6.19)$$

图 7.6 和图 7.7 给出了当 $\Omega \approx \omega_1$ 时对应于不同激励幅值的共振曲线。 a_1 的形式与单自由度的共振曲线图 7.3 相似。对(7.6.1)和(7.6.2)进行数值积分, 其结果在图上用小圆圈表示, 从图知, a_2 虽不为零, 但 a_2 与 a_1 相比较小, 故系统的响应在实际上是由其第一阶模态组成。这个特性在多自由度系统中是一种典型的现象, 即在多自由度系统中, 当激励的频率只与第一阶模态的频率重合时, 虽然各阶模态是耦合的, 甚至有内共振存在, 其和其他高阶模态的相互影响也可忽略, 另外, 在下一节将表明, 当某高阶模态与低阶模态有内共振关系时, 以高阶模态的频率进行激励, 低阶模态的响应将会受到显著的影响。

图 7.6 $\omega_2 \approx 3\omega_1, \Omega \approx \omega_1$ 图 7.7 $\omega_2 \approx 3\omega_1, \Omega \approx \omega_1$

7.6.2 $\Omega \approx \omega_2$ 情况

在此引入第二个调谐参数 σ_2 , 则

$$\Omega = \omega_2 + \varepsilon^2 \sigma_2 \quad (7.6.20)$$

仍用(7.6.8)定义 σ_1 , 则从(7.6.5)和(7.6.6)得到消去永年项的条件是

$$\begin{aligned} & -2i\omega_1(A_1' + \mu_1 A_1) + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + 2\alpha_3 A_2 \bar{A}_2 A_2 + \\ & \alpha_2 A_2 \bar{A}_1^2 \exp(i\sigma T_2) = 0 \end{aligned} \quad (7.6.21)$$

$$\begin{aligned} & -2i\omega_2(A_2' + \mu_2 A_2) + 3\alpha_8 A_2^2 \bar{A}_2 + 2\alpha_6 A_2 A_1 \bar{A}_1 + \\ & \alpha_5 A_1^3 \exp(-i\sigma_1 T_2) + \frac{1}{2} f_2 \exp(i\sigma_2 T_2 + \tau_2) = 0 \end{aligned} \quad (7.6.22)$$

设 $A_m = a_m \exp(i\theta_m)$ 代入上式, 将实部和虚部分开, 则得

$$8\omega_1(a_1' + \mu_1 a_1) - \alpha_2 a_2 a_1^2 \sin \gamma_1 = 0 \quad (7.6.23)$$

$$8\omega_1 a_1 \theta_1' + 3\alpha_1 a_1^3 + 2\alpha_3 a_1 a_2^2 + \alpha_2 a_2 a_1^2 \cos \gamma_1 = 0 \quad (7.6.24)$$

$$8\omega_2(a_2' + \mu_2 a_2) + \alpha_5 a_1^3 \sin \gamma_1 - 4f_2 \sin \gamma_2 = 0 \quad (7.6.25)$$

$$8\omega_2 a_2 \theta_2' + 3\alpha_8 a_2^3 + 2\alpha_6 a_2 a_1^2 + \alpha_5 a_1^3 \cos \gamma_1 + 4f_2 \cos \gamma_2 = 0 \quad (7.6.26)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \sigma_1 T_2 - 3\theta_1 + \theta_2 \\ \gamma_2 &= \sigma_2 T_2 - \theta_2 + \tau_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.6.27)$$

令 $a_1' = 0$ 和 $\theta_1' = 0$ 则可依之求得定常解, 与上一节不同的是, 当 a_2 不是零时, a_1 可能是零也可能不是零。当 a_1 为零时, a_2 的变化也和单自由度的响应类似, 如图 7.8 和图 7.9 所示。当 a_1 不为零时, 它有可能比 a_2 大很多, 这意味着内共振关系是能量从高阶模态向低阶模态传递的一种机制。

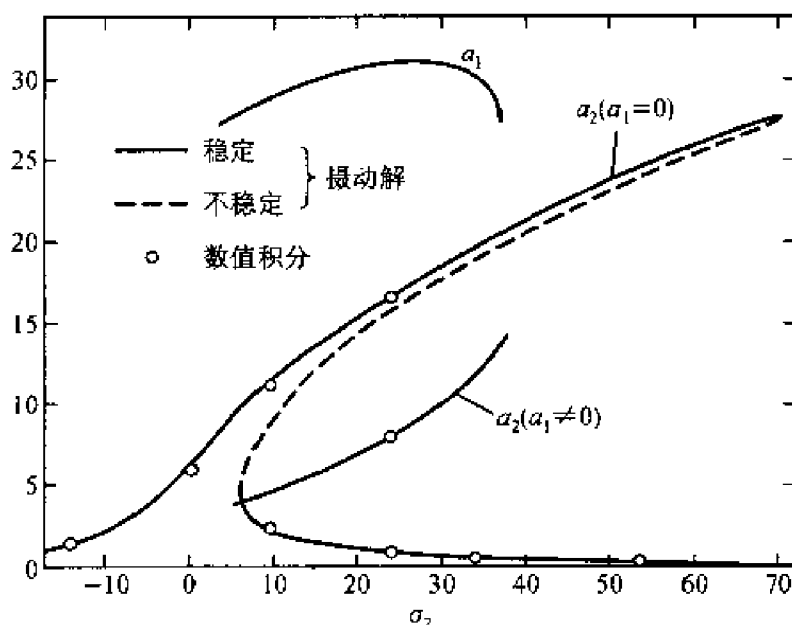


图 7.8

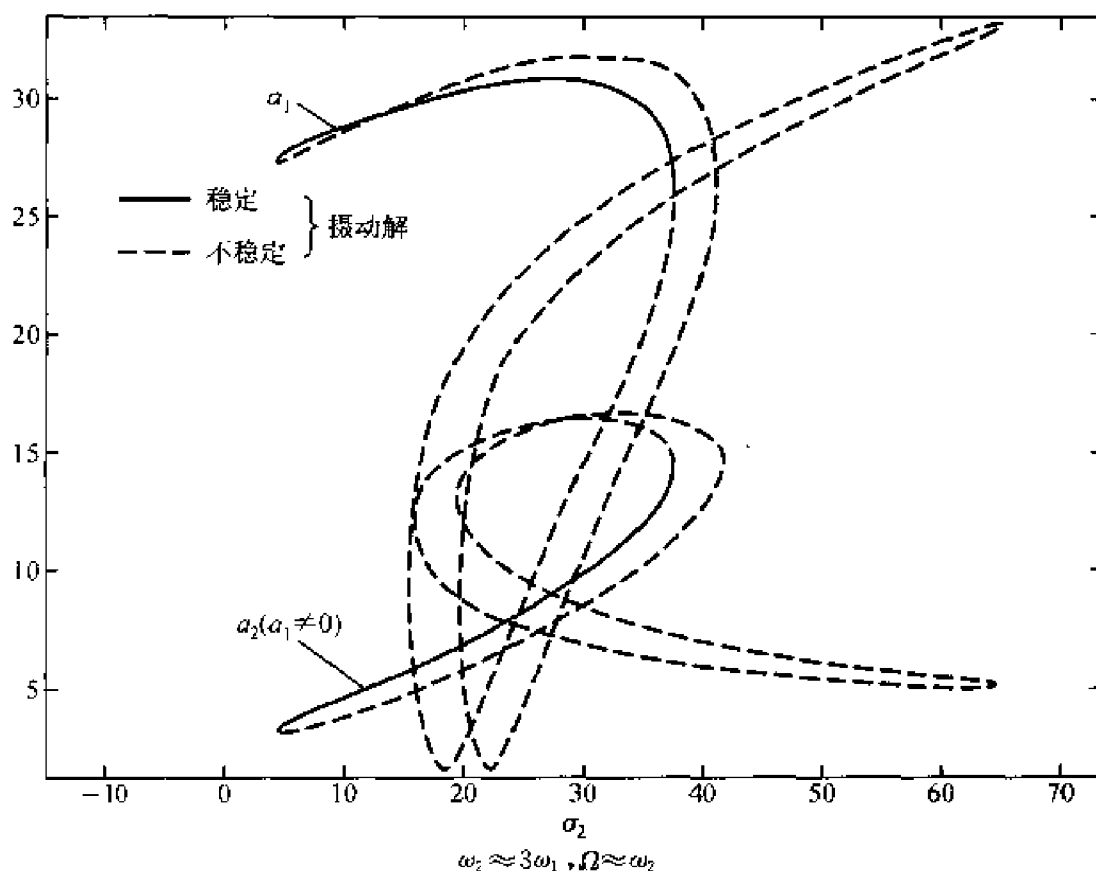


图 7.9

从图 7.9 知, 当 $\Omega \approx \omega_2$ 时, 即对高阶模态激励时解是十分复杂的。共振曲线的很多部分(虚线部分)对应不稳定解, 因此, 物理实际中是不可能实现的。在图 7.8 上只画出了稳定的(可能实现的)一部分响应曲线, 从图可知, 尽管是对第二阶模态激励, 那么基本模态的振幅在某些调谐值上可能达到激励振幅的五倍之多, 和具有平方非线性不同的是, 在立方非线性系统中没有发现饱和现象。

在多自由度系统中, 系统参数(如阻尼、激励振幅和频率、以及非线性的强度)如何影响运动的解, 分析起来有很大的困难, 特别是, 系统的响应能否在足够大的扰动下从一个定常解转移到另一个定常解呢? 要解决这个问题应建立解相对于扰动的稳定域, 即需建立解的稳定裕度。尽管相平面法对两个以上的自由度系统已不适用, 但是人们一般仍将积分曲线向适合的两坐标平面上进行投影来研究其动力学行为。

习 题

7.1 判断多尺度法是否适于解方程 $u'' + u^3 = 0$ 。

7.2 具有有限滞后的范德波尔系统的自由振动方程为

$$\begin{aligned}\ddot{v} + \omega_0^2 v &= 2\varepsilon[(1-z)\dot{v} - z\dot{v}] \\ \tau \dot{z} + z &= v^2\end{aligned}$$

(a) 用多尺度法证明

$$\begin{aligned}v &= a \cos(\omega_0 t + \theta) + O(\varepsilon) \\ z &= b \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + \frac{1}{2}a^2 + \frac{a^2}{2(1+4\omega_0^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}} \times \\ &\quad \cos(2\omega_0 t + 2\theta - \arctan 2\omega_0\tau) + O(\varepsilon)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \varepsilon a \left(1 - \frac{1}{4}\alpha_\gamma a^2\right) \\ \alpha_\gamma &= \frac{3+8\omega_0^2\tau^2}{1+4\omega_0^2\tau^2} \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{4}\varepsilon\alpha_\gamma a^2 \\ \alpha_1 &= -\frac{2\omega_0\tau}{1+4\omega_0^2\tau^2} \\ \dot{b} &= 2a^2 b \frac{1+2\omega_0^2\tau^2}{1+4\omega_0^2\tau^2}\end{aligned}$$

(b) 求解 a, θ 和 b

(c) 求定常解及其稳定性

7.3 考虑下列系统

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon(2\mu\dot{u} + \alpha u^3) = K_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + K \cos(\Omega_2 t + \theta_2)$$

其中

$$\Omega_1 + \Omega_2 \approx 2\omega_0$$

(a) 用一次近似的多尺度法, 证明从 u_1 中消去永年项的条件

$$2i\omega_0(A' + \mu A) + \alpha(3A\bar{A} + 6\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + 6\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)A + 6\alpha\Lambda_1\Lambda_2\bar{A}\exp(i\sigma T_1) = 0$$

其中

$$\Lambda_n = \frac{K_n \exp(i\theta_n)}{2(\omega_0^2 - \Omega_n^2)}, \quad \varepsilon\sigma = \Omega_1 + \Omega_2 - 2\omega_0$$

(b) 令 $A = \frac{1}{2}a \exp(i\beta)$, 证明可解条件和下列方程等价

$$\begin{aligned}a' &= -\mu a - \alpha\Gamma_1 a \sin \gamma \\ a\gamma' &= (\sigma - 2\alpha\Gamma_2)a - \frac{3\alpha a^2}{4\omega_0} - 2\alpha\Gamma_1 a \cos \gamma\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \frac{3K_1 K_2}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega_1^2)(\omega_0^2 - \Omega_2^2)} \\ \Gamma_2 &= \frac{3}{4\omega_0} \left[\frac{K_1^2}{(\omega_0^2 - \Omega_1^2)^2} + \frac{K_2^2}{(\omega_0^2 - \Omega_2^2)^2} \right] \\ \gamma &= \sigma T_1 - 2\beta + \theta_1 + \theta_2\end{aligned}$$

(c) 证明定常解的振幅为

$$a=0$$

或

$$a' = \frac{8}{3} \omega_1 \left[\frac{\sigma}{2\alpha} - \Gamma_3 \pm \left(\Gamma_1^2 - \frac{\mu^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

(d) 判断哪一个定常解的振幅是稳定的。

(e) 用你的结果解释图 E7.1。

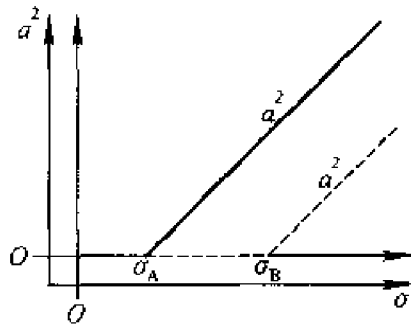


图 E7.1

7.4 考虑下列方程

$$\ddot{u} + u + 2\epsilon\mu\dot{u} + \epsilon\alpha u^3 = K_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + K_2 \cos(\Omega_2 t + \theta_2)$$

其中 Ω_1 约等于 1, Ω_2 约等于 3。

(a) 用多尺度法求其一次近似解, 证明可从 u_1 中消除永年项, 若满足下列方程

$$a' = -\mu a + \frac{1}{2} k_1 \sin(\sigma_1 T_1 - \beta + \theta_1) - \frac{3}{4} \alpha \Lambda_2 a^2 \sin(\sigma_2 T_1 - 3\beta + \theta_2)$$

$$a\beta' = 3\alpha \left(\Lambda_1^2 + \frac{1}{8} a^2 \right) a - \frac{1}{2} k_1 \cos(\sigma_1 T_1 - \beta + \theta_1) + \frac{3}{4} \alpha \Lambda_2 a^2 \cos(\sigma_2 T_1 - 3\beta + \theta_2)$$

其中

$$\epsilon k_1 = K, \quad \epsilon \sigma_1 = \Omega - 1, \quad \epsilon \sigma_2 = \Omega_2 - 3, \quad \Lambda_2 = -\frac{1}{16} K_2$$

(b) 证明只有当 $\beta' = \sigma_1 = \frac{1}{3} \sigma_2$ 时才存在定常解,

(c) 画出 a 与 σ_1 的关系曲线, 并标明稳定部分。

7.5 考虑下列方程

$$\ddot{u} + u + 2\epsilon\mu\dot{u} + \epsilon\alpha u^3 = \sum_{n=1}^3 K_n \cos(\Omega_n t + \theta_n)$$

其中 $\Omega_1 \approx 1$ 和 $2\Omega_2 + \Omega_3 \approx 1$

(a) 用多尺度法证明

$$u = a(T_1) \cos[T_0 + \beta(T_1)] + 2 \sum_{n=2}^3 \Lambda_n \cos(\Omega_n T_0 + \theta_n) + O(\epsilon)$$

其中

$$\Lambda_n = \frac{K_n}{2(1-\Omega_n^2)}$$

$$a' = -\mu a + \frac{1}{2} k_1 \sin \gamma_1 - a \Gamma_1 \sin \gamma_2$$

$$a\beta' = a \left(\Gamma_2 + \frac{3}{8} a^2 \right) a - \frac{1}{2} k_1 \cos \gamma_1 + a \Gamma_1 \cos \gamma_2$$

其中

$$\varepsilon k_1 = K_1, \quad \varepsilon \sigma_1 = \Omega_1 - 1, \quad \varepsilon \sigma_2 = 2\Omega_2 + \Omega_3 - 1$$

$$\gamma_1 = \sigma_1 T_1 - \beta + \theta_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2 T_1 - \beta + 2\theta_2 + \theta_3$$

Γ_1 和 Γ_2 是常数, 并求出它们。

(b) 若 $\beta' = \sigma_1 = \sigma_2$, 证明存在定常解, 并判断定常解是否对应周期响应。

(c) 画 a 与 σ_1 的关系曲线, 并标明稳定部分。

7.6 研究下列方程

$$\ddot{u} + u + 2\varepsilon\mu\dot{u} + \varepsilon au^3 = \sum_{n=1}^l K_n \cos(\Omega_n t + \theta_n)$$

其中 $\Omega_1 \approx 1$ 和 $\Omega_2 + \Omega_3 \approx 2$ 。

(a) 用多尺度法证明

$$u = a(T_1) \cos[T_0 + \beta(T_1)] + 2 \sum_{n=2}^3 \Lambda_n \cos(\Omega_n T_0 + \theta_n) + O(\varepsilon)$$

其中

$$\Lambda_n = \frac{K_n}{2(1-\Omega_n^2)}$$

$$a' = -\mu a + \frac{1}{2} k_1 \sin \gamma_1 - a \Gamma_1 a \sin \gamma_2$$

$$a\beta' = a \left(\frac{3}{8} a^2 + \Gamma_2 \right) a - \frac{1}{2} k_1 \cos \gamma_1 + a \Gamma_1 \cos \gamma_2$$

$$\varepsilon k = K_1, \quad \varepsilon \sigma_1 = \Omega_1 - 1, \quad \varepsilon \sigma_2 = \Omega_2 + \Omega_3 - 2$$

$$\gamma_1 = \sigma_1 T_1 - \beta + \theta_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2 T_1 - 2\beta + \theta_2 + \theta_3$$

Γ_1 和 Γ_2 为常数, 求出 Γ_1 和 Γ_2 。

(b) 证明只有 $\beta' = \sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma_2$ 时才存在定常解, 说明定常解对应周期响应吗?

(c) 画出 a 与 σ_1 的关系曲线, 并标明不稳定部分。

7.7 考虑下列系统的响应

$$\dot{u}_1 + \omega_1^2(\tau) u_1 = \varepsilon a_1 u_1 u_2$$

$$\ddot{u}_2 + \omega_2^2(\tau) u_2 = \varepsilon a_2 u_1^2$$

其中 $\tau = \varepsilon t$ 和 $\varepsilon \ll 1$ 。

(a) 用多尺度法求下列形式的解

$$u_1 = u_{10}(\eta_1, \tau) + \varepsilon u_{11}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \cdots$$

$$u_2 = u_{20}(\eta_2, \tau) + \varepsilon u_{21}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \cdots$$

其中 $\dot{\eta}_n = \omega_n$, 有

$$u_{10} = A_1(\tau) \exp(i\eta_1) + cc$$

$$u_{20} = A_2(\tau) \exp(i\eta_2) + cc$$

(b) 求确定 u_{11} 和 u_{21} 的方程, 当 $\omega_2 \approx 2\omega_1$ 时, 证明

$$2i\omega_1 A_1' + i\omega_1' A_1 - \alpha_1 A_2 \bar{A}_1 \exp[i\sigma(\tau)] = 0$$

$$2i\omega_2 A_2' + i\omega_2' A_2 - \alpha_2 A_1^2 \exp[-i\sigma(\tau)] = 0$$

其中 $\sigma = \omega_2 - 2\omega_1$ 。

(c) 从 $\frac{1}{2}a_n \exp(i\beta_n)$ 将 A_n 表示为极坐标的表达式, 并将其实部和虚部分离, 由初始条件 $u_1(0) = 1, \dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = 0$ 对 a_n 和 β_n 进行数值积分。

7.8 研究球面摆, 如图 E7.2, 该摆受到一个水平力 $mf(t)$ 的作用

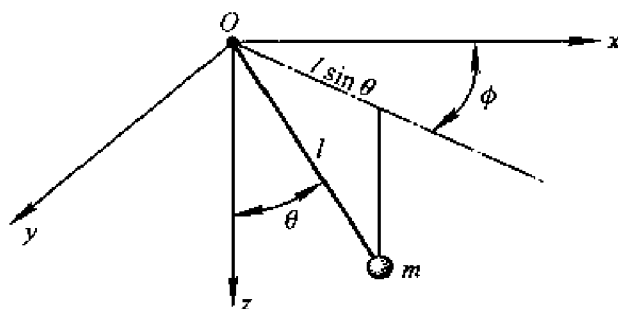


图 E7.2

(a) 证明在直角坐标系中, 其振动方程如下

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + u(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + u\ddot{u} + v\ddot{v}) + \frac{1}{2}\omega_0^2 u(u^2 + v^2) = f(t)$$

$$\ddot{v} + \omega_0^2 v + v(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + u\ddot{u} + v\ddot{v}) + \frac{1}{2}\omega_0^2 v(u^2 + v^2) = 0$$

(b) 当 $f(t) = 2K \cos \Omega t$, 其中 $\Omega \approx \omega_0$, 用多尺度法求第一次近似解。

(c) 利用上个习题的方法求定常解, 求平面运动失稳并变成非平面运动的条件。

第八章 非线性振动系统的摄动法 ——小参数法

摄动法亦称小参数法,是庞加莱于上世纪末提出来的,用于解决非线性系统周期解的问题,后经李雅普诺夫和马尔金等人进行了深入的研究。经实践证明,该方法用于求单自由度和多自由度系统的周期解都是十分有效的方法之一。本章重点叙述单自由度系统的摄动法,对多自由度系统如何应用摄动法,有兴趣的读者可参考[42]。

§ 8.1 摄动法的思想 小参数

假设某一振动系统,以下列无因次的非线性方程组来表示

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n) \quad (8.1.1)$$
$$s=1, \dots, n$$

如果上式右端 $t \neq 0$, 则称显含 t 。在适当的选择时间单位后,可设它是 t 的以 2π 为周期的周期函数,这种系统称为非自治系统。

如果(8.1.1)的右端不显含 t , 则称之为自治系统。

我们的目的就是来求系统的周期运动规律,即求方程组(8.1.1)的周期解

$$x_s = f_s(t) \quad (8.1.2)$$

一般地说,周期解(8.1.2)是(8.1.1)的特解,而其通解是不知道的。为了解决提出的问题,在大多数实际问题中,我们将方程组(8.1.1)的右端分为两部分,一部分较另一部分来说很小,把这些小项去掉,则得到派生的方程式,或者只限于研究派生方程式的解;或者把派生方程的解作为原方程的第一次近似,再以逐步渐近法求方程组(8.1.1)的高次近似解。

庞加莱在逐步逼近法的基础上提出了摄动法,为了数字演算的方便,他在微分方程的小项之前引进了小参数 μ , 并且设(8.1.1)的右端和 t, x, μ 有关,当 μ 足够小时,它是 μ 的解析函数。如把(8.1.1)的右端在 $\mu=0$ 的邻域中对 μ 展成幂级数,则

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(0)}(t, x_1, \dots, x_n) + \mu X_s^{(1)}(t, x_1, \dots, x_n) +$$

$$\mu^2 X_i^{(2)}(t, x_1, \dots, x_n) + \dots \quad (8.1.3)$$

设 $\mu=0$, 即不考虑这些小项的影响, 则得简化方程式

$$\frac{dx_s^0}{dt} = X_s^{(0)}(t, x_1, \dots, x_n) \quad (8.1.4)$$

$$s=1, 2, \dots, n$$

这个简化方程组, 我们称为派生方程组, 其周期解

$$x_s^1 = \varphi_s(t) \quad (8.1.5)$$

$$s=1, 2, \dots, n$$

称为“派生解”, 其中可能包含 n 个任意常数。

根据逐步逼近法, 可把(8.1.5)作为第一次近似, 这样, 我们实际上就认为解(8.1.5)是非线性方程组(8.1.3)的周期解的第一次近似值, 但是庞加莱指出, 方程组(8.1.3)含 μ 的项尽管很小, 但可能对系统的周期运动发生本质的影响, 有时对派生方程来说, 非线性方程组不存在周期解, 也可能有几个或很多个周期解, 也就是说, 派生解并不永远对应原系统的周期解, 因此, 就需要研究在什么条件下, 某个派生周期解对应一个惟一的系统的周期解, 即摄动法是研究在什么条件下, 原系统有这样的周期解, 它在 $\mu=0$ 时等于某派生解, 并且证明在 μ 足够小时, 非线性方程的周期解能展成 μ 的收敛的幂级数。

如果其派生方程组是具有常系数的线性微分方程组, 则称原方程组为拟线性方程组。

在用摄动法研究拟线性系统的周期解时, 首先将振动方程化成无因次方程式; 其次, 判别振动系统是自治系统或非自治系统, 变换时间单位, 以使解的周期为 2π ; 第三, 取小参数, 得到拟线性方程; 第四, 求派生方程解; 第五, 找原系统周期解存在的条件; 第六, 用摄动法可根据需要求任意次近似解, 以及研究周期解的稳定性条件。

§ 8.2 非自治系统的非共振情况

设一个自由度非自治系统的方程为

$$\ddot{x} + k^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu) \quad (8.2.1)$$

其中 F 在 $x, \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ 的定义域中, 当 μ 足够小时, 是 μ, x, \dot{x} 的解析函数, 以及 t 的以 2π 为周期的周期函数, 对之可展成傅氏级数; $f(t)$ 是 t 的以 2π 为周期的周期函数, 其傅氏级数为

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (8.2.2)$$

其中 n 为任意正整数。

因我们研究非共振情况,故 k 不应为整数,即 $k \neq n$,派生系统为

$$\ddot{x}_0 + k^2 x_0 = f(t) \quad (8.2.3)$$

其通解,由叠加原理知应为

$$x_0 = a \sin(kt + \alpha) + \frac{a_0}{2k^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nt + b_n \sin nt}{k^2 - n^2}$$

因 k 不为整数,所以上面的解不是周期性的,但对应于自由振动的解,由于不可避免的阻尼而衰减,故派生方程的以 2π 为周期的派生解为

$$x_0 = \frac{a_0}{2k^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nt + b_n \sin nt}{k^2 - n^2} = \varphi(t) \quad (8.2.4)$$

现来研究在什么条件下,原方程式(8.2.1)有周期解,且当 $\mu=0$ 时,该解等于派生解。

派生解的起始条件是

$$x_0(0) = \varphi(0), \quad \dot{x}_0(0) = \dot{\varphi}(0)$$

由于非线性项的影响,设原方程(8.2.1)的解 $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ 的起始条件较派生解的起始条件差一个小量 β_1, β_2 , 则原方程解的起始条件可写为

$$\left. \begin{aligned} x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) &= \varphi(0) + \beta_1 \\ \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) &= \dot{\varphi}(0) + \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.2.5)$$

解 $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ 是以 2π 为周期的周期解的必要、充分条件是

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) &= x(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) - x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = 0 \\ \psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) &= \dot{x}(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) - \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.2.6)$$

经过 2π 后解取相同的值,故为周期解,这是必要条件;如条件(8.2.6)满足,则 x, \dot{x} 在 $t=0$ 和 $t=2\pi$ 时不变,如以 2π 作为起初瞬间则起始条件仍为(8.2.5),故函数 x 在区间 $[2\pi, 4\pi]$ 和 $[0, 2\pi]$ 上有相同的值,即 $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ 为周期解,所以(8.2.6)也是充分条件。

设 $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ 是 β_1, β_2, μ 的解析函数,因当 $\mu=0$ 时,这个函数应等于派生解,所以 $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ 可写为

$$x(t, \beta_1, \beta_2, \mu) = \varphi(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + (\mu, \beta) \text{的高次项} \quad (8.2.7)$$

其中 A, B, C 是可确定的 t 的未知函数,其周期解为任意,很显然,如果能求得惟一的一组解 β_1, β_2 , 并且当 $\mu=0$ 时,它们等于零,则(8.2.7)是原始方程式惟一的以 2π 为周期的周期解。周期条件(8.2.6)作为确定 β_1, β_2 的方程式。(8.2.6)是 β_1, β_2 的隐函数,根据隐函数存在定理知,如果方程组(8.2.6)对 β_1, β_2 的函数行列式不为零,则 β_1, β_2 有惟一的一组解。

为了详细研究(8.2.6),应先确定 A, B, C 等函数;把(8.2.7)代入

(8.2.1), 则

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \ddot{A}\beta_1 + \ddot{B}\beta_2 + \ddot{C}\mu + \cdots + k^2(\varphi + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu) \\ = f(t) + \mu F(t, \varphi + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + \cdots, \dot{\varphi} + \\ \dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \cdots, \mu) \end{aligned}$$

对比上式两端 μ, β_1, β_2 的同阶项的系数, 则得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{A} + k^2 A &= 0 \\ \ddot{B} + k^2 B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.2.8)$$

A, B 的通解为

$$\left. \begin{aligned} A &= M_1 \cos kt + N_1 \sin kt \\ B &= M_2 \cos kt + N_2 \sin kt \end{aligned} \right\} \quad (8.2.9)$$

在(8.2.7)中, 设 $t=0$, 并与(8.2.5)对比, 则得 A, B 的起始条件

$$A(0)=1, \quad \dot{A}(0)=0$$

$$B(0)=0, \quad \dot{B}(0)=1$$

故 A, B 的特解为

$$\left. \begin{aligned} A &= \cos kt \\ B &= \frac{1}{k} \sin kt \end{aligned} \right\} \quad (8.2.10)$$

把(8.2.10)代入(8.2.7), 然后再把它和(8.2.5)代入周期条件(8.2.6), 则得

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) &= [x] \\ &= \varphi(2\pi) + A(2\pi)\beta_1 + \\ &\quad B(2\pi)\beta_2 + C(2\pi)\mu + \cdots - \varphi(0) - \\ &\quad A(0)\beta_1 - B(0)\beta_2 - C(0)\mu - \cdots \\ &= (\cos 2\pi k - 1)\beta_1 + \frac{\beta_2}{k} \sin 2\pi k + [C]\mu + \cdots \\ &= 0 \\ \psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) &= [\dot{x}] \\ &= -\beta_1 k \sin 2\pi k + (\cos 2\pi k - 1)\beta_2 + [\dot{C}]\mu + \cdots \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.2.11)$$

其中符号 $[F(t)] = F(2\pi) - F(0)$

(8.2.11)对 β_1, β_2 的函数行列式

$$\left| \frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} \right|_{\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_2} \end{vmatrix}_{\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0} \\ = (\cos 2k\pi - 1)^2 + \sin^2 2k\pi \neq 0$$

故(8.2.11)对 β_1, β_2 有惟一的解,且从其形式知,这组解是 μ 的解析函数,并且 $\beta_1(0) = 0$ 。

如果把 $\beta_1(\mu)$ 代入函数 $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ 则得到原方程式惟一的一个周期解,它是 μ 的解析函数,且当 $\mu = 0$ 时,它等于派生解。故非线性方程式(8.2.1)在非共振情况下的解,可表为 μ 的以 2π 为周期的周期系数的幂级数。

$$x = \varphi(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \cdots \quad (8.2.12)$$

其中 $\varphi(t), x_i(t)$ 都是以 2π 为周期的未知函数。

把(8.2.12)代入方程(8.2.1),令等式两端同阶 μ 的系数相等,可得到 $\varphi, x_1, x_2, \cdots$ 的线性微分方程组,从而可求出 $\varphi, x_1, x_2, \cdots$ 。

§ 8.3 非自治系统的共振情况

在上一节中,我们假设 k 不等于整数,如果 k 等于整数,从(8.2.4)知,其分母等于零,解(8.2.4)将无意义。如果 k 和整数相差很小,其差值为与 μ 同量级,由于在任何物理问题中, μ 都有确定的数值,即 μ 只是足够小,而不能任意小,所以在某足够小的整数域中,解(8.2.4)仍可能发散,故 k 为整数或和整数相差很小的情况称为共振情况。

现研究主共振情况,设 $n^2 - k^2$ 是和 μ 同阶的小量,则

$$n^2 - k^2 = \mu a$$

并且在 $f(t)$ 的傅氏级数中, n 阶谐波的系数必然也是和 μ 同阶的小量

$$a_n = \mu a'_n, \quad b_n = \mu b'_n$$

把 $\mu a x$ 和 $\mu(a'_n \cos nt + b'_n \sin nt)$ 并入函数 $F(t, x, \dot{x}, \mu)$ 中去,并仍采用原符号,则上节的(8.2.1)式可写成

$$\ddot{x} + n^2 x = f'(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu) \quad (8.3.1)$$

其中 $f'(t) = f(t) - a_n \cos nt - b_n \sin nt$

其派生方程式为

$$\ddot{x}_0 + n^2 x_0 = f'(t) \quad (8.3.2)$$

上式的通解为

$$x_0 = \varphi(t) + M_0 \cos nt + N_0 \sin nt \quad (8.3.3)$$

其中 M_0, N_0 是任意常数;

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2n^2} + \sum_{j \neq n} \frac{a_j \cos jt + b_j \sin jt}{n^2 - j^2}$$

解(8.3.3)在 M_0, N_0 为任意值时,都是以 2π 为周期的周期函数,因而在共振情况下派生方程式有决定于两个任意常数的一组周期解,这就是和非共振情况只有一个惟一的周期解的本质区别。

在(8.3.3)中,取一组确定的 M_0, N_0 值,现在来研究在什么条件下,方程(8.3.1)有周期解,并且在 $\mu=0$ 时,它等于派生解。和非共振情况一样,仍以 $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ 表示未知解。

设起始条件为

$$\begin{aligned} x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) &= x_0(0) + \beta_1 \\ \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) &= \dot{x}_0(0) + \beta_2 \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

取解的形式如下

$$\begin{aligned} x(t, \beta_1, \beta_2, \mu) &= x_0(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + \\ &\quad \mu[D\beta_1 + E\beta_2 + F\mu] + \cdots \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

解(8.3.5)为周期解的必要条件、充分条件是

$$\begin{aligned} \psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) &= x(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) - x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) \\ &= 0 \\ \psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) &= \dot{x}(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) - \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

利用和上节同样的方法,把(8.3.5)代入(8.3.1),令等式两端 μ, β_1, β_2 的同阶项的系数相等,在考虑到起始条件(8.3.4)后,则

$$\begin{aligned} A &= \cos nt \\ B &= \frac{1}{n} \sin nt \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

因 n 是整数,故

$$[A] = [\dot{A}] = [B] = [\dot{B}] = 0$$

把(8.3.5)代入周期条件,则

$$\begin{aligned} \psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) &= \mu\{[C] + [D]\beta_1 + [E]\beta_2 + [F]\mu\} + \cdots \\ &= 0 \\ \psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) &= \mu\{[\dot{C}] + [\dot{D}]\beta_1 + [\dot{E}]\beta_2 + [\dot{F}]\mu\} + \cdots \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

上式乃是确定 β_1, β_2 的方程式,因为函数(8.3.5)在 $\mu=0$ 时,应等于派生解,所以在 $\mu=0$ 时,应有 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ 。

在(8.3.8)中,把 μ 消去后,出现自由项 $[C]$ 和 $[\dot{C}]$,为了满足条件

$\beta_i(0)=0$, 应设

$$\begin{aligned} [C] &= P(M_0, N_0) = 0 \\ [\dot{C}] &= Q(M_0, N_0) = 0 \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

现详细研究这些条件, 为此把(8.3.5)代入(8.3.1), 令等式两端 μ 同次方的系数相等, 则得

$$\ddot{C} + n^2 C = F(t, x_0, \dot{x}_0) \quad (8.3.10)$$

从(8.3.4)知, C 的起始条件为

$$C(0) = \dot{C}(0) = 0 \quad (8.3.11)$$

则(8.3.10)的解为

$$C = \frac{1}{n} \int_0^t F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0) \sin n(t-\tau) d\tau$$

利用复合函数微分法, 微分上式, 则有

$$\dot{C} = \int_0^t F[\tau, x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau), 0] \cos n(t-\tau) d\tau$$

把上式和(8.3.3)代入(8.3.9), 则得到保证 $\beta_i(0)=0$ 的条件如下:

$$\left. \begin{aligned} [C] &= \int_0^{2\pi} F[\tau, \varphi(\tau) + M_0 \cos n\tau + N_0 \sin n\tau, \\ &\quad \dot{\varphi}(\tau) - M_0 n \sin \tau + N_0 n \cos n\tau, 0] \\ &\quad \sin n(2\pi - \tau) d\tau - \int_0^0 F d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} F[\tau, \varphi(\tau) + M_0 \cos n\tau + N_0 \sin n\tau, \\ &\quad \dot{\varphi}(\tau) - M_0 n \sin \tau + N_0 n \cos n\tau, 0] \sin n\tau d\tau \\ &= P(M_0, N_0) = 0 \\ [\dot{C}] &= \int_0^{2\pi} F[\tau, \varphi(\tau) + M_0 \cos n\tau + N_0 \sin n\tau, \\ &\quad \dot{\varphi}(\tau) - M_0 n \sin \tau + N_0 n \cos n\tau, 0] \cos n\tau d\tau \\ &= Q(M_0, N_0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.3.12)$$

这个条件同时也是方程式(8.3.10)有周期解的充要条件, 因满足它时, 在 $F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$ 中不含 n 阶谐波, 即不含共振项。

一般地说, 并不是任意 M_0, N_0 都能满足方程(8.3.12), 而(8.3.12)作为确定 M_0, N_0 的方程式, 故不是任意的派生解都对应方程(8.3.1)的周期解, 只有 M_0, N_0 满足(8.3.12)时的派生解才对应非线性方程(8.3.1)的周期解。

欲使 M_0, N_0 有单根, 则其函数行列式不应为零, 即

$$\left| \frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)} \right| \neq 0 \quad (8.3.13)$$

应该指出,使上式不为零的 M_0, N_0 值可能有数个,对应它们的周期振动,哪一个能实现,是运动稳定性所决定的问题。

满足了条件(8.3.12),在(8.3.8)中,如 $\beta_i(\mu)$ 有惟一解,则其函数行列式不应为零

$$\left| \frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} \right|_{\beta_i, \beta_2 - \mu = 0} = \begin{vmatrix} [D][E] \\ [\dot{D}][\dot{E}] \end{vmatrix} \neq 0 \quad (8.3.14)$$

把解(8.3.5)代入方程式(8.3.1),计算 D, E 后,很容易证明,如果满足条件(8.3.13),则(8.3.14)一定满足,即(8.3.13)与(8.3.14)是等价的。

满足(8.3.14),则方程(8.3.8)有惟一的一组 $\beta_i(\mu)$ 解,且 $\beta_i(0) = 0$,这组解是 μ 的解析函数,把它代入(8.3.5),则得到(8.3.1)的惟一的一个周期解,该周期解也是 μ 的解析函数。

总之,为了使派生解(8.3.3)对应线性方程(8.3.1)的周期解,那么常数 M_0, N_0 必须满足(8.3.12)。方程组(8.3.12)的每一个单根,在 μ 足够小时,对应(8.3.1)一个周期解,这个周期解是 μ 的解析函数。

故在共振情况下,非线性方程的周期解为

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \cdots \quad (8.3.15)$$

其中 x_0 是派生解; $x_1, x_2 \cdots$ 是以 2π 为周期的周期解,把(8.3.15)代入(8.3.1),令等式两端 μ 同阶的系数相等,则得到确定 x_1 线性微分方程式,如

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + n^2 x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \quad (8.3.16)$$

为了使以上方程有周期解,充分必要条件为

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \cos ntdt \\ &= \int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \sin ntdt = 0 \end{aligned} \quad (8.3.17)$$

上式与(8.3.12)重合,即按(8.3.12)选择 M_0, N_0 ,则上式必然满足,对 x_i 的计算表明,使 x_i 有周期解的条件,可确定 M_{i-1}, N_{i-1} ,并且使 M_{i-1}, N_{i-1} 有单根的条件为

$$\left| \frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)} \right| \neq 0$$

上式与(8.3.13)重合,即满足(8.3.13)时, $x_1, x_2 \cdots$, 必为周期函数。

§ 8.4 自治系统

设一个自由度系统的自由振动方程为

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu f(x, \dot{x}, \mu) \quad (8.4.1)$$

其中 $f(x, \dot{x}, 0)$ 在派生解存在的某域中是 x, \dot{x} 和 μ 的解析函数, μ 为小参数。

上式虽是非自治系统, 当 $t=0$ 时的特殊情况, 但因它有重要的特点, 所以要特别研究。在非自治系统中, 其解的周期是确定的, 为 2π 或 2π 的倍数; 在自治系统中, 因不含 t , 由于非线性项的干扰, 所以其周期可能是任意的数值, 且与派生解的周期的差值是与 μ 同阶的小数; 在自治系统中, 永可设 $\dot{x}(0)=0$, 因以 $t+t_1$ 代入 t , 则方程式 (8.4.1) 不变, 任意周期解以 $t+t_1$ 代替 t 后, 仍为原式的解。设以 $T_1(\mu)$ 为周期的解 x , 在 $[0 \sim T_1(\mu)]$ 中的某瞬时 t_1 , 其速度 \dot{x} 为零, 取 t_1 作为起始瞬间, 对 $t+t_1$ 来说, 则 $t=0$ 时, $\dot{x}(0)=0$ 。

现以摄动法求 (8.4.1) 的周期解。

派生方程为

$$\ddot{x}_0 + k^2 x_0 = 0 \quad (8.4.2)$$

在 $\dot{x}_0(0)=0$ 时, 上式的通解为

$$x_0 = M_0 \cos kt \quad (8.4.3)$$

现问在什么条件下, 方程 (8.4.1) 有周期解 $x(t, \beta, \mu)$, 且它在 $\mu=0$ 时, 等于某派生解 (8.4.3), 设该解的表达式为

$$x(t, \beta, \mu) = x_0(t) + A\beta + \mu(C + D\beta + E\mu) + \dots \quad (8.4.4)$$

其起始条件取为

$$\left. \begin{aligned} x(0, \beta, \mu) &= x_0(0) + \beta \\ \dot{x}(0, \beta, \mu) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.4.5)$$

此时与非自治系统的不同点是, 起始条件只含一个未知函数 β 。因所求的解的周期是未知的, 且应为

$$T + \alpha(\mu) = \frac{2\pi}{k} + \alpha(\mu)$$

其中 $\alpha = \alpha(\mu)$ 是 μ 的未知函数, 当 $\mu=0$ 时, 应为 $\alpha(0)=0$ 。

两个未知函数 β 和 α , 由 $x(t, \beta, \mu)$ 的周期条件来确定

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\beta, \alpha, \mu) &= x(T, \beta, \mu) + \dot{x}(T, \beta, \mu)\alpha + \\ &\quad \frac{1}{2!}[-k^2 x(T, \beta, \mu) + \dots]\alpha^2 + \dots - M_0 - \beta \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.4.6)$$

$$\psi_2(\beta, \alpha, \mu) = \dot{x}(T, \beta, \mu) + [-k^2 x(T, \beta, \mu) + \dots]\alpha = 0$$

把(8.4.4)代入(8.4.1), 令等式两端同阶的 μ, β 的系数相等, 则得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 A}{dt^2} + k^2 A &= 0, \quad A(0) = 1, \quad \dot{A}(0) = 0, \quad A = \cos kt \\ \frac{d^2 C}{dt^2} + k^2 C &= f(x_0, \dot{x}_0, 0) \\ \frac{d^2 D}{dt^2} + k^2 D &= \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial x_0} \cos kt - k \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} \sin kt \end{aligned} \right\} \quad (8.4.7)$$

以上两方程式, 在起始条件 $C(0) = \dot{C}(0) = D(0) = \dot{D}(0) = 0$ 下, 其解为

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{1}{k} \int_0^t f[x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau), 0] \sin k(t-\tau) d\tau \\ D &= \frac{1}{k} \int_0^t \left[\frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} \cos kt - k \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} \sin kt \right]_{t=\tau} \times \\ &\quad \sin k(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{\partial C}{\partial M_0} \end{aligned} \right\} \quad (8.4.8)$$

x_0 如(8.4.3)所示。

把(8.4.3)、(8.4.7)和(8.4.8)代入(8.4.6), 则得

$$\left. \begin{aligned} \mu \left| C\left(\frac{2\pi}{k}\right) + D\left(\frac{2\pi}{k}\right)\beta + E\left(\frac{2\pi}{k}\right)\mu + \dot{C}\left(\frac{2\pi}{k}\right)\alpha + \dots \right| + \\ \frac{1}{2}\alpha^2(-M_0 k^2 + \dots) \\ = 0 \\ \mu \left| \dot{C}\left(\frac{2\pi}{k}\right) + \dots \right| + \alpha(-M_0 k^2 + \dots) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.4.9)$$

从上方程组的第二式, 得

$$\alpha = \left| \frac{1}{M_0 k^2} \dot{C}\left(\frac{2\pi}{k}\right) + \dots \right| \mu$$

故已证明 α 为从 μ 的一次幂展开的 μ 的幂级数。

把 α 代入(8.4.9)的第一式, 则

$$\mu \left| C\left(\frac{2\pi}{k}\right) + D\left(\frac{2\pi}{k}\right)\beta + Q\mu \dots \right| = 0$$

其中 Q 为不需计算的某函数。

为了满足 $\beta(0) = 0$, 则应有

$$\begin{aligned} C\left(\frac{2\pi}{k}\right) &= \int_0^{\frac{2\pi}{k}} f(M_0 \cos k\tau, -kM_0 \sin k\tau, 0) \sin k\tau d\tau \\ &= P(M_0) = 0 \end{aligned} \quad (8.4.10)$$

这就是确定 M_0 的方程式, 如要使 M_0 有单根, 则

$$\frac{dP(M_0)}{dM_0} \neq 0$$

$\beta(\mu)$ 有惟一的解, 则 $D\left(\frac{2\pi}{k}\right) \neq 0$, 而从 (8.4.8) 应有

$$\frac{dP(M_0)}{dM_0} \neq 0 \quad (8.4.11)$$

故 (8.4.10) 的每一个单根对应 $\beta(\mu)$ 的一个惟一的解, 即对应方程式 (8.4.1) 的惟一的一个周期解, 它是 μ 的解析函数, 同时周期 $T + \alpha(\mu)$ 对 μ 也是解析的。

下面介绍自治系统周期解的实际计算方法。

首先应变换时间单位, 以便把方程 (8.4.1) 的周期解展成为 μ 的具有周期系数的幂级数。因已证明, 方程式 (8.4.1) 的解的周期是 μ 的解析函数, 这样的周期解不能直接展成 μ 的具有周期系数的幂级数。例如:

$\sin(1+\mu)t$ 的周期为 $T = \frac{2\pi}{(1+\mu)} = 2\pi(1-\mu+\cdots)$ 是 μ 的函数, 其对 μ 的

展开式为 $\sin(1+\mu)t = \sin t + \mu t \cos t - \frac{t^2}{2} \mu^2 \sin t + \cdots$, 对任意多个有限项, 该式都是发散的, 所以 (8.4.1) 的解不能直接写为 $x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \cdots$, 故需变换时间单位 (因变换时间单位后其解不变)

$$t = \frac{\tau}{k} (1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \cdots)$$

或

$$\tau = \frac{kt}{(1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \cdots)} \quad (8.4.12)$$

其中 h_i 是待定常数。

变换前, 解的周期为

$$T(\mu) = \frac{2\pi}{k} (1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \cdots) \quad (8.4.13)$$

变换后, 对于新自变量 τ , 周期为 $T = 2\pi$,

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x(1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \cdots)^2$$

$$= \frac{1}{k^2} \mu f \left[x, k(1 + h_1 \mu + \dots) \frac{dx}{d\tau}, \mu \right] \times \\ (1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \dots) \quad (8.4.14)$$

该方程的解的周期为 2π , 且与 μ 无关, 可证明方程(8.4.1)的解也是 μ 的解析函数, 故其解可写为以下形式

$$x = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \dots \quad (8.4.15)$$

其中 $x_0(\tau)$ 为派生解, $x_1(\tau)$ 的求法同前。

根据自治系统的性质, 变换时间单位后, 其解不变, 所以解(8.4.15)对应(8.4.1)的以 $T_1(\mu)$ 为周期的周期解。

用小参数法求多自由度系统周期解的实例可参看[42]。

习 题

8.1 研究下列方程

$$\dot{u} - u - u^3 = 0$$

(a) 证明 $u=1$ 是一个中心; 如取 $v=u-1$ 可以得到

$$\dot{v} + 3v + 6v^2 + 4v^3 + v^4 = 0$$

(b) 用摄动法求二次近似的幅频关系。

8.2 考虑单摆的运动

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

(a) 用摄动法证明

$$\theta = \epsilon a \cos(\omega t + \beta) - \frac{\epsilon^3 a^3}{192} \cos(3\omega t + 3\beta) + O(\epsilon^5)$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\epsilon^2 a^2}{16} + \frac{\epsilon^4 a^4}{1024} \right) + O(\epsilon^6)$$

(b) 设初值为 $\theta(0) = 0$ 和 $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$, 证明

$$\beta = \frac{1}{2}\pi, \dot{\theta}_0 = -\epsilon a \omega \left(1 + \frac{\epsilon^2 a^2}{64} \right) + \dots$$

(c) 用(a)从(b)中消去 ω 可以得到

$$\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} = 2k = -\epsilon a + \frac{3\epsilon^3 a^3}{64} + \dots$$

证明

$$\epsilon a = -2k - \frac{3}{8}k^3 + \dots$$

(d) 求振动的周期

8.3 研究图 E8.2 所示的系统, 其运动方程

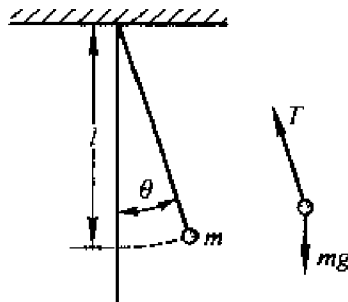


图 E8.1

$$\left(m_1 + \frac{m_2 x''}{l^2 - x'^2}\right)x + \frac{m_2 l^2 x \dot{x}^2}{(l^2 - x'^2)^2} + kx + m_2 g \frac{x}{(l^2 - x'^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

令 $R = \frac{m_2}{m_1}$, $u = \frac{x}{l}$ 。当满足 $|u| \ll 1$ 时展开得

$$(1 + Ru^2)\ddot{u} + Ru\dot{u}^2 + \omega_0^2 u + \frac{Rg}{2l}u^3 + \dots = 0$$

其中

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m_1} + \frac{Rg}{l}$$

用摄动法求二次近似的幅频关系。

8.4 用摄动法求解下述具有三个激励的运动方程的二次近似幅频关系。

$$\ddot{u} + u + 2\varepsilon\mu\dot{u} + \varepsilon\alpha u^2 = \sum_{n=1}^3 K_n \cos(\Omega_n t + \theta_n)$$

(a) 非共振情况；

(b) 主共振情况。

8.5 研究以下具有三个激励的运动方程

$$\ddot{u} + u + 2\varepsilon\mu\dot{u} + \varepsilon\alpha u^2 = \sum_{n=1}^3 K_n \cos(\Omega_n t + \theta_n)$$

其中

$$\Omega_1 \approx \frac{1}{2} \text{ 和 } \Omega_2 + \Omega_3 \approx 1$$

用摄动法求二次近似的幅频关系和定常解。

8.6 具有三阶激励的自激振动系统

$$\ddot{u} + u = \varepsilon \left(\dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3 \right) + \sum_{n=1}^3 K_n \cos(\Omega_n t + \theta_n)$$

其中 $\Omega_1 \approx 1, \Omega_2 \approx \frac{1}{3}, \Omega_3 \approx 3$ 。

令 $\varepsilon\sigma_1 = \Omega_1 - 1, \varepsilon\sigma_2 = 3\Omega_2 - 1, \varepsilon\sigma_3 = \Omega_3 - 3$,

(a) 证明其定常解存在的条件是

$$\beta = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{3}\sigma_3$$

(b) 试判断该响应是否为周期的。

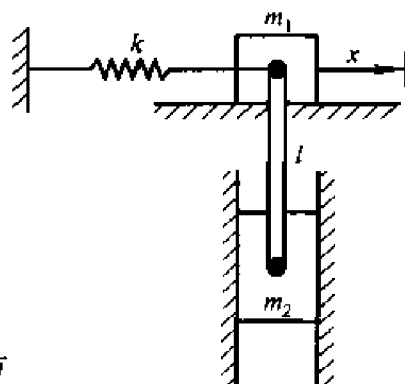


图 E8.2

第九章 分岔理论基础

动力系统的分岔现象指的是随着某些参数的变化,系统的动态行为发生质的改变,特别是系统的平衡状态发生稳定性改变或出现方程解的轨道分枝。各种典型的分岔及它们的严格的数学定义将在下面分别介绍。

分岔现象是非线性动力学系统普遍存在的重要的复杂动态现象之一,如高速列车的蛇行、汽车的前轮摇摆、压杆的动态屈曲现象、机翼和大跨度桥梁的颤振、装于滑动轴承上的大型高速转子的油膜振荡,以及化学反应动力学的若干突变现象等等,凡是存在非线性因素的动力学系统,都可能发生分岔现象,但有不少问题的机理不清,亟待分析研究;另外,由于各类动力学结构大型化、轻型化,和动力学性能的不断提_高,设计者多将其动力学参数选在动态失稳的临界点附近,但任何动力学结构在运行过程中,都可能因某些结构参数发生一些微小的变化(称摄动),而导致动力失稳,需要对之进行控制研究;再次,在进行理论分析时,经常会遇到某些力学模型的微分方程组是十分庞大的情况,例如系统中往往包含数目很多的变量,为了简化分析,常把动力学过程中变化很小的变量看作常量,或在方程中忽略一部分代表次要因素的变量,然而根据简化后的方程要考虑这些丢掉项的影响常常是不可能的,用分岔理论可把丢掉的项看作是一种摄动来进行分析。总之,系统参数的摄动(有时是不可避免的),往往会引起系统的分岔现象,而分岔现象(尤其是周期解的分岔)的发生总是伴随着系统的动态失稳,这种失稳如得不到及时控制,将会造成动力学结构的重大破坏;另外,分岔理论有许多深奥的理论问题尚未解决。

分岔也是把平衡解、周期解的稳定性和混沌联系起来的一种机制。运动稳定性是一个经典的课题,而混沌是一个现代的课题,揭露二者联系的机理就是分岔理论,因此,研究分岔问题,在理论上和应用上都具有重要的意义。

分岔理论主要研究:由常微分方程(或向量场)所定义的连续动力系统的分岔;由映射所定义的离散动力系统的分岔,和函数方程的零解随参数变化而产生的分岔。

分岔理论研究的主要目的是:(1)分岔方程的计算;(2)分岔集的确定(即分岔的必要条件和充分条件的研究);(3)当出现分岔时系统的解

的拓扑结构,随参数而变化的规律,即分岔的定性行为的研究;(4) 分岔解(尤其是平衡点、极限环等)的计算;(5) 不同分岔的相互作用,以及它们与动力系统其他现象(如锁相、混沌等)的关系;(6) 分岔理论的工程应用;(7) 分岔控制问题。

总之,分岔理论是研究动力系统某些复杂动态行为的机理,以及解的拓扑结构和系统参数之间的关系,以便于进一步认识自然和为工程动力学结构的优化设计、系统的参数识别和稳定性控制提供理论基础。

§ 9.1 动力系统的概念

微分动力系统是微分方程所描述的动力学系统概念的推广。微分动力系统是研究分岔的重要数学基础,它起源于 19 世纪末对动力学问题中常微分方程的定性研究,上世纪 60 年代以来,微分动力系统的研究取得了重大进展。这里简要介绍动力系统的一些基本概念和主要结论。

9.1.1 动力系统的定义

下面以一个二维线性微分方程组

$$x_1' = a_1 x_1, \quad x_2' = a_2 x_2 \quad (9.1.1)$$

为例说明一些基本概念。其中 a_1, a_2 为常数; $x_i' = \frac{dx_i}{dt}, i=1, 2$ 。

以上两个非耦合的方程的解为

$$x_1(t) = K_1 \exp(a_1 t), \quad x_2(t) = K_2 \exp(a_2 t)$$

其中 K_1, K_2 为由初始条件确定的常数。

我们从几何的观点分析方程(9.1.1)。把 x_1 和 x_2 看作 (x_1, x_2) 平面 \mathbf{R}^2 上的一条待求的曲线:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)), x(t) \in \mathbf{R}^2, t \in \mathbf{R}$$

(9.1.1)的左端表示曲线的切向量

$$x'(t) = (x_1'(t), x_2'(t))$$

用矩阵符号表示(9.1.1)则有

$$x' = Ax \quad (9.1.2)$$

其中 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ 。

方程(9.1.2)中 A 表示向量,可把它看作起点在 $x(t_0)$ 的向量。

初始条件 $x(t_0) = u = (u_1, u_2)$ 是 \mathbf{R}^2 上的一个给定的点,从几何上说,就是解曲线当 $t=t_0$ 时要经过这个给定的初值点 u 。

映射(即函数) $A: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ 或 $(x \rightarrow Ax)$ 可以看成是 \mathbf{R}^2 上的一个向量场, 即对于平面上的每一点 x 都给定一个向量 Ax 。我们作从 $x=u$ 处到 $u+Ax$ 的有向线段, 例如, 若 $u_1=2, u_2=-\frac{1}{2}$, 和 $u_1=(1, 1)$, 则可作一个从 $(1, 1)$ 到 $(3, \frac{1}{2})$ 的向量(图 9.1)。

求微分方程(9.1.1)或(9.1.2)满足当 $t=0$ 为 (u_1, u_2) 的解, 就是求平面上满足方程(9.1.1)当 $t=0$ 时通过 $u=(u_1, u_2)$ 的解曲线。

全部解曲线所组成的曲线族是 \mathbf{R}^2 的子集, 它叫做方程(9.1.1)(或(9.1.2))的相图(图 9.2)。

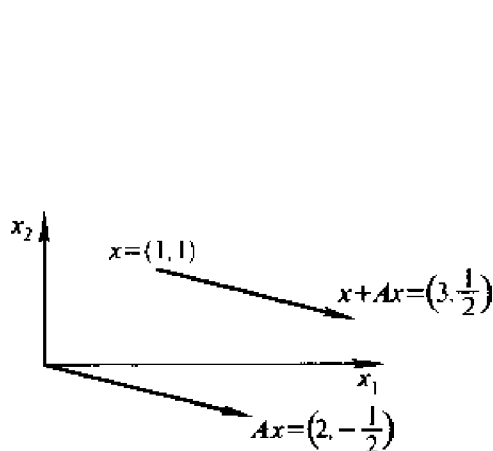


图 9.1

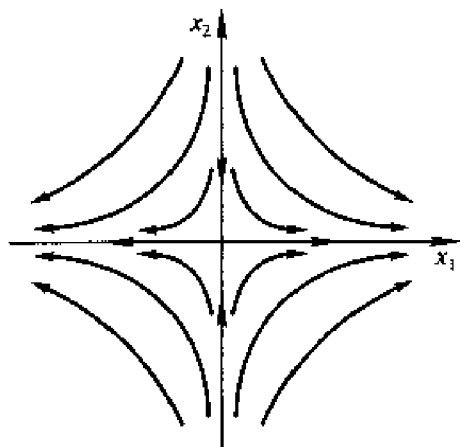


图 9.2

把方程(9.1.1)看成一个动力系统, 就是将自变量时间 t 看作一个参数, 将解曲线 $x(t)$ 看作平面 \mathbf{R}^2 内某些质点运动的路径。我们设想当时间 $t=0$ 时, 质点位于平面 \mathbf{R}^2 的点 $u=(u_1, u_2)$ 处, 随着时间的推移, 质点沿着满足初始条件 $x(0)=u$ 的解曲线而运动。任给时刻 $t>0$ (或 $t<0$) 质点将处于解曲线的相应位置 $x(t)$ 处。我们用 $g^t(u)$ 表示位置与 t 和 u 的依赖关系, 于是有:

$$g^t(u) = (u_1 \exp(a_1 t), u_2 \exp(a_2 t))$$

在平面解曲线上, 设想其上所有的点全部同时动起来(如尘点被平稳的风吹动), 在这种意义下, 我们把解曲线称为轨迹或轨道。对每个固定的 $t \in \mathbf{R}$ 有一个变换, 它将点 u 变到定义域的另一个点 $g^t(u)$ 。用 $g^t: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ (或 $g: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$) 表示这个变换, 称之为映射。显然它是一个线性变换, 即对所有的向量 u, v 和所有的实数 λ , 有

$$\left. \begin{aligned} g^t(u+v) &= g^t(u) + g^t(v) \\ g^t(\lambda u) &= \lambda g^t(u) \end{aligned} \right\} \quad (9.1.3)$$

映射 $g^t: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, t \in \mathbf{R}$ 的总体就是一个变换的单参数族, 这个族叫流或动力系统。换言之, 流是通过其定义域的所有点而达到值域的所有的解曲线的全体的总称, 动力系统理论是研究一族曲线或流的全局行为的。把上述结果推广到非线性系统, 则有动力系统的定义:

设相空间中的一个任意开集 $M \in \mathbf{R}^n$ 上的自治常微分方程组

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(x) \quad (x \in M, t \in \mathbf{R}) \quad (9.1.4)$$

其中 $f: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 $C^r (r \geq 1)$ 映射(或向量场)。

设其解 $x = g^t(x) = g(t, x)$ 为过 $x_0 (t=0 \text{ 时})$ 的惟一的解, 且它满足群的性质:

- (1) $g^0 = I = \text{恒等映射}$;
- (2) $g^{t+s} = g^t \circ g^s = g^s \circ g^t$;
- (3) $g^t x$ 对 t 和 x 连续。

其中 \circ 表示合成。

$$\text{取} \quad G = \{g^t | t \in \mathbf{R}\} \quad (9.1.5)$$

其中 $g^t: M \rightarrow M, \forall t \in \mathbf{R}$

二元组 $\{M, G\}$ 称为一个动力系统或流, 流既充满 $M (x \in M)$, 又充满 $\mathbf{R} (t \in \mathbf{R})$ (图 9.3)。

即以群的形式表示的解的集合和相空间形成一对, 这一对(二元组)共同构成动力系统。

若对给定的 t, g^t 都有逆映射 g^{-t} , 并且 g^{-t} 也是 C^0 (或 C^r) 的, 则 g^t 是一个同胚(或微分同胚)。

把上述结果推广到微分流形, 便得到流形上的动力系统的定义。

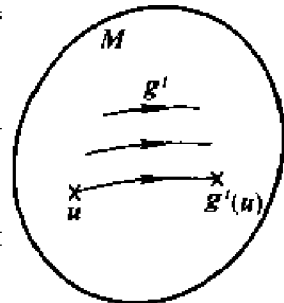


图 9.3

9.1.2 动力系统分类

连续动力系统: 若 $g: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ 是连续的, 则 $\{M, G\}$ 称为连续的动力系统(或流)。

微分动力系统: 若 $g: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ 是 C^1 (连续, 可微) 的, 则称 $\{M, G\}$ 为微分动力系统(或光滑相流)。

离散动力系统: 以 $k \in \mathbf{Z}$ 代替 $t \in \mathbf{R}$ (其中 \mathbf{Z} 为整数的集合), 则 $G = \{g^k | k \in \mathbf{Z}\}$ 为 M 上的映射族, 称之为离散动力系统。

半动力系统: 若 $t, s \geq 0$, 则称 $g^{t+s} = g^t g^s$ 为半动力系统。

9.1.3 动力系统和向量场

关于动力系统和向量场,现介绍以下的定理。

设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$, f 为 M 上的紧光滑向量场,则存在光滑映射

$$g: \mathbb{R} \times M \rightarrow M \quad (9.1.6)$$

使得 $g(t, x)$ 是以下 Cauchy 问题的惟一解:

$$\left. \begin{aligned} g'(t, x) &= f[g(t, x)] \\ g(0, x) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (9.1.7)$$

这样的 g 被称为由向量场生成的流,还和断定

$$g(t, x) = x, \quad \forall x \in M$$

并且 $g'(x) = g(t, x)$, 那么

$$g': M \rightarrow M \quad (t \in \mathbb{R})$$

是 M 的一个单参数变换群。这就是说,光滑映射 g 所产生的映射族 $\{g'\}$ 能够满足以下两个条件:

- (1) $g' = I$ (M 的恒同变换)
- (2) $g' \circ g^s = g'^{t+s}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

本定理的证明可参考^[51]。

对线性动力系统,设 A 为向量空间 S 上的一个算子,又设 $g': \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ 是由 $g(t, x) = e^{tA}x$ 所定义的,于是 $g': S \rightarrow S$ 可用 $g' = e^{tA}$ 表示,显然 $g^0 = e^0 =$ 恒等算子,又因 $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$, 所以该流符合群的性质。故 $g' = e^{tA}$ 可定义 S 上的线性动力系统。

9.1.4 动力系统的相图

研究动力系统的行为归结为在相空间中研究轨线的行为。把相空间开折成轨线的结构称作动力系统的相图。从几何的观点看,相空间开折成轨线的结构就是在相空间中轨线相互位置的几何图形。应该指出,对一般动力系统的轨线的完全描述是十分困难的,这是一个仍未彻底解决的问题,然而这个结构的一系列重要性质已经进行了深入的研究,对某些动力系统相图的完全描述已经解决。在描述相空间结构的时候,通过奇点的分离(隔)线起着重要作用,故应首先确定奇点和过奇点轨道的类型。

对应于稳定平衡状态的相点和周期运动的孤立封闭轨道乃是确定性运动在相空间结构的最简单的例子。

§ 9.2 分岔的基本概念和平面向量场的分类

分岔理论研究非线性常微系统由于参数的改变而引起的解的不稳定

性从而导致解的数目的变化行为。如果某个动力系统在相空间中的轨线是结构不稳定的,则任意小的适当的扰动都会使系统解曲线的拓扑结构发生突然的质的变化,我们称这种质的变化为动态分岔。

在分岔的应用问题中,许多系统都含有一个或多个参数,我们关心当参数连续的发生微小地变动时,系统的拓扑结构是否会发生变化,这是含参数系统的分岔问题。下面先看几个例子。

例 1 金属丝拱的屈曲分岔

例如有一个金属丝构成的拱,见图 9.4a.b。

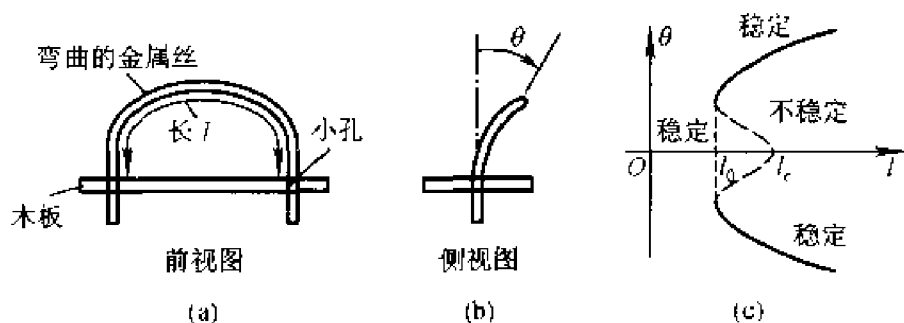


图 9.4

该金属丝拱可以演示其在重力作用下可能发生的屈曲现象。

金属丝拱的运动方程为

$$\frac{d\theta}{dt} = F(l, \theta) \quad (9.2.1)$$

当构成拱的金属丝长度 l 很小时,方程(9.2.1)只有一个稳定解 $\theta=0$ (表示垂直状态见图 9.4b);当 $l < l_c$ (失稳的临界值),金属丝拱的左右弯曲位置也是稳定的,当 $l_0 < l < l_c$ 时,有三个稳定的平衡位置,垂直状态($\theta=0$),一定大小的左和右弯曲平衡状态($\theta \neq 0$);当 $l > l_c$ 时,拱的垂直位置是不稳定的,拱将在左或右达到随遇平衡,可将平衡位置的数目与金属丝长度变化的关系用曲线表示出来,这就是金属丝拱的屈曲分岔图,见图 9.4c。

图中 θ 为状态变量,金属丝长度 l 为分岔参数。

从分岔图可以看出,当金属丝的长度由小变大,和由大变小时,在分岔图上的路径不同,这种现象称为滞后。

例 2 考虑一维系统

$$x' = \mu x - x^3, \quad (9.2.2a)$$

$$x' = \mu x - x^2, \quad (9.2.2b)$$

$$x' = \mu - x^2, \quad (9.2.2c)$$

其中 $\mu \in \mathbf{R}$ 是分岔参数。

从(9.2.2a)知,当 $\mu \leq 0$ 时,(9.2.2a)有惟一的平衡点 $x=0$,它是渐近稳定的,当 $\mu > 0$ 时,(9.2.2a)有三个平衡点,其中 $x=0$ 是不稳定的,而 $x = \pm\sqrt{\mu}$ 是渐近稳定的。在图9.5a中沿垂线画出了当 μ 固定时系统(9.2.2a)的相图。此外图9.5a还表示出系统(9.2.2a)的平衡点随 μ 变化的情况,称之为分岔图,其中实线代表稳定点,虚线代表不稳定平衡点。显然,当 $\mu \leq 0$ 和 $\mu > 0$ 时,系统有不同的拓扑结构。即系统(9.2.2a)的拓扑结构在 $\mu=0$ 处发生了突然的质的变化,即这时出现平衡点分岔(这种形式的分岔称为树枝分岔)。

同理,知(9.2.2b)所描述的是跨临界分岔,如图9.5b所示。(9.2.2c)所描述的是鞍结分岔,如图9.5c所示。

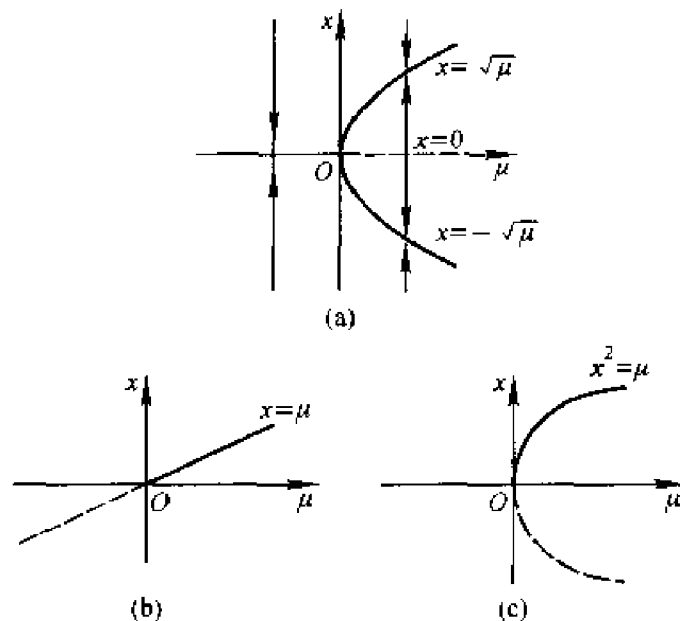


图 9.5

以上产生分岔的例子说明,在分岔值附近,当参数有微小变化时,系统的拓扑结构发生质的变化,故系统的结构是不稳定的。

本书着重讨论含参数的常微分方程所描述的动力系统的分岔问题。首先介绍一些有关的基本概念。设有区域 $U \subseteq \mathbb{R}^n, J \subseteq \mathbb{R}^m$ 。考虑含参数的常微分方程系统。

$$\dot{x}' = f(x, \mu) \quad (9.2.3)$$

其中 $x \in U$ 称为状态变量, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T \in \mathbb{R}^m$,称为分岔参数(亦称为控制变量)。设对于固定的 $\mu \in J$,有 $f(x, \mu) \in \mathcal{A}^1(U)$ 。其中 $\mathcal{A}^1(U)$ 为 U 上全体 C^1 向量场的集合。

定义 9.1 设当参数 μ 连续变动时,给定的系统(9.2.3)的拓扑结构在 $\mu_0 \in J$ 发生突然变化,则称系统(9.2.3)(即向量场 $f(x, \mu)$),在 $\mu = \mu_0$

处出现分岔, 并称 μ_0 为一个分岔值(临界值)。在参数 μ 的空间中, 由分岔值组成的集合称为分岔集。

为了清楚的表示分岔情况, 我们在 (x, μ) 空间中画出系统(9.2.3)的极限集(如平衡点、极限环等)随参数变化的图形, 称之为分岔图。图 9.4c 和图 9.5 都是分岔图。

一般地说, 完整的分岔分析需研究向量场的全局拓扑结构, 这是十分困难、复杂、甚至是难以完成的。在实际应用中, 有时只关心在平衡点或闭轨的邻域内轨线的拓扑结构的变化, 即只研究在平衡点或闭轨的某个邻域内向量场的分岔, 这类分岔问题称为局部分岔。如果在分岔分析中需要考虑向量场局部以外的全局行为, 则称为全局分岔。

习惯上还可按研究对象把分岔问题分为静态分岔和动态分叉。静态分岔研究如下形式的分岔方程

$$f(x, \mu) = 0, x \in U \subseteq \mathbf{R}^n, \mu \in J \subseteq \mathbf{R}^m \quad (9.2.4)$$

的解的数目随参数 μ 变动而发生的突然变化。动态分岔就是在定义 9.1 中提到的分岔。在动态分岔问题中, 除了研究平衡点分岔外, 还要研究其他分岔问题, 例如闭轨, 同宿或异宿轨线、不变环面等的分岔。由于(9.2.4)的解对应(9.2.3)的平衡点, 因此静态分岔属于平衡点分岔的研究范围; 即动态分岔问题实际上包括了静态分岔问题, 在实际应用中许多问题(包括非线性振动求周期解(定常解)的问题)其实可归结为静态的, 因而静态分岔始终是分岔研究的重要内容。

平面向量场分岔的分类根据安德罗诺夫—庞特里雅金(Андронов Понтрягин)定理可知下面的一般结果

定理 9.1 在 $\mathcal{C}^1(B^2)$ 中出现分岔, (即结构不稳定)的必要、充分条件是下列条件之一成立:

- (a) 存在非双曲平衡点;
- (b) 存在非双曲闭轨;
- (c) 存在同宿或异宿轨线。

其中 $B^2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 。

为了说明当分岔出现时平面系统的拓扑结构的变化情况, 我们讨论含单参数族 $\mu \in \mathbf{R}$ 的平面自治系统

$$\left. \begin{aligned} x' &= P(x, y, \mu) \\ y' &= Q(x, y, \mu) \\ (x, y) &\in B^2 \end{aligned} \right\} \quad (9.2.5)$$

设 μ^0 是一个分岔值。根据定理 9.1, 系统(9.2.5)的分岔可分为三大类:

1. 与平衡点有关的分岔

设当 $\mu = \mu_0$ 时, 系统(9.2.5)有非双曲平衡点 (x_0, y_0) 。令 A 为 $\mu = \mu_0$ 时此系统在 (x_0, y_0) 处的线性化矩阵(即 F 的导算子)。

若 A 有零特征值, 则有高阶平衡点分岔。例如在图 9.6a 上, 当 $\mu = \mu_0$ 时, 系统有一个鞍结点 (x_0, y_0) ; 当 $\mu < \mu_0$ 时, 无平衡点; 而当 $\mu > \mu_0$ 时, 有一个鞍点和一个结点。这种分岔称为鞍结分岔。

若 A 有一对纯虚特征值, 且当 $\mu = \mu_0$ 时, (x_0, y_0) 是系统(9.2.5)的细焦点, 则当 μ 变化时, 就可能从平衡点产生极限环, 称为霍普分岔。例如在图 9.6b 上, 当 $\mu \leq \mu_0$ 时系统有稳定焦点(特别地, 当 $\mu = \mu_0$ 时它是稳定细焦点), 在它的附近无闭轨, 当 $\mu > \mu_0$ 时, 此平衡点变为不稳定焦点, 在它的附近有一个稳定极限环。当 $\mu \rightarrow \mu_0 + 0$ 时, 此极限环趋于平衡点。

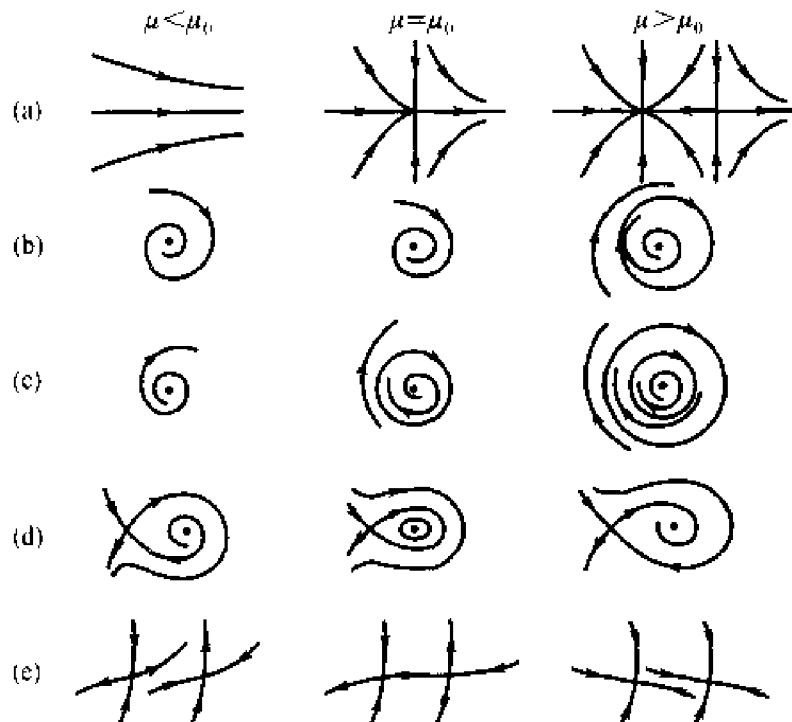


图 9.6

若 A 有一对纯虚特征值, 且当 $\mu = \mu_0$ 时, (x_0, y_0) 是系统(9.2.5)的真中心, 即在 (x_0, y_0) 附近全是闭轨, 则当 μ 变化时, 有可能从其中的某些闭轨分岔出极限环, 而平衡点也不再是中心了。这种分岔称为庞加莱分岔^[93]。

2. 闭轨分岔

设当 $\mu = \mu_0$ 时, 系统(9.2.5)有非双曲闭轨 Γ 。利用周期解稳定性定理知, 此时周期轨道 Γ 的特征指数 $\oint_{\Gamma} \operatorname{div}(P, Q) dt = 0$, 即 Γ 是多重环。当 μ 变化时, 系统可能出现闭轨突然产生或消失的现象, 称为多重环分

岔。例如在图 9.6c 上,当 $\mu=\mu_0$ 时,系统有一个二重半稳定极限环,当 $\mu<\mu_0$ 时无闭轨,而当 $\mu\geq\mu_0$ 时有两个极限环。当 $\mu\rightarrow\mu_0\pm 0$ 时,这两个极限环趋于一个环。这种分岔称为二重半稳环分岔。

3. 同宿和异宿轨线分岔

设当 $\mu=\mu_0$ 时,系统(9.2.5)有同宿轨线,则当 μ 变化时,此同宿轨线可能突然消失(见图 9.6d),或者可能从同宿轨线分岔出极限环,这种分岔称为同宿轨线分岔。

若当 $\mu=\mu_0$ 时,系统(9.2.5)有异宿轨线,则当 μ 变化时,此异宿轨线可能消失(见图 9.6e);或者从几条异宿轨线相连而成的异宿环分岔出极限环。这种分岔称为异宿轨线分岔。

在上面讨论的平面向量场的分岔中,有些属于局部分岔的范围,如高阶平衡点分岔、霍普分岔、多重环分岔等,有些则属于全局分岔的范围,如同宿和异宿分岔。

§ 9.3 隐函数定理

为了从(9.2.4)求以 μ 为函数的解 x ,或以 x 为函数的解,下面介绍隐函数定理。

定理 9.2 局部隐函数定理

设 X, Y, Z 是巴拿赫空间, $U \subset X \times Y$ 是开集, $(x, y) \in X \times Y$ 。 $f: U \rightarrow Z$ 是连续可微的,若 (x_0, y_0) 使 $f(x_0, y_0) = 0$, 则称 $(x_0, y_0) \in U$ 为(9.2.4)的平凡解。如果雅可比矩阵 $A \equiv D_x f(x_0, y_0)$ 为同胚的(或拓扑同构的), 则在 (x_0, y_0) 的邻域内可以从(9.2.4)求出惟一的解 $x = u(y)$, 使 $f(u(y), y) = 0$, 且由

$$D_x f(u(y), y) u_y(y) + f_y(u(y), y) = 0$$

有

$$u_y(y) = -[D_x f(u(y), y)]^{-1} f_y(u(y), y) \quad (9.3.1)$$

此处 $u(y)$ 是 $Y \rightarrow X$ 惟一的连续可微函数。

证 先证明解的惟一性,再证明其连续性。

不失一般性,设 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 因

$$Ax = Ax - f(x, y) = R(x, y)$$

所以

$$x = x - A^{-1} f(x, y) = g(x, y)$$

欲证明解 x 为惟一的,先证明 $g(x, y)$ 为压缩的。

$$R(x_1, y) - R(x_2, y)$$

$$\begin{aligned}
&= Ax_1 - Ax_2 + f(x_2, y) - f(x_1, y) \\
&= A(x_1 - x_2) - \int_0^1 f_x(tx_1 + (1-t)x_2, y)(x_1 - x_2) dt \\
&= \int_0^1 [D_x f(0, 0) - D_x f(tx_1 + (1-t)x_2, y)] dt (x_1 - x_2)
\end{aligned}$$

因 $D_x f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点为连续的, 所以存在与 ϵ 有关的 δ, r_1 , 使得 $\|x\| < \delta, \|y\| < r_1$ 时, 则

$$\begin{aligned}
&\|D_x f(0, 0) - D_x f(tx_1 + (1-t)x_2, y)\| < \epsilon, \\
\therefore \|R(x_1, y) - R(x_2, y)\| &\leq \int_0^1 \epsilon dt \|x_1 - x_2\| \\
&= \epsilon \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\because g(x, y) &= A^{-1}R(x, y) \\
A^{-1}\|R(x_1, y) - R(x_2, y)\| &\leq A^{-1}\epsilon \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

如取

$$A^{-1} = \frac{1}{2\epsilon}$$

故

$$\begin{aligned}
\|g(x_1, y) - g(x_2, y)\| &\leq A^{-1}\epsilon \|x_1 - x_2\| \\
&= \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

即已证明 $g(x, y)$ 是压缩的。

由不动点定理知, 如果存在一个压缩映射 g , 该 g 把某集合映射到该集合本身, 即 $g: B_\delta \rightarrow B_\delta$, 则存在一个惟一的不动点。其中

$$B_\delta = \{x \mid \|x\| < \delta\} \subseteq X$$

欲证 $g: B_\delta \rightarrow B_\delta$, 只需证明 $g(x, y) = x$ 满足 $\|x\| < \delta$ 即可。

$$g(x, y) = g(x, y) - g(0, y) + g(0, y)$$

因为 $g(0, 0) = 0$, 且 $g(x, y)$ 为连续的, 所以有 r_2 , 使得 $\|y\| < r_2$ 时, 有

$$\|g(0, y)\| < \frac{\delta}{2}$$

$$\therefore \|g(x, y)\| \leq \|g(x, y) - g(0, y)\| + \|g(0, y)\| \leq \frac{1}{2} \|x\| + \frac{\delta}{2}$$

即有 $\|x\| \leq \delta$ 。故已证明, 存在一个惟一的 $x = u(y)$, 使 $f(u(y), y) = 0$ 。

下面证明 $u(y)$ 为连续的函数。

$$\begin{aligned}
u(y_1) - u(y_2) &= g(u(y_1), y_1) - g(u(y_2), y_2) \\
&= g(u(y_1), y_1) - g(u(y_2), y_1) + g(u(y_2), y_1) -
\end{aligned}$$

$$g(u(y_2), y_2)$$

对上式两端取绝对值, 则有

$$\|u(y_1) - u(y_2)\| \leq \frac{1}{2} \|u(y_1) - u(y_2)\| +$$

$$\|g(u(y_2), y_1) - g(u(y_2), y_2)\|$$

$$\therefore \|u(y_1) - u(y_2)\| \leq 2 \|g(u(y_2), y_1) - g(u(y_2), y_2)\|$$

因 $g(x, y)$ 为连续函数, 所以当 $y_1 \rightarrow y_2$ 时, 上式右端为零, 所以 $u(y)$ 为连续函数。

定理 9.3 广义隐函数定理

如 $A = D_x f(x_0, y_0)$ 存在, 但不是可逆的, 此时 $A(x_0, y_0) = 0$. 因而 A^{-1} 无意义, 因 $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i = 0$, 故此时 A 至少有一个特征值为零。很显然, 零特征值的数目必小于 n , 一般地说零特征值的数目很小. 在这种情况下, 欲求解 x , 须应用广义隐函数定理。

设映射 f 和以前的定义相同, 即 $f: U \subseteq X \times Y \rightarrow Z, f \in C^p(U), p \geq 1, f(0, 0) = 0$ 。

取

$$\eta(A) = A \text{ 的零空间} = \{x \in X \mid Ax = 0\} \quad (9.3.2)$$

和

$$R(A) = A \text{ 的值空间 (或值域空间)} = \{z \in Z \mid Ax = z \text{ 对某些 } x \in X\} = Z \quad (9.3.3)$$

设 $\eta(A) = X_1 \subset X$, 而 X_1 在 X 中有一个补空间 X_2 , 此时有 $X = X_1 \oplus X_2$ 。

对 $x \in X$ 可写作 $x = x_1 + x_2, x_i \in X_i$ 。

设存在 $a > 0$ 和 $b > 0$, 且它们都是小量, 使得 $x_i \in X_i$ 时, 有 $\|x\|_{x_i} < a; y \in Y$ 时, 有 $\|y\|_Y < b$, 则存在 $u \in C^1; B_a(0) \times B_b(0) \rightarrow X_2$, 其中

$$B_a(0) \subset X_1, B_b(0) \subset Y$$

即 $x_2 = u(x_1, y)$, 且满足

$$f(x_1 + u(x_1, y), y) = 0, \quad u(0, 0) = 0 \quad (9.3.4)$$

从上式利用隐函数定理, 可求出 $x_2 = u(x_1, y)$ 。

证 定义一个新的参数空间

$$\tilde{Y} = X_1 \times Y, \tilde{y} \text{ 表示 } (x_1, y)$$

映射

$$G(x_2, \tilde{y}) = f(x_1 + x_2, y) = 0$$

$$G; \tilde{U} \subset X_2 \times \tilde{Y} \rightarrow Z$$

则 $D_{x_1}(0,0): X_2 \rightarrow Z$ 为同胚的, 因而可应用局部隐函数定理求出 $x_2 = u(x_1, y)$ 。

§ 9.4 稳定流形定理

9.4.1 流形和微分流形

为了证明稳定流形定理, 先说明什么叫流形。

定义 9.2 流形定义 设 M 是一个豪斯多夫(Hausdorff)空间, 在其点集中的每个点 P 有一个邻域 U_α , 且 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的开覆盖。如果对每一个开集 U_α , 联系着一个映射 $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, V_α 是 n 维欧几里得空间内的一个非空开集, 不妨假设它是 n 维开球或 n 维开矩形(图 9.7), 并且 φ_α 是同胚映射, 即 U_α 和 V_α 同胚, 就称 M 是一个 n 维流形。

直观地说, 所谓 n 维流形是可以局部(n 维)欧几里得空间化的一个拓扑空间, 其中的点可以安装局部坐标。

如果 φ_α 还具有 m 阶连续微分, 则 M 称为 n 维 C^m 流形。

下面将流形的定义推广到欧几里得空间中:

设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个欧几里得空间, $\{U_\alpha\}$ 是 \mathbb{R}^n 中覆盖了 M 的一族开集, 如果对每一个 U_α , 联系着一个同胚映射 φ_α 和开集 V_α , 满足

(1) $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, 又若 φ_α 和 φ_α^{-1} 都是连续可微。

(2) $\varphi_\alpha: U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha \cap \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_{(k+1)} = y_{(k+2)} = \dots = y_n = 0\}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$

就称 M 为 k 维微分流形, 如果 φ_α 和 φ_α^{-1} 都是属于 C^m , 则称 M 是 k 维的 C^m 流形。

显然, \mathbb{R}^n 任何一个开集一定是 n 维 C^∞ 流形。

称 U_α 为坐标邻域, φ_α 是坐标映射, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 是坐标图, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是 M 的坐标图册。这好比用一本地图册来表示地球表面上的地理疆界一样, 地球表面(近似的)是球面, 它不和平面上的任何开矩形同胚, 但可以把整个地球面用有限个开集来覆盖, 每一个开集同胚于地球册上的一页图, 后者就是平面上的一个开矩形, 这样一本地图册足以表现了全世界的

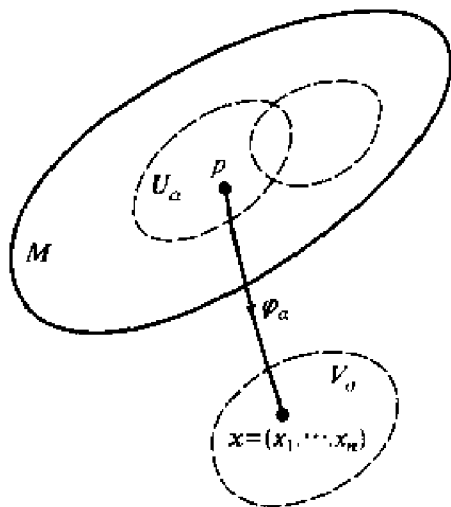


图 9.7

地理疆界。

9.4.2 线性系统平衡点的不变子空间

设线性系统

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9.4.1)$$

中 $n \times n$ 矩阵 A 有 n_s 个特征值具有负实部, n_c 个特征值具有零实部, n_u 个特征值具有正实部. 其中 l 重特征值按 l 个特征值考虑, 则 $n_s + n_c + n_u = n$. 分别以 $v_i (i=1, 2, \dots, n_s)$, $u_j (j=1, 2, \dots, n_c)$, 和 $w_k (k=1, 2, \dots, n_u)$ 表示矩阵 A 具有负实部、零实部和正实部的特征值所对应的线性无关的特征向量, 其中复共轭特征值对应的复共轭特征向量分别用其实部和虚部代替. 对于重特征值采用广义特征向量. 这些向量分别张成 \mathbb{R}^n 的 n_s 维、 n_c 维和 n_u 维子空间:

$$E^s = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_{n_s}\} \quad (9.4.2)$$

$$E^c = \text{span} \{u_1, u_2, \dots, u_{n_c}\} \quad (9.4.3)$$

$$E^u = \text{span} \{w_1, w_2, \dots, w_{n_u}\} \quad (9.4.4)$$

子空间 E^s 、 E^c 和 E^u 构成 \mathbb{R}^n 的直和分解:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u \quad (9.4.5)$$

根据微分方程(9.4.1)解的特点并利用线性代数知识, 可以证明解在子空间 E^s 、 E^c 和 E^u 中都是不变的, 即这些子空间中的初始值所对应的解仍在同一子空间. 子空间 E^s 、 E^c 和 E^u 分别称为稳定子空间、中心子空间和不稳定子空间, 合称为线性系统(9.4.1)的不变子空间. 在每个不变子空间中, 任意一点出发的相轨迹始终在该子空间中. 进一步可以证明, 在稳定子空间 E^s 上的相轨迹随着时间增加单调地或振荡地按指数规律趋于平衡点, 在中心子空间 E^c 上的相轨迹随着时间增加保持有界(单重零特征值)或按幂规律远离平衡点(多重零特征值), 在不稳定子空间 E^u 的相轨迹随着时间增加单调地或振荡地按指数规律远离平衡点.

9.4.3 稳定流形定理

平衡点的不变流形是线性系统的不变子空间概念在非线性系统中的推广. 平衡点的不变流形是系统相空间中一类特殊的曲线或曲面, 在其上出发的相迹随着时间的增加而渐近地趋近或远离平衡点.

设在自治系统,

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(y) \quad (f \in C^1, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n) \\ f(x_0) &= 0, A = D_y f(x_0) \quad (x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ 的邻域 } U) \end{aligned} \right\} \quad (9.4.6)$$

中, 当 A 在 x_0 点为双曲算子时, 若 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 为 A 的具有负实部的特征

值, E^s 为相应的特征向量张成的稳定子空间, u_1, \dots, u_u 为 A 的具有正实部的特征值, E^u 为相应的特征向量张成的不稳定子空间, $s+u=n$, 则存在惟一的稳定流形 W^s 和不稳定流形 W^u , 满足 $\dim E^s = \dim W^s$, $\dim E^u = \dim W^u$, 且在 $y=x_0$ 点, W^s, W^u 分别与 E^s, E^u 相切。

定义 9.3 局部稳定流形为

$$W_{\text{loc}}^s(x_0) \equiv \{x \in U \mid \varphi^t x \rightarrow x_0, \text{ 当 } t \rightarrow \infty \text{ 时和 } \varphi^t x \in U, \forall t \geq 0\} \quad (9.4.7)$$

将局部稳定流形 $W_{\text{loc}}^s(x_0)$ 中的点在相迹上沿时间负向移动, 得到点集 $W^s(x_0)$ 称为平衡点 x_0 的全局稳定流形, 简称稳定流形。

定义 9.4 局部不稳定流形

$$W_{\text{loc}}^u(x_0) \equiv \{x \in U \mid \varphi^t x \rightarrow x_0, \text{ 当 } t \rightarrow -\infty \text{ 时和 } \varphi^t x \in U, \forall t \leq 0\} \quad (9.4.8)$$

将局部不稳定流形 $W_{\text{loc}}^u(x_0)$ 中的点在相迹上沿时间的正方向移动, 得到点集 $W^u(x_0)$ 称为平衡点 x_0 的全局不稳定流形, 简称不稳定流形。

若一流形使得某微分方程初值在该流形内的解始终保持在该流形内, 则称之为该微分方程的不变流形。稳定流形和不稳定流形都是不变流形。

稳定流形定理说, 存在一个惟一的稳定流形 $W_{\text{loc}}^s = \{(x_s, x_u) \mid x_u = \psi(x_s)\}$, 其中映射 $\psi: E^s \rightarrow E^u$ 。

证明如下:

第一步, 将稳定子空间和不稳定子空间分离。对于

$$y' = f(y) = Ay + F(y) \quad (9.4.9)$$

其中

$$A \equiv D_y f(y) \mid_{y=x_0=0}, F(y) = [f(y) - D_y f(0)y]$$

和

$$F(0) = D_y F(0) = 0$$

存在非异线性变换 $y = Tx$, 使得

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{s \times s} & 0 \\ 0 & C_{u \times u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (9.4.10)$$

其中矩阵 B 的特征值都具有负实部, 矩阵 C 的特征值都具有正实部。

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in C^1, g = O(\|x\|^2)$$

其线性部分的基解矩阵为

$$\Phi(t) = \exp \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} \exp Bt & 0 \\ 0 & \exp Ct \end{pmatrix} \equiv \Phi_s(t) + \Phi_u(t) \quad (9.4.11)$$

其中流

$$\Phi_s(t) = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_u(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{ct} \end{pmatrix}$$

很明显, 对于 $\Phi(t)$ 存在常数 $K > 0, \alpha > 0$ 满足

$$\left. \begin{aligned} \|\Phi_s(t)\| &\leq K e^{-\alpha t} & (\forall t \geq 0) \\ \|\Phi_u(t)\| &\leq K e^{\alpha t} & (\forall t \leq 0) \end{aligned} \right\} \quad (9.4.12)$$

第二步, 将 (9.4.10) 的解化成积分方程形式的解, 找到解 $x(t)$ 的有界条件。

引理 若 $x(t)$ 为系统 (9.4.10) 的有界解, 则 $x(t)$ 为下列积分方程形式的有界解

$$x(t) = \Phi_s(t)x_s(0) + \int_0^t \Phi_s(t-\tau)g(x(\tau))d\tau - \int_t^{+\infty} \Phi_u(t-\tau)g(x(\tau))d\tau \quad (9.4.13)$$

且其初值 (即 $x_u(t)$ 的初值) 应满足

$$x_u(0) + \int_0^{+\infty} \Phi_u(-\tau)g(x(\tau))d\tau = 0 \quad (9.4.14)$$

证 若 $x(t)$ 为 (9.4.10) 的有界解, 则根据常数变易法可知:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)g(x(\tau))d\tau \\ &= \Phi_s(t)x_s(0) + \Phi_u(t)x_u(0) + \int_0^t \Phi_s(t-\tau)g(x(\tau))d\tau + \\ &\quad \int_0^t \Phi_u(t-\tau)g(x(\tau))d\tau \\ &= \Phi_s(t)x_s(0) + \int_0^t \Phi_s(t-\tau)g(x(\tau))d\tau - \\ &\quad \int_t^{+\infty} \Phi_u(t-\tau)g(x(\tau))d\tau + \\ &\quad \Phi_u(t) \left[x_u(0) + \int_0^{+\infty} \Phi_u(-\tau)g(x(\tau))d\tau \right] \end{aligned} \quad (9.4.15)$$

由 g 的性质及 $x(t)$ 的有界性可知, 存在 $N > 0$, 使得 $\|g(x(t))\| \leq N$, 因而

$$\begin{aligned} &\left\| \int_t^{+\infty} \Phi_u(t-\tau)g(x(\tau))d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \|\Phi_u(t-\tau)g(x(\tau))\| d\tau \end{aligned}$$

$$\leqslant KN e^{\alpha} \int_t^{+\infty} e^{-\alpha \tau} d\tau = \frac{KN}{\alpha} < +\infty \quad (9.4.16)$$

由 $\Phi(t)$ 的性质可知, (9.4.15) 式前三项均为有界, 在第四项中, 因 $\Phi_u(t)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时是无界的, 故欲保证是 $x(t)$ 为有界的, 必有 $x_u(0) + \int_t^{+\infty} \Phi_u(-\tau)g(x(\tau))d\tau = 0$, 这是要求初值必须满足的条件。

第三步, 构造稳定流形。

定义一个非线性映射 $T: B \rightarrow B$, $B = \{x \mid \|x(t)\| \leqslant \delta\}$

$$Tx = \Phi_s(t)x_s(0) + \int_0^t \Phi_s(t-\tau)g(x(\tau))d\tau - \int_t^{+\infty} \Phi_u(t-\tau)g(x(\tau))d\tau \quad (9.4.17)$$

容易证明 $T: B \rightarrow B$ 为一个压缩映射, 因此, 存在惟一的 $x^*(t) \in B$, 使得 $Tx^* = x^*$ 即

$$x^*(t) = \Phi_s(t)x_s^*(0) + \int_0^t \Phi_s(t-\tau)g(x^*(\tau))d\tau - \int_t^{+\infty} \Phi_u(t-\tau)g(x^*(\tau))d\tau \quad (9.4.18)$$

且满足

$$x_u^*(0) + \int_t^{+\infty} \Phi_u(-\tau)g(x^*(\tau))d\tau = 0 \quad (9.4.19)$$

定义一个映射 $\psi: E^s \rightarrow E^u$,

$$x_u = \psi(x_s) = - \int_0^{+\infty} \Phi_u(-\tau)g(x^*(x_s(\tau)))d\tau \quad (9.4.20)$$

由于 $x^*(t)$ 的惟一性, 可知 $\psi(x_s)$ 为单值的。

稳定流形为

$$W_{loc}^s = \{(x_s, x_u) \mid x_u = \psi(x_s)\} \quad (9.4.21)$$

再由 $g(0)=0$ 和 $\frac{\partial}{\partial x} g(0)=0$ 可知, $\frac{\partial \psi(0)}{\partial x_s} = 0$ 因而在 $x=0$ 点 W_{loc}^s 与 E 相切。

同理, 可证 W_{loc}^u 的存在性和惟一性。

§ 9.5 中心流形定理

设有一个常微分方程 $x' = f(x)$, 有 $f(0)=0$, 若 f 的线性化部分在原点无虚根, 那么, 由哈特曼—格罗布曼定理说明, 具有正实部和负实部特征值的数目将决定流在原点附近的拓扑结构形式。若有以零为实部的特征值, 则流在原点附近的结构将是非常复杂的, 这里包括在不变中心流形中流的不惟一性和失去光滑性, 下面将以例子对此点进行说明。

9.5.1 中心流形

定理 9.4 中心流形定理

若 $f \in C^k(U)$ 是在 \mathbf{R}^n 上的一个向量场, $k \geq 1, U \subset \mathbf{R}^n$ 为开集, $A = Df(P)$, A 的谱可分成三部分 σ_s, σ_u 和 σ_c , 且

$$\operatorname{Re} \lambda \begin{cases} < 0 & \text{若 } \lambda \in \sigma_s \\ = 0 & \text{若 } \lambda \in \sigma_c \\ > 0 & \text{若 } \lambda \in \sigma_u \end{cases}$$

令 E^s, E^u 和 E^c 为对应于 σ_s, σ_u 和 σ_c 的广义特征空间, 则存在在 P 点和 E^s, E^u 相切的 C^k 稳定不变流形 W^s 和 C^k 不稳定不变流形 W^u 和在 P 点和 E^c 相切的 C^{k-1} 中心流形 W^c 。流形 W^s 和 W^u 对 f 的流来说都是不变的。稳定和 W^c 相切的不稳定流形是惟一的, 但是 W^c 并不惟一。即 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi^t y_0$ 方向不定。

例 研究系统

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y^2 \end{cases} \quad (9.5.1)$$

该系统的线性化系统为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (9.5.2)$$

A 的特征值为 $\lambda = 0$ 和 $\lambda = -1$, 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。相应的子空间为

$$E^s = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad E^c = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ E^u = \emptyset$$

和

$$n_s = n_c = 1, n_u = 0$$

线性化系统的精确解为

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)e^{-t} \\ y &= \text{const} \end{aligned} \quad (9.5.3)$$

原系统的精确解为

$$y(t) = \frac{y(0)}{1 - y(0)t} \quad (9.5.4)$$

从(9.5.3)和(9.5.4)消去 t , 则

$$x = Ke^{\frac{-y}{y(0)}} \quad (9.5.5)$$

其中 $K = x_0 e^{-\frac{1}{y_0}}$, x_0 和 y_0 为 $t=0$ 时的 x 和 y 的值。

线性化系统的流形

$$W^s = \{(x, y) | x, y \text{ 满足 (9.5.3)}\}$$

$$W^c = \{(0, y) | y \in \mathbf{R}\}$$

其相迹图见图 9.8。

从 (9.5.5) 讨论相迹图。

当 y 从负方向趋于零, 即 $y \approx -0, \frac{1}{y} = -\frac{1}{0} = -\infty$, 故 $x = Ke^{\frac{1}{y}} = Ke^{-\infty} \approx 0$ 。

当 y 从正方向趋于零, $x \approx \infty$, 故在原点 $(0, 0)$ 相迹的导数不连续, 故说明 W^c 不惟一, 见图 9.9。

为使相迹在 $(0, 0)$ 点的导数连续, 取中心流形 W^c 的表达式为

$$W^c = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} x=0, \text{ 当 } y>0 \\ x=Ke^{\frac{1}{y}}, \text{ 当 } y\leq 0 \end{array} \right. \right\} \quad (9.5.6)$$

对 $y>0, x=0$ 时的 W^c , 其 $\frac{dx}{dy} = -\frac{0}{y^2} = 0$, 即 W^c 与 E^c 相切, 对 $y\leq 0, x=$

$Ke^{\frac{1}{y}}$, 当 y 从负方向趋于零时, 则 $\frac{dx}{dy} = 0$, 故 W^c 也与 E^c 相切。这样选择的 W^c , 其在 $(0, 0)$ 点的导数是惟一的, 见图 9.10。这样选择的 W^c , 在 $(0, 0)$ 点对不同的 K 虽有不同的中心流形, 即 W^c 不惟一, 但其在 $(0, 0)$ 点的导数是惟一的, 这样可保证 W^c 的泰勒展开式是惟一的, 但其泰勒展开式可能不收敛, 此时如振幅很小, 则该展式是具有渐近性的。

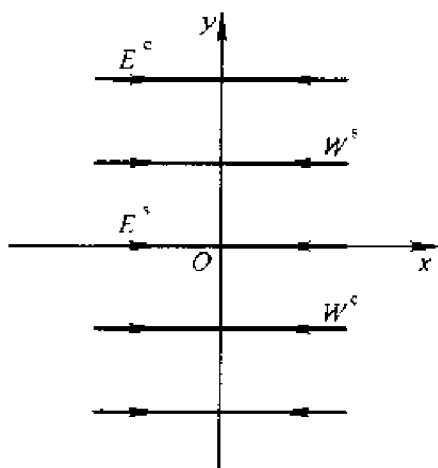


图 9.8

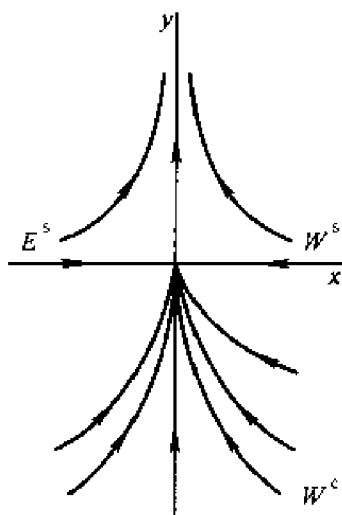


图 9.9

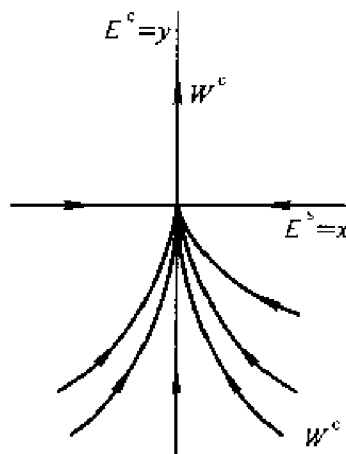


图 9.10

9.5.2 计算中心流形

为方便起见, 设 $E^n = \{0\}$, $n_0 = 0$, $n_s + n_c = n$ 。

设有系统

$$\begin{aligned} y' &= f(y), f \in C^k(U), k \geq 1, U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ (为开集)} \\ f(0) &= 0, A = D_y f(0) \end{aligned} \quad (9.5.7)$$

上式的线性化系统为

$$y' = Ay \quad (9.5.8)$$

在这种情况下, A 的谱可分为两部分 σ_s 和 σ_c 。

第一步, 给一个线性变换 T , 将 A 化成对角块形式

$$y = T\bar{y}, T^{-1}AT = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad (9.5.9)$$

其中 B 是 $n_c \times n_c$ 方阵, 其所有的 $\operatorname{Re}(\sigma) = 0$; C 是 $n_s \times n_s$ 方阵, 其所有 $\operatorname{Re}(\sigma) < 0$ 。写作

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x \in E^c = \mathbb{R}^{n_c}, y \in E^s = \mathbb{R}^{n_s}$$

将 (9.5.9) 代入 (9.5.7), 则有

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad (9.5.10)$$

其中 f 和 g 为变换后的非线性函数, 且 $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ 。

$$Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0, \left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\| = O\left[\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2\right].$$

第二步, W^c 的计算

定理 9.5 设 W^c 存在, 且和 $E^c \equiv x$ 空间相切, 此时存在微分同胚 $h: \mathbb{R}^{n_c} \rightarrow W^s$ 或 $h: E^c \rightarrow W^s$, 故可将 W^c 表示为一个局部图像, 即中心流形为 $W^c = \{(x, y) | y = h(x), x \in \mathbb{R}^{n_c}\}$, 所以 W^c 就是 $y = h(x)$ 在 xy 空间的相迹, 如图 9.11。 $h(x) = y$ 满足条件 $h(0) = 0, D_x h(0) = 0$, 即中心流形是一个非线性映射, 将中心子空间 E^c 向稳定子空间 E^s 的映射。

用泰勒级数法求 $(0, 0)$ 点附近的 $y = h(x)$ 。因 $h(0) = 0$, 则 $D_x h(0) = 0$, 现求 $D^2 h(0)$, 将 $y = h(x)$ 代入 (9.5.10), 则

$$x' = Bx + f(x, h(x)) \quad (9.5.11a)$$

$$y' = D_x h(x)x' = Ch(x) + g(x, h(x)) \quad (9.5.11b)$$

当 $h(x)$ 已知后, (9.5.11a) 就是中心流形上流的方程, 从而可得分岔方程, 一般地说, $n_c \leq n_s$, 所以 (9.5.11a) 把 n 维问题化为 n_c 维问题了, 该法

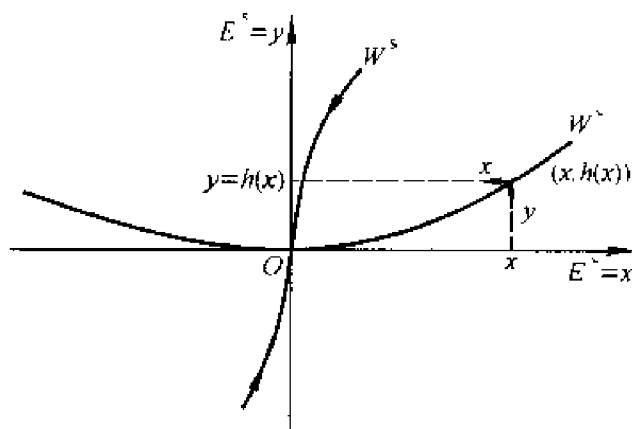


图 9.11

和 LS 方法相似,下面先来求 $h(x)$ 。

将(9.5.11a)代入(9.5.11b),并移项后,取 $M(h)$ 算子,则

$$\begin{aligned} M(h) &= D_x h(x)(Bx + f(x, h(x)) - Ch(x)) - \\ g(x, h(x)) &= 0 \end{aligned} \quad (9.5.12)$$

如将 $h(x)$ 展成形式级数

$$h(x) = \sum_{n_i + n_j = 2} a_{n_i n_j} x_i n_i x_j n_j + \cdots \quad (9.5.13)$$

将(9.5.13)代入(9.5.12),比较系数,则可解出 $a_{n_i n_j}$,根据计算精度的要求,可继续求到 $k-1$ 阶的精度。

第三步,是计算流的方程,将(9.5.13)代入(9.5.11a)后,可依之求出 x 的解,该解即为中心流形上流的表达式。

定理 9.6 一个由(9.5.11a)定义的动力系统,在原点 $x=0$ 是局部渐近稳定的(或不稳定的),则系统(9.5.7)在原点也是渐近稳定的(或不稳定的)。

定理 9.7 设一个函数 $\Phi: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 且 $\Phi(0) = D\Phi(0) = 0$, 满足 $M[\Phi(x)] = O(|x|^p)$, 对 $p > 1, p \leq k-1$, 则 $\Phi(x)$ 是 $h(x)$ 的一个近似表达式,即

$$h(x) = \Phi(x) + O(|x|^p), \text{ 当 } x \rightarrow 0 \quad (9.5.14)$$

有了以上的定理,我们可以用形式级数法来计算 $\Phi(x)$ 。

$$\Phi(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \cdots \quad (9.5.15)$$

其中 A 是线性算子, B 是双线性算子,等等。

将(9.5.15)代入(9.6.12),则 $M(\Phi(x)) = 0$, 展开并比较 x 的系数,则可求得 A, B, C 等。

定理 9.7 的推论 若 $f \in C^k(U)$, 若 h_1 和 h_2 是两个任意的中心流形, 则 $h_1(x) - h_2(x) = O(|x|^{k-1})$ 。若 $f \in C^\infty(U)$, 则 $[h_1(x) - h_2(x)]$ 在

原点所有的导数为零,因此中心流形的泰勒展开式是惟一的。

9.5.3 洛伦兹系统的分岔

现在以洛伦兹系统的分岔问题为例来阐明用中心流形定理的分析方法。设有洛伦兹系统

$$\left. \begin{aligned} x' &= \sigma(y-x) \\ y' &= \rho x - y - xz \\ z' &= -\beta z + xy \end{aligned} \right\} x' = f(x) = A(x) + g(x) \quad (9.5.16)$$

其中 σ, ρ, β 是大于零的参数。很明显,平衡点

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

是平凡解

(9.5.16)的线性化系统为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (9.5.17)$$

其特征值 $\lambda_1 = -\beta$ 和 λ_2, λ_3 满足

$$\lambda^2 + (1+\sigma)\lambda + \sigma(1-\rho) = 0$$

情况 1 取 $\rho=1$, 则三个特征值为: $\lambda_1 = -\beta, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -(1+\sigma)$, 在这种情况下发生分岔。可以从下式

$$\begin{pmatrix} \sigma+\lambda & -\sigma & 0 \\ -1 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \beta+\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

计算特征向量。对应 λ_1 的特征向量

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1)^T$$

对应 λ_2 的特征向量 $(1, 1, 0)^T$, 对应 λ_3 的特征向量 $(\sigma, -1, 0)^T$ 。 λ_1 和 λ_3 的特征向量张成稳定子空间 E^s , 而对应 λ_2 的特征向量张成中心子空间 E^c 。

第一步,对特征基 $(x, y, z)^T$ 进行线性变换 $T(u, v, w)$, 即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \sigma \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \equiv Tu \quad (9.5.18a)$$

$$\therefore T = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{1+\sigma} & \frac{\sigma}{1+\sigma} & 0 \\ \frac{1}{1+\sigma} & \frac{-1}{1+\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.5.18b)$$

将(9.5.18a)代入(9.16), 则

$$u' = T^{-1}ATu + T^{-1}g(Tu)$$

将(9.5.18b)代入上式, 经运算后, 则

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{1+\sigma}(u+\sigma v)w \\ \frac{1}{1+\sigma}(u+\sigma v)w \\ (u+\sigma v)(u-v) \end{pmatrix} \quad (9.5.19a)$$

对变量 u , 其特征值未变, 而其对应的特征向量为: 对 $\lambda_1 = -\beta$, 特征向量为 $(0, 0, 1)^T$, 对 $\lambda_2 = 0$, $(1, 0, 0)^T$. 对 $\lambda_3 = -(1+\sigma)$, $(0, 1, 0)^T$. 故

$$E^c = u \text{ 轴}$$

$$E^s = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\}$$

$$E^u = \emptyset$$

方程组(9.5.19)的线性部分已解耦:

$$u' = -\frac{\sigma}{1+\sigma}(u+\sigma v)w \quad (9.5.19b)$$

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -(1+\sigma) & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\sigma}(u+\sigma v)w \\ (u+\sigma v)(u-v) \end{pmatrix} \quad (9.5.19c)$$

中心流形 W^c 是与中心子空间 E^c 相切的曲线。

第二步, 求 W^c 的方程。

现在需求出在(0)点的邻域内, W^c 在 0 点与 E^c 相切后, 从 u 轴向 v 及 w 偏离的函数 $h_1(u)$ 和 $h_2(u)$ 。

中心流形

$$W^c = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = h(u) = \begin{pmatrix} h_1(u) \\ h_2(u) \end{pmatrix} \right\} \quad (9.5.20)$$

其中 $h(0)=0, Dh(0)=0, h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ 为在 0 点邻域上的微分同胚。用形式幂级数法求 $h(u)$ 。

设

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = h(u) = \begin{pmatrix} a_1 u^2 + b_1 u^3 + c_1 u^4 + \cdots \\ a_2 u^2 + b_2 u^3 + c_2 u^4 + \cdots \end{pmatrix} \quad (9.5.21)$$

将(9.5.21)代入(9.5.19c), 其中的 u' 以(9.5.19b)代入后, 则

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} h'_1(u) \\ h'_2(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma \\ 1+\sigma \end{pmatrix} (u + \sigma h_1(u)) h_2(u) \\ &= \begin{pmatrix} -(1+\sigma)h_1(u) + \frac{1}{1+\sigma}(u + \sigma h_1(u))h_2(u) \\ -\beta h_2(u) + (u + \sigma h_1(u))(u - h_1(u)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.5.22)$$

其中

$$h'_i(u) = \frac{\partial h_i(u)}{\partial(u)} = \frac{dh_i}{du} = 2a_i u + 3b_i u^2 + 4c_i u^3 + \cdots \quad (i=1, 2)$$

将 h 和 h' 以(9.5.21)代入(9.5.22), 比较系数后, 则

v —方程

$$O(u^2) : 0 = -(1+\sigma)a_1, \therefore a_1 = 0$$

$$O(u^3) : 0 = -(1+\sigma)b_1 + \left(\frac{1}{1+\sigma}\right)a_2$$

$$O(u^4) : 2\left(\frac{-\sigma}{1+\sigma}\right)a_1 a_2 = -(1+\sigma)c_1 + \left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\right)a_1 a_2 + \left(\frac{1}{1+\sigma}\right)b_2$$

...

w —方程

$$O(u^2) : 0 = -\beta a_2 + 1, \therefore a_2 = \frac{1}{\beta}$$

$$O(u^3) : 0 = -\beta b_2 + \sigma a_1 - a_1, \therefore b_2 = 0$$

$$O(u^4) : 2\left(\frac{-\sigma}{1+\sigma}\right)a_2^2 = -\beta c_2 + \sigma b_1 - \sigma a_1 - b_1$$

$$\therefore a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{\beta}, b_1 = \frac{1}{(1+\sigma)^2 \beta}, b_2 = 0,$$

$$c_1 = 0, c_2 = \frac{2\sigma}{(1+\sigma)\beta^3}$$

精确到四次方的中心流形为

$$W^c = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(u) \\ h_2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^4}{(1+\sigma)^2 \beta} + O(u)^5 \\ \frac{1}{\beta} u^2 + \frac{2\sigma}{(1+\sigma)\beta^3} u^4 + O(u^5) \end{pmatrix} \right. \right\} \quad (9.5.23)$$

第三步,为了求中心流形上流的方程,将 h_1 和 h_2 代入(9.5.19b)则

$$u' = -\frac{\sigma}{1+\sigma}[u+\sigma h_1(u)]h_2(u) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{-\sigma}{1+\sigma}\right) \times \left[u^3 + \left(\frac{\sigma(\beta+2(1+\sigma))}{2\beta(1+\sigma)^2}\right)u^5\right] + O(u^5) \quad (9.5.24)$$

在上方程中 u^3 的系数是负数,故在中心流形上的流是渐近稳定的,由定理 9.5 知点 $(0,0,0)$ 也是渐近稳定的。

情况 2 研究 ρ 近于 1 的情况,在这种情况下特征值是: $-\beta$ 和 $-\frac{1+\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)^2 - \sigma(1-\rho)}$. 令 $\rho=1+\epsilon$, 这里 ϵ 是小参数,将 ρ 代入特征值的表达式,则

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{(1+\sigma)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1+\sigma)^2 + 4\sigma\epsilon} \\ &= \frac{(1+\sigma)}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\sigma\epsilon}{(1+\sigma)^2}} \right] \\ &= \frac{(1+\sigma)}{2} \left\{ -1 \pm \left[1 + \frac{2\sigma\epsilon}{(1+\sigma)^2} + \dots \right] \right\} \\ \therefore \lambda_2 &= \frac{\sigma\epsilon}{(1+\sigma)} + O(\epsilon^2) \\ \lambda_3 &= -(1+\sigma) + \frac{\sigma\epsilon}{(1+\sigma)} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (9.5.25)$$

根据以上分析,可得以下结论,原点 $(0,0,0)$ 是: $\rho < 1$, 即 $\epsilon < 0$, 则此时 λ_1, λ_2 和 λ_3 都有负实部,则原点为双曲的和稳定的,此时有三维稳定流形。 $\rho > 1$, 即 $\epsilon > 0$, 原点是双曲的不稳定鞍点、二维稳定流形和一维不稳定流形。 $\rho = 1$, 因 $\epsilon = 0$ 故 $\lambda_2 = 0$, 此时原点为非双曲的,有模糊引子,流为稳定的。在 ρ 的变化过程中, ρ 从小于 1 变到等于 1, 又变到大于 1, 在变化过程中,流形在原点由双曲的变到非双曲的,又变到双曲的,故有分岔发生。分岔见图 9.12。

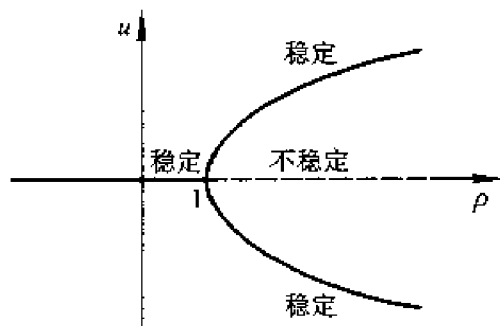


图 9.12

§ 9.6 向量场正规形

向量场正规形(也称庞加莱正规形,标准型)是向量场的一种简化了的解析表达式,这样简化是由近恒等的非线性坐标变换而得。对正规形进行动力学特性的分析可得到每一个分岔形式的流的定性几何结构。

成功地引入简化解析表达式的非线性变换本身就是一个很有效的学术思想,它是 KAM(Kolmogorov-Arnold-Moser)研究拟周期现象的基础,这个学术思想也被用于求正规形的平均法。

微分方程局部有限光滑正规形对全局分岔理论也是十分有益的。这些正规形显著地简化了寻求和研究分岔问题的过程,同样也简化了所得结果的论证和分析。从另一方面来说全局分岔理论又可分出正规形理论,这个理论对实际应用来说也是十分重要的,正规形理论和全局分岔理论的联系还有许多工作需要做。正规形理论在庞加莱和伯克霍夫(G. D. Birkhoff)理论之后,近年来阿诺德(Arnold),泰肯斯(F. Takens),周修义和伊欧斯(G. Iooss)等人做了大量的工作。

求向量场正规形有矩阵法,共轭算子法,李代数法等各种方法,本节只介绍矩阵法。

9.6.1 同调算子

现讨论非线性微分方程

$$y' = f(y), f \in C^k(\mathbb{R}^n) \quad (9.6.1)$$

k 为大值。将向量场 $f(y)$ 展成泰勒级数

$$f(y) = Ay + B(y, y) + C(y, y, y) + \cdots \quad (9.6.2)$$

其中 $A = D_y f(0)$, 可用线性变换将 A 化成对角块形式, B 为双线性部分, $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; C 为三线性部分, $C: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。

现举例说明,可以用一个近恒等的非线性坐标变换,使 $B(y, y)$ 化为最简形式。

取近恒等的非线性变换

$$y = x + p_2(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (9.6.3)$$

其中

$$p_2(x) = \begin{bmatrix} a_1 x_1^2 + b_1 x_1 x_2 + \cdots \\ a_2 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + \cdots \\ \cdots \cdots \\ a_n x_1^2 + b_n x_1 x_2 + \cdots \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (9.6.4)$$

为二次齐次多项式。

将(9.6.4)代入(9.6.2)后;左端为

$$y' = x' + [D_x p_2(x)]x' = [I + D_x p_2(x)]x' \quad (9.6.5)$$

右端为,

$$f(y) = A(x + p_2(x)) + B(x, x) + \text{h. o. t} \quad (9.6.6)$$

因 $[I + D_x p_2(x)]^{-1}$ 对充分小的 x 是存在的,由矩阵的二项式定理知

$$[I + D_x p_2(x)]^{-1} = I - D_x p_2(x) + [D_x p_2(x)]^2 + \dots$$

令(9.6.5)和(9.6.6)相等,整理后,则

$$x' = Ax + Ap_2(x) - D_x p_2(x)Ax + B(x, x) + \text{h. o. t} \quad (9.6.7)$$

上式的线性部分 Ax 和变换前一样。二阶项部分的最理想的简化情况是令其等于零,为此需求这样一个 $p_2(x)$ 函数以使正规形中的二阶项部分消失,即

$$D_x p_2(x)Ax - Ap_2(x) = B(x, x) \quad (9.6.8)$$

式(9.6.8)称为同调方程,它是一个二次齐次方程式。

定义一个同调算子

$$L_A(p) = [D_x p_2(x)]Ax - Ap(x) \quad (9.6.9)$$

则(9.6.8)可写为

$$L_A(p_2) = B \quad (9.6.10)$$

同调算子 L_A 的性质:(a) L_A 是线性的;(b)若 p 是 k 阶齐次的,则 $L_A(p(x))$ 也是 k 阶齐次的,此时变换后的系统中,低于 $(k-1)$ 阶的项(含 $k-1$ 阶项)不变。

定义 9.5 $H_k(\mathbf{R}^n)$ 为 k 次基空间,它是以 n 个变量的所有 k 次齐次多项式的每一个 k 阶单项式作为基所张成。

$$\dim H_k(\mathbf{R}^n) = n \times (n+k-1) \times (n-1) \quad (9.6.11)$$

例 $n=2, k=2$

$$p_2(\mathbf{R}^2) = \begin{pmatrix} a_1 x_1^2 + b_1 x_1 x_2 + c_1 x_2^2 \\ a_2 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2 \end{pmatrix}$$

$\dim H_k(\mathbf{R}^n) = 2(2+2-1) \cdot (2-1) = 6$, $H_2(\mathbf{R}^2)$ 的维数为6,即以上两个2阶齐次多项式的6项每一项都是一个基,该基可采用反字典顺序

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

由 \mathbf{R}^2 为二维变成 $H_2(\mathbf{R}^2)$ 为六维,故 $H_2(\mathbf{R}^2)$ 较 \mathbf{R}^2 的维数升高。

当 n, k 为有限的数时, $H_k(\mathbf{R}^n)$ 永是有限维的。

$$L_A: H_k(\mathbf{R}^n) \rightarrow H_k(\mathbf{R}^n)$$

由于映射 L_A 为线性的,故 L_A 是一个 $(\dim H_k) \times (\dim H_k)$ 的矩阵。

从(9.6.10)知,若 L_A 是可逆的,或 B 在 L_A 的值域内,则解 p_2 是惟一的。

庞加莱关于 L_A 频谱的引理。

设在 \mathbf{R}^n 上, A 有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (其中包括重根和复根), 则在 $H_k(\mathbf{R}^n)$ 上, L_A 的特征值为

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots + m_n\lambda_n - \lambda_s = \sum_{i=1}^n m_i\lambda_i - \lambda_s = \langle m, \lambda \rangle - \lambda_s \quad (9.6.12)$$

其中 m_1, m_2, \dots, m_n 是大于等于零的整数, $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ 。(该引理将在下面证明。)

9.6.2 非共振情况

定理 9.8 庞加莱线性化定理

对所有的 $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ 和所有的 $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $|m| = \sum_{i=1}^n m_i \geq 2$, 若有非共振条件

$$\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s \neq 0 \quad (9.6.13)$$

则方程(9.6.10) $L_A p = B$, 对任意的右端都是可解的, 其中 $B \in H_k(\mathbf{R}^n)$ 。

在这种情况下, 可采用逐次变换

$$y = x + p_k(x) \quad (k=2, \dots, l-1) \quad (9.6.14)$$

则常微分方程 $y' = f(y)$, $f \in C^l$, 可以化成

$$x' = Ax + O(\|x\|^l) \quad (9.6.15a)$$

式(9.6.14)中的 $p_k(x) \in H_k$ 。如忽略(9.6.15)中的高次项, 则有

$$x' = Ax \quad (9.6.15b)$$

即在满足非共振的条件(9.6.13)时, 非线性微分方程(9.6.1), 可以用线性方程(9.6.15)来代替。即在非共振情况下, 非线性自治方程可以线性化。

定义 9.6 (庞加莱正规形关于共振的定义)

若存在一组整数 $m_1, m_2, \dots, m_n \geq 0$, 且 $|m| = \sum_{i=1}^n m_i \geq 2$, 和存在 $s \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得

$$\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s = 0 \quad (9.6.16)$$

则称 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为共振的, 其中 $\lambda_i \in \mathbb{C}$ (复数)。

注 1 从(9.6.16)有 $\langle m, \lambda \rangle = \lambda_s$, 该式表示当方程组(9.6.1)中非线性项的组合频率 $\langle m, \lambda \rangle$ 和第 s 个固有频率相重合时, 庞加莱称之为共振。

在一般非线性振动书中称之为内共振。

注2 阿诺德定义的庞加莱括号或盖肯黑木尔(J. Guckenheimer)和霍尔姆斯(P. Holmes)定义的李括号为:

$$[P, Q] = (DQ)P - (DP)Q$$

其中 P, Q 为向量场。在前面的讨论中, 取 $Q(x) = Ax$, 则 $DAx = A$, 所以有

$$[P(x), Ax] = AP(x) - (DP(x))Ax = -L_A(P)$$

算子 L_A 前加负号即为李括号。若 $P \in H_m(\mathbb{R}^n)$, 则

$$L_A(P) \in H_m(\mathbb{R}^n)$$

下面返回来证明庞加莱引理。

设 A 是已经对角化了的, 令 e_1, e_2, \dots, e_n 是对应于 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的特征向量, 令 x_1, x_2, \dots, x_n 是相对应的特征基的坐标, 是标量, 故 $x^m e$ 也是特征向量。如 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ 这个积是一个单项式, 且为一个标量, 而该单项式的阶数为 $|m| = \sum_{i=1}^n m_i$ 。

设

$$P_{m,s}(x) = (0, \dots, 0, x^m, 0, \dots, 0)^T = x^m e_s \quad (9.6.17)$$

表示 x^m 这个单项式在第 s 个位置。

注3 $\{P_{m,s}(x) \mid |m| = k, 1 \leq s \leq n\}$ 是 H_k 的一个基。故 $H_k(\mathbb{R}^n)$ 是由 n 个变量的所有 k 阶齐次多项式的每一项为基所张成的空间。

此时

$$L_A[P_{m,s}(x)] = \left[\frac{\partial P_{m,s}(x)}{\partial x} \right] Ax - AP_{m,s}(x) \quad (9.6.18)$$

由(9.6.17)知, 在 $P_{m,s}(x)$ 所代表的列中, 除第 s 位置的元素 x^m 外, 其余元素均为零, 故

$$\left[\frac{\partial P_{m,s}(x)}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial x^m}{\partial x_1} & \frac{\partial x^m}{\partial x_2} & \frac{\partial x^m}{\partial x_n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{—第 } s \text{ 行} \quad (9.6.19)$$

$$x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$$

因

和

$$\frac{\partial x^m}{\partial x_i} = m_i x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_i^{m_i-1} \cdots x_n^{m_n} \quad (9.6.20)$$

将(9.6.17)、(9.6.19)和(9.6.20)代入(9.6.18),则

$$\begin{aligned}
 L_A[\mathbf{P}_{m,s}(x)] &= \left[\frac{\partial \mathbf{P}_{m,s}(x)}{\partial x} \right] Ax - A\mathbf{P}_{m,s}(x) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & m_1(x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_i^{m_i-1} \cdots x_n^{m_n}) & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_i x_i \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} - \\
 &\quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & \\ 0 & \cdots \\ m_1 x_1^{m_1-1+1} x_2^{m_2} \cdots x_i^{m_i} \cdots x_n^{m_n} \lambda_1 & m_2 x_1^{m_1} x_2^{m_2-1+1} \cdots x_i^{m_i} \cdots x_n^{m_n} \lambda_2 \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \\ 0 & \cdots \end{pmatrix} \\
 &\quad \left. \begin{pmatrix} \cdots & 0 \\ \cdots & \vdots \\ \cdots & 0 \\ \cdots & m_n x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_i^{m_i} \cdots x_n^{m_n-1+1} \lambda_n \\ \cdots & 0 \\ \cdots & \vdots \\ \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} - x^m \lambda_s e_s, \quad (9.6.21) \\
 &= (m_1 x^m \lambda_1 + \cdots + m_n x^m \lambda_n) e_s - x^m \lambda_s e_s = [\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s] x^m e_s.
 \end{aligned}$$

故 $\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s$ 表示 L_A 的特征值, 而 $x^m e_s$ 表示 $L_A(\mathbf{P}_{m,s}(x))$ 的特征向量。庞加莱引理证毕。

根据若当(C. Jordan)典则形式可将上述方法推广到当 A 为非对角

形式的情况。也可推广到复数的情况。

关于庞加莱定理的证明:现用归纳法进行证明。当 $l=2$ 时,前面已经进行了证明,设对 $k=2,3,\dots,r-1$ 都是对的,下面证明 $k=r$ 也正确。

$$\text{即} \quad y' = Ay + V_r(y) + h. o. t \quad (9.6.22)$$

$$\text{其中} \quad V_r \in H_r(\mathbb{R}^n)$$

为消除 V_r , 设 $y = x + p_r(x)$ 并将之代入 (9.6.22), 则

$$x' + \frac{\partial p_r(x)}{\partial x} x' = Ax + Ap_r(x) + V_r(x + p_r(x)) + h. o. t$$

或

$$\begin{aligned} x' &= \left[I + \frac{\partial p_r(x)}{\partial x} \right]^{-1} [Ax + Ap_r(x) + V_r(x + p_r(x)) + h. o. t] \\ &= Ax - \frac{\partial p_r(x)}{\partial x} Ax + Ap_r(x) + V_r(x + p_r(x)) + h. o. t \end{aligned}$$

为了消除 (9.6.22) 中的 $V_r(y)$, 令

$$L_A[p_r(x)] = V_r(x) \quad (9.6.23)$$

当且仅当 L_A 是可逆的时, 则上式对所有的 $V_r(x)$ 才是可解的。当满足非共振关系 (9.6.13) 时, L_A 的特征值没有一个为零, 即 L_A 为可逆的。则原非线性微分方程 (9.6.1), 经过一系列的近恒等的非线性变换, 可以在满足一定精度要求的前提下线性化。若 (9.6.1) 中的 $f(y)$ 是解析的或 $f \in C^\infty$, 则有一个解析的极限变换 $x + p_k(x)$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 可将 (9.6.1) 化成线性微分方程

$$x' = Ax$$

庞加莱共振关系和分岔问题:

情况 1 若系统只有一个简单零特征值, 如 $\lambda_1 = 0$ 此时 (9.6.16)

$$m\lambda_1 = \lambda_1 = (m-1)\lambda_1 = 0$$

满足, 因 $\lambda_1 = 0$, 所以 $m-1 \neq 0$, 根据定义 $\sum m = m \geq 2$, 故分岔方程单项的幂数 $m \geq 2$, 分岔方程可能的形式为

$$z = C_1 z^2 + C_2 z^3$$

从上式知可能发生简单分岔。

情况 2 若系统只有一对纯虚根

$$\lambda_1 = i\omega = -\lambda_2$$

此时共振关系 $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 - \lambda_1 = m_1i\omega - m_2i\omega - i\omega = 0$

满足, 消去 $i\omega$ 后, 有

$$m_1 - m_2 - 1 = 0 \quad (a)$$

$$\text{和} \quad \sum m = m_1 + m_2 \geq 2 \quad (b)$$

由(a)和(b), m_1 和 m_2 应满足

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, 3, 4, \dots \\ 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}$$

分岔方程可能的形式为

$$z = i\omega z + C_1 z^2 \bar{z} + C_2 z^3 \bar{z}^2 + \dots$$

根据以上的讨论知, 只有满足庞加莱共振条件时, 才有可能发生分岔。

9.6.3 共振情况——庞加莱正规形(或庞加莱—伯克霍夫正规形)

若 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 满足庞加莱内共振关系(9.6.16)

$$\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s = \left(\sum_{i=1}^n m_i \lambda_i \right) - \lambda_s = 0$$

则 $P_{m,s}(x) \in H_m(\mathbb{R}^n)$ 对 A 来说是庞加莱共振情况。其中 m, s 的定义同前。在这种情况下, 同调方程为(9.6.23), 即

$$L_A(p_k(x)) = V_k(x)$$

因 $(L_A)^{-1}$ 不存在, 所以在共振情况下, 不能求得 $p_k(x)$ 以消去向量场展开式中的 $V_k(x)$ 项。这也意味着 $V_k(x) \notin R(L_A)$, 此时, 我们可采用和广义隐函数定理相同的处理方法, 将 $H_k(\mathbb{R}^n)$ 进行直和分解:

$$H_k = R(L_A) \oplus W_k$$

$$V_k(x) = r_k + w_k, r_k \in R(L_A), w_k \in W_k$$

$$\text{则} \quad L_A p_k(x) = r_k + w_k \quad (9.6.24)$$

因 L_A 为线性算子, 且对 r_k 来说是可逆的, 则由 $L_A p_k(x) = r_k$, 可将非线性微分方程中的 r_k 项消去, 只剩下 $w_k \in W_k$ 部分, 所以, 在庞加莱共振情况下, 向量场正规形为

$$x' = Ax + w_2(x) + \dots + w_{k-1}(x) + O(\|x\|^k) \quad (9.6.25)$$

注1 当 k 为固定值时, 如 $|x| \rightarrow 0$, 则 $O(\|x\|^k) = R_k(x) \rightarrow 0$ 。

注2 对固定的 x 值。当 $k \rightarrow \infty$ 时, $R_k(x) \rightarrow \infty$ 。所以, 实际上我们计算的是形式正规形(即渐近正规形, 而不是收敛正规形):

$$x' = Ax + w_2(x) + w_3(x) + \dots \quad (9.6.26)$$

正规形(9.6.25)称为庞加莱—伯克霍夫正规形(简称PB正规形)。

下面讨论 $W_k(x)$ 的选择, 以使 $H_k = R(L_A) \oplus W_k$, 根据弗雷德霍姆(Fredholm)择一性定理, 设 H, G 为希尔伯特(Hilbert)空间(即完备的内积空间), $L_A: H \rightarrow G$ 为线性有界算子, 其共轭算子为 $L_A^* = L_A^*$, 即内积 $(L_A x, y) = (x, L_A^* y)$ 成立, 则 $(R(L_A))^{\perp} = \eta(L_A^*)$, 其中 $L_A^*: G \rightarrow H$ 。

证 因 $(L_A x, y) = (x, L_A^* y)$ 。其中 $x \in H, y \in G$, 当 $y \in \eta(L_A^*)$ 时, $L_A^* y = 0$, 所以有 $(L_A x, y) = 0$, 且该式对 $\forall x \in H$ 都成立, 故有 $y \in (R(L_A))^\perp$, 即

$$\eta(L_A^*) \subset (R(L_A))^\perp$$

另外, 对 $\forall y \in (R(L_A))^\perp$, 则对 $\forall x \in H$, 有

$$(L_A x, y) = 0 = (x, L_A^* y)$$

又因 $L_A^* y = 0$, 所以 $y \in \eta(L_A^*)$ 即 $(R(L_A))^\perp \subset \eta(L_A^*)$ 。

综上所述, 故有

$$(R(L_A))^\perp = \eta(L_A^*)$$

故可选取

$$W_k = \eta(L_A^*)$$

应指出 W_k 的选取并不惟一, 采用不同的方法 W_k 的表达式可能不同, 但它们在一定的意义下是等价的。

§ 9.7 霍普夫分岔定理

在很多自然界发生的非保守系统中都会有周期振动现象存在, 霍普夫(Hopf)分岔理论是研究周期振动现象的某些近代发展的理论, 本节将介绍用正规形理论研究自治系统的霍普夫分岔的方法。

9.7.1 霍普夫分岔举例

首先研究一个具有非线性阻尼的单自由度振动系统的例子

$$x'' + (x^2 + x'^2 - \mu)x' + x = 0 \quad (9.7.1)$$

在上方程中若分岔参数 $\mu > 0$, 则非线性阻尼 $(x^2 + x'^2 - \mu)x'$ 在振动增长过程中可能改变符号, 即对小量 $(x^2 + x'^2)$, 非线性阻尼为负, 使系统的振动增长; 对大值 $(x^2 + x'^2)$, 非线性阻尼为正, 使振动衰减。因而该系统可能使振动稳定在某种确定状态。

将(9.7.1)化成典则方程组

设 $y_1 = x, y_2 = x'$, 则

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ y_2(y_1^2 + y_2^2) \end{bmatrix} \quad (9.7.2)$$

上式的线性化方程为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (9.7.3)$$

特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu}{2} \pm i \sqrt{\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)^2} \quad (9.7.4)$$

只研究 $|\mu| \ll 1$ 的情况, 即 μ 值在零附近的相迹, 见图 9.13。

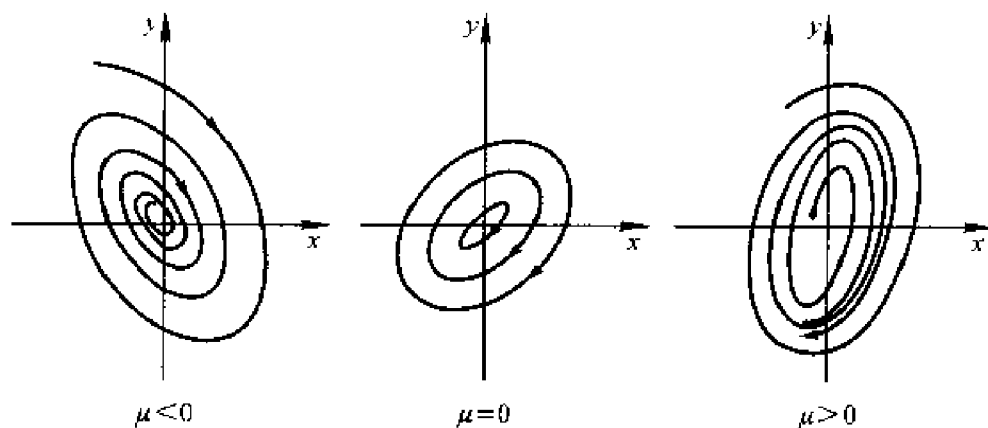


图 9.13

当 $\mu > 0$ 和 $\mu < 0$ 时是结构稳定的, 而当 $\mu = 0$ 时, 失去了结构稳定性, 则有单参量的一族周期轨道。对非线性微分方程组 (9.7.2), 当 $\mu \neq 0$ 时, 在 $(0,0)$ 的邻域内根据哈特曼—格罗布曼定理有和线性系统拓扑等价的相迹。在中心点的邻域内, 非线性系统也存在单参数的一族周期轨道, 下面用极坐标方法解此非线性问题, 设

$$y_1 = r \cos \theta, y_2 = r \sin \theta \quad (9.7.5)$$

将 (9.7.5) 代入 (9.7.2), 则

$$r' \cos \theta - r \sin \theta \theta' = r \sin \theta$$

$$r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' = -r \cos \theta + \mu r \sin \theta - r^3 \sin \theta$$

从以上两个方程可得

$$\left. \begin{aligned} r' &= r(\mu - r^2) \sin \theta \\ \theta' &= -1 + (\mu - r^2) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (9.7.6)$$

从 (9.7.6) 的第二式知, 若 r 和 μ 都为近于零的小量, 则 $|\mu - r^2| \ll 1$, 故 θ' 为负值, 所以流为顺时针旋转。下面研究 (9.7.6) 的第一个方程式。

若 $\mu > r^2$, 当 $\theta \neq 0$ 和 $\theta \neq \pi$ 时, 则 $r' > 0$, 振幅不断增大, 即相迹线为向外的螺旋线;

若 $\mu < r^2$, 当则 $r' < 0$, 相迹线为向内的螺旋线;

若 $\mu = r^2$, 则 $r = \sqrt{\mu} (\mu > 0)$, $r' = 0$ 和 $\theta' = -1$, 即为顺时针方向旋转的周期轨道。见图 9.14。

在系统 (9.7.6) 中, 随着 μ 的变化, 分岔图如图 9.15 所示。其线性化

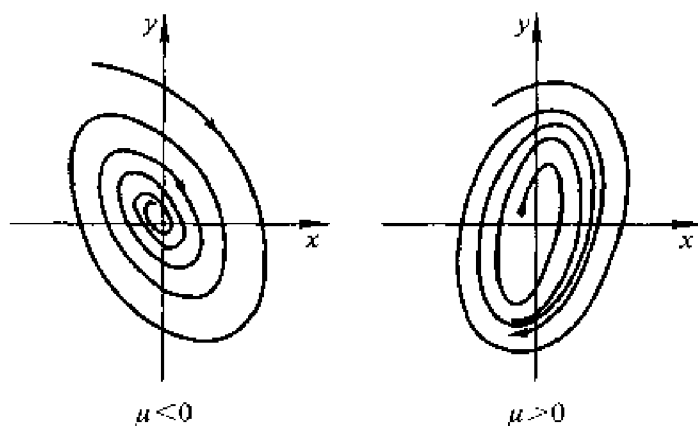


图 9.14

系统当 $\mu=0$ 时有单参数的一族周期轨道,而在非线性系统中只有当 $\mu>0$,即 $\mu=r^2$ 时有单参数的一族周期轨道,该轨道为渐近稳定的。

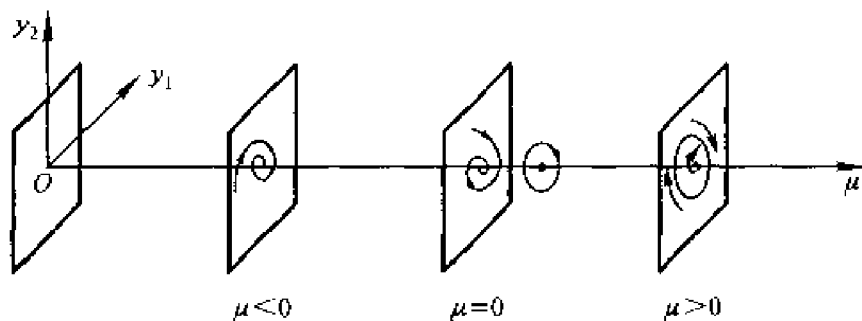


图 9.15

9.7.2 霍普夫分岔定理

为了本章的需要,现叙述霍普夫分岔定理,设有非线性常微分方程

$$y' = f(y, \mu), f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n, n \geq 2, f \in C^\infty \quad (9.7.7)$$

假若

(1) 若 μ_0 处存在一个平衡点 $y_0 \in \mathbf{R}^n$, 即 $f(y_0, \mu_0) = 0$ 和 $D_y f(y_0, \mu_0) \equiv A_{n \times n}$ 是可逆的。根据隐函数定理,在 μ_0 的邻域内存在一条通过平衡点 y_0 的曲线,且 $y = y(\mu)$, 不失一般性,可移动 μ 轴使 $f(0, \mu) = 0$;

(2) $A(\mu) \equiv D_y f(0, \mu)$ 有一对共轭复特征根 $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$, 当 $\mu = \mu_0$ 时满足

$$\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) = \beta_0 > 0$$

(3) 横截条件 $\alpha'(\mu_0) \neq 0$ 意味着 $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ 当 μ 通过 μ_0 时横穿虚轴;

(4) $A(\mu_0)$ 其余的 $n-2$ 个特征值都有负实部。则(9.7.7)存在一个

参数 ϵ 的周期解族, 并存在一个 C^1 的 $\mu(\epsilon)$ 函数

$$\mu(\epsilon) = \mu_0 + \epsilon^2 \mu_2(\epsilon) + O(\epsilon^4), 0 < \epsilon < \epsilon_p > 0 \quad (9.7.8a)$$

使得对每一个 $\epsilon \in [0, \epsilon_p]$, 存在一个产生于 $\mu(\epsilon)$ 的周期解 $y(s, \epsilon)$, 即存在一个 $y_0 = 0$ 的邻域 η 和包含 μ_0 的一个开区间 θ 使得对于任意 $\mu \in \theta$, 在 η 中 (9.7.7) 有一个作为解族成员的非常数周期解 $y(s, \epsilon)$ 。

$$y(x, \epsilon) = \epsilon \varphi(s) + \epsilon^2 \omega(x, \epsilon) + O(\epsilon^3) \quad (9.7.8b)$$

该解的周期为

$$T(\epsilon) = \frac{2\pi}{\beta_0} + \epsilon^2 T_2(\epsilon) + O(\epsilon^4) \quad (9.7.8c)$$

上式中 $s = \frac{2\pi}{T}t$ 是重新标度后的时间, $T(\epsilon)$ 是轨道的周期, $\varphi(s) = \text{Re}[\mathbf{v}e^{i\beta s}]$, \mathbf{v} 为对应于 $i\beta$ 的特征向量, μ_2 , T_2 和 ω 都是 ϵ 的连续函数, ω 位于 $i\beta$ 的特征空间的补空间内。

(9.7.7) 中的向量场 $f(y, \mu)$ 在 (y_0, μ_0) 的邻域内对 y, μ 若为解析的, 解的解析表达式为

$$\mu(\epsilon) = \sum_{i=2}^{\infty} \mu_i \epsilon^i \quad (9.7.9a)$$

$$T(\epsilon) = \frac{2\pi}{\beta_0} \left[1 + \sum_{i=2}^{\infty} \tau_i \epsilon^i \right] \quad (9.7.9b)$$

$$y(s, \epsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(s) \epsilon^i \quad (9.7.9c)$$

它们的计算方法和解的稳定性问题将在下面进行讨论。

9.7.3 霍普夫分岔的复数正规形

若系统 (9.7.7) 经中心流形定理简化后得到了二维系统

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}, \text{ o. t. }, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2 \quad (9.7.10)$$

其中

$$\mathbf{A} = D_x \mathbf{f}(\mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0} = D_y \mathbf{f}(0)$$

设 \mathbf{A} 有一对特征值 $\pm i\omega$, 上式经过坐标变换后, 得实数的表达式

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \mathbf{h}, \text{ o. t. } \quad (9.7.11)$$

为了从 \mathbf{R}^2 空间变换到复空间 \mathbf{C} , 取

$$z = y_1 + iy_2$$

$$\bar{z} = y_1 - iy_2$$

对上式求导, 并将 (9.7.11) 代入, 则

$$z' = y_1' + iy_2' = -\omega y_2 + i\omega y_1 + \mathbf{h}, \text{ o. t. } = i\omega(y_1 + iy_2) + \mathbf{h}, \text{ o. t. }$$

$$=i\omega z + \text{h. o. t.} \quad (9.7.12a)$$

同理,有

$$\bar{z}' = -i\omega \bar{z} + \text{h. o. t.} \quad (9.7.12b)$$

考虑到(9.7.10)中的非线性项后在 \mathbf{C} 上的分岔方程为

$$z' = i\omega z + g(z, \bar{z}) \quad (9.7.13a)$$

$$\bar{z}' = -i\omega \bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z}) \quad (9.7.13b)$$

其中 $g(z, \bar{z}) = O(|z|^2)$ 为非线性函数。

因(9.7.13a)和(9.7.13b)是互为复共轭的,故只研究二者之一即可。现研究(9.7.13a)。为了将之化成 PB 正规形,将 $g(z, \bar{z})$ 写作

$$g(z, \bar{z}) = \sum_{2 \leq l+m \leq M} g_{lm} z^l \bar{z}^m + O(|z|^{M+1}) \quad (9.7.14)$$

设在(9.7.13a)中 $g(z, \bar{z})$ 已化成 $k-1$ 阶正规形,下面进一步化简 k 阶项,取近恒等的非线性变换

$$z = \xi + P_k(\xi, \bar{\xi}) = \xi + \sum_{l+m=k} P_{lm} \xi^l \bar{\xi}^m \quad (9.7.15)$$

将(9.7.15)代入(9.7.13a)的左右端,则

$$\text{左端: } z' = \xi' + \sum_{l+m=k} P_{lm} (l\xi^{l-1} \bar{\xi}^m \xi' + m\xi^l \bar{\xi}^{m-1} \bar{\xi}') \quad (9.7.16a)$$

$$\text{右端: } i\omega \xi + i\omega \sum_{l+m=k} P_{lm} \xi^l \bar{\xi}^m + \sum_{l+m} g_{lm} \xi^l \bar{\xi}^m + k \text{ 阶以上的项} \quad (9.7.16b)$$

其中系数 g_{lm} 仍为(9.7.14)中的 g_{lm} 。

比较(9.7.16a)和(9.7.16b),则

$$\begin{aligned} \xi' &= i\omega \xi + \text{h. o. t.} \\ \bar{\xi}' &= -i\omega \bar{\xi} + \text{h. o. t.} \end{aligned} \quad (9.7.17)$$

将(9.7.17)代入(9.7.16a),则

$$\begin{aligned} z' &= i\omega \xi + \sum_{l+m=k} [l\xi^{l-1} i\omega \bar{\xi}^m \xi + m\xi^l \bar{\xi}^{m-1} (-i\omega \bar{\xi})] P_{lm} + \cdots \\ &= i\omega \xi + \sum_{l+m=k} i\omega P_{lm} [l-m] \xi^l \bar{\xi}^m + \cdots \end{aligned} \quad (9.7.18)$$

令(9.7.18)和(9.7.16b)中 $l+m=k$ 阶项的系数相等,则

$$i\omega P_{lm} (l-m) = i\omega P_{lm} + g_{lm}$$

或

$$i\omega P_{lm} (l-m-1) = g_{lm} \quad (9.7.19)$$

若 $l-m-1 \neq 0$, 则 P_{lm} 是惟一确定的。

和同调方程相类似,我们可定义

$$l-m-1=0 \quad (9.7.20a)$$

为共振条件。而非共振条件为

$$l-m \neq 1 \quad (9.7.20b)$$

因我们研究 k 阶项,所以有

$$m+l=k \quad (9.7.21)$$

在共振情况下, 联立(9.7.20a)和(9.7.21)则

$$2m+l=k \quad (9.7.22)$$

从(9.7.22)知, 当 k 为偶数时, 有 $2m+l \neq k$, 因而有 $l-m \neq 1$, 这是非共振情况, 故可以从(9.7.19)式求出 P_{lm} , 即 $g(z, \bar{z})$ 中的 k 阶偶次项可以消去。

当 k 为奇数时(9.7.22)满足, 即满足共振条件(9.7.20a), 因而不能从(9.7.19)求出 P_{lm} , 故 $g(z, \bar{z})$ 中不能消去的 k 阶奇次项为

$$z^l \bar{z}^m = z^{m+1} \bar{z}^m = z |z|^{2m} \quad (9.7.23)$$

而虽 $k=l+m$ 为奇数, 但不满足关系式 $l=m+1$ 的项, 也都可消去。例, 当 $k=3$ 时, 对满足 $l+m=k$ 的组合:

$$\binom{l}{m} = \binom{0,1,2,3}{3,2,1,0}$$

只有 $l=2, m=1$ 时, 满足 $l-m=1$. 故在 $k=3$ 的四种可能的组合中, 只有 $z^2 \bar{z}$ 不能消掉, 而其余的三种组合的项都可消去。当满足共振条件和 k 为奇数时, 不能消掉项的一般形式是 $z^{m+1} \bar{z}^m = z |z|^{2m}$, 而 k 为偶数的各项都可消去, 故复数形式的 PB 正规形为

$$z' = i\omega z + C_1 z |z|^2 + C_2 z |z|^4 + \cdots + C_m z |z|^{2m} + O(|z|^{k+1}) \quad (9.7.24)$$

其中 $k=2m+1$

很容易将上式化成极坐标的形式, 设

$$z = r e^{i\theta} \quad (9.7.25a)$$

则

$$z' = r' e^{i\theta} + i\theta' r e^{i\theta} \quad (9.7.25b)$$

将(9.7.25)代入(9.7.24), 则

$$r' e^{i\theta} + i r \theta' e^{i\theta} = i \omega r e^{i\theta} + C_1 r e^{i\theta} r^2 + C_2 r e^{i\theta} r^4 + \cdots + C_m r e^{i\theta} r^{2m} + O(\|z\|^{k+1}) \quad (9.7.26a)$$

其中 $O(\|z\|^{k+1})$ 为高阶项, 在共振情况下, 因 $k=2m+1$, 所以 $k+1=2m+2=l+m$, 故 $l=m+2$, 高阶项

$$O(\|z\|^{k+1}) = z^{m+2} \bar{z}^m = z^2 |z|^{2m} = r^{2m+2} e^{2i\theta}$$

在非共振的情况下, $l \neq m+2$, 取 $l=m$, 则 $z^m \bar{z}^m = r^{2m}$ 。

(9.7.26)可写为

$$r' + i\theta' r = i\omega r + C_1 r^3 + C_2 r^5 + \cdots + C_m r^{2m+1} + r^{2m+2} e^{i\theta} \text{ (或 } r^{2m} e^{-i\theta} \text{)}$$

将上式的实部和虚部分开, 则得下面两个实数方程

$$r' = \operatorname{Re} C_1 r^3 + \operatorname{Re} C_2 r^5 + \cdots + \text{h. o. t.}$$

$$= a_1 r^3 + a_2 r^5 + \cdots + \text{h. o. t.} \quad (9.7.26b)$$

$$\theta' = \omega + \text{Im}C_1 r^2 + \text{Im}C_2 r^4 + \cdots + \text{h. o. t.}$$

$$= \omega + b_1 r^2 + b_2 r^4 + \cdots + \text{h. o. t.} \quad (9.7.26c)$$

其中 h. o. t. 与 r 和 θ 有关, $a_1 = \text{Re}C_1$, $a_2 = \text{Re}C_2$, \cdots , $b_1 = \text{Im}C_1$, $b_2 = \text{Im}C_2$, \cdots 。

对充分小的 r , 因 $\theta' > 0$, 所以 θ 是单调增加的。从 (9.7.26a) 知, 设 $a_1 = \text{Re}C_1 \neq 0$, 当 r 充分小时, r' 的符号决定于 a_1 的符号。(9.7.24) 解的稳定性由 a_1 的符号确定: a_1 为负, 则 r 为渐近稳定的, a_1 为正, 则 r 为不稳定的。从 (9.7.24) 或 (9.7.26) 经变换也可化成实数 (y_1 和 y_2) 的正规形。

习 题

9.1 试确定平面系统

$$\dot{x} = x, \dot{y} = -y + x^2$$

的平衡点及其不变流形, 并验证双曲平衡点的不变流形定理。

9.2 试计算平面系统

$$\dot{x} = xy + ax^3 + bxy^3, \dot{y} = -y + cx^2 + dx^2y$$

的中心流形, 用中心流形定理导出约化系统, 证明当 $a+c > 0$ 时零解不稳定。

9.3 试计算三维系统

$$\dot{x} = -y + xz - x^3, \dot{y} = x + yz + xyz, \dot{z} = -z - (x^2 + y^2) - z^2 + \sin x^2$$

的中心流形, 用中心流形定理导出约化系统, 判断零解的稳定性。

9.4 试确定系统

$$\dot{x} = 3x + a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + \cdots, \dot{y} = y + b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 y^2 + \cdots$$

的三阶 PB 正规形, 其中省略号表示高于 2 次的项。

9.5 试确定系统

$$\dot{x} = 3y - x^2 + 7xy + 7y^2, \dot{y} = 2x + 4xy + y^2$$

的二阶 PB 正规形, 并写出所用的变换。

9.6 试确定系统

其中

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \bar{f}(x) \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{f}(x) = O(x) \end{cases}$$

的三阶 PB 正规形。

9.7 试确定杆件 弹簧系统势函数

$$V(x, \mu) = 0.5x^3 + 2\mu(\cos x - 1)$$

的 GS 正规形, 并讨论静态分岔。

9.8 试讨论平面系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x \left[1 - \mu - \frac{\mu}{1 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2} \right] \\ \dot{y} &= x + y \left[1 - \mu - \frac{\mu}{1 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2} \right]\end{aligned}$$

的分岔。

9.9 试应用霍普夫分岔定理讨论非线性振动系统

$$\ddot{x} + (\alpha^2 - \mu)\dot{x} + 2x + x^3 = 0$$

的霍普夫分岔。

9.10 试确定系统

$$\dot{x} = q - (\mu + 1)x + x^2 y, \quad \dot{y} = \mu x - x^2 y \quad (q > 0)$$

平衡点的稳定性和分岔。

第十章 非线性振动系统的分岔

前面各章介绍了非线性振动系统基本周期解各种近似方法。介绍了周期解分岔的基本概念,本章介绍李雅普诺夫——施密特(简称 LS 方法)方法,并引入奇异性理论,建立了求周期分岔解,以及解的拓扑结构与系统参数之间的关系的 CL(Chen Yushu—Langford W. Method)^[67]方法,并介绍混沌的基本概念,为进一步研究动力学系统的复杂行为奠定初步基础。

§ 10.1 李雅普诺夫—施密特方法

在静态分岔的分析中,常在奇异点邻域上把分岔方程的局部解问题,用李雅普诺夫——施密特方法化为较低维数的方程的局部解问题去研究,故 LS 方法有时也称为 LS 约化过程。在讨论 LS 方法之前,先讨论静态分岔的必要条件。

在研究动力系统的平衡点分岔问题时,静态分岔是一个重要内容。静态分岔的研究不但能提供平衡点数目随参数变化的信息,而且往往与平衡点稳定性的变化密切相关。

考虑静态分岔方程, $f(x, \mu) = 0$ 其中向量场 $f: U \times J \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。设 $(x_0, \mu_0) \in U \times J$ 是它的解,即 $f(x_0, \mu_0) = 0$ 。我们研究的是局部静态分岔问题,因此只关心在点 (x_0, μ_0) 邻域上的分岔方程的解(即 f 的零点)的数目随参数 μ 变化的情况。取点 (x_0, μ_0) 的某个足够小的邻域 $\Omega \subset U \times J$, 记 $n(\mu)$ 为当 μ 固定时,分岔方程在 Ω 内的解的数目。如果当 μ 经过 μ_0 时, $n(\mu)$ 突然发生变化,则称 (x_0, μ_0) 为一个静态分岔点, μ_0 为一个静态分岔值。在静态分岔点 (x_0, μ_0) 附近,分岔方程的解 (x, μ) 的集合称为 f 的静态分岔图(或零点集)。总的来说,静态分岔就是研究分岔方程在 (x_0, μ_0) 邻域上的多重解问题。我们在下面假设 f 对 x 和 μ 都是足够光滑的。

下面介绍确定静态分岔点的一些方法。

定理 10.1 设点 $(x_0, \mu_0) \in U \times J$ 使得 $f(x_0, \mu_0) = 0$, 在点 (x_0, μ_0) 邻域上, f 对 x 可微,且 $f(x, \mu)$ 和 $D_x f(x, \mu)$ 对 x, μ 是连续的。若 (x_0, μ_0) 是 f 的静态分岔点,则 $D_x f(x_0, \mu_0)$ 是不可逆的(即奇异的)。

证 用反证法。假如 $D_x f(x_0, \mu_0)$ 是可逆的, 则由隐函数定理可知, 在点 (x_0, μ_0) 的某个邻域内, 分岔方程只有惟一的连续解 $x = \varphi(\mu)$, 使得 $f(\varphi(\mu), \mu) \equiv 0$ 且 $x_0 = \varphi(\mu_0)$ 。这与静态分岔点的假设矛盾, 故本定理得证。

定理 10.1 给出了 (x_0, μ_0) 为静态分岔点的一个必要条件。我们再用别的方式表述这个必要条件, 以便以后使用。

定义 10.1 如果在一点 $(x_0, \mu_0) \in U \times J$ 处有 $f(x_0, \mu_0) = 0$, 且 $D_x f(x_0, \mu_0)$ 是不可逆 (即奇异) 的, 则称 (x_0, μ_0) 为向量场 $f(x, \mu)$ 的一个奇异点。(注意这里定义的“奇异点”与向量场的平衡点 (亦称为“奇异”) 的差别。显然 f 的奇异点必是平衡点, 但反之不一定成立。)

利用定理 10.1 定义 10.1 以及导算子的性质, 还可得到 (x_0, μ_0) 为静态分岔点的几个等价的必要条件。

- (1) (x_0, μ_0) 是 f 的奇异点;
- (2) $f(x_0, \mu_0) = 0, \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{(x_0, \mu_0)} = 0$ (10.1.1)
- (3) $f(x_0, \mu_0) = 0$, 且 $D_x f(x_0, \mu_0)$ 至少有一个特征值等于零;
- (4) $f(x_0, \mu_0) = 0$, 且 $D_x f(x_0, \mu_0)$ 的零空间 (即核) 的维数 $\dim N(D_x f(x_0, \mu_0)) \geq 1$ 。

注 上面给出的是静态分岔的必要条件不是充分的。

例如考虑方程

$$f(x, \mu) \equiv x^3 - \mu = 0, x \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R} \quad (10.1.2)$$

显然 f 在 $(0, 0)$ 处有一个奇异点, 因为

$$f(0, 0) = 0, D_x f(0, 0) = 3x^2|_{(0, 0)} = 0$$

但是方程 (10.1.2) 对任何 $\mu \in \mathbf{R}$ 都有惟一的解 $x = \mu^{1/3}$, 因此 $(0, 0)$ 不是静态分岔点。

在研究静态分岔时, 先由 (10.1.1) 求出 $f(x, \mu)$ 的奇异点, 它们就是可能出现静态分岔的点。然后再研究分岔方程在奇异点附近的行为, 以判断这些奇异点是否为静态分岔点。一般地说, 我们往往可以利用下面介绍的方法 (LS 方法或中心流形方法) 将原来的方程降维, 即在奇点附近把分岔方程的局部解问题化为较低维数的方程的局部解问题去研究。

不失一般性, 在下面总是取奇异点为 $(0, 0)$ 。对于任意奇异点 (x_0, μ_0) , 我们可以通过变换 $\bar{x} = x - x_0, \bar{\mu} = \mu - \mu_0$, 去实现。此外, 还取 $U = \mathbf{R}^n$ 。

下面介绍 LS 方法。

考虑由 $C(r \geq 1)$ 映射 $\Phi: X \times \mathbf{R}^{k+1} \rightarrow Y$ 给出的方程

$$\Phi(x, \lambda) = 0 \quad (10.1.3)$$

这里 X, Y 是巴拿赫空间; $R^{k+1}, k \geq 0$ 为参数集, 设在原点处出现分岔, 此时

$$\Phi(0, 0) = 0 \quad (10.1.4)$$

且由上面的叙述知, 导算子 $D_x \Phi(0, 0): X \rightarrow Y$ 的零空间的维数应大于零, 即

$$\dim \eta(D_x \Phi(0, 0)) > 0 \quad (10.1.5)$$

LS 方法的基本思想是把 Y 空间表示成两个子空间的直和, 并将方程 (10.1.3) 分别投影到这两个子空间上。这样得到两个标量方程。其中一个由隐函数定理知, 它总是有惟一解的, 并把求出的该解代入另一个方程中去, 于是原来方程的求解问题约化为另一个低维方程的求解问题。

在许多实际问题中的导算子是弗雷德霍姆算子, 有界限性算子 $A \in L(X, Y)$ 称为弗雷德霍姆的, 是指它的零空间的维数 $\dim \eta(A) = n$ 和值空间的余维数 $\text{codim} R(A) \equiv \dim(Y/R(A)) = m$ 均为有限, $n, m < \infty$ 。 n, m 称为指标。对于弗雷德霍姆算子 $A: X \rightarrow Y$, 可以证明, $\eta(A) \subset X$ 和 $R(A) \subset Y$ 均为存在闭补的闭子空间, 即有闭子空间 $M \subset X$ 和 $N \subset Y$, 使

$$\left. \begin{aligned} X &= \eta(A) \oplus M \\ Y &= N \oplus R(A) \end{aligned} \right\} \quad (10.1.6)$$

特别, 当 X 和 Y 为希耳伯特空间时, 它们的闭补可以通过正交补表示。

下面我们将看到, 在弗雷德霍姆算子的情形, LS 方法可以把求解方程 (10.1.3) 的分岔问题归结为在有限维空间上求解代数方程的问题来研究。

设非线性算子 $\Phi: X \times R^{k+1} \rightarrow Y$ 满足 (10.1.4) 和 (10.1.5), 且在原点附近关于 x 的导算子 $D_x \Phi(x, \lambda)$ 为弗雷德霍姆算子, 记 $A = D_x \Phi(0, 0) \in L(X, Y)$, 则 X 和 Y 有分解式 (10.1.6)。

定义投影算子

$$E: Y \rightarrow R(A) \quad (10.1.7a)$$

和补投影算子

$$I - E: Y \rightarrow N \quad (10.1.7b)$$

若 $y = y_1 + y_2 \in N \oplus R(A) = Y$, 则 $y = 0$, 当且仅当 $Ey = 0$ 和

$$(I - E)y = 0 \quad (10.1.8)$$

记 $x = v + w \in X = \eta(A) \oplus M$, 其中 $v \in \eta(A)$, $w \in M$, 则 (10.1.3) 等价于方程组

$$E\Phi(v + w, \alpha) = 0 \quad (10.1.9)$$

$$(I - E)\Phi(v + w, \alpha) = 0 \quad (10.1.10)$$

因 $EA = ED_x \Phi(0, 0)$, 若限制 A 定义在 $R(A)$ 上, 此时 A 为可逆的, 根据隐

函数定理, 可从(10.1.9)惟一确定 $w = w(v, \alpha) : \eta(A) \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow R(A)$, 使

$$E\Phi[v + w(v, \alpha), \alpha] = 0$$

且有

$$w(0, 0) = 0$$

然后将 w 代入(10.1.10), 设映射 $\varphi : \eta(A) \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow N$, 由

$$\varphi(v, \alpha) = (I - E)\Phi[v + w(v, \alpha), \alpha]$$

确定. 从上面的做法中不难看出

$$\varphi(v, \alpha) = 0 \quad (10.1.11)$$

的解和(10.1.3)的解是一一对应的。

(10.1.11)称为(10.1.3)的分岔方程。

把(0,0)邻域上(10.1.3)的求解问题转化为一维方程(一般情况下为低维方程)(10.1.11)在(0,0)点附近的求解问题的上述过程称为 LS 方法(或 LS 约化过程)。

设 X, Y 为希伯尔特空间, 记

$$[R(A)]^\perp = R(A) \text{ 的正交补} = \{y \in Y \mid \langle y, z \rangle = 0, z \in R(A)\}$$

设上述算子 A 为具有一维零空间和指标零空间的弗雷德霍姆算子, 则存在非零元素 $v_0 \in \eta(A)$ 和 $v_0^* \in (R(A))^\perp$, 对任一 $v \in \eta(A)$, 有 $v = xv_0, x \in \mathbb{R}$, 我们定义 $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中

$$g(x, \alpha) = \langle v_0^*, \varphi(xv_0, \alpha) \rangle \quad (10.1.12a)$$

因 $\varphi(xv_0, \alpha) \in N$, 所以, 当且仅当 $\varphi(xv_0, \alpha) = 0$ 时有 $g(x, \alpha) = 0$, 因此 $g(x, \alpha) = 0$ 和 $\Phi(y, \alpha) = 0$ 的解也是一一对应的。

根据(10.1.11), 并考虑到(10.1.7b), 则(10.1.12a)可写为

$$g(x, \alpha) = \langle v_0^*, \Phi[xv_0 + w(xv_0, \alpha), \alpha] \rangle \quad (10.1.12b)$$

我们亦把

$$g(x, \alpha) = 0 \quad (10.1.12c)$$

称为分岔方程, 它只包含零空间中的坐标变量, 应用(10.1.11)便于分析, 而应用(10.1.12)便于计算。

几点说明:

(1) 虽然在理论上存在分岔方程(10.1.12c), 但在许多实际问题中只能求得该方程的若干低价项, 并不能求得(10.1.12c)的完全精确的解析表达式。

(2) 在方程(10.1.12c)中, 虽然有 $g(0, 0) = 0$ 和 $g_x(0, 0) = 0$, 这表示分岔方程在(0,0)点展开的话, 没有常数项和 x 的线性项。

(3) 用 LS 方法得到的分岔方程不是惟一的, 但它们之间都是等价的, 证明参看[40]。

分岔方程的具体计算方法, 下面将通过应用示例予以说明。

§ 10.2 奇异性理论方法简介

前面我们利用 LS 方法, 平均法和多尺度法等可以得到静态分岔方程, 它们是有限截断的、近似的, 它们与精确解有多大差异呢? 这是需要回答的问题之一。

另外, 我们建立的力学模型是忽略某些次要因素后理想化了的, 它与真实系统之间的差异对真实系统的动力学行为有多大影响呢? 这是需要回答的第二个问题。还有, 就是动力学系统的参数在受到外界干扰后往往发生一些微小的变化, 这些微小变化对系统的动力学行为有多大影响呢, 这里提到的这些问题, 用前面讲到的理论是无法解决的, 奇异性理论将给这些问题作出某些回答, 同时奇异性理论还可将系统参数控制在最少, 因此可使人们在众多的系统参数中找出关键参数。

本节围绕静态分岔问题, 引进奇异性理论的基本概念。奇异性理论从上个世纪六十年代中期发展起来, 1985 年戈鲁比茨基 (Golubitsky) 和沙弗 (Schaeffer) 在其著作中对该理论做了系统的阐述。

在静态分岔研究中, 我们首先求出 $F(x, \mu)$ 的奇异点, 在该点处可能将出现静态分岔。然后再分析 $F(x, \mu)$ 在奇异点附近的性态, 以判断在该奇异点处是否确实出现静态分岔, 并进一步研究分岔的类型和性质。奇异性理论是研究可微映射在奇异点附近的性态, (称为“奇异性”, 或“退化性”) 及其分类的数学理论。

分岔的奇异性理论主要包括三方面的内容: 识别问题、开折问题和余维分类问题。我们知道, 在分岔研究中, 通常可以利用约化的方法 (例如 LS 方法、中心流形方法等) 将原来的系统降维, 一般只需讨论低维方程的分岔问题, 下面通过单变量静态分岔问题来介绍奇异性理论方法的基本思想和结果。

10.2.1 芽及其主要性质

不失一般性, 下面总是取奇异点为原点, 否则可通过坐标变换去实现。考虑从 $U \times V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ($U \times V$ 包含原点) 到 \mathbb{R} 的全体 C^∞ 代数函数 $g(x, \lambda)$ 并作如下规定: 对于函数 $g_1(x, \lambda)$ 和 $g_2(x, \lambda)$, 如果存在原点的某邻域 $\tilde{U} \times \tilde{V} \subset U \times V$, 使得 $g_1(x, \lambda) = g_2(x, \lambda)$ 对任何 $(x, \lambda) \in \tilde{U} \times \tilde{V}$ 成立, 则把 g_1 和 g_2 看成等同的。按上述等价关系得到的等价类称为芽。所有这样的芽组成一个线性空间——芽空间, 记作 $\mathcal{E}_{x, \lambda}$ 。对任意个自变量的函数或映射, 都可类似地建立芽的概念。

1. 首先引入强等价的概念

设 $g, h \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ 。如果在 $(0,0)$ 的某邻域内存在 C^∞ 同胚 $(x, \lambda) \mapsto [X(x, \lambda), M(\lambda)]$ 和 $S(x, \lambda) \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, 它们满足 $M(0) = 0, X(0,0) = 0, M'(0) > 0, X_x(0,0) > 0, S(0,0) > 0$, 使得

$$g(x, \lambda) = S(x, \lambda)h(X(x, \lambda), M(\lambda)) \quad (10.2.1)$$

则称 g 和 h 接触等价, 记作 $g \sim h$, 如果在上述定义中取 $M(\lambda) \equiv \lambda$, 则称 g 和 h 强等价, 记做 $\overset{*}{g} \sim h$ 。易知它们都是等价关系, 且当 $\overset{*}{g} \sim h$ 时必有 $g \sim h$ 。

由 (10.2.1) 可见, 当 $\overset{*}{g} \sim h$ 时, 在原点的足够小邻域内有 $S \neq 0$, 故芽函数 $g(x, \lambda)$ 和 $h(x, \lambda) = 0$ 之间可通过局部微分同胚 (X, λ) 相互变换, 从而 g 和 h 在原点附近有相同的分岔特性。具体地说, 当 $\overset{*}{g} \sim h$ 时, 有下面的结果 (见图 10.1):

(1) 若 $(0,0)$ 是 g 的一个奇异点, 则 $(0,0)$ 也是 h 的一个奇异点。

(2) 方程 $g(x, \lambda) = 0$ 和 $h(x, \lambda) = 0$ 在 $(0,0)$ 附近解的数目有对应关系: $n_g(\lambda) = n_h(M(\lambda))$ 。

(3) 方程 $\dot{x} + g(x, \lambda) = 0$ 和 $\dot{x} + h(x, \lambda) = 0$ 的对应轨线有相同的时间定向 (这是由 $X_x > 0, S > 0$ 保证的), 因此对应的平衡解有相同的稳定性。

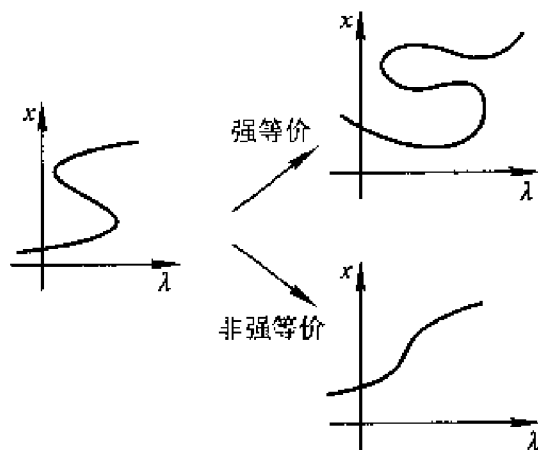


图 10.1

理想 在芽空间 $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ 上的代数中, 最重要的概念是理想的概念。

定义 10.2 子空间 $G \leq \mathcal{E}_{x,\lambda}$ 称为 $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ 中的理想, 若对任意 $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ 和 $g \in G$, 有 $fg \in G$ 。

即理想 G 包含了该空间中的芽所确定的最低阶次以上的任何阶次组成的芽。

对于 $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, 我们称 f 的泰勒展式中截去 k 次项以后项所得的多项

式为 f 的 k 次截断, 记为 $j^k(f)$, 如 $j^3(\sin x - \lambda) = x - \frac{x^3}{6} - \lambda$.

推论 1 对于 $k \geq 1$, 记 $M_k = \{f \in \mathcal{E}_{x,\lambda} \mid j^{k-1}f = 0\}$, 则 M_k 为 $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ 中的理想。

特别地 $M_1 = \{f \in \mathcal{E}_{x,\lambda} \mid f(0) = 0\}$ 为最大理想, M_1 的余维数为 1。

应用奇异性理论研究单变量的分岔问题, 往往要用到三个重要的理想: 限制切空间, 扰动集和内蕴理想。

2. 限制切空间 ($\mathcal{RT}(h)$)

对于 $h \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ 满足什么条件的扰动项 p 能使得 $h \overset{s}{\sim} h + tp, t \in \mathbb{R}$? 要回答这个问题, 引入限制切空间的概念。设 p 为满足以上性质的扰动项, 则存在 $S(x, \lambda, t)$ 及 $X(x, \lambda, t)$, 对充分小的 $t \in \mathbb{R}$ 满足

$$h(x, \lambda) + tp(x, \lambda) = S(x, \lambda, t)h(X(x, \lambda, t), \lambda) \quad (10.2.2)$$

$$\text{其中} \quad X(0, 0, t) = 0, S(x, \lambda, 0) = 1, X(x, \lambda, 0) = x \quad (10.2.3)$$

对 (10.2.2) 求关于 t 的导数, 并令 $t=0$, 得

$$p(x, \lambda) = \dot{S}(x, \lambda, 0)h(x, \lambda) + h_x(x, \lambda)\dot{X}(x, \lambda, 0) \quad (10.2.4)$$

其中“ \cdot ”表示对 t 的导数, 由 (10.2.3) 知 $\dot{x}(0, 0, 0) = 0$ 。

芽 $p(x, \lambda)$ 的全体构成 h 的 $\mathcal{RT}(h)$

$$\begin{aligned} \mathcal{RT}(h) &= \{ah + dh_x \mid a, d \in \mathcal{E}_{x,\lambda}, d(0, 0) = 0\} \\ &= \{ah + (bx + c\lambda)h_x \mid a, b, c \in \mathcal{E}_{x,\lambda}\} \\ &= \langle h, xh_x, \lambda h_x \rangle \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

其中 $\langle h, xh_x, \lambda h_x \rangle$ 表示 $\mathcal{RT}(h)$ 的生成元为 h, xh_x 和 λh_x 。

3. 有限确定性与扰动集

若有 $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ 的有限截断 $j^k(f)$, 视差 $f - j^k(f)$ 为 f 的一种扰动, 则 f 和 $j^k(f)$ 可保持强等价, 扰动集就是保持这种强等价的描述。

定义 10.3 对于 $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ 若存在 k 使 f 与 $j^k(f)$ 强等价, 则称 f 为有限确定的。

扰动集

分岔问题的扰动集定义为

$$\mathcal{P}(h) = \{p \in \mathcal{E}_{x,\lambda} \mid g \overset{s}{\sim} h \Rightarrow \mathcal{RT}(g + tp) = \mathcal{RT}(g), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

定理 10.2 设 $p \in \mathcal{P}(h), g \overset{s}{\sim} h$, 则 $g + tp \overset{s}{\sim} h, \forall t \in \mathbb{R}$, 特别的 $g + tp$ 与 g 强等价。

4. 内蕴理想

理想 $G \subset \mathcal{E}_{x,\lambda}$ 称为内蕴的, 若对所有的 $g, h \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, 当 $g \in G$ 及 $g \overset{s}{\sim} h$ 时, 有 $h \in G$ 。

我们说,内蕴理想是强等价交换下的不变的理想。

例 1 $M=\langle x, \lambda \rangle, \langle \lambda \rangle$ 均为内蕴理想,且 M 有有限余维,其余维数为 1。

对于有有限余维的理想, $G \subset \mathcal{E}_{x,\lambda}$, 记 G^\perp 为 $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ 中不属于 G 的多项式张成的有限维子空间,虽然有

$$\mathcal{E}_{x,\lambda} = G \oplus G^\perp$$

例 2 $G = \langle x + \lambda, \lambda^2 \rangle \Rightarrow G = M^2 + \langle x, \lambda \rangle$

则 $G^\perp = \mathcal{R}\{1, x, \lambda\}$

10.2.2 识别问题

现在讨论奇异性理论的识别问题。考虑 $g \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ 。设 $(0,0)$ 是 g 的一个奇异点,其分岔特性已知。 g 的识别问题就是研究与 g 强等价的 h 所需满足的条件,这些条件称为 g 的“识别条件”。显然,对满足 g 的识别条件的 h ,其静态分岔特性与 g 相同。

我们知道,对一个芽 $g \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ 进行识别时,需将其泰勒展式中的项划分为低阶项、中阶项、高阶项三类。针对三类单项式有不同的分析方法。在工程应用中,多为低阶项生成的芽,在此,我们只介绍低阶项的识别问题。

在研究低阶项时,我们需要的概念是“含有芽 g 的最小内蕴理想”。不难证明:若 $\{G_\alpha\}$ 是 $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ 中的一族内蕴理想,则 $\bigcap_\alpha G_\alpha$ 也是 $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ 中的内蕴理想。于是包含 $g \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ 的所有内蕴理想的交就是包含 g 的最小内蕴理想。我们用 $I(g)$ 表示含芽 g 的最小内蕴理想。

显然,若 $g \stackrel{s}{\sim} h$, 则 $I(g) = I(h)$ 。事实上,由 $g \stackrel{s}{\sim} h$ 及 $I(h)$ 为内蕴理想知 $g \in I(h)$, 从而 $I(g) \subset I(h)$, 同样也有 $I(h) \subset I(g)$ 。

定理 10.3 设 $h \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ 有有限余维,则

(1) $I(h)$ 是有有限余维的内蕴理想;

(2) $I(h) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)} \{M^{\alpha_1}(\lambda^{\alpha_2}); D^\alpha h(0,0) \neq 0\};$ (10.2.6)

(3) 设 $g \stackrel{s}{\sim} h$, 则当 $x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} \in (I(h))^\perp$ 时,必有 $D^\alpha g(0,0) = 0$;

(4) 设 $g \stackrel{s}{\sim} h$, 则当 $x^{\beta_1} \lambda^{\beta_2}$ 为 $I(h)$ 的内蕴生成子时,必有 $D^\beta g(0,0) \neq 0$

例 3 设 $h = x^3 - \lambda x$, 由定理 10.3(b) 得

$$I(h) = M^3 + M\langle \lambda \rangle$$

此时

$$[I(h)]^\perp = \mathcal{R}\{1, x, \lambda, x^2\}$$

$x^3, \lambda x$ 是 $I(h)$ 的内蕴生成子,结合定理 10.3(c) 和 (d) 知:若 $g \stackrel{s}{\sim} h$, 则必有在 $(x, \lambda) = (0, 0)$ 处, $g = g_x = g_\lambda = g_{xx} = 0$; 且

$$g_{xxx} \neq 0; g_{xx} \neq 0 \quad (10.2.7)$$

(10.2.7)提供了识别芽 g 与 $h = x^2 - \lambda x$ 强等价的一些关键信息,这些信息是通过 g 在原点处的函数值和一些低阶导数值给出的,这也看出本节提供的方法主要用于识别问题低阶项的分析。

注 定理 10.3(c)、(d)给出了判断 g 与正规形 h 强等价的识别条件。具体步骤是:由定理 10.3(b)可求出 $I(h)$,进而再求出 $(I(h))^{-1}$,最后利用定理 10.3(c)、(d)的结论得出借助 g 及其低阶导数在 $(x, \lambda) = (0, 0)$ 处的值描述的 g 与 h 强等价的识别条件。

为了便于应用,通常选取一些简单且有代表性的多项式函数 $h(x, \mu)$ 去确定其识别条件。这些函数 h 称为戈鲁比茨基-沙弗(Golubitsky-Schaeffer)正规形,以后简称为 GS 正规形。表 10.1 上列出了一些重要的分岔问题的 GS 正规形的识别条件,其证明可参看[43]的第二章。

在表 10.1 中, sgn 表示符号函数, $\Delta = \det D^2 g$, 其中 $D^2 g$ 是函数 $g(x, \mu)$ 的海塞(L. O. Hesse)矩阵:

$$D^2 g = \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{x\mu} \\ g_{\mu x} & g_{\mu\mu} \end{bmatrix} \quad (10.2.8)$$

v 为 $D^2 g$ 的对应零特征值的特征向量,即满足 $(D^2 g)v = 0$ 。 g_v 表示 g 沿 v 方向的导数。 $q = q_{xxx}g_{xx} - 3g_{xx}^2$ 。

表 10.1

编号	GS 正规形	在 $x = \mu = 0$ 处的识别条件
1	$\epsilon x^k + \delta \mu$ ($k \geq 2$)	$g = g_x = \dots = \partial^{k-1} g / \partial x^{k-1} = 0$ $\epsilon = \text{sgn}(\partial^k g / \partial x^k)$ 和 $\delta = \text{sgn} g_\mu \neq 0$
2	$\epsilon x^k + \delta \mu x$ ($k \geq 2$)	$g = g_x = \dots = \partial^{k-1} g / \partial x^{k-1} = g_\mu = 0$ $\epsilon = \text{sgn}(\partial^k g / \partial x^k)$ 和 $\delta = \text{sgn} g_{xx} \neq 0$
3	$\epsilon(x^2 + \delta \mu)$	$g = g_x = g_\mu = 0$ $\epsilon = \text{sgn} g_{xx}$ 和 $\delta = \text{sgn} \Delta \neq 0$
4	$\epsilon x^2 + \delta \mu^2$	$g = g_x = g_\mu = \Delta = 0$ $\epsilon = \text{sgn} g_{xx}$ 和 $\delta = \text{sgn} g_{\mu\mu} \neq 0$
5	$\epsilon x^{2l+1} + \delta \mu^2$	$g = g_x = g_\mu = \Delta = g_{\mu\mu} = 0$ $\epsilon = \text{sgn} g_{xx}$ 和 $\delta = \text{sgn} q \neq 0$
6	$\epsilon x^3 + \delta \mu^2$	$g = g_x = g_\mu = g_{xx} = g_{\mu\mu} = 0$ $\epsilon = \text{sgn} g_{xxx}$ 和 $\delta = \text{sgn} g_{\mu\mu} \neq 0$

值得注意的是,在表 10.1 上给出的识别条件只涉及 g 的有限多个偏导数;这时称 GS 正规形是有限确定的。在表 10.1 上的各个 GS 正规形的静态分岔性态很容易知道(参看后面的表 10.3 和图 10.5)。因此对于实际问题给出的方程 $g(x, \mu) = 0$, 只要函数 g 满足上表上的某个范式 h 的识别条件,就可以由正规形 h 得知 g 的静态分岔性态。

许多高维以至无穷维静态分岔问题可以通过 LS 约化方法化为单变量静态分岔问题。然而,一般难以得到约化函数 g 的明显表达式,即使如此,由 § 10.1 知道,我们可以直接利用原来函数的导数去计算约化函数的各阶导数,因此奇异性理论特别适合于与 LS 方法配合去研究静态分岔问题。

我们还要指出,本章关于识别条件的讨论,是对已知的 GS 正规形进行的。至于在实际应用中如何寻找合适的 GS 正规形,通常是一个十分复杂的问题。例如,如果我们知道函数 $g(x, \mu)$, 就可以试取 $g(x, \mu)$ 的泰勒展开式中不为 0 的低阶项的某些线性组合作为 GS 正规形 $h(x, \mu)$, 再考察 h 是否与 g 强等价。如果我们对于实际问题中出现的分岔特征大致上有所了解,也可以根据已有的 GS 正规形的分岔图去试取合适的正规形。表 10.1 和表 10.3 和图 10.5 在这方面提供了很有用的信息。

10.2.3 开折问题

动力学方程往往是对真实物理现象作一定简化后得到的理想的数学模型,真实状态与理想状态之间有一定差别,我们可以把真实状态看作理想状态的一个扰动,并研究这种扰动对方程的分岔性态的影响。我们通过引进附加参数,即所谓“开折”的方法,去考虑可能出现的扰动,然后对受扰后的分岔性态进行分类。

1. 普适开折的概念

对芽 $g(x, \mu) \in \mathcal{E}_{x, \mu}$ (其中 $\mu \in \mathbb{R}$), 如果存在芽 $G(x, \mu, \alpha) \in \mathcal{E}_{x, \mu, \alpha}$, 其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ ($k \geq 0$), 使得当 $\alpha = 0$ 时有

$$G(x, \mu, 0) = g(x, \mu) \quad (10.2.9)$$

则称 G 是 g 的一个 k -参数开折, α 称为开折参数。特别的, g 的 0-参数开折就是 g 本身, 因为 $G(x, \mu, \alpha) = g(x, \mu) + [G(x, \mu, \alpha) - G(x, \mu, 0)]$, 所以 $G(x, \mu, \alpha)$ 看作 $g(x, \mu)$ 的一个扰动函数, 其中扰动与 k 个附加参数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 有关。应当注意, g 有无穷多个开折, 现在讨论它们之间的关系。

定义 10.4 设 $G(x, \mu, \alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^k$), $H(x, \mu, \beta)$ ($\beta \in \mathbb{R}^l$) 是芽 $g(x, \mu)$ 的两个开折。如果在 $(x, \mu, \beta) = (0, 0, 0)$ 的某邻域内存在 C^∞ 同胚, $(x, \mu) \rightarrow$

$[X(x, \mu, \beta)], M(\mu, \beta), S(x, \mu, \beta) \in \mathcal{E}_{x, \mu}, A(\beta) \in \mathcal{E}_\beta$, 并满足

$$S(0, 0, 0) > 0, X'_x(0, 0, 0) > 0, M'_\mu(0, 0) > 0 \quad (10.2.10)$$

$$\text{和} \quad S(x, \mu, 0) \equiv 1, X(x, \mu, 0) \equiv x, M(\mu, 0) \equiv \mu, A(0) = 0 \quad (10.2.11)$$

$$\text{使得} \quad H(x, \mu, \beta) \equiv S(x, \mu, \beta) G[X(x, \mu, \beta), M(\mu, \beta), A(\beta)] \quad (10.2.12)$$

则称 H 由 G 代理 (H factors through G)。

(10.2.12) 表明, 对开折 H 的每个元素 $H(\cdot, \cdot, \beta)$, 都可找到开折 G 的某元素 $G(\cdot, \cdot, A(\beta))$ 与它接触等价, 也就是说, 开折 G 在接触等价的意义下包含了由开折 H 给出的一切扰动。

例 4 令 $g(x, \mu) = x^3 - \mu x$ 。显然, $G(x, \mu, a_1, a_2) = x^3 - \mu x + a_1 + a_2 x^2$ 是 g 的一个 2-参数开折, $H(x, \mu, \beta) = x^3 - \mu x + \beta^3$ 是 g 的一个 1-参数开折, 其中 $\mu, a_1, a_2, \beta \in \mathbb{R}$ 。若取 $S=1, X=x+\beta, M=\mu+3\beta^2, A_1=0, A_2=-3\beta$, 则有 $H(x, \mu, \beta) = SG(X, M, A_1, A_2)$ 。这表明 H 可由 G 代理。

设 $g \in \mathcal{E}_{x, \mu} (\mu \in \mathbb{R})$, G 是 g 的某个开折, 且 g 的任何开折都可由 G 代理, 则称 G 是 g 的一个普用开折。 g 的普用开折通常有无穷多个。在它们中间, 所含开折参数的数目最少的开折称为普适开折, 其开折参数个数称为 g 的余维数, 记作 $\text{codim } g$ 。应当注意, 并非任何 $g \in \mathcal{E}_{x, \mu}$ 都有普用开折。如果 g 没有普用开折, 则称 g 的余维数为无限大。此外, g 的普适开折一般不是惟一的。

g 的普适开折在接触等价的意义下, 引进数目最少的附加参数, 就能包含 g 的所有扰动函数。因此, 在研究方程 $g=0$ 受扰后可能出现的各种分岔性态时, 普适开折将起着十分重要的作用。

2. 普适开折的计算

为计算普适开折, 需要引进切空间的概念。 $g \in \mathcal{E}_{x, \mu}$ 的切空间可定义为

$$\begin{aligned} T(g) &= [a(x, \mu)g + b(x, \mu)g_x + c(\mu)g_\mu] \\ &= \mathcal{R}T(g) \oplus \mathcal{R}(g_x, g_\lambda, \lambda g_\lambda, \dots, \lambda g_\lambda) \end{aligned} \quad (10.2.13)$$

其中 $a, b \in \mathcal{E}_{x, \mu}$ 中的补空间, $c \in \mathcal{E}_\mu$ 。显然, $T(g)$ 是 $\mathcal{E}_{x, \mu}$ 的子空间。可以证明^[43], g 余维数等于切空间 $T(g)$ 的余维数, 即

$$\text{codim } g = \text{codim } T(g) = \dim V = k \quad (10.2.14)$$

其中 V 是 $T(g)$ 在 $\mathcal{E}_{x, \mu}$ 中的补空间, $\mathcal{E}_{x, \mu} = T(g) \oplus V$ 。若 V 有一组基向量 $\{p_1, \dots, p_k\}$, 则

$$G(x, \mu, \alpha) = g(x, \mu) + \sum_{j=1}^k \alpha_j p_j(x, \mu) \quad (10.2.15)$$

是 g 的一个普适开折, 其中 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \in \mathbb{R}^k$ 是开折参数。于是普适开折的计算可归结为确定补空间 V 的基向量。

普适开折的计算:

$$T(g) = \mathcal{R}T(g) \oplus \mathcal{R}\{g_x, g_\lambda, \lambda g_\lambda, \dots, \lambda^l g_\lambda\} \equiv \mathcal{R}T(g) + V_g$$

$$E_{x,\mu} = \mathcal{R}T(g) \oplus V_g \oplus \mathcal{R}\{p_1, p_2, \dots, p_k\} \equiv \mathcal{R}T(g) \oplus [\mathcal{R}T(g)]^\perp$$

在后面的表 10.3 上列出了一些余维数不超过 3 的 GS 正规形的普适开折, 一般的结果可参看[43]的第三章 § 2。这里通过几个例子予以说明。

例 5 设 $g(x, \mu) = x^2 - \mu^2$ 。由 (10.2.9) 知

$$T(g) = [a(x, \mu)(x^2 - \mu^2) + b(x, \mu)(2x) + c(\mu)(-2\mu)]$$

对任何 $f \in \mathcal{E}_{x,\mu}$, 由它在 $(0,0)$ 处的泰勒展开式有

$$f(x, \mu) = f_0 + f_1(\mu)\mu + f_2(x, \mu)x = f_0 [\text{mod } T(g)]'$$

其中 f_0 是常数。因此 $\mathcal{E}_{x,\mu} = T(g) \oplus V$, 补空间 V 是以 1 为基向量张成的子空间, 于是 $\text{codim } g = \dim V = 1$ 。取 $p_1 = 1, ;$ (10.2.15) 得到 g 的一个普适开折

$$G(x, \mu, \alpha) = x^2 - \mu^2 - \alpha \quad \alpha \in \mathbf{R} \quad (10.2.16)$$

函数 $x^2 - \mu^2$ 的静态分岔图见图 10.2(b), 它的奇异点 $(0,0)$ 称为“跨临界点”或“简单分岔点”。在图 10.2(a)

和(c)上分别给出普适开折 G 当 $\alpha < 0$

和 $\alpha > 0$ 时的静态分岔图。我们见到,

对 g 的任意小的扰动 ($\alpha \neq 0$), 都会完全

改变分岔的性态。

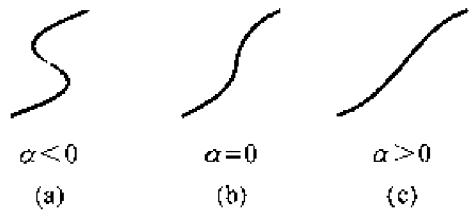


图 10.2

例 6 设 $g(x, \mu) = x^3 - \mu x$ 。可以

证明 $\text{codim } g = 2$ 。 $T(g)$ 在 $\mathcal{E}_{x,\mu}$ 中的补空间 V 是由 $\{1, x^2\}$ 张成的, 从而 g 的一个普适开折为

$$G_1(x, \mu, \alpha, \beta) = x^3 - \mu x + \alpha + \beta x^2 \quad (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \quad (10.2.17)$$

在图 10.4 上给出普适开折 G_1 在不同的 (α, β) 数值下的静态分岔图。函

数 $x^3 - \mu x$ 的奇异点是“叉形点”, 此外, 还可求得 g 的另一个普适开折

$$G_2(x, \mu, \alpha, \beta) = x^3 - \mu x + \alpha + \beta \mu \quad (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \quad (10.2.18)$$

3. 普适开折的识别

我们已经讨论过给定的 g 计算其普适开折 G 的问题。在应用中, 往往还需要考虑判别普适开折的问题, 即: 已知 $g(x, \mu)$ 与某个余维数 k 的 GS 正规形 $h(x, \mu)$ 强等价, $G(x, \mu, v)$ 是 g 的一个 k -参数开折 ($v \in \mathbf{R}^k$), 我们要判别 G 是否 g 的普适开折。为此, 我们只需利用 g 和 G 的一些导数去得到某个矩阵 $A(x, \mu, v)$, 则 G 是 g 的普适开折的充分必要条件是

$$\det A(0, 0, 0) \neq 0 \quad (10.2.19)$$

表 10.2 对一些重要的 GS 正规形(其上的编号同表 10.3)给出相应的矩

阵 A , 在表中, α, β, γ 等是普适开折的开折参数, $\epsilon = \pm 1, \delta = \pm 1$ 。

4. 普适开折的保持性、转迁集

设 $G(x, \mu, \alpha)$ 是 $g(x, \mu) \in \mathcal{E}_{x, \mu}$ 的一个 k -参数普适开折, $(0, 0)$ 是一个奇异点。由于普适开折 G 已包含了对 g 的一切扰动, 因此 G 的静态分岔图反映了当 g 受扰时可能出现的各种分岔性态。我们要讨论开折参数 α 对普适开折 G 的分岔图的影响, 即“保持性(persistence)”问题。

如果对 $\alpha \in \mathbb{R}^k$ 的一个邻域 U 中的任何 $\beta, G(\cdot, \cdot, \alpha)$ 与 $G(\cdot, \cdot, \beta)$ 接触等价, 从而当 $G(x, \mu, \alpha)$ 受到小扰动分岔图的定性性态保持不变, 则称 G 在 α 处的分岔图是持久的, 即分岔是通有(或稳定)的。否则, 分岔图是非持久的, 即分岔是退化(或不稳定)的。

表 10.2

 $\epsilon = \pm 1, \delta = \pm 1$

余维数	GS 正规形	矩阵 A
1	$\epsilon x^2 + \delta \mu$	无
2, 3	$\epsilon(x^2 + \delta \mu^2)$	G_α
4	$\epsilon x^3 + \delta \mu$	$\begin{pmatrix} g_\beta & g_{\mu\beta} \\ G_\alpha & G_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$
5	$\epsilon x^2 - \delta \mu^2$	$\begin{pmatrix} 0 & g_{xx} & g_{x\mu} \\ G_x & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} \end{pmatrix}$
6	$\epsilon x^4 + \delta \mu x$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\mu} & g_{xx\mu} \\ 0 & g_{\mu x} & g_{\mu\mu} & g_{\mu x x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha x x} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta x x} \end{pmatrix}$
7	$\epsilon x^4 + \delta \mu$	$\begin{pmatrix} g_\beta & g_{\mu\beta} & g_{\beta xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha\beta} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta\beta} & G_{\beta xx} \end{pmatrix}$
8	$\epsilon x^5 + \delta \mu^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xx} & g_{x\mu} & g_{\mu\mu} \\ 0 & g_{xx} & g_{x\mu} & g_{xx x} & g_{xx\mu} & g_{x\mu\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{xx} & 2g_{x\mu} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha x\mu} & G_{\alpha\mu\mu} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\mu} & G_{\beta\mu\mu} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\mu} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\mu} & G_{\gamma\mu\mu} \end{pmatrix}$

续表

余维数	GS 正规形	矩阵 A
9	$\varepsilon x^3 + \delta \mu^2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xxx} & g_{xx\mu} \\ 0 & 0 & g_{x\mu} & g_{\mu xx} & g_{\mu\mu x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta\mu x} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\mu} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma\mu x} \end{bmatrix}$
10	$\varepsilon x^4 + \delta \mu^3$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_{xxxx} \\ 0 & 0 & g_{x\mu} & g_{\mu xx} & g_{\mu\mu x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta\mu x} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\mu} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma\mu x} \end{bmatrix}$
11	$\varepsilon x^5 + \delta \mu^4$	$\begin{bmatrix} g_\mu & g_{\mu x} & g_{\mu xx} & g_{\mu xxx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha xxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx} \end{bmatrix}$

研究表明,当且仅当 α 属于下列点集之一时, $G(x, \mu, \alpha)$ 的分岔图是非持久的:

- (1) $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathbf{R}^k \mid \text{存在 } (x, \mu), \text{使得在 } (x, \mu, \alpha) \text{ 处有 } G = G_x = G_\mu = 0\}$ 。
- (2) $\mathcal{H} = \{\alpha \in \mathbf{R}^k \mid \text{存在 } (x, \mu), \text{使得在 } (x, \mu, \alpha) \text{ 处有 } G = G_x = G_{xx} = 0\}$ 。
- (3) $\mathcal{G} = \{\alpha \in \mathbf{R}^k \mid \text{存在 } (x, \mu) (i=1, 2), x_1 \neq x_2, \text{使得在 } (x, \mu, \alpha) \text{ 处有 } G = G_x = 0\}$ 。

我们把满足集 \mathcal{B} 、 \mathcal{H} 和 \mathcal{G} 中的条件的 $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ 奇异点 (x, μ) 分别称为分岔点、滞后点和双极限点。在图 10.2 上给出分岔点的分岔图的扰动情况(注意:跨临界点和孤立点都满足分支的条件)。双极限点包含两个极限点(见图 10.3a, 它的分岔图在受到扰动后也会发生本质的变化, 见图 10.3b 和 c)。

记集 $\Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{G}$, 称为转迁集(transition set)。它把开折参数空间 \mathbf{R}^k 分为若干子区域。于是, 我们可以将 $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ 的分岔图按开折参数 α 分为持久的和非持久的两大类, 当 $\alpha \in$

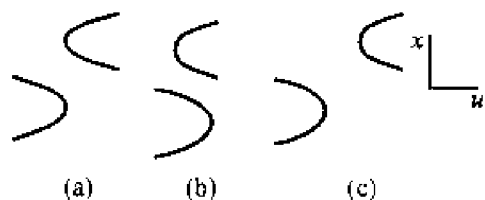


图 10.3

Σ 时, $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ 的分岔图不是持久的, 并可按 Σ 的不同子集作进一步的分类, 并 $\alpha \notin \Sigma$ 时, $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ 的分岔图是持久的, 并可按各子区域作进一步的分类, 这样, 我们可对 g 受扰后可能出现的各种通有或退化的分岔作深入分析。

例 7 考虑 $g(x, \mu) = x^2 - \mu^2$ 。由前面知道, g 的普适开折为 $G(x, \mu, \alpha) = x^2 - \mu^2 + \alpha, \alpha \in \mathbf{R}$ 。为了确定集 \mathcal{B} , 取

$$G = x^2 - \mu^2 + \alpha = 0, G_x = 2x = 0, G_\mu = -2\mu = 0$$

由此解得的 $x = \mu = 0$ 和 $\alpha = 0$ 。因此集 \mathcal{B} 仅包含一点 $\alpha = 0$, 相应的 $G(x, \mu, 0)$ 的奇异点是 $(0, 0)$ 。利用集 \mathcal{H} 和 \mathcal{Q} 的条件, 可知它们不存在, 即 $\mathcal{H} = \emptyset, \mathcal{Q} = \emptyset$ 。由此可知转迁集 $\Sigma = \mathcal{B} = \{0\}$ 。由图 10.2, 显见 $G(x, \mu, 0)$ 的分岔图不是持久的, 而当 $\alpha \neq 0$ 时, $G(x, \mu, \alpha)$ 的分岔图是持久的。

例 8 考虑 $g(x, \mu) = x^3 - \mu x$, 它的一个普适开折是

$$G(x, \mu, \alpha, \beta) = x^3 - \mu x + \alpha + \beta x^2$$

利用 $G_x = 3x^2 - \mu + 2\beta x, G_\mu = -x, G_\alpha = 1, G_\beta = 2x$, 不难求出

$$\mathcal{B} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha = 0\}$$

$$\mathcal{H} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha = \beta^3/27\}$$

$$\mathcal{Q} = \emptyset$$

转迁集 $\Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H}$ 。图 10.4 给出了 \mathcal{B} 和 \mathcal{H} 的图形, 它们把参数 (α, β) 平面分成四个子区域。在图上还给出集 \mathcal{B}, \mathcal{H} 和各子区域的开折参数 (α, β) 值所对应的 $G(x, \mu, \alpha, \beta)$ 的分岔图。在四个子区域 I、II、III 和 IV 中, G 的分岔图上的奇异点都是极限点。在集 \mathcal{B} (即 β 轴) 上, G 的分岔图上有跨临界点 (它是分岔点)。在集 \mathcal{H} (即曲线 $\alpha = \beta^3/27$) 上, G 的分岔图上有滞后点。在 origin 处, G 的分岔图上有叉形点 (它既是分岔点, 也是滞后点)。

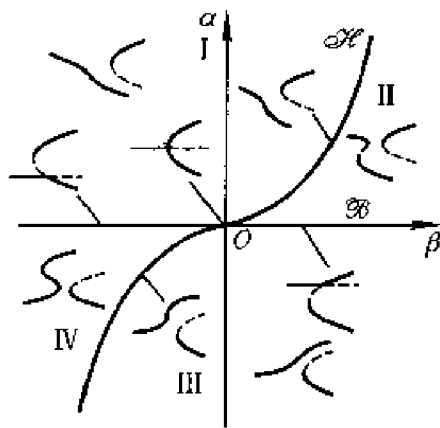


图 10.4

最后指出, 尽管从原理上普适开折讨论的是仍然是局部分岔性态, 但有时可以通过局部结果去获知一些全局分岔性态。此外, 应用中经常遇到多参数系统, 普适开折提供了有关物理参数空间中解的结构和选择定性分析所需的组合参数的重要信息。

5. 近似开折及其转迁集的计算

在处理非线性动力学的工程应用问题时, 根据需要, 我们往往只计算其低阶近似的分岔方程, 例如, 一次近似的或二次近似的分岔方程。将所得到的近似分岔方程与 GS 正规形进行对比, 既可判断其余维数, 这样得

到的余维数称为工程(应用)余维数,它可能与其普适开折余维数相等,也可能不同。并根据工程余维数可进行工程余维分类。

由近似分岔方程计算转迁集,并在开折参数空间中画其转迁集和保持性分岔图。然后将开折参数空间变换到物理参数空间中来,我们可根据物理开折参数空间及其分岔特性来选择对应于某种特定运动性态的系统的物理参数,这就是动力学结构参数的优化选择。一般来说,开折参数个数少于系统物理参数的个数,开折参数空间中的各种不同的分岔曲线,不可能出现在同一个特定的非线性振动系统中,也就是说,不同的系统的非线性特性将分别出现在不同的物理参数开折空间中,这个特点对动力学系统的非线性特性的参数识别提供了一种方法。

近似开折方法将在下一节通过例子予以说明。

10.2.4 余维分类问题

设 $g(x, \mu) \in C_{x, \mu}, g: U \times V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。现在讨论如何将众多的方程 $g(x, \mu) = 0$ 的静态分岔按定性性态进行分类的问题。由于随着 g 的余维数增加,奇异点的退化程度增大,在 g 受扰后可能出现的分岔情况更加复杂,因此余维数在静态分岔的分类问题中起着重要的作用。这里只按余维数不超过 3 的奇异点进行分类。当然我们还可对更高余维数的静态分岔进行分类。

表 10.3

编号	名称	余维数	GS 正规形	普适开折
1	极限点	0	$\epsilon x^2 + \delta \mu$	$\epsilon x^2 + \delta \mu$
2	跨临界点	1	$\epsilon(x^2 - \mu^2)$	$\epsilon(x^2 - \mu^2) + \alpha$
3	孤立点	1	$\epsilon(x^2 + \mu^2)$	$\epsilon(x^2 + \mu^2) + \alpha$
4	滞后点	1	$\epsilon x^3 + \delta \mu$	$\epsilon x^3 + \delta \mu + \alpha x$
5	非对称尖点	2	$\epsilon x^2 + \delta \mu^2$	$\epsilon x^2 + \delta \mu^2 - \alpha + \beta \mu$
6	叉形点	2	$\epsilon x^3 + \delta \mu x$	$\epsilon x^3 + \delta \mu x - \alpha + \beta x^2$
7	四次折叠点	2	$\epsilon x^4 + \delta \mu$	$\epsilon x^4 + \delta \mu + \alpha x + \beta x^2$
8	四次孤立点	3	$\epsilon x^2 + \delta \mu^3$	$\epsilon x^2 + \delta \mu^3 + \alpha + \beta \mu + \gamma \mu^2$
9	双翼尖点	3	$\epsilon x^3 + \delta \mu^2$	$\epsilon x^3 + \delta \mu^2 - \alpha + \beta x + \gamma \mu x$
10	四次跨临界点	3	$\epsilon x^4 + \delta \mu x$	$\epsilon x^4 + \delta \mu x - \alpha + \beta \mu + \gamma x^2$
11	五次滞后点	3	$\epsilon x^5 + \delta \mu$	$\epsilon x^5 + \delta \mu + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$

注:表中的 ϵ 和 δ 可取 +1 或 -1; α, β, γ 等是开折参数。

研究表明,若 $(0,0)$ 是 g 的奇异点,且 $\text{codim } g \leq 3$,则 g 必与表 10.3 上所列的 11 种 GS 正规形中的某个强等价。也就是说,余维数不大于 3 的奇异点只有 11 种静态分岔性态。它们也是在实际应用中经常遇到的静态分岔类型,相应的分岔图见图 10.5。有关它们的普适开折的转迁集和持久分岔图的更多结果,可参看[43]的第四章 § 4。

$\begin{matrix} \varepsilon \\ \text{编号} \end{matrix} \backslash \delta$	分岔图 $\varepsilon=1$		分岔图 $\varepsilon=-1$	
	$\delta=-1$	$\delta=1$	$\delta=-1$	$\delta=1$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

图 10.5

(图上所示的稳定性是对动态方程 $\dot{x} + g(x, \mu) = 0$ 的平衡解而言的)

§ 10.3 非线性参数激励振动系统的 1/2 亚谐分岔解法—CL 方法

非线性参数激励振动问题在工程应用和理论上都有重要的研究价值。本节通过对其 1/2 亚谐分岔解的分析,介绍 CL 方法在非线性振动系统中的应用。非线性参激振动问题可以用非线性马休方程或非线性希尔方程来描述。

首先讨论非线性马休方程的对称性,然后以 LS 方法求出分岔方程,

并对第一次近似分岔方程进行分析以确定其工程开折余维数并做转迁集的计算,画转迁集和分岔图,可确定解的拓扑结构与系统参数之间的关系,并将之变换到物理参数空间上,可进行动力学参数优化设计和识别。

现有非线性马休方程

$$u'' + \delta[u' + h(u, u', \delta)] + (1 + \mu)u + f(u, u', \mu) + 2\epsilon \cos 2t[g(u, u', \mu, \epsilon)] = 0 \quad (10.3.1)$$

其中 δ 为阻尼系数, ϵ 为参数激励的振幅, μ 为调谐值, 且 u, δ, ϵ 和 μ 都是小量, f 为非线性恢复力函数, h 为非线性阻尼函数, g 为非线性参激函数, 根据工程实际设 f 和 g 是 u' 的偶函数, h 为 u' 的奇函数; 取调谐参数 $\mu = \omega^2 - 1$ 为分岔参数, 这里 ω 为 (10.3.1) 的线性化系统的固有角频率。

下面第一到第四分节研究系统 (10.3.1) 以 2π 为周期的分岔解, 因该解角频率的第一次近似值为 1, 且为参数激励频率的 $\frac{1}{2}$, 故又称之为 $\frac{1}{2}$ 亚谐共振分岔解。

我们知道分岔方程的形式决定于系统是否有对称性, 现讨论方程 (10.3.1) 的对称性问题。

10.3.1 对称性

许多非线性振动系统都具有对称性, 即有在某个子群作用下的不变性质。在这里我们只讨论本节需要用到的一些性质, 对称性的全面讨论可参考 [4]。因系统 (10.3.1) 为非自治系统, 为了应用 LS 方法, 现定义周期函数空间。

以 2π 为周期的连续函数空间 $C_{2\pi}$ 为

$$C_{2\pi} = \{p \in C(\mathbb{R}) \mid p(t+2\pi) = p(t)\} \quad (10.3.2)$$

以 2π 为周期的具有二阶连续导数的函数空间

$$C_{2\pi}^2 = \{q \in C^2(\mathbb{R}) \mid q(t+2\pi) = q(t)\} \quad (10.3.3)$$

定义其上确界范数:

在 $C_{2\pi}$ 上, 有 $\|p\| = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |p(t)|$; 在 $C_{2\pi}^2$ 上, 有 $\|q\|_2 = \|q\| + \|q'\| + \|q''\|$ 。故知 $C_{2\pi}$ 和 $C_{2\pi}^2$ 为巴拿赫空间。

定义一个移相算子 T_φ :

$$T_\varphi p(t) = p(t + \varphi) \quad (10.3.4)$$

很显然有

$$T_0 p(t) = I p(t)$$

$$T_\pi^2 p(t) = T_\pi T_\pi p(t) = I p(t)$$

$$\therefore T_0 = I \quad T_\pi^2 = I \quad (10.3.5)$$

其中 I 为恒等映射。

定义反向时间算子 σ :

$$\sigma p(t) = p(-t) \quad (10.3.6)$$

$$\sigma^2 = I \quad (10.3.7)$$

一般情况下 T_φ 和 σ 是不可交换的, 但当 $\varphi = \pi$ 时, 二者可交换, 即有

$$\sigma T_\pi = T_\pi \sigma \quad (10.3.8)$$

和

$$\sigma T_\varphi \sigma = T_{-\varphi} \quad (10.3.9)$$

T_π 、 σ 和 I 分别组成二元群 $\{I, T_\pi\}$ 和 $\{I, \sigma\}$, 该群和 \mathbb{R}^2 上的正交线性变换群 $O(2)$ 的子群同构。

定义正交群

$$O(n) = \{A \in GL(n) \mid AA' = I\}$$

其中 $GL(n)$ 是巴拿赫空间 X 到自身的可逆线性变换集。

显然 $O(n)$ 的闭子群也是紧李群, 反之, 每一个紧李群可看作 $O(n)$ 的一个闭子群。

定义特殊正交群

$$SO(n) = \{A \in O(n), \det A = 1\}$$

它又称旋转群。特别地, $SO(2)$ 可由平面旋转组成

$$SO(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} \equiv \text{圆周群} = S^1$$

记 $k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

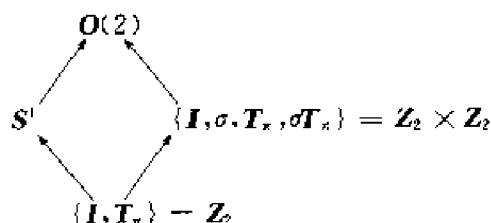
为翻转(反射), 则 $O(2)$ 可由 $SO(2)$ 及 k 生成, 即 $SO(2)$ 和 k 为 $O(2)$ 的子群。

定义 Z_2 群

以乘法定义则为 $Z_2 = \{1, -1\}$, 或以加法定义 $Z_2 = \{0, +1\}$ 。函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 与子群 Z_2 交换等价于 f 为奇函数, 即

$$f(-x) = -f(x)$$

不难验证, 子群 $\{I, \sigma\}$ 和 $\{I, T_\pi\}$ 具有 Z_2 对称性, $O(2)$ 的子群可组成下表



设 $M(\mu, \delta, \epsilon)u$ 表示方程 (10.3.1) 的左端, 称之为非线性马休算子, 很显然, 有

$$M(\mu, \delta, \epsilon)T_\pi u = \frac{d^2 u(t+\pi)}{d(t+\pi)^2} + \delta \left\{ \frac{du(t+\pi)}{d(t+\pi)} + h[u(t+\pi), u'(t+\pi), \delta] \right\} + \\ (1+\mu)u(t+\pi) + f[u(t+\pi), u'(t+\pi), \mu] + 2\epsilon \cos 2t \times \\ \left\{ u(t+\pi) + g\left[u(t+\pi), \frac{du(t+\pi)}{d(t+\pi)}, \mu, \delta, \epsilon\right] \right\} \quad (10.3.10)$$

$$T_\pi M(\mu, \delta, \epsilon)u = \cdots + 2\epsilon \cos 2(t+\pi) \left\{ u(t+\pi) + \right. \\ \left. g\left[u(t+\pi), \frac{du(t+\pi)}{d(t+\pi)}, \mu, \delta, \epsilon\right] \right\} + \cdots \quad (10.3.11)$$

在 (10.3.11) 中未写出来的项完全与 (10.3.10) 相应的项相同, 故有

$$M(\mu, \delta, \epsilon)T_\pi u = T_\pi M(\mu, \delta, \epsilon)u \quad (10.3.12)$$

设子群 Γ 同时作用于空间 X 和 Y , 映射 $M: X \rightarrow Y$ 的对称性体现在与子群 Γ 交换, 即对任意 $x \in X, \gamma \in \Gamma$, 有 $M(\rho_\gamma x) = \rho_\gamma M(x)$ 。

不难验证, 随着 (δ, ϵ) 的不同选取, 则非线性马休系统的对称子群具有下表所示的性质

参 数	对 称 子 群
$\delta=0=\epsilon$	$O(2)$
$\delta \neq 0 = \epsilon$	$S^1 = \{T_\varphi \varphi \in [0, 2\pi]\}$
$\delta=0 \neq \epsilon$	$Z_2 \times Z_2 = \{I, T_\pi, \sigma, \sigma T_\pi\}$
$\delta \neq 0 \neq \epsilon$	$Z_2 = \{I, T_\pi\}$

10.3.2 分岔方程

以 L 表示非线性马休算子的弗莱希特导数:

$$L \equiv D_u M(0, 0, 0)u|_{u=0}: C_{2\pi}^c \rightarrow C_{2\pi} \quad (10.3.13)$$

在 $C_{2\pi}$ 上定义内积

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t) \bar{q}(t) dt \quad (10.3.14)$$

其中 $\bar{p}(t)$ 为 $p(t)$ 的复共轭函数。

很显然, $L = \frac{d^2}{dt^2} + 1$ 为自伴算子。

L 的零空间和值空间分别为

$$N(L) = \{x \cos t + y \sin t | (x, y) \in \mathbf{R}^2\} \quad (10.3.15)$$

$$\text{和} \quad R(L) = \{p \in C_{2\pi} \mid \langle \cos t, p \rangle = 0 = \langle \sin t, p \rangle\} \quad (10.3.16)$$

为了计算简便, 取 $i = (-1)^{\frac{1}{2}}$ 后, 将空间进行复化

$$\tilde{C}_{2\pi} = C_{2\pi} \oplus iC_{2\pi} \quad (10.3.17)$$

和

$$\tilde{C}_{2\pi}^c = C_{2\pi}^c \oplus iC_{2\pi}^c \quad (10.3.18)$$

在 $\tilde{C}_{2\pi}^c$ 中 L 的零空间为

$$\tilde{N}(L) = \{z_1 e^u + z_2 e^{-u} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$$

如果将 z_1 和 z_2 限制在复线上, $\{(z, \bar{z}) \mid z \in \mathbb{C}\}$ 可复原为实零空间

$$N(L) = \{ze^u + \bar{z}e^{-u} \mid z \in \mathbb{C}\} \quad (10.3.19)$$

和实值空间

$$R(L) = \{p \in C_{2\pi} \mid \langle e^u, p \rangle = 0\} \quad (10.3.20)$$

定义实投影算子 $Q: C_{2\pi} \rightarrow N(L) \subset C_{2\pi}$, 其计算公式为

$$\begin{aligned} Qp(t) &= \langle e^u, p \rangle e^u + \langle e^{-u}, p \rangle e^{-u} \\ &= 2\langle \cos t, p \rangle \cos t + 2\langle \sin t, p \rangle \sin t \end{aligned} \quad (10.3.21)$$

和

$$P: C_{2\pi} \rightarrow R(L) \subset C_{2\pi} \quad (10.3.22)$$

且

$$Q \equiv I - P$$

因此, 非线性马休方程等价于下列两个交叉方程

$$PM(\mu, \delta, \epsilon)u = 0 \quad (10.3.23)$$

$$QM(\mu, \delta, \epsilon)u = 0 \quad (10.3.24)$$

方程(10.3.1)的解可写成

$$u(t) = ze^u + \bar{z}e^{-u} + w(t) \quad (10.3.25)$$

其中 $w(t) \in N(L)^\perp = R(L) \cap C_{2\pi}^c$

将(10.3.25)代入(10.3.23), 则

$$Lw + P[\delta(u' + h) + \mu u + f + 2\epsilon \cos 2t(u + g)] = 0 \quad (10.3.26)$$

上式中的 $u(t)$ 应以(10.3.25)代入。

当算子 L 为从 $[N(L)]^\perp$ 到 $R(L)$ 的线性映射时是可逆的, 故由 LS 法, 当 $|z|$ 、 μ 、 δ 和 ϵ 充分小时, 从上式可得到一个惟一的实函数的解

$$w = w(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon) \quad (10.3.27)$$

并且满足

$$w(z, \bar{z}, 0, 0, 0) = 0 \quad (10.3.28)$$

w 的计算留到下一节进行。

将所求得的 w 代入(10.3.24), 则

$$\begin{aligned}
& QM(\mu, \delta, \epsilon)[ze^{it} + \bar{z}e^{-it} + w(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon)] \\
&= Q[\delta(u' + h) + \mu u + f + 2\epsilon \cos 2t(u + g)] \\
&= G(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon)e^{it} + \bar{G}(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon)e^{-it} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{10.3.29}$$

将上式与(10.3.21)对照,则

$$\begin{aligned}
G(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon) &= \langle e^{it}, \delta i(ze^{it} - \bar{z}e^{-it} + w') + \delta h + \mu(ze^{it} + \bar{z}e^{-it} + w) + \\
&\quad f + \epsilon(e^{2it} + e^{-2it}) \times [(ze^{it} - \bar{z}e^{-it} + w) + g] \rangle \\
&= (\mu + i\delta)z + \epsilon \bar{z} + \epsilon \langle e^{2it}, w \rangle + \langle e^{it}, \delta h + f + 2\epsilon \cos 2tg \rangle
\end{aligned} \tag{10.3.30}$$

因(10.3.29)对任意时间 t 都满足,所以必有

$$G(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon) = 0 \tag{10.3.31}$$

和

$$\bar{G}(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon) = 0 \tag{10.3.32}$$

而(10.3.31)和(10.3.32)是等价的。

(10.3.31)即为所求的标量分岔方程,且

$$\begin{aligned}
& G: \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{C} \\
& G(0) = 0
\end{aligned}$$

映射 G 对五个变量在在原点(0)的邻域内是解析的。

不难证明,当非线性振动方程具有对称性时,经过 LS 约化后得到的分岔方程,其对称性保持不变,即有

$$T_\gamma G(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon) = G[T_\gamma(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon)] \tag{10.3.33}$$

方程(10.3.33)所具有的对性,决定了分岔方程 $G=0$ 的形式,在最一般的情况下, $\delta \neq 0 \neq \epsilon$, 如取 $T_\gamma = T_*$, 则从(10.3.33)知

$$G(-z, -\bar{z}, \mu, \delta, \epsilon) = -G(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon) \tag{10.3.34}$$

由以上式知,分岔方程必须为 z 和 \bar{z} 的奇函数,故有树枝分岔,当没有阻尼($\delta=0$)或没有参数激励($\epsilon=0$)时,对称性子群仍将进一步限制着分岔方程的形式,并利用 h 为 u' 的奇函数的性质,则可取以下形式

$$\begin{aligned}
G(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon) &= z(\mu + \sum a_j |z|^{2j}) + i\delta z(1 + \sum b_j |z|^{2j}) + \\
&\quad \epsilon \left(\bar{z} + \sum_{j+k \geq 1 \text{ 奇的}} c_{jk} z^j \bar{z}^k \right) + i\epsilon \delta \sum_{j+k \geq 3 \text{ 奇的}} d_{jk} z^j \bar{z}^k
\end{aligned} \tag{10.3.35}$$

上式中的求和应为 $j \geq 1$, 而 a, b, c, d 都为实数,且为 μ, δ, ϵ 的解析函数。

下一节将计算第一次近似分岔方程的系数 a_1, b_1 和 c_1 。

如果 f, g, h 是实解析函数,则泰勒级数(10.3.35)就是收敛的。如

果 f, g, h 不满足光滑条件, 则泰勒级数 (10.3.35) 不一定收敛, 但当 $|z|$ 足够小时, 该级数为渐近的。

10.3.3 响应曲线

分岔方程 $G=0$ 的解 (z, \bar{z}) , 将唯一的对应非线性马休方程的 2π 周期解

$$u(t) = ze^{it} + \bar{z}e^{-it} + w(t, z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon) \quad (10.3.36)$$

下一节将证明 $w = O(|z|^2)$, 因此, 第一次近似的 2π 解 $u(t)$ 的振幅可取 $|z|$. z 的极坐标形式为

$$z = re^{i\theta} \quad (10.3.37)$$

其中 $r \in \mathbf{R}, r > 0, \theta \in S^1$

现在研究 r 与 μ, δ, ϵ 的依赖关系。

将 (10.3.37) 代入分岔方程, 则

$$\begin{aligned} G(r, \mu, \delta, \epsilon) &= re^{i\theta} \{ \mu + A(r^2) + i\delta[1 + B(r^2)] \} + \\ &\quad \epsilon re^{-i\theta} [1 + C(r^2) + i\delta D(r^2)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10.3.38)$$

其中取

$$A \equiv \sum a_j r^{2j}, B \equiv \sum b_j r^{2j}, C \equiv \sum c_j r^{2j}, D \equiv \sum d_j r^{2j}$$

取 (10.3.38) 的复共轭方程后, 将 θ 消去, 则分岔方程为

$$\begin{aligned} R(r^2, \mu, \delta, \epsilon) &= r \{ (\mu + A(r^2))^2 + \delta^2 (1 + B(r^2))^2 \} - \\ &\quad \epsilon^2 [(1 + C(r^2))^2 + \delta^2 D^2(r^2)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10.3.39)$$

很显然, 上式有平凡解: $r=0$, 而其非平凡解应满足方程

$$\begin{aligned} R(r^2, \mu, \delta, \epsilon) &= (\mu + A)^2 + \delta^2 (1 + B)^2 - \epsilon^2 [(1 + C)^2 + \delta^2 D^2] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10.3.40)$$

常称 $R(r^2, \mu, \delta, \epsilon)$ 为响应函数, 其在 $\mu-r$ 坐标系中的曲线称为响应曲线, 连同平凡解称为分岔曲线。

因方程 (10.3.40) 对 r 来说是偶函数, 故分岔曲线为树枝形的。

为了求解 (10.3.40), 设在 $(\mu, \delta, \epsilon) = (0, 0, 0)$ 点, 非退化分岔条件

$$a_1 \neq 0, \delta^2 b_1 \neq \epsilon^2 c_1 \quad (10.3.41)$$

满足, 则可取非线性变换

$$r^2 = A(r^2) \cdot \alpha \equiv \text{sgn}(a_1) = \pm 1 \quad (10.3.42)$$

将 (10.3.42) 代入 (10.3.40), 则得

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha \hat{A}(r^2))^2 + \delta^2 [1 + \hat{B}(r^2)]^2 - \epsilon^2 [1 + \hat{C}(r^2)^2 + \delta^2 \hat{D}^2(r^2)] &= 0 \\ (10.3.43) \end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}(r^2) &= \frac{b_1}{|a_1| r^2} + O(r^4) \\ \hat{C}(r^2) &= \frac{c_1}{|a_1| r^2} + O(r^4) \\ \hat{D}(r^2) &= \frac{d_1}{|a_1| r^2} + O(r^4) \end{aligned} \right\} \quad (10.3.44)$$

为了方便起见,将各项的尖帽符号去掉,则(10.3.43)可写为

$$(\mu + \alpha r^2)^2 + \delta^2 - \varepsilon^2 + \frac{2}{|a_1|} (b_1 \delta^2 - c_1 \varepsilon^2) r^2 + O(r^4) = 0$$

或第一次近似方程

$$R_1(r^2, \mu, \alpha, \beta) = (\mu + \alpha r^2)^2 + \alpha + \beta r^2 = 0 \quad (10.3.45)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \delta^2 - \varepsilon^2 \\ \beta &= \frac{2}{|a_1|} (b_1 \delta^2 - c_1 \varepsilon^2) R_1(r^2, \mu, \delta, \varepsilon) \\ R_1(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (10.3.46)$$

α, β 具有双重意义,一是作为模型的力学参数,二是作为工程开折参数。

现在研究第一次近似分岔方程(10.3.45)的分岔行为。

习惯上将(10.3.45)对 μ 解出

设 $r^2 = s$

$$\mu = -\alpha r^2 \pm \sqrt{-(\alpha + \beta r^2)} \quad (10.3.47)$$

计算转迁集

$$\left. \begin{aligned} R_{1\mu} &= 2(\mu + \alpha s) = 0 \\ R_{1s} &= 2(\mu + \alpha s)\alpha + \beta = 0 \\ B_1: \alpha &= 0 \quad \{R_1 = R_{1\mu} = 0, \text{在}(0, \mu, \alpha, \beta)\} \\ B_2: \beta &= 0 (\text{退化情况}) \quad \{R_1 = R_{1\mu} = 0, \text{在}(0, \mu, \alpha, \beta)\} \\ H_1: \alpha &= \frac{-\beta^2}{4} \quad \{R_1 = R_{1s} = 0, \text{在}(0, \mu, \alpha, \beta)\} \\ H_1 &= D = \Phi \\ \Sigma &= B_0 \cup B_1 \cup H_0 \end{aligned} \right\} \quad (10.3.48)$$

在 $\alpha-\beta$ 平面上画转迁集,则 $\alpha-\beta$ 平面被分成六个开域,见图 10.6,该六个域的每一个区域都有自己特殊的分岔曲线,在任何一个区域中的所有点都有着相同拓扑结构的分岔曲线^[43](分岔曲线的非零部分称为响应曲线)。

根据图 10.6 可选择确定的参数,以保证需要的运动模式。

转迁集上的分岔曲线,在图 10.6 中六个区域的交界线,为转迁集,在

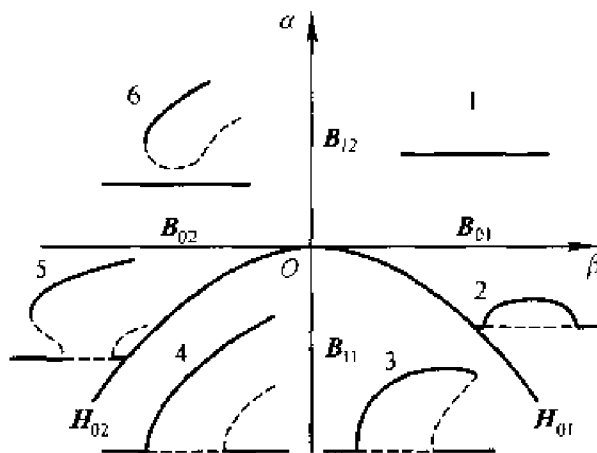


图 10.6

参数变化经过这些集合的时候,分岔图的拓扑形式将发生质的变化。

在转迁集 B_{01} , H_{01} , B_{11} , H_{11} 和 B_{02} , B_{12} 上,因 α 与 β 有一个关系式相联系,所以在分岔方程中,除 μ 外只有一个开折参数,如在转迁集 H_{01} 上,因满足 $\frac{\partial \mu}{\partial s} = 0$,所以在 $r=0$ 附近响应曲线是垂直于 μ 轴的,且有 $\mu = \pm \frac{\beta}{2}$, $r=0$;这时响应曲线应满足方程

$$\mu_{1,2} = r^2 \pm \sqrt{-\left(-\frac{1}{4}\beta^2 + \beta r^2\right)} = r^2 \pm R \quad (10.3.49)$$

其中 R 为(10.3.49)中的根号表达式,随着 r 的增大,则 R 逐渐减小,而 μ_1 和 μ_2 将逐渐靠近,而当 $-\frac{1}{4}\beta^2 + \beta r^2 = 0$ 时,有 $\mu_1 = \mu_2$,此时响应曲线如图 10.7 所示。

在 B_{01} 上因 $\alpha=0, \beta>0$,所以 μ 无实解,即此时只有平凡解;同理可得余维 1 的其它响应曲线,如图 10.8 所示。

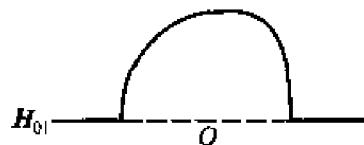


图 10.7

当不满足力学非退化条件时,即 $b_1 \delta^2 - c_1 \epsilon^2 = 0$,则有 $\beta=0$,所以,当力学非退化条件不满足时,需研究 $R(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon)$ 的高阶项才能确定共振曲线的形状,在这种情况下,分岔方程的开折参数大于 2,也可能为无穷大。

为了便于实验分析和应用,把开折参数平面交换到 $\delta^2 - \epsilon^2$ 物理参数平面上来,根据系数 b_1 和 c_1 的不同组合,可以画出六种不同的 $\delta^2 - \epsilon^2$ 物理参数平面,其中每一种都对应一类特定的物理系统,即由特定的非线性函数 h, g, f 所决定的非线性振动系统。如图 10.9。

图中六种不同的参数平面证明,图 10.9 中所示的六种分岔图不可能

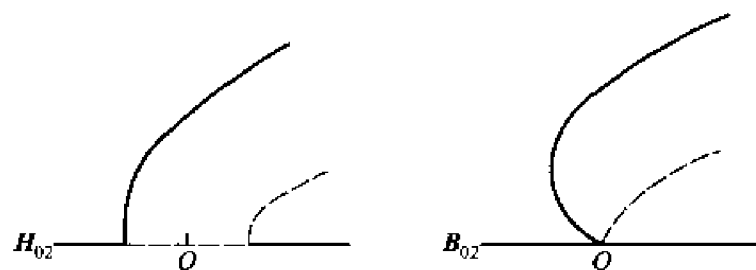


图 10.8

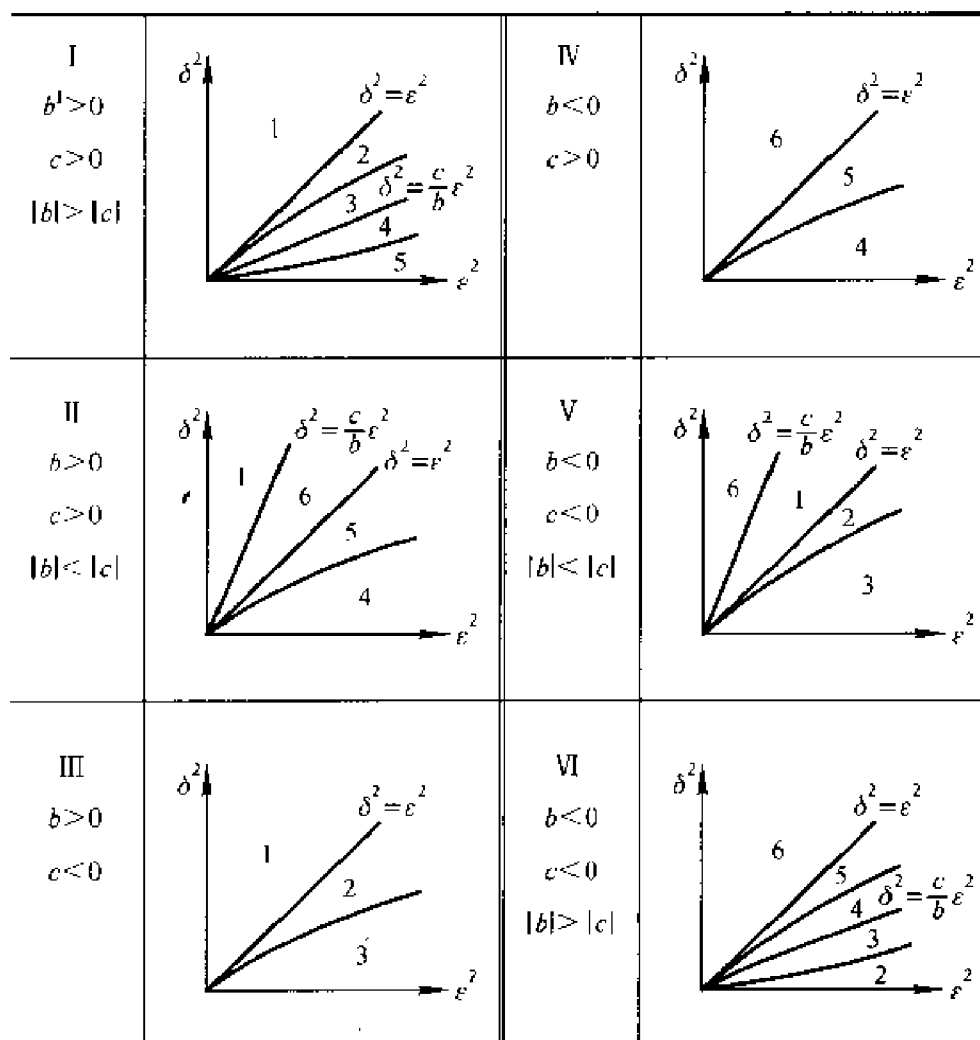


图 10.9

出现在同一类特定的振动系统中,这一特点对识别非线性系统参数的力学性质提供了一种方法。

从图 10.9 的六个参数平面中可以看到,在 I, II, III, V 类振动系统的参数平面上都可能出现对应零解的参数区域 1,特别是在第 V 类振动系统中,在确定的阻尼下,激振力幅值在某一适当的量值范围内时系统不会发生参数共振现象,这一特点对非线性参数激励系统的振动控制具有重要的意义。另外从 IV 和 VI 类振动系统的参数平面上可以看出,在 $\epsilon < \delta$

的情况下,也可能发生 $\frac{1}{2}$ 亚谐共振分岔现象。

10.3.4 系数的计算

如果上一分节中的力学非退化条件满足的话,为确定系统(10.3.45)的分岔曲线,只需计算 a_1 、 b_1 、 c_1 即可。为此首先计算 w 对 z 的导数,将(10.3.26)对 z 求偏导(以下标 z 表示这个偏导)。

$$Lw_z + [\delta(u'_z + h_u u_z + h_{u'} u'_z) + \mu u_z + f_u u_z + f_{u'} u'_z + 2\epsilon \cos 2t(u_z + g_u u_z + g_{u'} u'_z)] = 0 \quad (10.3.50)$$

利用(10.3.25)求出 u_z 、 u'_z ,并考虑 f 为 u 的非线性函数和为 u' 的偶函数,取符号 $(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon) = (0, 0, 0, 0) \equiv (0)$ 则

$$Lw_z(0) = 0$$

因 $w \in (N(L))^\perp$, 故有

$$w_z(0) = 0 \quad (10.3.51)$$

同理,有

$$w_{\bar{z}}(0) = w_\mu(0) = w_\delta(0) = w_\epsilon(0) = 0 \quad (10.3.52)$$

将(10.3.50)在(0)点对 z 再求一次导数,则

$$Lw_{zz}(0) = -[f_{uu}(0) - f_{u'u'}(0)]e^{2it}$$

上式为时间 t 的线性二阶非齐次微分方程,其特解为

$$w_{zz}(0) = \frac{1}{3}(f_{uu} - f_{u'u'})e^{2it} \quad (10.3.53)$$

同理,有

$$\left. \begin{aligned} w_{\bar{z}}(0) &= -(f_{uu} + f_{u'u'}) \\ w_{\bar{z}\bar{z}}(0) &= \frac{1}{3}(f_{uu} - f_{u'u'})e^{-2it} \\ w_z(0) &= \frac{1}{8}e^{it} \\ w_{\bar{z}\bar{z}}(0) &= w_{z\delta}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.3.54)$$

将(10.3.53)和(10.3.54)对 z 和 \bar{z} 积分,则可证明

$$w = O(|z|^2) \quad (10.3.55)$$

为了计算 a_1 、 b_1 和 c_1 ,将(10.3.35)展开

$$G(z, \bar{z}, \mu, \delta, \epsilon) = z[\mu + a_1 z \bar{z} + i\delta(1 + b_1 z \bar{z})] + \epsilon \bar{z}(1 + c_1 z \bar{z}) + \dots$$

从上式可得

$$\left. \begin{aligned} G_{z\bar{z}}(0) &= 2a_1 \\ G_{\delta z\bar{z}}(0) &= 2a_1\delta + 2ib_1 \\ G_{\epsilon z\bar{z}}(0) &= 2c_1 \\ G_{zzz}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.3.56)$$

等式(10.3.56)左端的导数也可以从(10.3.30)计算而得

$$G_{\bar{x}}(0) = f_{uuu} + f_{uu'u'} - \frac{5}{3}f_{uu}[f_{uu} + f_{u'u'}] - \frac{2}{3}(f_{u'u'})^2$$

将上式和(10.3.56)的第一式相比,则

$$a_1 = \frac{1}{2}(f_{uuu} + f_{u'u'u'}) - \frac{5}{6}f_{uu}(f_{uu} + f_{u'u'}) - \frac{1}{3}f_{u'u'}^2 \quad (10.3.57)$$

同理,

$$b_1 = -\frac{1}{2}(h_{uuu'} + h_{u'u'u'}) + \frac{1}{2}h_{uu'}(f_{uu} + f_{u'u'}) - \frac{1}{9}f_{uu}^2 - \frac{1}{9}f_{uu}f_{u'u'} + \frac{2}{9}f_{u'u'}^2 \quad (10.3.58)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(g_{uuu} + g_{u'u'u'}) - \frac{1}{2}g_{uu}(2f_{uu} + f_{u'u'}) + \frac{1}{6}g_{u'u'}(7f_{uu} + 2f_{u'u'}) + \frac{1}{16}f_{uuu} + \frac{5}{16}f_{u'u'u'} - \frac{1}{48}(21f_{uu}^2 + 25f_{uu}f_{u'u'} + 26f_{u'u'}^2) \quad (10.3.59)$$

(10.3.57)~(10.3.59)中的导数都是在(0)点计算的。

对应图 10.9 上系统 VI 的机械模型实验结果[48]完全证实了以上理论分析的正确性。

以上的分析方法称为 CL 方法,利用 CL 方法揭示了比巴戈留包夫—米特罗保利斯基(Боголюбов-Митропольский)[6]和佻弗—木柯(Nayfeh-Mook)[92]的结果(传统非线性振动理论只能求得一种分岔模式)更为丰富的分岔行为,域③的分岔图与 БМ 的结果定性的相同,而域④的结果与 NM 的结果相同。一般地说一次近似既能满足工程计算的需要。但有时为了弄清楚它是否已经反映了原方程(10.3.1)的全部分岔行为的问题,需根据单变量奇异性理论对之进行识别和普适开折。

§ 10.4 混沌简介

近三十多年来,自然科学发展的一个重要特点是研究各种非线性现象,而研究非线性现象的共性问题,便发展出一门新的交叉学科——非线性科学。它包括哪些内容,学术界尚无定论,但目前比较集中的研究混沌、分形、孤立子问题,相应的形成混沌动力学、分形几何和孤立子理论。

限于本课程的讨论范围,在此,我们只对混沌动力学做一个科普性介绍,有兴趣的读者可参考其它专著[46],[60],[80],[82]。

混沌研究可追溯到法国庞加莱,虽然他没明确提出这个词;1963 年美国洛伦兹对一个完全确定的三阶常微分方程进行数值计算,得到了杂乱无章的解—洛伦兹奇怪吸引子,并同时发现了混沌对初值的极端敏感

性——蝴蝶效应;1971年法国茹厄勒(Ruelle)和荷兰 Takens 一起给出了“奇怪吸引子”;1973年日本京都大学上田用模拟计算机研究非线性振动的一类达芬方程时,发现了上田吸引子(日本吸引子);1975年 T. Y. Li 和 J. A. Yorke 首先使用了混沌这个词;1978年费根鲍姆发现了费根鲍姆普适常数,形成了混沌动力学。

1. 奇怪吸引子和混沌

混沌是指在确定系统中出现的有限范围的运动,这种运动毫无规律可言,类似随机过程,对初始值极端敏感(即初始值有微小的变化,经很长的时间后,则可能相差甚远,这就意味着李雅普诺夫意义下的不稳定),也就是说混沌运动具有长期不可预测性。系统是指这样的动力系统,它们通常由微分方程、偏微分方程、差分方程、甚至简单的代数迭代方程所描述,且方程中的系数都是确定的。

简言之,混沌运动是不稳定有限定常运动,这个定义指出了混沌运动的两个主要特性:不稳定性(该性质可用平均李雅普诺夫指数大于零来精确化)和有限性,或除开平衡、周期和拟周期以外的有限定常运动称为混沌运动,这里所谓的有限定常运动,指的是运动状态在某种意义上(以相空间的有限域为对象来看)不随时间而变化。

这种混沌运动还可能作进一步划分,例如 O. E. Rossler(1976)所谓的超混沌(不止一个李雅普诺夫指数大于零)、复杂性(用一个所谓胞自动机的数学模型可以发生四种性态:平衡、周期、混沌,复杂)。

混沌来自非线性,线性系统中不可能有混沌现象。非线性的本质是经过某种线性变换,使两个变量之间的依从关系出现多值性。非线性动力学中的许多现象都是由多值性所导致的,例如分岔、跳跃、滞后、突变、同步(亦即锁相)等。混沌是比分岔更复杂的一种现象,倍化周期分岔往往是将出现混沌的前兆之一。

混沌运动的这种对初始值的极端敏感性,来源于它的运动是李雅普诺夫不稳定的,但应指出的是,这种运动确有某种在较广泛意义上的轨道稳定性,对耗散系统而言,由不同初始条件出发的轨道都趋于同一个奇怪吸引子。大多数数值计算的实验表明,一定范围内的计算误差也不会对此造成很大的影响,最终都会趋于同一个奇怪吸引子,正如寻常情况下轨线终于将趋于同一个寻常吸引子一样。

与混沌密切相关的是奇怪吸引子的概念,吸引子只出现在耗散系统中,可以看作相空间中定常运动状态的形象化体现,前面已提到过三种寻常吸引子:点——平衡态;极限环——周期解;环面——拟周期解。对应于混沌运动的是奇怪吸引子,一般只考虑三维的情况,相空间中的奇怪吸

引子,犹如一根首尾不相接的线,被围在一个有限区域内。在庞卡莱截面上,轨线的交点分布在一条无限长的曲线上。

在物理、力学、化学、电学、生物学、气象学、天文学、经济学、社会学等许多领域都有大量混沌运动存在的例子。而混沌和奇怪吸引子已取得的这些研究结果,在思想方法上冲击了数理学科的许多分支,例如涉及人们对确定性、随机性、统计规律性的认识。应该说人们对非线性动力系统复杂性的认识刚刚开始,对大量复杂运动机理的研究,必将使人们更深刻地认识世界,从而进一步更有效地改造世界。

混沌运动,是动力系统理论的两个具体方向——分岔理论和遍历理论所正在研究的基本对象。

2. 通向混沌的道路

我们习惯于规律简单的平衡、周期、拟周期运动,因此,希望在简单的运动和复杂的混沌运动之间确立某种联系,也就是阐明当系统的参数变化时,如何由简单运动状态向混沌运动状态过渡,一般称为通向混沌的道路。目前研究得较多的有倍周期分岔,间歇,二次霍普夫分岔和 KAM 环面破裂等。

(1) 倍周期分岔 倍周期分岔导致混沌,可用一维平方映射

$$x_{n+1} = f(x_n) = \lambda x_n(1 - x_n) \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq \lambda \leq 4 \quad (10.4.1)$$

来说明。容易看出这是一个区间映射,只要初始值落在上述定义区间 $[0, 1]$ 中,逐次迭代值也不会离开这个区间。

$\xi \in [0, 1]$ 称为周期 K 点,是指满足 $f \cdot f \cdots f(x) = f^K(\xi) = \xi$ 的点,此点当 $|f'(\xi)| < 1$ 时为稳定, > 1 时为不稳定, $= 1$ 时的 λ 值可出现分岔。

将 λ 值从小到大逐渐变化,知当 $0 \leq \lambda \leq 1$ 时有一个不动点,它对应平衡态,因为它满足 $x_{n+1} = x_n$,故可把平衡态解看作为周期 1 解 $\lambda_1 = 3$ 时,分岔出一对周期 2 解, $\lambda_2 \approx 3.45$ 时,这两个不动点各自又分岔出一对周期 4 解,沿 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ 次序倍周期分岔,我们把每个周期解存在的 λ 的长度称为周期窗口,则这些窗口会很快趋于零,至人 $\lambda_m \rightarrow \lambda_\infty = 3.56994 \cdots$ 进入混沌区,见图 10.10。

在混沌区 $(\lambda_\infty, 4)$ 中,当 $\lambda = 4$ 时,系统存在不可数集 S ,系统不再有稳定的周期解,迭代点呈现无规律的杂乱性态,这些点在整个区间 $[0, 1]$ 内“随机”的游荡,它们的轨道几乎可连成一片,这就是混沌性态。当 λ 值由 $\lambda = 4$ 减小,这一片也在缩小,至 $\lambda_{(1)} = 3.6786$ 时分岔为两片,再减至 $\lambda_{(2)} = 3.5926$ 时又分岔为 4 片,接着是 8 片、16 片、 \cdots ;这种倒分岔过程直至 $\lambda_{(k)} \rightarrow \infty$ 时中止,如图 10.10;不仅如此,如果把这个倒分岔过程适当放大,发现其中还会出现一些新的周期窗口,它们都很窄,最宽的算是周期

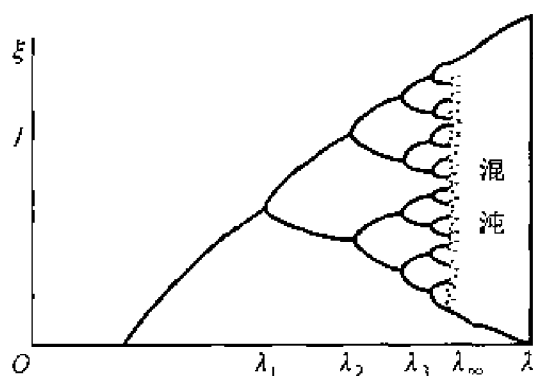
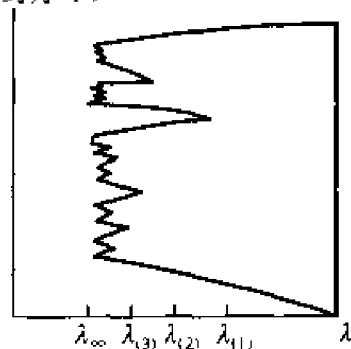


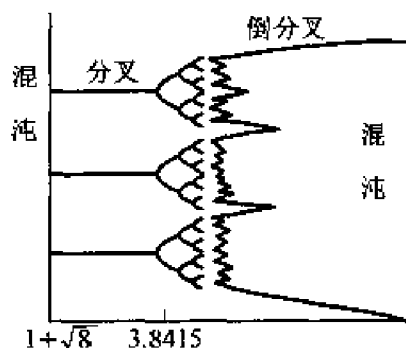
图 10.10

3 窗口: $1 + \sqrt{8} = 3.828 < \lambda < 3.8415$, 如图 10.11(b), 这类窗口混沌态在混沌区中交替出现, 其数量比为 1:9。从频谱图来分析当 λ 变化时频谱的演化, 则间歇意味着周期 3, 即意味着混沌, 见图 10.12。

量比约为 1:9



(a) 倒分叉



(b) 周期3窗口

图 10.11

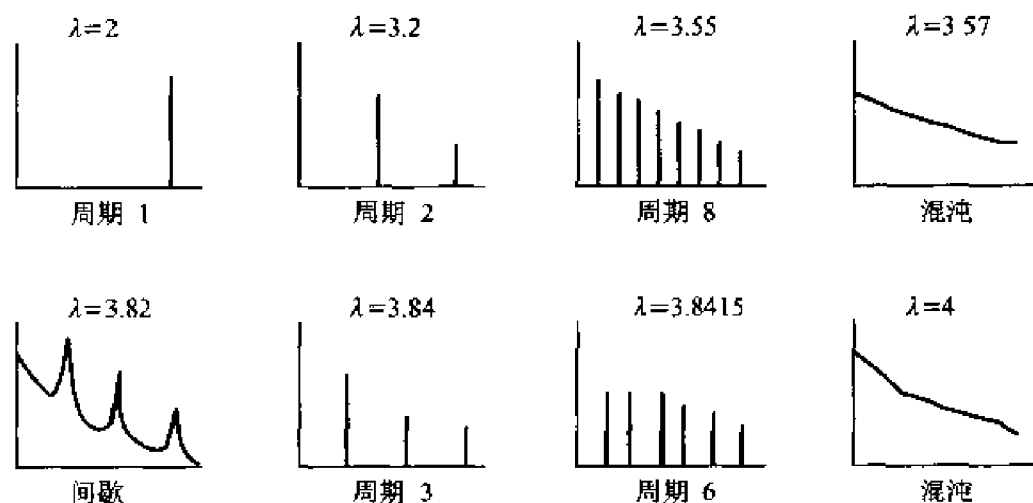


图 10.12

(2) 二次 Hopf 分岔 我们知道当系统的分岔参数变化,使系统发生 Hopf 分岔时,则有极限环产生,进一步可以考虑一个极限环分岔为一个二维环面(T_2)上的运动(有两个互不通约的频率的拟周期运动),这至少在三维动力系统中才有可能发生,常称为二次霍普夫分岔。依此类推, T_2 上的运动又可分岔为 T_3 上的运动等。纽豪斯(Newhouse, S. E.)等于 1980 年已证明, T_3 上的拟周期解一般是不稳定的,因此,周期解只要经过霍普夫分岔和二次霍普夫分岔就可达到混沌。不过在一些数学和水动力学模型中发现了 T_3 上的稳定运动,因此,尚需研究由 T_3 上的拟周期运动向混沌过渡的问题。

(3) KAM 环面 对于近哈密顿系统,有一个著名的 KAM 理论。近哈密顿系统的轨线分布在一些环面(称为 KAM 环面)上,它们一个套在另一个外面,而两个环面之间充满着混沌区。它在法向平面上的截线都为 KAM 曲线。可积哈密顿系统如单摆的相图是中心(椭圆点)与鞍点双曲点交替出现,相平面被鞍点连续分割,相空间中各部分的运动互不相混。在小摄动情况下(接近于哈密顿系统),只在鞍点附近发生一些变化,鞍点连线破断并在鞍点附近产生剧烈振荡,这种振荡将导致等价于斯梅尔(Smale, S.)马蹄的结构,从而引起混沌运动,相应的区域称为混沌层。这里指出二自由度和高于二自由度系统的一个重要区别,如图 10.13。二个自由度系统的 KAM 环面是三维空间中的二维环面,如图 10.13b 因此,随机层中的运动局限于一个区域内,不会跑远。但是例如对三自由度系统,相空间是五维的,而 KAM 环面则是三维的,不足以把轨线禁锢在其中。随机层中的轨线就可以自由飘移,越离越远,称为阿诺德扩散。

对奇怪吸引子与混沌的研究目前主要有:离散方法、连续(或分析)方法和统计方法。在离散方法中,主要有一维和二维映射的半动力系统,它们是研究混沌现象的直观模型;在连续的方法中,主要有梅利尼科夫和什尔尼科夫方法,它是研究由鞍点连接经扰动产生横截同宿点的有用工具,由此出现的马蹄结构是混沌现象的前兆;最后,从统计的角度描述奇怪吸引子与混沌现象的度量性质,以及混沌控制及应用方面的若干新结果,详细的内容参考[76],[78]有关章节。

3. 混沌控制问题

控制混沌的含意非常广泛。一般而言,是指改变系统的混沌性态使之呈现或接近呈现周期性动力学行为。具体而言,控制混沌有三方面含意,其一是混沌的抑制,即消除系统的混沌运动,而无需考虑所产生运动的具体形式;其二是混沌轨道的引导,即在相空间中将混沌轨线引入事先指定的点或周期性轨道的确定的小邻域内;其三是混沌的控制,即通过施

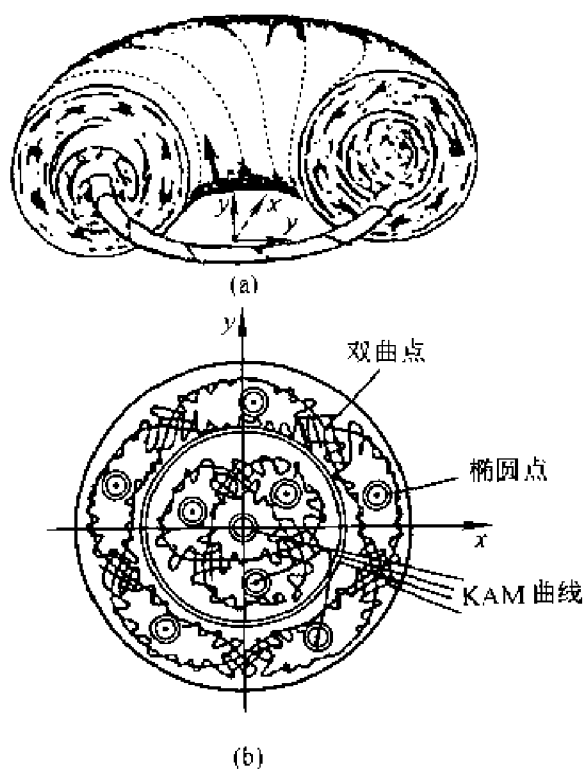


图 10.13

加控制使混沌系统呈现事先要求的周期性动力学行为;其中一种重要的特殊情形是混沌的镇定,即使稠密嵌入相空间中混沌吸引子内的无穷多不稳定周期轨道之一稳定化。混沌的抑制含意最为广泛,只需消除系统的混沌状态。混沌轨道的引导往往只是实施控制的准备。混沌的控制问题含意最为严格,受控系统以事先确定的周期和幅值的运动,在作为特例的镇定问题中跟踪目标受原系统方程的约束。因此狭义的控制混沌只包括混沌的控制问题,尤其是镇定问题,本节只涉及控制混沌的这个方面。

控制混沌的研究兴起于 1989 年,有三种不同的控制方案问世。第一种方案为共振控制,通过引入一类无反馈外激励型控制使系统呈现事先指定的周期性态;第二种方案是建立一种有反馈的参数修改机制来控制同宿轨道;第三种方案是系统理论的应用,分别利用统计性预测和基于滤波的状态估计器等随机控制方法控制混沌系统。真正引起广泛重视的工作是 1990 年奥特(Ott)、格列鲍占(Grebogi)和约克的一篇短文,其中提出了利用参数反馈镇定构成混沌吸引子的任意不稳定周期性轨道的方法,即后来所称的 OGY 方法。这种控制方法与实验有着密切联系,因此很快便应用于实验研究。

控制混沌研究引起广泛重视并非偶然。从非线性动力学自身发展逻辑来看,确定性混沌的研究大体经历了三个阶段。先是从有序到混沌,研

究混沌产生的条件、机制和途径;再是混沌中的有序,研究混沌中的普适性、统计特征及分形结构等;然后则是从混沌到有序,即主动地驾驭混沌达到有序。从这个意义上,可以认为控制混沌的研究标志着混沌研究进入一个新的阶段。控制混沌是混沌理论走向应用的第一步,它不仅能对混沌有害的一面予以消除,例如,在实验室中已成功地用电信号控制动物心脏的不规则跳动,进而可用于治疗心房和心室纤维颤动,甚至有可能研制出采用控制混沌技术的心脏整律器和去纤颤器。更重要的是控制混沌可以利用混沌有益的一面,例如,在航天技术中,由于三体问题的不稳定性,可以利用很少的剩余燃料使宇宙飞船飞行 5 千万英里穿越太阳系。又例如,考虑到混沌与信息处理的密切关系,控制混沌技术有可能应用于保密通讯,这已在控制混沌非线性电路的实验中得到证实。此外,系统处于混沌态时很容易实现不同运动之间的转化。因此设计多用途系统时可以考虑使系统处于混沌态,以提高系统的灵活性。

随着研究的深入,混沌系统的控制内容愈来愈丰富。混沌同步化是一种特殊的混沌系统控制问题,其特殊之处在于控制目标是混沌运动。混沌同步化有两类问题。一类是非线性系统内部的同步化,以具有正李雅普诺夫指数的不稳定部分的混沌输出为驱动信号,以具有负李雅普诺夫指数的稳定部分为响应系统,使其输出与混沌驱动同步化。另一类是两个不同的混沌系统进行耦合或施加外部驱动,使两个混沌系统的响应同步化。控制混沌的逆问题,瞬态混沌向混沌的转化、混沌的保持和非混沌系统的混沌化及其实验室实现的研究工作也在进行。在控制混沌研究的基础上,还提出了控制复杂性的概念,以实现多稳态运动系统中不同运动的转换。值得重视的还有利用噪声和混沌控制非混沌系统,先用噪声使非混沌系统进入混沌状态,然后采用控制混沌方法镇定目标周期轨道,最后去掉噪声。另一类重要问题,湍流的反馈控制也与控制混沌相关。

本节只对混沌作科普性的介绍,有兴趣的读者可参考[65],[80],[82]。

随着混沌控制的发展,分岔控制也引起了人们的兴趣。分岔控制指的是通过控制的手段去改变动力系统分岔现象的各种特征。典型的分岔控制包括镇定不稳定的分岔轨道,延迟分岔的出现,改变分岔点对应的系统参数值,改变分岔轨道的形状或类型,有目的的引进新的分岔,控制极限环的个数、大小、周期或重数,优化系统在分岔点附近的动力学行为,通过控制分岔来控制混沌等^[77]。

习 题

10.1 试讨论平面系统

$$\dot{x} = \mu x - x^4 + x^2 y^2, \dot{y} = -y - y^4 - x^2 y$$

的静态分岔。

10.2 试讨论平面系统

$$\dot{x} = \mu y + x y, \dot{y} = -\mu x + x^2 + y^2$$

的静态分岔。

10.3 试讨论平面系统

$$\dot{x} = \mu y - y^2, \dot{y} = x - 2y + 0.5x^2$$

的静态分岔。

10.4 试用 LS 约化建立平面系统

$$\dot{x} = \mu x - x y - x^3, \dot{y} = y + x^2 - y^2$$

的约化方程,并讨论静态分岔。

10.5 试用 LS 约化证明平面系统

$$\dot{x} = (2 - \mu)x - 2y + 2x^2 + 2y^2, \dot{y} = (1 - 3\mu)x - y + xy + y^2$$

在零点邻域存在树枝分岔。

10.6 求芽 $g(x, \lambda) = x^2 - \lambda^2$ 的普适开折

10.7 求芽 $g(x, \lambda) = x^2 + \lambda^3$ 的普适开折

10.8 求芽 $g(x, \lambda) = x^3 - \lambda$ 的普适开折

第十一章 计算机的应用和 模型实验

前面各章介绍的理论分析方法,无论对周期解或是周期分岔解,都只能对低维系统有效,这些理论结果虽可给人们以规律性的认识,但由于工程问题往往都是高维的、复杂的,因而理论方法在许多情况下,都不能直接解决工程非线性动力学问题;另外,在低维问题中由于计算高阶精确解,或高阶退化解的复杂性极高,往往给理论分析造成极大的困难;再之,理论方法的正确性也需实践验证,等等。本章介绍的计算机数值计算、计算机代数语言方法以及模型实验方法等,不但可解决前面提出的问题,而且也发现了新的非线性动力学现象提供了重要的手段。

§ 11.1 数值解法

11.1.1 常微分方程的数值解法

1. Runge-Kutta 法

Runge-Kutta 法是最为常见的微分方程积分方法,对于常微分方程 $y' = f(x, y)$, 其通用格式可以写为

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^m \alpha_i K_i$$

$$K_i = f\left(x_k + \beta_i h, y_k + h \sum_{j=1}^{i-1} \eta_{ij} K_j\right), i = 1, 2, \dots, m$$

通过选取不同的 $m, \alpha_i, \beta_i, \eta_{ij}$ 参数组值,得到具体的 Runge-Kutta 积分形式。如当取 $m=4$ 时的一种常用的 4 阶形式为

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = f(x_k, y_k)$$

$$K_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{1}{2} h K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{1}{2} h K_2\right)$$

$$K_1 = f(x_k - h, y_k + hK_3)$$

目前流行的 Matlab 计算软件内嵌的 ODE 型积分函数(包括 ODE23, ODE45 等)即是基于 Runge-Kutta 形式的。

2. 线性多步法

线性多步法的一般格式为

$$y_{k+1} = - \sum_{i=1}^m \alpha_i y_{k+1-i} + h \sum_{i=1}^m \beta_i f(x_{k+1-i}, y_{k+1-i}) + h\beta_0 f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

设定 $m, \alpha_i, \beta_i, \beta_0$ 的相应参数值后, 得到不同的计算格式。如取 $m=2$,

$\beta_0 = \alpha_2 = 0, \alpha_1 = -1, \beta_1 = \frac{3}{2}, \beta_2 = -\frac{1}{2}$ 时, 得到一种外推公式

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [3f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})]$$

比较而言, 线性多步法充分利用了已经计算得到的 y_{k+1-i} 和相应的 $f(x_{k+1-i}, y_{k+1-i})$ 等值, 在计算 $f(x_i, y_i)$ 比较耗时的情况下更能显示其优越性。

11.1.2 含参动力学方程组的分岔数值解法

考虑含参动力系统 $F(x, \alpha) = 0$, 其中 $x, F \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \mathbf{R}$ 。若 $D_x F(x, \alpha_0)$ 可逆, 则根据隐函数定理有,

$$x'(\alpha) = -[D_x F(x, \alpha)]^{-1} D_\alpha F(x, \alpha) \quad (x(0) = x_0) \quad (11.1.1)$$

通过对 (11.1.1) 的数值积分, 跟踪动力学方程的解曲线。但若 $\alpha = \alpha_0$ 时, $D_x F(x, \alpha_0)$ 不可逆, 普通的积分方法无法正常运行, 可以通过伪弧长算法引入解曲线上的弧长参数 s 来消除或削弱此时动力系统的奇异性。式 (11.1.1) 的分岔计算主要涉及分岔点的定位与分岔分支的数量和方向。关于分岔点的定位, 一般通过预先定义的测试函数来判定在选定参数区间内是否发生了分岔; 而分岔分支的定向, 可利用原动力学方程衍生的代数分岔方程来求解。

目前, 对于分岔计算已有比较成熟的软件包, 如 Linux 下的 AUTO 等, 而且国外开始出现了在 Matlab 下实现分岔计算的工具箱。

1. 伪弧长算法

令 $x'(\alpha) = f(x, \alpha)$, $x, f \in \mathbf{R}^n, x(0) = x_0$ 。设 s 为沿积分曲线的弧长参数, 且 $\alpha = \alpha(s), x = x(s)$, 则由 $\frac{dx}{ds} \frac{ds}{d\alpha} = f(x, \alpha)$ 推得

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 \left[\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2 \right] = 1 + \sum_{i=1}^n f_i^2(x, \alpha)$$

进一步限定弧长变量 s , 使得 $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2 = 1$, 则有

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^n f_i^2(x, \alpha) \quad (11.1.2)$$

令 $y = (x, \alpha)$, 并令 $f_{n+1}(x, \alpha) = 1$, 则式(11.1.2)可写为

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2(x, \alpha)} \quad (11.1.3)$$

故综上所述可得到

$$\frac{dy}{ds} = g(y), y, g \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (11.1.4)$$

其中

$$g_i(y) = \frac{f_i(x, \alpha)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2(x, \alpha)}}, y(0) = y_0 = (x_0, \alpha_0)$$

这样, 方程的向量场发生了转变 $[f(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \rightarrow g(y) \in \mathbb{R}^{n+1}]$, 从而使得原动力学方程在 $\alpha = \alpha_0$ 的奇异性得以消除或减弱, 积分计算得以延续。转化后的动力学方程为

$$G(y) = 0, y \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (11.1.5)$$

2. 分岔点的定位

定义测试函数 V , 如对于简单静态分岔可定义 $V = \det D_x F(x, \alpha)$, 使得在所有奇点处有 $V = 0$; 而当在解曲线上相邻 a, b 两点间存在 $V(a)V(b) < 0$ 时, 说明 a, b 间发生了变号, 则可断定该两点间存在分岔点, 进一步通过二分法将分岔点在一定精度上近似的定位。

3. 分岔分支的定向

对于式(11.1.5), 在分岔点 y_0 处, 设 $\dim N[Df(y_0)] = m, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 为 $N[Df(y_0)]$ 上的线性无关向量组, 则 $\dim N[Df(y_0)]^T = m - 1$ 。设 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m-1}$ 为 $N[Df(y_0)]^T$ 的线性无关向量组, 则分岔点附近的 $L-S$ 方程为

$$D(\xi) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m-1})^T G\left(y_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i \eta_i\right) = 0$$

其中 $D: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$, 且 $D(0) = 0$ 。通过单纯形法得到 ξ 的近似解后, 则 y_0 处分岔方向可表示为 $y = \sum_{i=1}^m \xi_i \eta_i$ 。依次选取各个方向, 继续解曲线的追踪, 直到得到所需的所有分岔解曲线。

4. AUTO

AUTO 是由加拿大 Concordia 大学的 Eusebius J. Doedel 教授等人利用 Fortran 语言开发完成的 Unix 下的自由计算机软件(源代码形式发行),其目的主要是用于计算含参动力学系统的各类分岔问题,目前所能见到的主要是 AUTO94 和 AUTO97 版本。AUTO 的主要功能建立在其对映射和常微分方程的分岔分析上,同时也可以针对抛物线型偏微分方程做一些静态分岔和波动计算。

对于映射(包括离散动力学方程),AUTO 有以下功能:

- (1) 计算分岔解,定位分岔点,并计算分岔分支。
- (2) 定位双参数霍普夫分岔点。
- (3) 定位双参数极限集。
- (4) 将沿周期解各分支得到的积分目标函数的极值扩展到多参数情况。对于常微分方程,AUTO 可以有如下功能:
- (5) 计算分岔解的各个分支,并给出 Floquet 乘数,判断是否稳定周期解或不稳定周期解。
- (6) 沿着分岔分支定位极限集、分岔点、倍周期分岔等。
- (7) 计算双参数倍周期分岔和极限集。
- (8) 沿着同宿轨道利用 HOMCONT 算子寻找并续延各种余维—2 分岔。
- (9) 将沿分岔周期解各分支得到的积分目标函数的极值扩展到多参数情况。
- (10) 计算非线性边值问题。

§ 11.2 计算机代数语言解法

人们都知道,非线性问题的解析分析,包括非线性振动问题的近似解的求解,一方面比较复杂,另一方面又有较强的规律、计算步骤比较程序化。为了解决这方面的问题,人们发展了多种计算机辅助推导工具,并逐步形成所谓的“计算机代数语言”。较早的有 REDUCE,MACYMA,等等,以及现在比较流行的 MAPLE、MATHEMATICA 等。这些工具的普及,得益于 WINDOWS 操作系统优良的显示界面,使得计算结果能以非常接近与人们书写习惯的形式表示。

下面给出用 MAPLE 语言编写的几个简单的例子,来说明功能强大计算机代数语言在非线形振动问题分析中的应用。当然,下面的程序不一定是简的,读者可以进一步改进。

11.2.1 平均法

用平均法求解广义范德波尔—达芬方程的近似振动解:

$$\ddot{y} + 4y = \epsilon((1 - y^2)\dot{y} + y^4 + y^3) \quad (11.2.1)$$

程序如下:

1. 非线性方程的定义

```
>restart; 清内存
>omega:=2: 系统角频率
>fy:=y(t)^3+(1-y(t)^2)*diff(y(t),t)+y(t)^5:同阶非线性项
>ODE:=diff(y(t),t$2)+omega^2*y(t)=epsilon*fy;
ODE:=-[ $\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(t)$ ]+4y(t)= $\epsilon\left[y(t)^3+(1-y(t)^2)\left(\frac{\partial}{\partial t}y(t)\right)+y(t)^5\right]$ 
```

2. 平均法对解的假设

```
>ss:=diff(y(t),t)=-a*omega*sin(psi),y(t)=a*cos(psi);
ss:=- $\frac{\partial}{\partial t}y(t)=-2a\sin(\psi), y(t)=a\cos(\psi)$ 
```

```
>fffy:=combine(subs(ss,fy),trig);
```

```
fffy:=- $\frac{1}{4}a^4\cos(3\psi)+\frac{3}{4}a^3\cos(\psi)-2a\sin(\psi)+\frac{1}{2}a^3\sin(3\psi)+$ 
 $\frac{1}{2}a^4\sin(\psi)+\frac{1}{16}a^5\cos(5\psi)+\frac{5}{16}a^5\cos(3\psi)+\frac{5}{8}a^5\cos(\psi)$ 
```

3. 求得平均方程

```
>diff(a(t),t)=-epsilon/omega*simplify(int(fffy*sin(psi),
psi=0..2*Pi)/(2*Pi));
>diff(psi(t),t)=omega-epsilon/omega/a*simplify(int(fffy*cos(psi),
psi=0..2*Pi)/(2*Pi));
```

$$\frac{\partial}{\partial t}a(t)=-\frac{1}{8}\epsilon a(a^2-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)=2-\frac{1}{32}\epsilon a^4(5a^2+6)$$

11.2.2 多尺度法

利用多尺度法求范德波尔方程 $\ddot{y} - \epsilon(1 - y^2)\dot{y} + y = 0$ 的近似解, 程序及计算结果如下:

1. 符号缩略约定

```
>restart;
```

```

>e__order:=1;

$$e\_order:=1$$

># define abbrev.;
>alias(epsilon=e,seq(y[i]=eta[i](seq(t[j],j=1..e__order+1)).i=0..2));
>macro(t1=t[1],t2=t[2],t3=t[3]);
># define 'epsilon' as a constant;
> e:=subs(vars=seq(u||j,j=1..e__order+1),body=e,(vars-
>body));
>ODE:=(D@@2)(y)-e*(1-y^2)*(D@@1)(y)+y=0;

$$ODE:=(D^{(2)})(y)-\epsilon(1-y^2)D(y)+y=0$$

>tmp:=subs(D=sum('e^(i-1)*D[i]','i'=1..e__order+1),ODE);
>D=sum('e^(i-1)*D[i]','i'=1..e__order+1);

$$D=D_1+\epsilon D_2$$

>y:=sum('eta[i]*e^i','i'=0..e__order);

$$y:=\eta_0+\eta_1\epsilon$$


```

2. 按 ϵ 的阶数整理方程

```

># rearrange the obtained equation
>diffeq:=simplify(collect(tmp,e),{e^(e__order+1)=0});
>for i from 0 to e__order do
>coeff(lhs(diffeq),e,i);odee[i]:=select(has,%,eta[i])\
>=-1*remove(has,%,eta[i]);
>od;
>print(" export equations ");

$$\text{" export equations "}$$

>for i from 0 to e__order do 以习惯的形式输出方程
>epsilon^i;ode[i]:=\
>convert(lhs(odee[i])(seq(t[j],j=1..e__order+1)).diff)\
>=convert(rhs(odee[i])(seq(t[j],j=1..e__order+1)).diff);
>od;

$$ode_0:=\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}y_0\right)+y_0=0$$


$$ode_1:=\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}y_1\right)+y_1=-2\left(\frac{\partial^2}{\partial t_2\partial t_1}y_0\right)+\left(\frac{\partial}{\partial t_1}y_0\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t_1}y_0\right)y_0^2$$

># #

```

```
> eta[0] := (t1, t2) -> A(t2) * sin(t1 + B(t2)); 'y[0]' = convert(eta[0](t1, t2), diff 一次近似设解
>);
```

$$y_0 = A(t_2) \sin(t_1 + B(t_2))$$

```
> ode[1] := collect(combine((ode[1]), trig),
> [sin(t1 + B(t2)), cos(t1 + B(t2))]);
```

$$\begin{aligned} ode_1 := & \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} y_1 \right) + y_1 = 2A(t_2) \sin(t_1 + B(t_2)) \left(\frac{\partial}{\partial t_2} B(t_2) \right) + \\ & \left(-2 \left(\frac{\partial}{\partial t_2} A(t_2) \right) + A(t_2) - \frac{1}{4} A(t_2)^3 \right) \cos(t_1 + B(t_2)) + \\ & \frac{1}{4} A(t_2)^3 \cos(3t_1 + 3B(t_2)) \end{aligned}$$

3. 求平均方程

```
> rests := [
>   coeff(rhs(ode[1]), sin(t1 + B(t2)))/2/A(t2) = 0,
>   -coeff(rhs(ode[1]), cos(t1 + B(t2)))/2 = 0]; 消除永年项的条件
> rests := rests[1], select(has, lhs(rests[2]), diff(A(t2), t2))
>   = -1 * remove(has 整理成标准形式
> , lhs(rests[2]), diff(A(t2), t2));
```

$$rests := \frac{\partial}{\partial t_2} B(t_2) = 0, \frac{\partial}{\partial t_2} A(t_2) = \frac{1}{2} A(t_2) - \frac{1}{8} A(t_2)^3$$

4. 求一次近似瞬态解

```
> AS := subs(__C1 = c[1], [dsolve(rests[2], A(t2))]);
> BB := subs(__C1 = c[2], dsolve(rests[1], B(t2)));
> for i to 2 do
> s[i] := subs(AS[i], BB, t1 = t, t2 = t, y[0]); s[i] {d := diff(% , t);
od;
> # sbc1 := c[1] = .02, c[2] = -Pi/2;
> sbc := c[1] = 0.2, c[2] = 0.3;
> sbc := c1 = .2, c2 = .3
> plot([subs(sbc, [s1, s1d])[], t = 0..20], [subs(sbc, [s2, s2d])[],
t = 0..20]);
> p1 := % ;
> # plot(subs(AS[1], BB, t1 = t, t2 = t, c[1] = 0.2, c[2] = 0.5, y[0]),
t = 0..100);
```

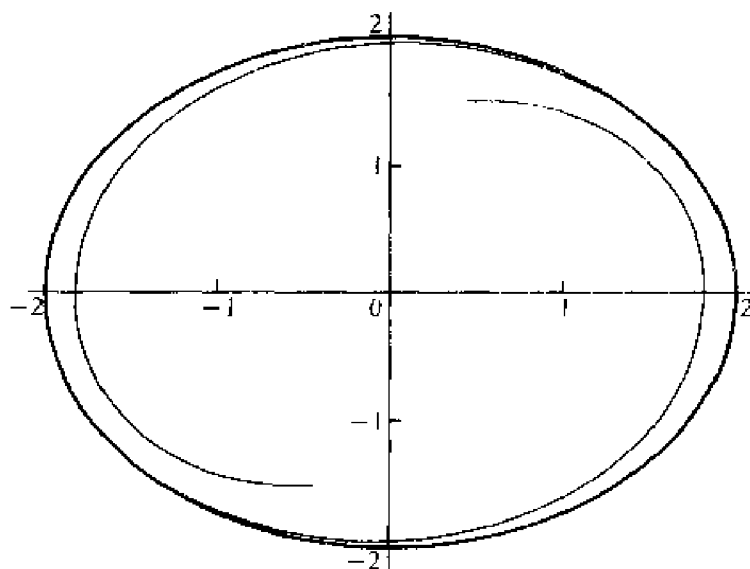


图 11.1

作为一次近似解,通常到此为止,即 $y=y_1$ 。下面的计算表明:若以 $y=-y_1+y_1$ 作为对一次近似解的修正,可在很大程度上提高近似解的精度。并且,对稳态解来说, y_2 求解并不难。

> #

5. 修正的一次近似稳态解

> # static solution of 1 order and its modification

> subs (rests,A(t2)=2,BB,ode[1]);

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} y_1 \right) + y_1 = 2 \cos(3t_1 + 3c_2)$$

> ylt:= pdsolve(subs(rests,A(t2)=2,BB,ode[1]),y[1]);

> ylt:= remove(has,rhs(ylt),{sin(t1),cos(t1),cos(-t[1]+
3*c[2]),cos(t[1]+
3*c[2])}); #

> yst:= subs(rests,A(t2)=-2,BB,t1=t,y[0]+ylt); 'y' = %;

$$y = -2 \sin(t + c_2) - \frac{1}{4} \cos(3t + 3c_2)$$

>

plot([subs(sbc,[yst,diff(yst,t)])[],t=0..20],color=blue,
e,\

> linestyle=2,thickness=2); #

> plots[display](p1,%)

需要特别指出的是:尽管可以提供很大的帮助,不论那种计算机代数

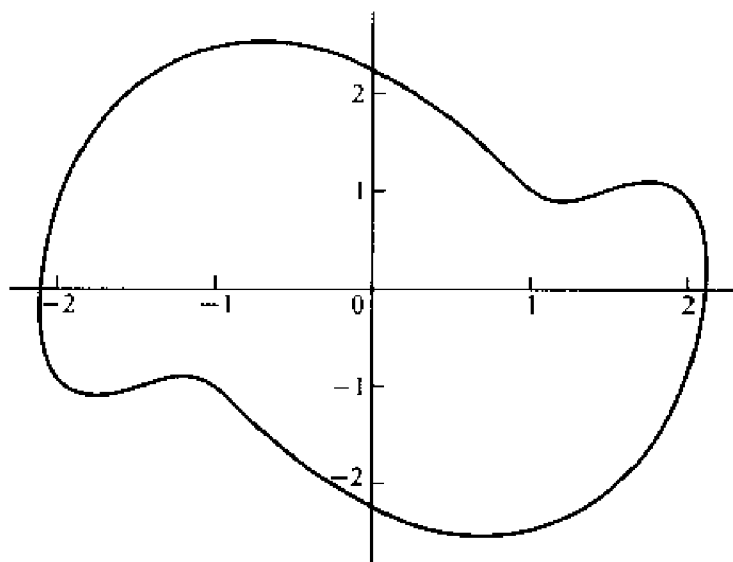


图 11.2

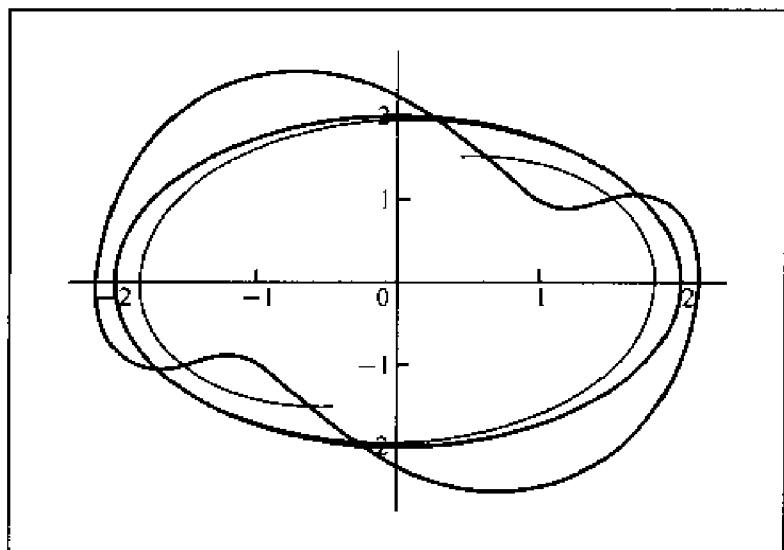


图 11.3

语言,都不是万能的。如果不注意所得结论的适用范围,完全可能得出错误的结果。在利用计算机进行辅助推导时,一定要对此保持适度的警觉。

用近似方法分析非线性振动问题时,会得到响应方程。该方程是分析非线性振动系统分岔解的基本方程,又称分岔方程。需计算分岔方程的转迁集和分岔图,以便完成非线性振动问题的分岔分析。如果所求得的分岔方程不是普适开折,则需对之进行识别,并进行普适开折,然后再求转迁集和分岔图。下面以叉形分岔为例说明 MAPLE 软件的应用。

```
>restart;
```

```
>g:=x^3-lambda*x+alpha[1]*x^2+alpha[2];
```

$$g:=x^3-\lambda x+\alpha_1 x^2+\alpha_2$$

```
>gx:=diff(g,x);gl:=diff(g,lambda);gxx:=diff(g,x$2);
```

$$gx:=3x^2-\lambda+2a_1x$$

$$gl:=-x$$

$$gxx:=6x+2a_1$$

(1) 分岔集确定

```
>sbx:=solve(gl,x);
```

$$sbx:=0$$

```
>Bf:=subs(x=sbx,[g,gx]);
```

$$Bf:=[a_2,-\lambda]$$

```
>B:=Bf[1]=0;
```

$$B:=a_2=0$$

(2) 滞后集确定

```
>shx:=solve(gxx,x);
```

```
>Bh:=subs(x=shx,[g,gx]);
```

$$shx:=-\frac{1}{3}a_1$$

$$Bh:=\left(\frac{2}{27}a_1^3+\frac{1}{3}\lambda a_1+a_2,-\frac{1}{3}a_1^2-\lambda\right)$$

```
>ss:=solve({Bh[]});
```

$$ss:=\left\{\lambda=-\frac{1}{3}a_1^2,a_2=\frac{1}{27}a_1^3,a_1=a_1\right\}$$

```
>H:=alpha[2]-subs(ss,alpha[2])=0;
```

$$H:=a_2-\frac{1}{27}a_1^3=0$$

(3) 转迁集图形表示

```
>with(plots,display,textplot);
```

```
> pT:=textplot([[ -1.00, 0.15," 1 "],[ -1.60,-0.05,
" 2 "],[1.00,-0.15," 3 "],[1.60,0.05," 4 "],[1.45,.1129120370,
" 5 "],[ -1.38,0.00," 6 "],[ -1.45,-.112912 0370," 7 "],[1.38,
0.00," 8 "],[1.71, 0.19," H "],[ -1.76,0.00," B "]],font =
[TIMES,ROMAN,15]);
```

```
>pH:=plot(solve(H,alpha[2]),alpha[1]=-2..2,thickness=2,
linestyle=2,color=black);
```

```
>pB:=plot([alpha[1],0,alpha[1]=-2..2],thickness=2,color=
black);
```

```
>plots[display](pH, pB, pT, tickmarks = [1, 1], labels = [a, a],
labelfont = [SYMBOL, 15]);
```

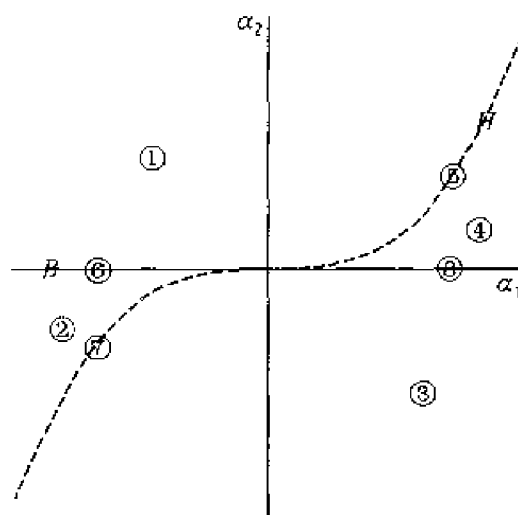


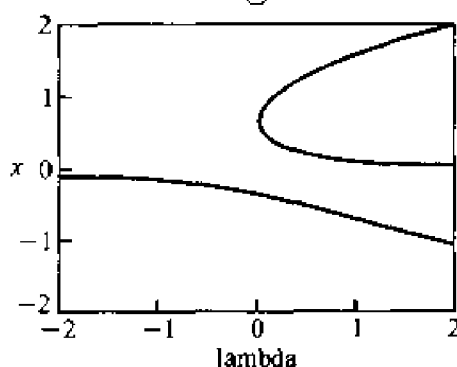
图 11.4

(4) 计算保持性分岔图

```
>for ipnt from 1 to 4 do
>sba:=alpha[1]=op(1,op(ipnt,pT))[1],alpha[2]=op(1,op(ipnt,
pT))[2];
>plots[implicitplot](subs(sba,g)=0,lambda=-2..2,x=-2..2,
view=[-2..2,-2..2],numpoints=1000,title=op(2,op(ipnt,
pT)),axes=boxed,tickmarks=[3,3]);od;
>
```

$$sba:=\alpha_1=-1.00, \alpha_2=.15$$

①



$$sba:=\alpha_1=-1.60, \alpha_2=-.05$$

②

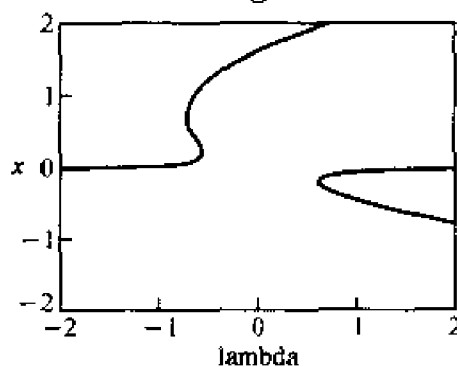


图 11.5

$$sba:=\alpha_1=1.00, \alpha_2=-.15$$

$$sba:=\alpha_1=1.60, \alpha_2=.05$$

(5) 计算非保持性分岔图

```
>for ipnt from 5 to 8 do
```

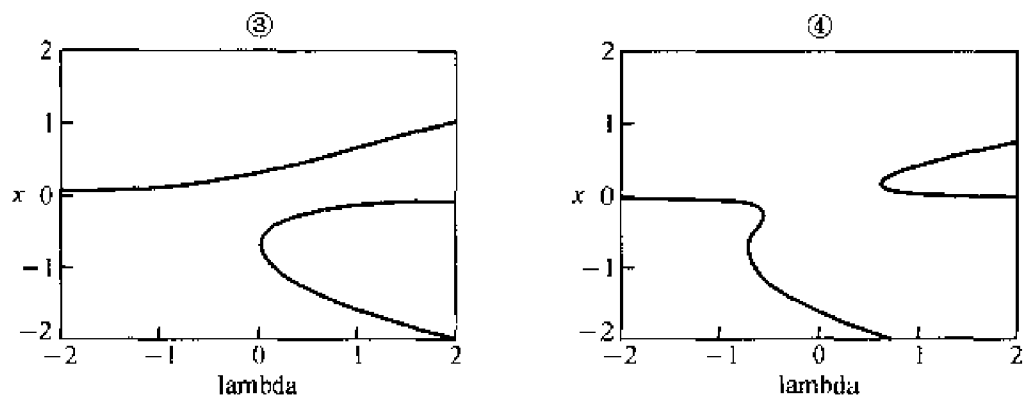


图 11.6

```
>sba:=alpha[1]=op(1,op(ipnt,pT))[1],alpha[2]=op(1,op(ipnt,
pT))[2];
```

```
>plots[implicitplot](subs(sba,g)=0,lambda=-2..2,
x=-2..2,view=[-2..2,-2..2],numpoints=8000,title=op(2,
op(ipnt,pT)),axes=boxed,tickmarks=[3.3]);od;
```

$sba:=\alpha_1=1.45, \alpha_2=.1129120370$

$sba:=\alpha_1=-1.38, \alpha_2=0.$

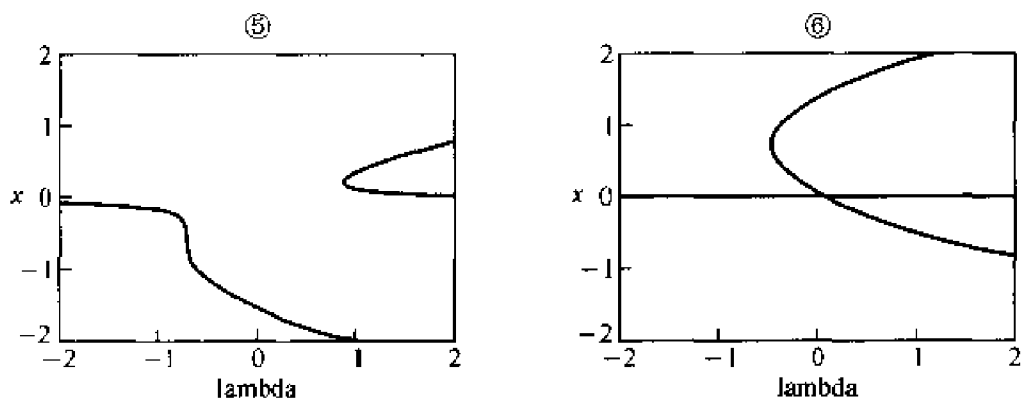


图 11.7

$sba:=\alpha_1=-1.45, \alpha_2=-.1129120370$

$sba:=\alpha_1=1.38, \alpha_2=0.$

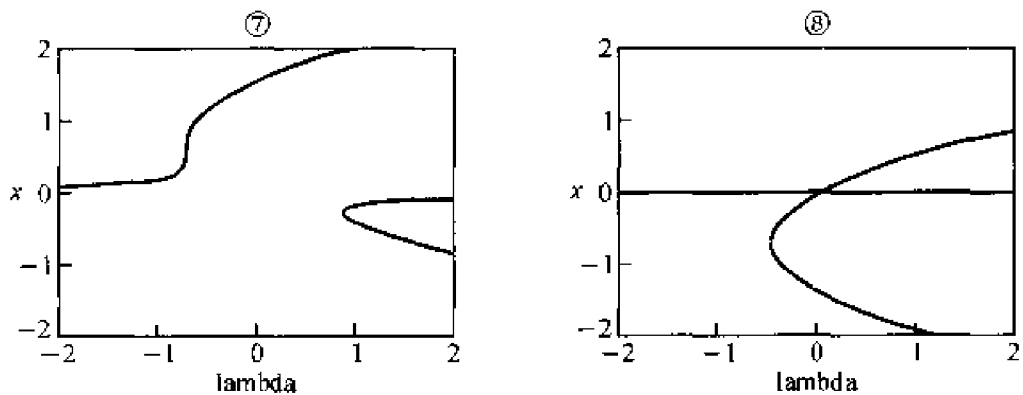


图 11.8

§ 11.3 模拟计算机的应用

正如上节所指出的,在解振动问题时数字计算机是十分有效的工具,但对一组微分方程在求解时利用模拟计算机和混合型计算机更为方便。

和数字计算机相比,模拟计算机的优点是具有极高的效率,在模拟计算机上可用实际时间尺度解具有快变参数的问题,但模拟计算机的计算精度较差;并且通用性小。混合型计算机在某种程度上消除了数字机和模拟机的缺点,并且保留了它们各自的优点。

在图 11.9 上给了求线性微分方程周期解的结构图之一。

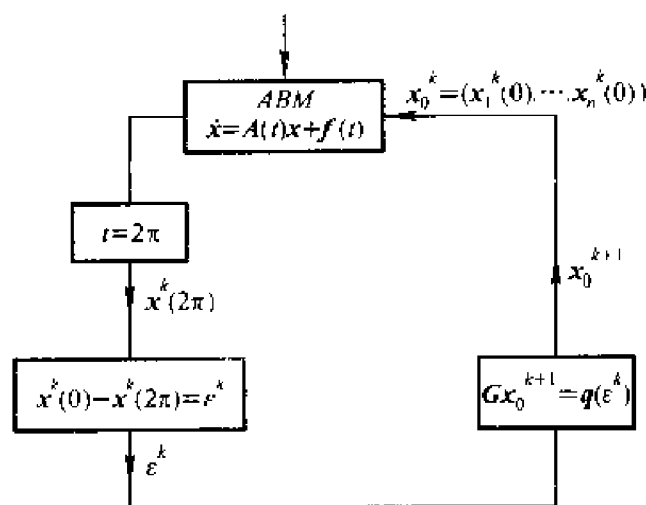


图 11.9

线性微分方程组为

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (11.3.1)$$

其中 $A(t)$ 和 $f(t)$ 为以 2π 为周期的周期函数, (A 为 $n \times n$ 矩阵, f 为 n 维向量)。

自调是解题的第一步,在模拟机上对方程组(11.3.1)以解 n 个柯西问题的方法实现自调计算。由此可以确定矩阵 G 的列。然后在模拟机上给起始条件 $x(0) = x_0^0$, 解柯西问题。根据所得到的误差 $\epsilon^0 = \|x^0(0) - x^0(2\pi)\|$, 在提高起始值精度的单元 ($Gx_0^{k+1} = g(\epsilon^k)$) 中, 给起始向量一个修正, 得到一个新的起始值向量 x_0^1 , 如此循环, 一直重复到误差 $\epsilon^N = \|x^N(0) - x^N(2\pi)\|$ 小于某事先规定的值为止, 其中 $k = 1, 2, \dots, N$ 。利用模拟计算机解振动问题的具体步骤可参考[22]。

§ 11.4 非线性振动的实验研究问题

上面,我们介绍了分析各类非线性振动系统的近似理论方法,这些方法所以能被广泛地采用,正是因为它们已被实践证明是有效的。通过实验(实验包括前面介绍的数值实验和本节介绍的模型实验)来验证和发展非线性振动理论可能是惟一正确的途径。另外实验研究本身也是解决非线性振动问题的重要方法之一。特别是对那些到目前为止理论方法尚不能解决的复杂振动系统的研究,就更需借助于实验研究的方法来解决。

11.4.1 实验研究概述

机械系统的非线性振动实验,可分为模型实验和实物实验。模型实验又可分为电模型和原理相似的机械模型实验两种。在模型上可研究各种不同结构参数,各种不同起始条件和各种不同的干扰力等因素对振动规律的影响。现场实验(或实物实验)则可研究工程结构的实际振动规律,振动三要素的合理调整方法。本节只介绍机械模型和实物的非线性周期振动的实验研究方法,主要包括以下诸方面,根据实验研究的目的和要求,需进行生产现场的调研,以了解系统的结构原理,运行中存在的振动故障问题;实测系统的各种参数,在初步理论分析的基础上进行模型实验研究,并需准备现场实验用的拖动动力和选择测试仪器,根据需要详细拟定实验内容,如实测系统的阻尼系数,各种不同结构参数下的共振曲线,非理想系统的特性等,选择测试系统和测量方法,根据实验的环境条件、被测振动参数的量级等因素,选择适用的测试仪器,并应详细拟定测量方法,包括传感器、放大器、数据采集装置、显示记录和数据处理及拖动设备的操作方法等,在以上各项工作的基础上,需进行试车,此时需注意排除干扰,然后即可按要求进行实测。在实测过程中,特别是出现干扰信号时,要根据观察作出分析和判断,以便能对振动的主要规律获得某些感性认识,并可准确地排除干扰。

实验数据的整理和分析是实验研究工作最重要的环节之一。一般来说,数据的整理可分两步,首先是在实测过程中做初步分析,以便发现问题及时补测,以免测试数据不全,然后是数据整理,分析,制定表格曲线等,总结出某些规律。为说明实验研究的方法,下面介绍非线性共振筛实验研究的过程和某些结果。

11.4.2 大型双质量非线性共振筛振动实验研究

大型双质量非线性共振筛具有不少优点,在工业生产中已得到广泛的应用[17],[21],[36],[38],[39],在机械系统中它有一定的代表性。该系统包括两个筛箱、分段弹簧、物料和电动机。由于共振筛本身的面积很大,元件很多,特别是某些弹性元件具有非线性特性,所以它是一个很复杂的振动系统。另外,对这样复杂的系统进行理论分析时,需要了解真实的振动现象和各种参数的作用,以便建立合理的力学模型,找到有效的分析方法。为此,进行了模型和现场实验研究。通过实验弄清阻尼系数,橡胶弹性元件动刚度系数的实际数值,结构参数对振动特性的影响,质心连线位置偏差,支承条件不对称偏差对振动规律的影响,物料的影响,与有限功率动力源的相互影响等问题。

1. 现场实验前的准备工作

首先需要进行现场调查,了解共振筛的结构,主要技术指标及运行中存在的振动故障问题,并制定相应的振动测试方案。其次,为了能初步掌握一些规律,需建立原理相似的模型实验台,对系统的基本参数结合现场条件进行测量,在初步理论分析的基础上,验证一些振动规律。探索低频率(4~20 Hz)和大振幅(0~15 mm)振动系统的测试方法,以减少现场测试的工作量。第三,现场测试用的调速装置及仪器校准等准备工作。

大型非线性共振筛结构简图如图 11.10 所示。

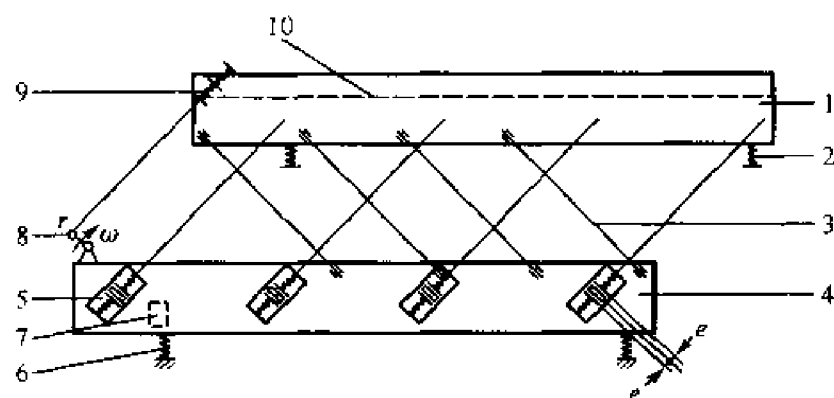


图 11.10

1 上筛箱 2、6 支承弹簧 3 导向弹簧 4 下筛箱 5 主振
弹簧 7 横梁 8 连杆式驱动装置 9 驱动弹簧 10 筛面

上、下筛箱 1、4 作为两个质量,同弹性元件 2、8、5、6、9 构成双质量振动系统。偏心连杆式驱动装置使此系统以一定的频率和振幅沿 45°方向振动,使物料沿筛面 10 跳跃前进。

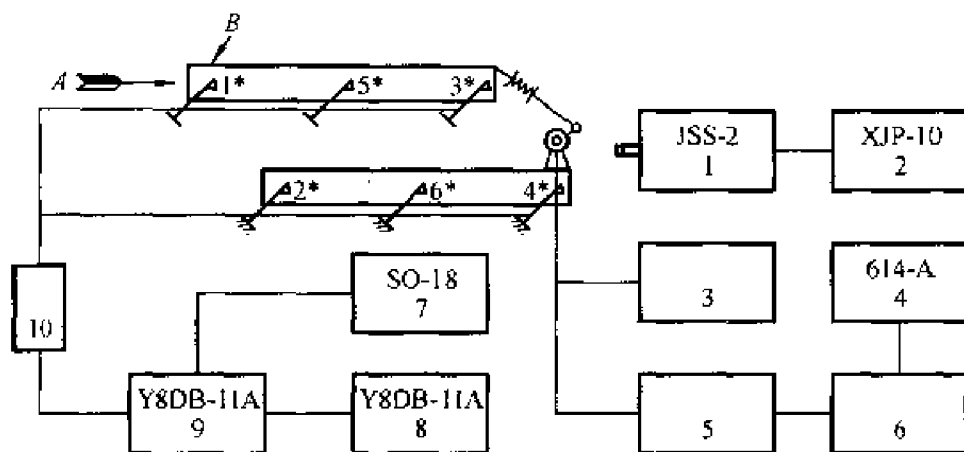


图 11.11

1—上筛箱 2、6—支承弹簧 3—导向弹簧 4—下筛箱 5—主振弹簧
7—横梁 8—连杆式驱动装置 9—驱动弹簧 10—筛面

2. 测试系统和测量方法

测点布置和测试系统如图主振方向振幅测量共六点,用 $1^* \sim 6^*$ 表示。垂直、水平振幅测量在上、下筛箱出料端各有一个测点。横向水平振幅测量在质心平面内。相应各测点用应变式大位移传感器测试系统,压电式传感器测试系统和磁电式传感器测试系统。

测量方法:实验前首先测算筛子的质量、质心、各弹性元件的静刚度、筛子对其质心的转动惯量等参数。

(1) 参数测量

组合动刚度测量:通过测量具有不同弹性元件振动系统的固有频率,计算出相应元件的动刚度系数。

阻尼系数测量:使筛体作衰减振动,根据录波计算衰减指数。

回转阻尼系数测量:将连杆机构拆掉,使电机只带动传动轴。改变电机转速,测出电机的电压及电流,从而计算出阻尼力矩。

(2) 共振曲线测量

对每组参数,均通过改变直流电机的转速以改变共振筛的工作点,逐一测出筛箱的振幅、频率等参数。实验分别按升速和降速过程进行。

(3) “实际平移振动条件”实验

根据对生产用共振筛的质心连线偏差的计算,考虑到支承弹簧不对称数值后,在下筛箱排料端加装 240 kg 配重,记录配重前、后的振动特性。

(4) 物料影响试验

对选定的工作转速,当工作稳定后开始加料,待物料均匀铺满整个筛面时,一边继续均匀加料,一边进行振动测量,并记录频率、电流和电压。

(5) 功率曲线测量

与共振曲线测量方法同,并记录不同频率时供给电动机的电流和电压。

3. 测试结果及分析

(1) 组合动刚度系数

将上筛箱固定,传动轴也固定不转,这样构成以下筛箱为质量、以连杆簧、剪切簧、导向簧、下筛箱支承簧等并联为弹性元件的单自由度系统,测出沿 45° 方向的共振频率 f_1 ,计算其组合动刚度 c_1 ,

$$c_1 = m_2 (2\pi f_1)^2 \quad (11.4.1)$$

拆掉连杆,则连杆簧不起作用,测出其共振频率为 f_2 ,计算出剪切簧、导向簧,下筛箱支承簧的组合动刚度 c_2 。

再拆掉剪切簧,测出共振频率 f_3 ,计算导向簧、下筛箱支承簧的组合动刚度 c_3 。

再拆掉导向簧,分别求出其垂直方向和水平方向的共振频率 $f_{4\perp}, f_{4\parallel}$,计算支承簧沿 α 方向的动刚度系数

$$c_4 = c_{4\parallel} \cos^2 \alpha + c_{4\perp} \sin^2 \alpha \quad (11.4.2)$$

连杆簧、剪切簧、导向簧、支承簧并联时下筛箱自由振动衰减波形如图 11.12 示。测量与计算结果见表 11.1。

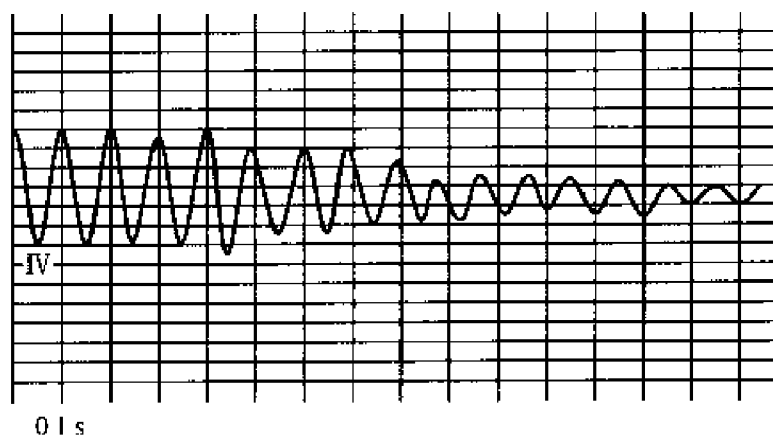


图 11.12

(2) 阻尼系数

使下筛箱作自由振动,录波如图 11.12,计算并根据经验分配阻尼系数,结果如下

表 11.1

试验条件	动刚度系数 'kN/m	测量频率 /Hz
1	$c_1=2783$	$f_1=10$
2	$c_2=2430$	$f_2=9.4$
3	$c_3=870$	$f_3=5.9$
4	$c_{1\text{非}}=864$	$f_{1\text{非}}=5.88$
	$c_{1\text{平}}=188$	$f_{1\text{平}}=2.74$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= 2m_2 \ln \frac{a_1}{a_i} \frac{1}{T(i-1)} \\ \beta_1 &= \beta_{\lambda} + \beta_{\text{非}} + \beta_{\text{剪}} + \beta_{\text{连}} \end{aligned} \right\} \quad (11.4.3)$$

对实验筛：

$\beta_1=1.73, \beta_{\lambda}=0.62, \beta_{\text{非}}=0.16, \beta_{\text{剪}}=0.53, \beta_{\text{连}}=0.21$

这样分配阻尼系数引起的误差

$$\frac{\beta_{\text{测}}-\beta_{\text{理}}}{\beta_{\text{测}}}=12\%$$

(3) 回转阻尼系数

回转阻尼功率及力矩实验数据见表 11.2。阻尼力矩曲线见图11.13。

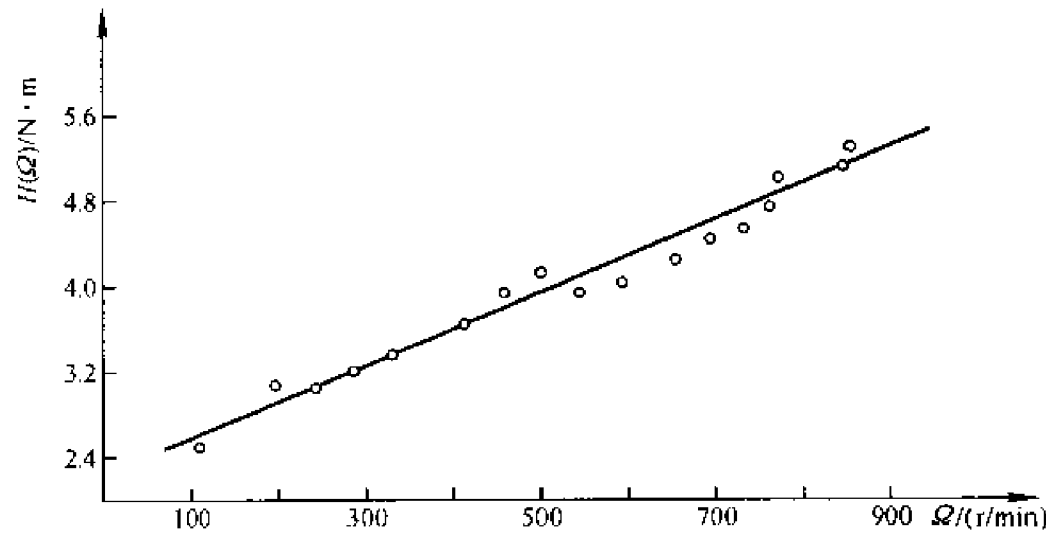


图 11.13

从图 11.13 知,阻尼力矩曲线的斜率为 $\frac{11}{\pi}$,故阻尼力矩为

$$H(\Omega)=\frac{11}{\pi}\Omega+21.5 \tag{11.4.4}$$

表 11.2

Ω' (r/min)	V/V	I/A	$N=IV/W$	$M=\frac{10.2}{\omega}\frac{N}{\text{N}\cdot\text{m}}$
111	24	1.2	28.8	25.3
195	42	1.5	63	31.5
241	50.5	1.56	78.78	31.8
286	59.5	1.6	95.2	32.4
330	69	1.7	117.3	34.6
408	85	1.86	158.1	37.7
457	95.5	2.0	191	40.7
500	104	2.1	218.4	42.5
546	112.5	2.0	225	40.1
591	122	2.04	248.88	41.0
654	135	2.16	291.6	43.4
694	143	2.24	320.32	44.9
728	150	2.3	345	46.1
759	157	2.42	379.94	48.7
769	161	2.5	402.5	51.0
800	166	2.56	424.96	51.7
819	170	2.56	435.2	51.7
831	172	2.56	440.32	51.6
844	174	2.62	455.88	52.6
851	176	2.7	475.2	54.4
859	178	2.7	480.6	54.5

(4) 共振曲线 三平方米双质量模型共振筛实验参数见表 11.3。

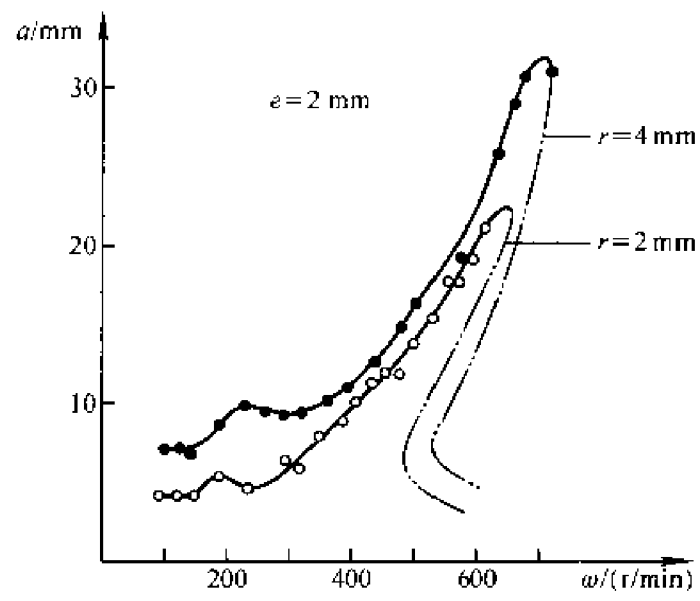


图 11.14

表 11.3

编号	驱 动 装 置		主 振 簧	
	偏心距 r/mm	动刚度系数 c_0 /(kN/m)	间 隙 e/mm	动刚度系数 c'' /(kN/m)
1	2	353	1.5	2035
2	2	353	3.0	2035
3	4	353	1.5	2035
4	4	353	3.0	2035
5	4	353	1.5	2713
6	4	353	1.5	4069
7	4	353	1.5	4069
8	4	529	1.5	4069

将其中一组参数

$$r=0.4\text{ cm} \quad e=0.15\text{ cm}$$

$c''=2035\text{ kN/m}$ 的实测数据见表 11.2。现场生产用大型非线性共振筛实验参数：

$$r=0.4\text{ cm} \quad e=0.2\text{ cm} \quad r=0.2\text{ cm} \quad e=0.2\text{ cm}$$

$$r=0.2\text{ cm} \quad e=0.5\text{ cm} \quad c''=28929\text{ kN/m}$$

对应于这些不同参数,共振曲线测量结果和沿垂直方向和纵向水平方向共振

曲线测量结果见[42]的表 7.4~7.9。

偏心距 r 对振动特性的影响,示于图 11.15。

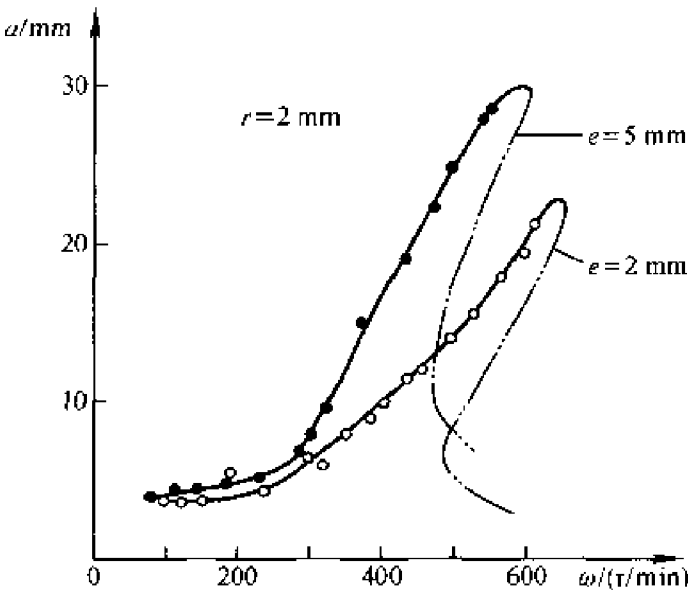


图 11.15

从图 11.15 知,虽然两个系统的间隙同为 $e=0.2$ cm,但 $r=0.2$ cm 时,系统的共振点是 620 r/min,而 $r=0.4$ cm 时,则为 680 r/min,差值达 60 r/min。显然对相同的工作频率而言,偏心距大则振幅增大、频率储备大,共振曲线斜率不变,因此工作平稳性不受影响。

表 11.4 $r=4$ mm $e=2$ mm 双值共振曲线试验结果 mm

测 点 转速/(r/min)	I与II			III与IV			V与VI		
	I	II	I+II	III	IV	III+IV	V	VI	V+VI
100	3.0	4.0	7.0	3.6	3.4	7	2.5	3.0	5.5
122	3.5	3.5	7	3.6	3.4	7	2.9	3.0	5.9
142	2.5	4.0	6.5	3.6	3.4	7	2.5	3.0	5.5
187	2.5	6.0	8.5	5.8	2.9	8.7	2.9	3.0	5.9
229	6.5	3.5	10	3.1	5.9	9	4.6	4.4	9
256	5.5	4.0	9.5	2.2	7.8	10	3.4	4.8	8.2
321	5.5	4.0	9.5	4.0	4.9	8.9	3.8	4.1	7.9
362	5.5	4.6	10.1	4.5	5.4	9.9	4.2	4.8	9
396	6.0	5.0	11	4.9	6.4	11.3	5.0	5.2	10.2
436	7.0	6.0	13	5.3	6.9	12.2	5.0	5.9	10.9

续表

测 点 转速/(r/min)	I与II			III与IV			V与VI		
	I	II	I+II	III	IV	III+IV	V	VI	V+VI
474	8.5	6.5	15	5.8	7.4	13.2	5.9	5.9	11.8
501	9.0	7.5	16.5	7.1	7.8	14.9	6.3	7.0	13.3
548	1.0	8.0	18	8.0	8.8	16.8	8.4	8.5	16.9
568	10.5	9.0	19.5	9.3	8.8	18.1	8.4	8.9	17.3
604	13.5	10.0	23.5	11.1	10.8	21.9	10.1	9.6	19.7
628	14.5	11.5	26	12.5	11.8	24.3	10.9	11.5	22.4
650	16.5	13.0	29.5	13.4	12.7	26.1	11.8	11.8	23.6
669	16.5	14.5	31	14.7	13.7	28.4	13.9	13.3	27.2
677	15.5	14.5	30	13.4	12.7	26.1	13.4	13.0	26.4
687	15.5	15.0	30.5	14.7	12.7	27.4	13.9	13.0	26.9
711	16.5	15.0	31.5	15.0	13.2	28.2	13.9	14.1	28

间隙 e 对振动特性的影响, 根据表 11.5 的数据, 示于图 11.15。

表 11.5 $r=2\text{ mm}$, $e=5\text{ mm}$, 双幅共振曲线试验结果

mm

测 点 转速/(r/min)	I与II			III与IV			V与VI		
	I	II	I+II	III	IV	III+IV	V	VI	V+VI
78	2.5	1.5	4	2.2	1.5	3.7	2.1	1.5	3.6
110	2.0	2.5	4.5	2.2	2.0	4.2	1.7	1.5	3.2
116	2.0	2.5	4.5	2.2	2.0	4.2	1.7	1.5	3.2
140	2.0	2.5	4.5	2.2	2.0	4.2	2.1	1.5	3.6
179	2.0	3.0	5	3.1	2.0	5.1	2.1	1.9	4
288	4.0	1.0	5	1.8	2.9	4.7	2.5	1.9	4.4
282	4.5	2.5	7	2.7	3.9	6.6	3.4	3.0	6.4
298	5.0	3.0	8	4.0	3.9	7.9	4.2	3.0	7.2
320	5.5	4.0	9.5	3.6	4.9	8.5	4.2	4.4	8.6
368	8.5	6.5	15	6.2	5.4	11.6	5.9	6.3	12.2
428	11.0	8.0	19	8.5	7.8	16.3	8.4	8.5	16.9

续表

测 点 转速, (r/min)	I与II			III与IV			V与VI		
	I	II	I+II	III	IV	III+IV	V	VI	V+VI
472	13.0	9.5	22.5	8.9	9.8	18.7	9.2	9.3	18.5
496	14.5	10.5	25	9.3	10.3	19.6	10.0	1.8	21.9
538	15.5	12.5	28	12.9	11.3	24.2	12.2	2.2	25.2
548	15.5	23.0	28.5	13.8	11.8	25.6	12.2	2.6	24.8
700	1.5	0.5	2	0.4	0.49	0.89	0.84	1	0.95

从图 11.15 知,在相同的工作频率下, e 大振幅增大,共振点频率降低,频率储备降低,共振曲线斜率加大,因而工作平稳性降低。 e 增加,共振点降低,即相当于减小系统弹性元件的刚度。

(5) 多自由度系统

根据以上各表的数据可以看出,双质量非线性共振筛上、下筛箱在垂直、水平和 α 方向各有自己的共振点,有整体转动和相对转动,同时还有横向振动,所以它是一个复杂的多自由度系统。也证明了非线性刚度愈大,共振曲线的斜率愈小这样已知的规律。

上、下筛箱质心连线与振动方向不平行 对振动特性的影响:三平方米共振筛质心连线不同的角度下的共振曲线(测量数据见[42]的表7.10、表7.11。测点III,IV合成相对双振幅),示于图 11.16。

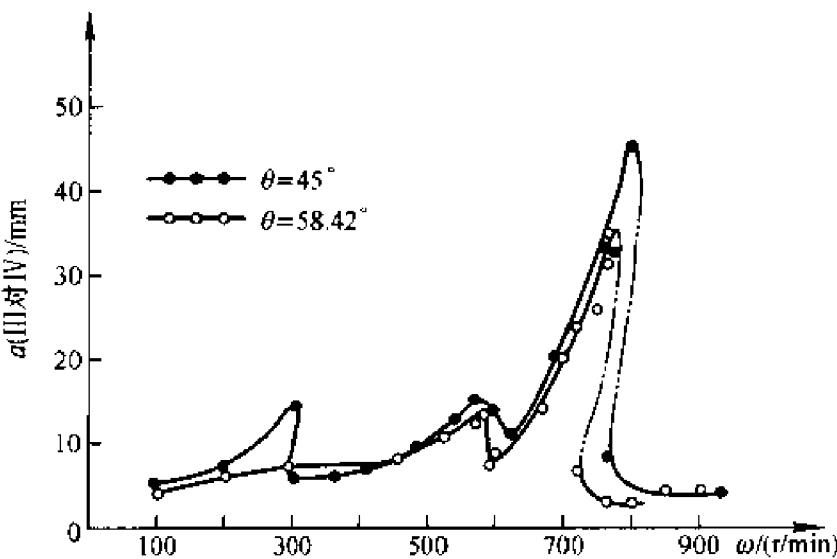


图 11.16

横向振动 在上下筛箱质心处,测量横向(即侧向)振动的振幅,数据见[42]的表 7.12,下筛箱横向共振曲线如图 11.17 所示。

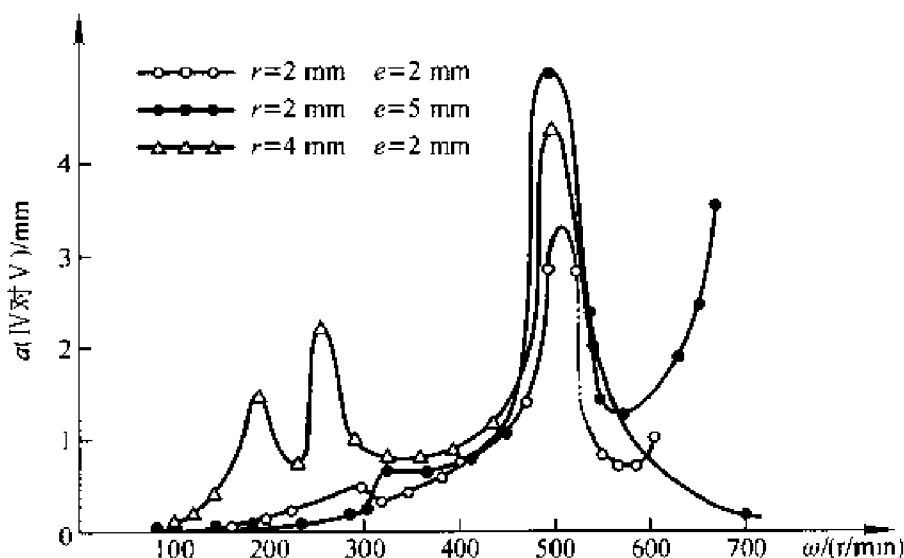


图 11.17

从图 11.17 可以看出,在 500 r/min 附近,无论那组参数均有明显的共振峰存在,振幅值较小,均在 0.4 mm 以下。故设计者在选取工作点时必须避开。

(6) 实际平移振动条件

§ 4.3 的理论计算指出,在存在转动因素的前提下,可实现条件平移振动。对生产用共振筛计算知:

$\beta - \alpha = 6^\circ 15'$, 该偏差对下筛箱质心产生顺时针转矩, $S_3 - S_4 = 61.3$ cm, 对下筛箱质心产生逆时针转矩,为此在下筛箱出料端加配重 240 kg,使合转矩为零。在 $e = 0.2$ cm, $e = 0.2$ cm 时进行了实验,数据列于[42]的表 7.13。分析该表的数据知,上筛箱的平均加速度值,加配重前为 4.41 g,加配重后为 3.47 g;下筛箱加配重前为 3.03 g,加配重后为 2.48 g。显然,加配重后加速度值均有所降低,即上、下筛箱分别降低了 27 % 和 22 %。这对延长筛子的使用寿命是有益的。

(7) 物料影响

物料对共振筛振动影响的实验数据见[42]的表 7.14,示于图 11.18。

从图 11.18 知,带料的共振筛的共振曲线与空载的不同。在较低的频段,在同一频率下,物料使振幅略有增加。频率愈低,增长的幅度愈大。随着工作频率的升高,振幅增长幅度降低。在频率较高、抛料指数较大时,振幅反而减小。因此,带料共振筛的共振曲线与空载的共振曲线出现交点。以上实验结果与计算结果非常接近。

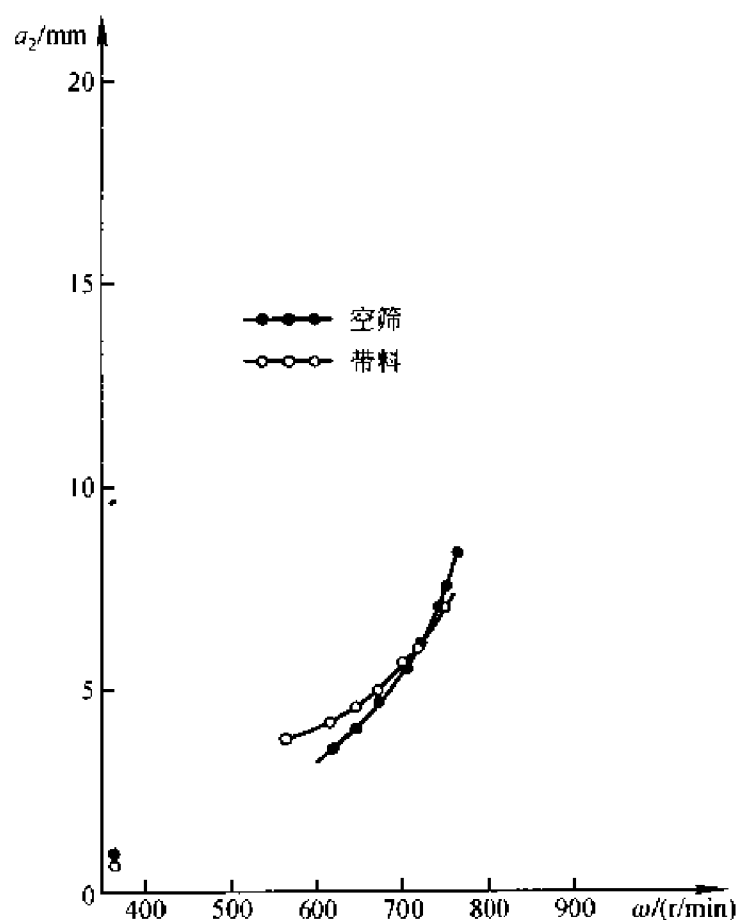


图 11.18

计算还表明,物料愈多,则对筛箱振动规律的影响愈大。在物料与机体质量比相同的条件下,机体质量越大,物料对其振动的影响越小,带料与空载的共振曲线也越接近。单层带料时,共振曲线比较平缓,振幅减小的区域在频率较高时出现,而双层带料时,振幅减小的区域,在频率更高的情况下才出现。

(8) 功率曲线

实测功率值见[42]的表 7.15。 N 与 Q 的关系绘于图 11.19。

从图 11.19 知,阻尼消耗的功率是很大的。远离共振点工作的振动筛,消耗功率的大部分为阻尼功率。根据[42]的表 7.14,物料消耗功率 $N_{\text{料}}$ 与抛料指数 D 的关系见图 11.20。根据抛料指数的大小,可查出对应的物料消耗的功率值。

11.4.3 关于系统识别的问题

我们曾指出过,自然界中一切动力学问题本质上都是非线性的;而实践又证明大量的动力学问题可以线性化,另一些问题则不能,现有的动力学系

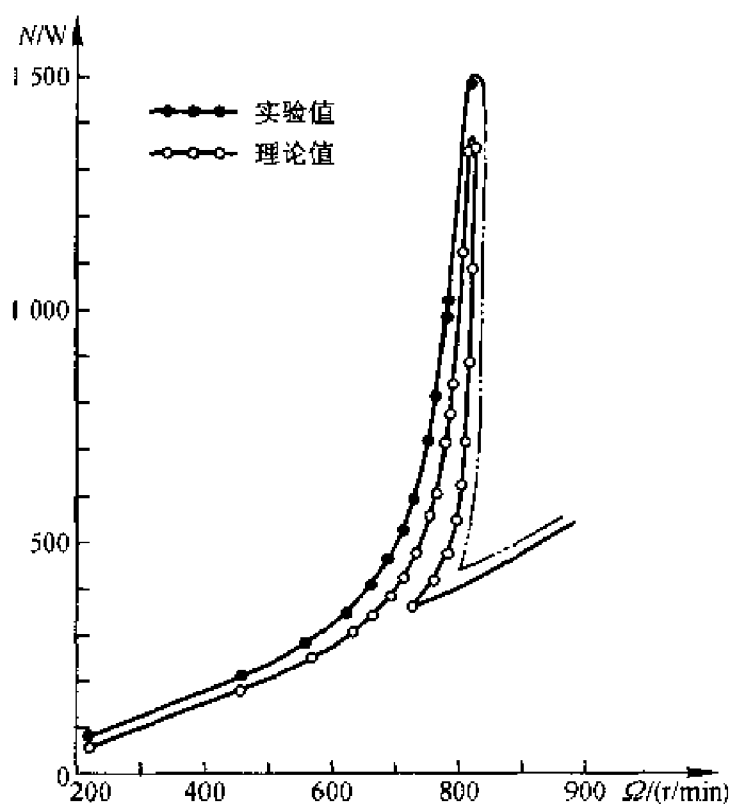


图 11.19

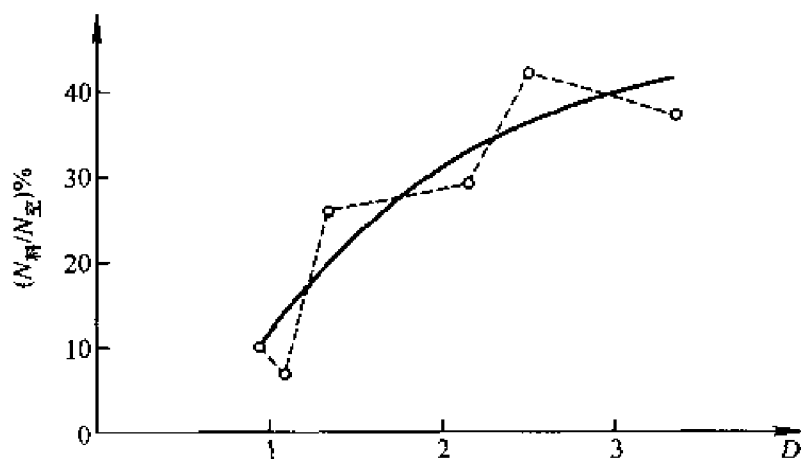


图 11.20

统哪些是线性的,哪些是非线性的? 什么情况下可按线性问题处理,而什么情况下又不能,对这些问题作出判断有时并不容易,下面是几个识别系统的依据。

1. 波形失真

系统在单频纯正弦干扰力作用下,如果位移响应的波形不是正弦的,而且速度响应和加速度响应的波形失真愈来愈大,则系统必然是非线性的。

2. 共振曲线的拐弯

当作用于系统干扰力的频率缓慢变化(增加或减小)时,其响应曲线(共振曲线)发生拐弯,振幅的变化发生跳跃和滞后,则系统是非线性的,且共振曲线向右拐弯时,弹性元件具有硬式特性,向左拐时具有软式特性。

3. 非理想系统

一个动力系统驱动的线性系统,当干扰力频率缓慢变化通过共振点时,每一个频率对应一个确定的振幅,即得到线性系统的共振曲线,这时系统是线性的,称之为理想系统。如只能得到线性的共振曲线的一部分,则系统的驱动功率是有限的,此时系统是非线性的——非理想系统。

4. 无等时性

当系统的固有频率与振幅有关时,则失去了等时性,系统是非线性的。

5. 高或低频成分

系统在单频干扰力作用下,位移响应含有高或低频成分时,系统是非线性的。

6. 自激振动

不管起始条件多大或多小,任意振动随着时间的延续都趋于定常振动,则为自激振动系统。

7. 参数振动

参数激励系统是非线性系统,当激励频率接近于系统某一固有频率的二倍时,小的参数激励可产生大的响应(主参数共振)。

8. 输出与输入的比不是常数时,则为非线性系统。

9. 共振曲线呈现多值性。

10. 对初值条件的极端敏感性。

11. 在周期干扰作用下有非周期的混沌响应。

参 考 文 献

- 1 Poincaré H. Les Methodes nouvelles de la mecanive celeste villare. 1899
- 2 Крылов Н М. Боголюбов Н Н. Введение в нелинейную механику. Изд А Н СССР, 1937
- 3 Stoker J J. Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. Interscience Publishers Inc, 1950
- 4 Степанов В В. Курс дифференциальных движений. ГИИТЛ, 1950
- 5 Малкин М Г. Теория устойчивости движения. ГИИТЛ, 1952
- 6 Теодорчик К Ф. Автоколебательные системы. ГИИТЛ, 1952; 3-ое издание
- 7 Колмогоров А Н. ДАН СССР, 1954; 98
- 8 Иориш Ю И. Измерение вибраций (Общая теория и приборы). Машгиз, 1956
- 9 Малкин М Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва: ГИИТЛ, 1956
- 10 Андронов А А. Витт А А. Хайкин С З. Теория колебаний. Физмат-гиз, 1959
- 11 Диментберг Ф М. Изгибные колебания вращающийся валов. Изд А Н СССР, 1959
- 12 Гробов В А. Асимптотические методы расчёта изгибных колебаний валов турбомашин. Изд АН СССР, 1961
- 13 Minorsky N. Nonlinear oscillations. New Jersey; D. Van Nostrand Co. Inc Princeton, 1962
- 14 Кушуль М Я. Автоколебаний роторов (динамика быстроходных веретён). Изд АН СССР, 1963
- 15 Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. J Atmospheric Sci. 20 (1963); 130-141
- 16 Melnikov VK. On the stability of the center for time periodic perturbations. Trans. Moscow Math Soc, 1963, 12; 1 - 57
- 17 Блехман И И. Джанелидзе Г Ю. Вибрационное перемещение. Изд Наука, 1964
- 18 Митропольский Ю А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. Изд Наука, 1964

- 19 Кононенко В О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. Изд Наука, 1964
- 20 Henon M and C Heiles. The applicability of the third integral of motion; Some numerical experiments. Astron J, 69, 1964
- 21 Потураев В Н, Франчук В П, Червоненко А Г. Вибрационные транспортирующие машины. Машгиз, 1964
- 22 Чэнь Юй-шу. О моделировании нестационарных колебания ротора с подвижным дебалансом. Колебания и прочность при переменных напряжениях. Изд Наука, 1965
- 23 Bishop RED. Vibration. Cambridge university press. 1965
- 24 陈予恕. 求具有任意个准循环坐标的拟线性运动方程组概周期解的一个方法及其应用. 力学学报, 1965, No. 3: 196 - 210
- 25 Shilnikov L P. A case of the existence of a denumerable set of periodic motions. Sov Math Dokl, 1865, 6: 163 - 166
- 26 陈予恕. 求具有任意个准循环坐标的拟线性运动方程组概周期振动状态下的非定常解. 天津大学学报, 1966, 第二十二期: 81 - 92
- 27 Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull Amer Math Soc, 1967, 73: 747 - 817
- 28 Hayashi C. Selected papers on nonlinear oscillations. Japan, Osaka; Nippon Printing and Publishing Co, 1975
- 29 秦元勋. 常微分方程的近似解析解的理论与实践. 计算机应用与应用数学, 1975; No. 3
- 30 秦元勋. 常微分方程近似解析解的理论与实践. 计算机应用与应用数学, 1978; No. 6
- 31 Feigenbaum M. Qualitative universality for a chaos of nonlinear transformations. T Stat Phys, 1978, 19: 5 - 32
- 32 Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear oscillations. New York; Wiley-Interscience, 1979
- 33 Hsu C S. A theory of index for point mapping dynamical systems. ASME, J Appl Mech, 1980, Vol 47
- 34 Hsu C S. A theory of cell-to-cell mapping dynamical system. ASME, J Appl Mech, 1980, Vol 47
- 35 Arnold V I. Mathematical methods of classical mechanics. New York; Springer, 1980
- 36 天津大学力学教研室振动组, 洛阳矿山机械研究所强度室、洗选室.

- 三平方米非线性模型共振筛振动特性试验研究. 矿山机械, 1980, 第二期: 19 - 27
- 37 陈予恕, 金志胜, 王继宗. 大型双质量非线性共振筛的几个动力学问题. 天津大学学报, 1981, No. 3: 1 - 16
- 38 陈予恕, 马连福等. 三十平方米非线性共振筛振动特性现场实验研究. 矿山机械, 1981, No. 6: 22 - 32
- 39 陈予恕. 两自由度分段线性系统的一种解法. 固体力学学报, 1982, No. 1: 77 ~ 86
- 40 Chow S N, J Hale. Methods of bifurcation theory. New York: Springer, 1982
- 41 Guckenheimer I, P Holmes. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. New York: Springer-Verlag, 1983
- 42 陈予恕. 非线性振动. 天津: 天津科学技术出版社, 1983
- 43 Golubitsky M, D G Schaeffer. Singularities and groups in bifurcation theory. Springer-Verlag, 1985, 1988, Vol. 1, 2
- 44 Chen Y S, W F Langford. The subharmonic solution of nonlinear Mathieu equation and Euler dynamically buckling of problem. Acta Mechanica Sinica, 1988, 20(4): 522 - 532
- 45 欧阳光中. 流形上的微积分. 上海: 上海科学技术出版社, 1988
- 46 李继彬. 混沌与 Melnikov 方法. 重庆: 重庆大学出版社, 1989
- 47 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分岔. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989
- 48 Chen Y S, Zhan K J and W F Langford. New results on bifurcation theory of subharmonic resonance in nonlinear system with parametric excitation; Degenerate bifurcation solution. JVE, 1990, 3(2): 38 - 47
- 49 Chen Y S, Yie M and Zhan K J. Experiment investigation of $1/2$ subharmonic bifurcation solution in Mathieu's equation. J. of Applied Mechanics, 1990, 7(4): 11 - 16
- 50 Chen Y S and Mei L T. Bifurcation solution of general resonant cases of nonlinear Mathieu equations. Science in China (Series A), 1990, 33(12): 1469 - 1476
- 51 Митропольский Ю А, Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. Киев Наукова Думка.

- 1992
- 52 陈予恕,唐云等.非线性动力学中的现代分析方法.北京:科学出版社,1992,2000(第二次印刷)
- 53 陈予恕.非线性振动系统的分岔和混沌理论.北京:高等教育出版社,1993
- 54 Thompson J M T and Bishop S R. Nonlinearities and chaos in engineering dynamics. John Wiley & Sons, Chichester,1994
- 55 刘曾荣.混沌的微扰判据.上海:上海科技出版社,1994
- 56 武际可,苏先越.弹性系统的稳定性.北京:科学出版社,1994
- 57 陆启韶.分岔与奇异性.上海:上海科技出版社,1995
- 58 Chossat P & Dias F. The $1:2$ resonance with $O(2)$ symmetry and its application to hydrodynamics. J Nonlin Sc,1995,5:105 - 129
- 59 Nayfeh A H and B Balachandran. Applied nonlinear dynamics. John Wiley & Sons, Chichester,1995
- 60 汪秉宏.弱混沌与准轨规则斑图.上海:上海科技出版社,1996
- 61 张筑生.微分拓扑讲义.北京:北京大学出版社,1996
- 62 Chen Y S and Xu J. Local bifurcation theory of nonlinear systems with parametric excitation. Nonlinear dynamics, 1996,10:203 - 220
- 63 Liblanc V G & W F Langford. Classification and unfoldings of $1:2$ resonant hopf bifurcation. Arch Rational Mech Anal,1996,136:305 - 357
- 64 张芷芬,李承治等.向量场的分岔理论基础.北京:高等教育出版社,1997
- 65 陈关荣.控制非线性动力系统的混沌现象.控制理论与应用,1997,14(1):1 - 6
- 66 Chen Y S and Xu J. Bifurcations in nonlinear systems with parametric excitation. Doklady Mathematics, Russia, 1997,56(3):880 - 883
- 67 Wu Zhiqiang and Chen Yushu. Normal form of the nonsemi-simple bifurcation problems. Applied Math Mech,1997,18(4):349 - 354
- 68 Chen Yushu and Audrew Y T Leung. Bifurcation and chaos in Engineering. London: Springer,1998
- 69 唐云.对称性分岔理论基础.北京:科学出版社,1998
- 70 Yu P and K Huseyin. Parametrically excited nonlinear systems: a comparison of certain methods. Int J Nonlin Mech, 1998,33(6):.

367 - 378

- 71 薛禹胜. 运动稳定性量化理论. 南京: 江苏科技出版社, 1999
- 72 刘延柱, 陈立群. 非线性动力学. 上海: 上海交通大学出版社, 2000
- 73 曲广吉. 航天动力学工程. 北京: 中国科技出版社, 2000
- 74 胡海岩. 应用非线性动力学. 北京: 航空工业出版社, 2000
- 75 牛玉清, 陆启韶, 徐鉴. 多圆盘转子系统的周期运动及稳定性分析. 振动工程学报, 2000, 13(1): 30 - 36
- 76 张思进, 陆启韶, 王士敏. 碰摩转子映射系统的延迟反馈混沌控制. 固体力学学报, 2000, 32(1): 59 - 69
- 77 Chen G and Moiola J L. Bifurcation control: Theories, Methods, and Applications. Int J of bifurcation and chaos, 2000, 10(3): 511 - 548
- 78 褚福磊, 汤晓瑛, 唐云. 碰摩转子系统的稳定性. 清华大学学报, 2000, 40(4): 119 - 123
- 79 孙政策, 徐健学, 龚璞林. 转子系统碰摩行为的研究. 振动工程学报, 2000, 13(3): 474 - 480
- 80 刘延柱, 陈立群. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社, 2001
- 81 闻邦春, 李以农, 韩清凯. 非线性振动理论中的解析方法及工程应用. 沈阳: 东北大学出版社, 2001
- 82 王光瑞, 于照龄, 陈式刚. 混沌的控制、同步与利用. 北京: 国防工业出版社, 2001
- 83 刘向东, 黄文虎. 混沌系统延迟反馈控制的理论与实验研究. 力学进展, 2001, 31(1): 18 - 32
- 84 郑惠萍, 陈予恕. 滑动轴承转子系统抗扰动稳定裕度研究. 汽轮机技术, 2001, 43(1): 35 - 37
- 85 Chen Yushu and Ding Qian. CL Methods and its application to engineering nonlinear dynamical problems. Applied Math, 2001, 22(2): 144 - 153
- 86 Pust L. "Chen Y S and Leung A Y T. Bifurcation and chaos in engineering, berlin: springer, 1998. ISBN 3 - 540 - 76242 - 6". Engineering mechanics inzenyrska mechanika, 2001, 8(2): 149 - 150
- 87 Ding Q and Chen Y S. Nonstationary motion and instability of a shaft/casing system with eubs. JVC, 2001 7(3): 327 - 338
- 88 闫民, 陈予恕, 曹树谦. 转子系统非线性动力学 DEM 建模研究. 力学学报, 2001, 33(3): 390 - 402

-
- 89 陈予恕,杨彩霞等. 具有平方、立方非线性项的耦合动力学系统 $1:2$ 内共振分岔. 应用数学和力学, 2001, 22(8): 817 - 824
- 90 陈芳启,吴志强,陈予恕. 粘弹性圆柱形壳的动力学高余维分岔、普适开折问题. 力学学报, 2001, 33(5): 661 - 668
- 91 Ma Jun-hai and Chen Yushu. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system(I). Applied Math, 2001, 22(11): 1240 - 1251
- 92 Wu Zhiqiang and Chen Yushu. New bifurcation patterns i elementary bifurcation problems of single-slide constraint. Applied Math. 2001, 22(11): 1260 - 1267
- 93 Liu Xijun, Wang Dajun, Chen Yushu etc. High-order self-excited vibration induced by dry friction between two elastic structures. Acta Mechanica Sinica (English Series), 2001, 17(4): 340 - 347
- 94 陈予恕,孙洪军. 正规形的复内积平均法. 应用数学和力学, 2001, 22(12): 1230 - 1235

索引

(按汉语拼音字母顺序排列)

A

安德罗诺夫—庞特里雅金平面系统分岔定理 (Andronov-Pontriagin bifurcation theorem of plane system) § 9.2
鞍点 (saddle) § 2.2
鞍结分岔 (saddle-node bifurcation) § 9.2

B

保守系统 (conservative system) § 1.2
半动力系统 (semi-dynamical system) § 9.1
标准形式的方程 (standard equation) § 1.4
不稳定焦点 (unstable focus) § 2.2
不稳定子空间 (unstable subspace) § 9.1
不稳定流形 (unstable manifold) § 9.4
保持集 (persistent set) § 10.2

C

参数振动 (parametric vibration) § 6.1
 k 参数开折 (k -parameter unfolding) § 10.2
叉形分岔 (pitchfork bifurcation) § 9.2
常数变量法 (method of alternating constants) § 9.4
持久的 (persistent) § 10.2
超谐波共振 (ultraharmonic resonance) § 3.2

次(亚)谐波共振 (secondary harmonic resonance) § 3.2

D

动力系统 (dynamical systems) § 9.1
等倾线法 (isocline method) § 2.4
达芬方程 (Duffing equation) § 7.3
等效线性化方法 (equivalent linearization method) § 1.7
多尺度法 (multiscale method) § 7.1

E

e^1 (线性流) (linear flow) § 9.4
二阶近似解 (second approximate solution) § 1.4

F

非自治系统 (nonautonomous system) § 8.2, § 8.3
弗洛凯定理 (Floquet theorem) § 6.2
分岔 (bifurcation) § 9.2
分岔参数 (bifurcation parameter) § 9.2
分岔集 (bifurcation set) § 9.2, § 10.2
分岔图 (bifurcation diagram) § 9.2, § 10.2
范德波尔方程 (van der Pol equation) § 1.5
非持久集 (nonpersistent set) § 10.2

G

戈鲁比茨基—沙弗正规形 (Golubitsky-

Schaeffer normal form) § 10.2
 广义隐函数定理 (generalized implicit function theorem) § 9.3
 共振 (resonance) § 3.2, § 4.2
 正规形 (normal form) § 9.6

H

霍普夫分岔定理 (Hopf bifurcation theorem) § 9.7
 霍普夫分岔解 (Hopf bifurcation solution) § 9.7
 霍普夫分岔的复数正规形 (complex normal form of Hopf bifurcation) § 9.7
 霍普夫分岔的实数正规形 (normal form of the Hopf bifurcation in real numbers) § 9.7
 混沌 (chaos) § 10.4
 混沌的控制 (control of chaos) § 10.4

J

渐近法 (asymptotic method) § 1.1
 渐近解 (asymptotic solution) § 1.1
 基础解系 (fundamental solution set) § 4.1, § 4.2
 结构稳定性 (structure stability) § 9.2
 局部分岔 (local bifurcation) § 9.2
 静态分岔 (static bifurcation) § 9.2
 奇异性理论方法 (singularity theory method) § 10.2
 接触等价 (contact equivalence) § 10.2
 强等价 (strong equivalence) § 10.2
 解的正交性 (orthogonality of solutions) § 4.1, § 4.2
 极限环 (limit cycle) § 2.2
 结点 (node) § 2.2
 焦点 (focus) § 2.2
 局部不变流形 (local invariant manifold) § 9.4

局部稳定流形 (local stable manifold) § 9.4
 局部不稳定流形 (local unstable manifold) § 9.4
 计算机代数语言算法 (symplectic integration using a small computer) § 11.2
 局部中心流形 (local center manifold) § 9.5

K

可微动力系统 (differential dynamical system) § 9.1
 k 次幂理想 (k -th power of ideal) § 10.2
 开折 (unfolding) § 10.2
 KBM 变换 (Krylov-Bogolubov-Mitropolsky transformation) § 1.4
 控制参数 (control parameter) § 10.2
 跨临界分岔 (或称简单分岔) (transcritical bifurcation or simple bifurcation) § 9.2

L

流 (flow) § 9.1
 连续动力系统 (continuous dynamical system) § 9.1
 离散动力系统 (discrete dynamical system) § 9.2
 李雅普诺夫—施密特方法 (Liapunov-Schmidt reduction) § 10.1
 连续函数空间 (continuous function space) § 10.3
 理想 (ideal) § 10.2
 洛伦兹系统的分岔 (bifurcation of Lorenz system) § 9.5
 列纳法 (Liénard method) § 2.4
 林滋泰德—庞加莱法 (Linstedt-Poincaré method) § 8.2
 流形 (manifold) § 9.4

M

- 马休方程(Mathieu equation) § 6.2, § 10.3
慢变参数系统(slowly-varying parameter system) § 5.1

N

- 内蕴理想(intrinsic ideal) § 10.2
内积(inner production) § 10.3
内共振(internal resonance) § 4.1, § 9.6

P

- 庞加莱小参数法(Poincaré small parameter method) § 8.1
庞加莱频谱引理(Poincaré Lemma about the spectrum) § 9.6
庞加莱共振引理(Poincaré Lemma about the resonance) § 9.6
普适开折(universal unfolding) § 10.2
平均法(averaging method) § 1.4, § 3.1, § 4.1

Q

- 全局分岔(global bifurcation) § 9.2
奇点(singular point) § 2.2, § 9.2
奇怪吸引子(strange attractor) § 10.4
强等价(strong equivalence) § 10.2
切空间(tangent space) § 10.2
全局分岔(global bifurcation) § 10.1

R

- 扰动集(perturbation set) § 10.2
扰动方程(perturbation equation) § 4.1

S

- 双曲算子(hyperbolic operator) § 9.2

- 识别问题(recognition problem) § 10.2
识别条件(recognition condition) § 10.2
摄动法(perturbation method) § 8.1
双极限点(double limit point) § 10.2
树枝分岔(pitchfork bifurcation) § 9.2
双极限集(double limit set) § 10.2
数值算法(numerical calculating method) § 11.1
实验研究(experimental research) § 11.4

T

- 同宿轨道(homoclinic orbit) § 9.2
跳跃现象(jump phenomenon) § 3.3, § 7.3
同胚变换(homeomorphism transformation) § 9.6, § 10.2
特殊正交群(special orthogonal group) § 10
同调算子(homological operator) § 9.6
退化性(degeneracy) § 10.3

W

- 稳定的运动(stable motion) § 4.1
稳定子空间(stable subspace) § 9.4
稳定流形定理(stable manifold theorem) § 9.4
稳定结点(stable node) § 2.2
稳定焦点(stable focus) § 2.2
稳态响应、或定常响应(steady state response, or stationary response) § 1.6, § 4.1

X

- 向量场(vector field) § 9.1
相图(phase diagram) § 2.1
希尔方程(Hill equation) § 6.1
限制切空间(restricted tangent space) § 10.2

响应曲线(response curve)

§ 7.3, § 10.3

向量场正规形(normal form of vector fields)

§ 9.6

相平面(phase plane)

§ 2.1

相空间(phase space)

§ 9.1

小参数(small parameter)

§ 8.1

小参数法(small parameter method)

§ 1.8

谐波平衡法(harmonic balance method)

§ 1.9

Y

映射(map)

§ 9.3

压缩映射定理(compressive map theorem)

§ 9.3

隐函数定理(implicit function theorem)

§ 9.3

芽(germ)

§ 10.2

有限生成的理想(finitely generated ideal)

§ 10.2

有限确定性(finite determinacy)

§ 10.2

余维分类问题(classification by codimension)

§ 10.2

亚谐波共振分岔解(subharmonic resonance bifurcation solution)

§ 10.3

移相算子(phase shift operator)

§ 10.3

异宿点(heteroclinic point)

§ 9.2

异宿轨道(heteroclinic orbit)

§ 9.2

Z

自治系统(autonomous system)

§ 1.2, § 8.4

中心子空间(centre subspace)

§ 9.3

状态变量(state variable)

§ 10.1

最大理想(maximum ideal)

§ 10.2

状态空间(state space)

§ 10.1

中心流形定理(centre manifold theorem)

§ 9.5

主共振(principle resonance)

§ 3.2, § 4.1

自激振动(self-excited vibration)

§ 1.5

组合频率(combination frequency)

§ 4.1

外国人名译名对照表

(按译名的汉语拼音字母顺序排列)

阿诺尔德	В. И. Арнольд (V. I. Arnold)	克雷洛夫	Н. М. Крылов (N. M. Krylov)
安德罗诺夫	А. А. Андронов (A. A. Andronov)	洛伦兹	E. N. Lorenz
包戈留包夫	Н. Н. Боголюбов (N. N. Bogoliubov)	利普希茨	R. O. S. Lipschitz
周修义	S. N. Chow	拉普拉斯	P-S. Laplace
达芬	G. Duffing	李雅普诺夫	А. М. Ляпунов (A. M. Liapunov)
达朗贝尔	d'Alembert, J. leR.	林滋泰德	A. Lindstedt
欧几里得	Euchd	列纳	A. Lienard
欧拉	L. Euler	麦尼柯夫	В. К. Мельников (V. K. Melnikov)
弗洛凯	G. Floquet	马休	E. L. Mathieu
弗雷谢特	M. Frechet	米特罗波利斯基	Ю. А. Митропольский (U. A. Mitropolsky)
弗雷德霍姆	E. J. Fredholm	奈弗	A. H. Nayfeh
范德波尔	van der Pol	牛顿	I. Newton
弗根鲍姆	M. J. Feigenbaum	庞加莱	H. Poincaré
傅里叶	J. B. J. Fourier	庞特里雅金	Ч. С. Потрягин (L. S. Pontriagin)
戈鲁比茨基	M. Golubitsky	瑞利	J. W. S. Rayleigh
盖肯黑木尔	J. Guckenheimer	斯梅尔	S. Smale
哈密顿	Hamilton, W. R.	什尔尼科夫	Ч. Шильников (L. S. Shilnikov)
Hausdorff, F. 豪斯多夫		沙弗	D. G. Schaeffer
Hill, G. W. 希尔		泰勒	B. Taylor
霍普夫	E. Hopf	上田	Y. Ueda
霍尔姆斯	P. J. Holmes	约克	J. A. Yorke
哈密顿	W. R. Hamilton		
海努	M. Henon		
雅可比	C. G. J. Jacobi		
若当	M. E. C. Jordan		
卡尔马高劳夫	А. Н. Колмогоров (A.		

Synopsis

For many nonlinear dynamical systems(physical, mechanical, chemical, ecological, technical and economic, etc), the discovery of irregular vibration, in addition to periodic and almost-periodic vibrations, is one of the most significant achievements in modern sciences. A new scientific discipline-nonlinear science, or chaotic dynamics, has been established on the basis of a series of successful research works by a lot of scientists since 1963. As one of the important components of nonlinear science, the task of the nonlinear vibration mechanics has been developed from studying the periodic and almost-periodic solutions to studying the bifurcation theory of periodic solution and chaos theory, along with the development of the nonlinear science.

Nevertheless, in modern physics and engineering sciences, there still exist a large amount of demands on predictions of the periodic and/or almost-periodic solutions of nonlinear systems, and their stability analyses as well. Some dynamic instability problems in engineering are still very serious and prominent. On the other hand, irregular vibrations of nonlinear systems are often the results of development of regular vibrations. Therefore, understanding the rule and connection of their mutual changes is one of the important contents of dynamics designing and smart control. Obviously, both the theory of periodic solutions of nonlinear vibration systems and the bifurcation theory of periodic solutions are in urgent need.

In this book, we introduce systematically the classical theory and numerical methods to solve the regular motion rules of nonlinear vibrations systems. Some new physical phenomena are presented in comparison with the linear theory. Some practical examples of solving the engineering vibration theory are also given out, which provides theoretical and useful models for solving nonlinear vibration problems existed in engineering extensively, and the basis of the modern nonlinear dynamic theory as well. Some basic concepts of irregular motions (bifurcation and chaos) are introduced briefly, as the preliminary knowledge of further investigation. They are urgently necessary

This book is completed on the bases of my books 《Nonlinear Vibration》 (published by Tianjin Science and Technology Press in 1983) and a part of 《Bifurcation and Chaos Theory of Nonlinear Vibration System》 (published by High Education Press in 1993). Based on many years' teaching experiences, this book is mainly written for teachers and graduate students. According to the thought of connected theory with engineering practice, we introduce the theories and analysis methods through

successful applications of the theories to solve nonlinear engineering problems. The physical concepts of periodic solutions of nonlinear vibration and the mechanism of bifurcation of periodic solutions are revealed thoroughly, just using the related mathematical knowledge familiar to the undergraduate students with science and technology college study background. So this book can also be a useful reference to the students and researchers and technicians working in the areas of nonlinear dynamics investigations.

Besides the Introduction, this book consists of 11 chapters.

In Introduction, the task and summary development of nonlinear vibration and nonlinear dynamics studies, the general characteristics of nonlinear systems and research procedures are briefly introduced respectively. Various kinds of nonlinear forces existed in mechanical systems are also presented.

Chapter 1 introduces the asymptotic method and the averaging method for free vibration analysis of nonlinear systems. Some new physical phenomena existed in the systems with nonlinear elastic forces, nonlinear dampings and self-excited vibrations are explained theoretically.

Chapter 2 introduces the phase portrait method of plane systems. The classification of singular points, phase trajectories of conservative systems, nonconservative systems and self-excited oscillation systems are discussed.

Chapter 3 introduces averaging method for forced oscillations of single degree-of-freedom systems. The vibration characteristic of systems with piecewise linearity and linear non-ideal systems are discussed.

In Chapter 4, a method for studying periodic and almost-periodic solutions of multi-degree-of-freedom systems are introduced. The general characteristics of nonlinear systems with two or multi-DOF are analyzed.

Chapter 5 introduces the asymptotic method and the averaging method for nonlinear oscillatory systems with slowly-varying parameters.

In Chapter 6, parametrically excited systems are analyzed. It includes Floquet theory, determination of stability boundaries of subharmonic resonances, and dynamics of nonlinear Mathieu Equation.

Chapter 7 introduces the method of multiple scales and its application in SDOF and MDOF vibration systems.

Chapter 8 introduces the perturbation method for nonlinear systems. The small parameter method is proved to non-autonomous or autonomous Systems.

Chapter 9 introduces basic concepts of bifurcation theory; the concept of dynamical system, the definition of bifurcation and the classification of bifurcations of planar vector fields, implicit function theorem, center manifold theory, normal form theory and Hopf bifurcation theory.

In Chapter 10 the bifurcation theory of periodic solutions of nonlinear vibration systems is introduced. It includes Lyapunov-Schmidt reduction, singularity theory, and principle-parametric resonant bifurcation theory of nonlinear parametrically excited systems and its application in engineering, which is called CL method.

Chapter 11 introduces the application of computer and experimental study. It includes the discussion on periodic solutions of nonlinear vibration systems and the numerical simulation algorithm of bifurcations periodic solutions, symbolic integration method, application of simulation computer and problems in experimental studies.

Thanks are given to Professor Andrew YT Leung and others in the group of general mechanics in the Department of Mechanics, Tianjin University for their kindly help. Thanks are also extended to Professor Lu Qishao for his valuable suggestions in reviewing the manuscripts.

I am very appreciating to the financial supports to the main research works introduced in book from the National Natural Science Foundation(19990510) and National Key Basic Research Special Fund (G19980203) of China.

Chen Yushu

Dec 2001

