

第四章 可测函数



第一节 可测函数及其性质

第二节 叶戈罗夫定理

第三节 可测函数的构造

第四节 依测度收敛

一、有限函数的相关定义

这里特别声明一下,今后凡提到函数都是指定义在 $\mathbf{R}^n$ 中某点集上的实函数,并且允许它以 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为函数值. $\pm\infty$ 也称为非真正的实数,通常的实数则称为有限实数. 函数值都是有限实数的函数称为有限函数. 有界函数仍在通常意义下来理解. 因此有界函数必是有限函数,但反之不真.

关于包含 $\pm\infty$ 在内的实数运算作如下规定：

关于包含 $\pm\infty$ 在内的实数运算作如下规定：

$+\infty$ 是全体有限实数的上确界， $-\infty$ 是全体有限实数的下确界： $-\infty < a < +\infty$ (a 为任何有限实数). 从而对于上(下)方无界的递增(减)数列 $\{a_n\}$, 总有 $\lim a_n = +\infty$ ($-\infty$).

对于任何有限实数 a ,

$$\begin{aligned} a + (\pm\infty) &= (\pm\infty) + a = (\pm\infty) - a \\ &= a - (\mp\infty) = \pm\infty, \\ (\pm\infty) + (\pm\infty) &= \pm\infty, \frac{a}{\pm\infty} = 0, \end{aligned}$$

对任何有限实数 $a > 0$ (< 0),

$$a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \frac{\pm\infty}{\frac{1}{a}} = \pm\infty \quad (\mp\infty),$$

$$(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty,$$

$$(-\infty)(+\infty)=(+\infty)(-\infty)=-\infty,$$

$$0 \cdot (\pm\infty)=(\pm\infty) \cdot 0=0.$$

反之, $(\pm\infty) - (\pm\infty)$, $(\pm\infty) + (\mp\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\mp\infty}{\pm\infty}$, $\frac{a}{0}$,

$\frac{\pm\infty}{0}$ 都认为是无意义的.

一个定义在 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的实函数 $f(x)$ 确定了 E 的一组子集

$$\{x: x \in E, f(x) > a\} \quad (\text{简记作 } E[f > a]),$$

$$\text{即 } E(f > a) = \{x: x \in E, f(x) > a\}$$

这里 a 取遍一切有限实数, 反之, 易知 $f(x)$ 本身也由 E 的这组子集完全确定. 因此从这组子集的性质, 可以反映出 $f(x)$ 的性质.

二、可测函数的定义

定义1 设 $f(x)$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbf{R}^n$ 的实函数. 如果对于任何有限实数 a , $E[f > a]$ 都是可测集, 则称 $f(x)$ 为定义在 E 上的可测函数.

例1 零测集上的任何函数都是可测函数.

注: 零测集的任何子集仍为零测集.

例2 可测集上的常值函数是可测函数.

三、可测函数的判定条件

定理1 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实函数, 下列任一条件都是 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件:

- (1) 对任何有限实数 a , $E[f \geq a]$ 都可测;
- (2) 对任何有限实数 a , $E[f < a]$ 都可测;
- (3) 对任何有限实数 a , $E[f \leq a]$ 都可测;
- (4) 对任何有限实数 a, b ($a < b$), $E[a \leq f < b]$ 都可测 (但充分性要假定 $f(x)$ 是有限函数).

证明 $E[f \geq a]$ 与 $E[f < a]$ 对于 E 是互余的, 同样 $E[f \leq a]$ 与 $E[f > a]$ 对于 E 也是互余的, 故在前三个条件中, 只需证明(1)的充要性.

事实上, 易知

$$E[f \geq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right],$$

$$E[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right].$$

(1) 证: $\forall x \in E(f \geq a)$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, 有 $f \geq a > a - \frac{1}{n}$, 且 $x \in E$
 于是 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right]$

另一方面 设 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right]$
 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $x \in E$ 且 $f > a - \frac{1}{n}$ 令 $n \rightarrow \infty$, 得 $f \geq a$

$$\text{于是 } \pi \in E(f > a) \\ \text{故 } E[f > a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f > a - \frac{1}{n}]$$

(II) 证: $\forall \pi \in E[f > a]$, 则 $\pi \in E$ 且 $f > a$, 不妨设 $f(\pi) = a_0 > a$, 则
 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, s.t. $f \geq a + \frac{1}{n_0}$, 于是 $\pi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f > a + \frac{1}{n}]$

另一方面, $\forall \pi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f > a + \frac{1}{n}]$, 则 $\exists n_0$, s.t. $f \geq a + \frac{1}{n_0} > a$,
 且 $\pi \in E$, 于是 $\pi \in E[f > a]$

$$\text{故 } E[f > a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f > a + \frac{1}{n}]$$

由第一式便知 $f(x)$ 可测时条件(1)成立(一系列可测集的交仍为可测集). 由第二式便知条件(1)成立时 $f(x)$ 可测(一系列可测集之并仍为可测集).

仿此关于(4)的充要性,只需注意表示式:

$$E[a \leq f < b] = E[f \geq a] - E[f \geq b],$$

$$\text{以及 } f(x) \text{ 为有限函数时, } E[f \geq a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[a \leq f < a+n].$$

四、可测函数的相关性质

推论 设 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $E[f=a]$ 总可测, 不论 a 是有限实数或 $\pm\infty$.

当 a 有限, $E[f=a] = E[f \geq a] - E[f > a]$

$f(x)$ 在 E 上可测得 $E[f \geq a], E[f > a]$ 均可测, 故 $E[f=a]$ 可测.

$$E[f=+\infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f > n], \quad E[f=-\infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f < -n].$$

$f(x)$ 在 E 上可测得 $\forall n \in \mathbb{N}, E[f > n], E[f < -n]$ 均可测, 故 $E[f=+\infty], E[f=-\infty]$ 可测.

定理3 (1) 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数, 而 $E_1 \subset E$ 为 E 的可测子集, 则 $f(x)$ 看作定义在 E_1 上的函数时, 它是 E_1 上的可测函数;

(2) 设 $f(x)$ 定义在有限个可测集 $E_i (i=1, 2, \dots, s)$ 的并集 $E = \bigcup_{i=1}^s E_i$ 上, 且 $f(x)$ 在每个 E_i 上都可测, 则 $f(x)$ 在 E 上也可测.

证明 (1) 对于任何有限数 $a, E_1[f > a] = E_1 \cap E[f > a]$. 由假设等式右边是可测集.

(2) E 是可测集而且对于任何有限数 a , 有

$$E[f > a] = \bigcup_{i=1}^s E_i[f > a].$$

由假设等式右边也是可测集.

注1: 定理3是可测函数关于子集、并集的性质

下面我们要讨论可测函数的四则运算.

引理 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 E 上的可测函数, 则 $E[f > g]$ 与 $E[f \geq g]$ 都是可测集.

证明 因为 $E[f \geq g] = E - E[f < g]$, 故只需证明 $E[f > g]$ 可测.

设 $\mathbf{R}$ 中有理数全体为 $r_1, r_2, \dots$, 则

$$E[f > g] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E[f > r_n] \cap E[g < r_n]).$$

因为等式右边的集合可测, 所以 $E[f > g]$ 可测.

定理4 设 $f(x), g(x)$ 在 E 上可测, 则下列函数 (假设它们在 E 上有意义) 皆在 E 上可测 :

$$(1) f(x) + g(x); \quad (2) |f(x)|; \quad (3) \frac{1}{f(x)}; \quad (4) f(x)g(x).$$

证明 我们先对(1)和(4)中当 $g(x)=c$ (有限常数)时的特殊情形进行证明.

关于 $f(x)+c$ 只需注意 $E[f+c>a]=E[f>a-c]$.

关于 $cf(x)$, 则当 $c=0$ 时, 显然是可测的; 当 $c \neq 0$ 时只需注意

$$E[cf>a]=\begin{cases} E\left[f>\frac{a}{c}\right], & \text{当 } c>0, \\ E\left[f<\frac{a}{c}\right], & \text{当 } c<0. \end{cases}$$

现在分别对一般情形进行证明.

(1) $E[f+g>a]=E[f>-g+a]$, 右边括弧中的 $-g+a$ 是可测函数(它是上述(1),(4)特殊情形的结合), 故由引理知右边是可测集.

$$(2) E[|f|>a]=\begin{cases} E[f>a]\cup E[f<-a], & \text{当 } a\geqslant 0, \\ E, & \text{当 } a<0. \end{cases}$$

$$(3) E\left[\frac{1}{f}>a\right]=\begin{cases} E[f>0]\cap E\left[f<\frac{1}{a}\right], & \text{当 } a>0, \\ E[f>0]\setminus E[f=+\infty], & \text{当 } a=0, \\ E[f>0]\cup E\left[f<\frac{1}{a}\right], & \text{当 } a<0. \end{cases}$$

$$(4) \ E[f \cdot g > a] = \begin{cases} \{(E[f > 0] \cap \bar{E}[g > 0]) \cup (E[f < 0] \\ \cap E[g < 0])\} \cap E\left[|f| > \frac{a}{|g|}\right], & \text{当 } a \geq 0; \\ E \setminus E[f \cdot g \leq a] = E \setminus \{(E[f > 0] \\ \cap E[g < 0]) \\ \cup (E[f < 0] \cap E[g > 0])\} \\ \cap E\left[|f| \geq \frac{-a}{|g|}\right]\}, & \text{当 } a < 0. \end{cases}$$

注2: 可测函数类关于四则运算封闭

定理5 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列 (或有限个) 可测函数, 则 $\mu(x) = \inf_n f_n(x)$ 与 $\lambda(x) = \sup_n f_n(x)$ 都在 E 上可测.

证明 由于 $E[\mu \geq a] = \bigcap_n E[f_n \geq a]$,

(证 $\forall x \in E$, 得 $x \in E$ 且 $\mu \geq a$, 一定有 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, x \in E$ 且 $f_n \geq a$
 得 $x \in \bigcap_n E[f_n \geq a]$
 $\forall n, x \in \bigcap_n E[f_n \geq a]$ 则 $x \in E$ 且 $\inf f_n = \mu \geq a$
 得 $x \in E[\mu \geq a]$ 故 $E[\mu \geq a] = \bigcap_n E[f_n \geq a]$)
 $E[\lambda \leq a] = \bigcap_n E[f_n \leq a]$

$E[\lambda \leq a] = \bigcap_n E[f_n \leq a]$ 而得证.

(证 $\forall x \in E$ 得 $x \in E$ 且 $\lambda \leq a$, 则 $\forall n, f_n \leq \lambda \leq a$ 且 $x \in E$
 得 $x \in \bigcap_n E[f_n \leq a]$
 $\forall x \notin E$, 得 $\exists n_0, s.t. f_{n_0} > a$ 且 $x \in E$, (否则 $\lambda \leq a$, 矛盾!)
 得 $x \notin \bigcap_n E[f_n \leq a]$
 得 $\bigcap_n E[f_n \leq a] \subset E[\lambda \leq a]$
 故 $E[\lambda \leq a] = \bigcap_n E[f_n \leq a]$ 故命题得证.

定理6 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列可测函数, 则 $F(x) = \varliminf_n f_n(x)$,

$G(x) = \varlimsup_n f_n(x)$ 也在 E 上可测, 特别当 $F(x) = \lim_n f_n(x)$ 存在时, 它也在 E 上可测.

证明 由于 $\varliminf_n f_n(x) = \sup_n (\inf_{m \geq n} f_m(x))$,

$$\varlimsup_n f_n(x) = \inf_n (\sup_{m \geq n} f_m(x)),$$

重复应用定理 5 即得证.

注3: 定理5和定理6说明可测函数类关于确界运算和极限运算封闭

推论: 可测函数列的极限函数仍为可测函数

(连续函数列的极限函数不一定为连续函数)

设 $f(x)$ 是定义在 E 上的实函数. 令

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{当 } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x), & \text{当 } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{当 } f(x) > 0. \end{cases}$$

则 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 都是 E 上非负函数, 分别称为 $f(x)$ 的正部和负部. 由定义, 我们有

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

由定理 5, 若 $f(x)$ 是 E 上可测函数, 则 $f^+(x), f^-(x)$ 也是 E 上的可测函数.

证: $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$. 另 $|f(x)| = \sup\{f(x), -f(x)\}$

五、可测函数与简单函数的关系

定义3 设 $f(x)$ 的定义域 E 可分为有限个互不相交的可测集 $E_1, E_2, \dots, E_s$
(即 $E = \bigcup_{i=1}^s E_i$)，使 $f(x)$ 在每个 E_i 上都等于某个常数 c_i ，
则称 $f(x)$ 是 E 上的简单函数。

$$f(x) = \sum_{i=1}^s c_i \chi_{E_i}(x)$$

$$\chi_{E_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in E_i \\ 0 & x \in E - E_i \end{cases}$$

例如，在区间 $[0, 1]$ 上的狄利克雷函数便是简单函数。

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

注：简单函数都是可测函数。

因为对 $\forall a \in \mathbf{R}, E[\chi_{E_i} > a] = \begin{cases} \emptyset, a \geq 1; \\ E, a < 0; \\ E_i, 0 \leq a < 1 \end{cases}$ 是可测集，

所以 $\chi_{E_i}(x)$ 是 E 上的可测函数，故 $f(x) = \sum_{i=1}^s c_i \chi_{E_i}(x)$ 是 E 上的可测函数。

可测简单函数是可测函数类中结构较简单的一种函数, 如果我们能够揭示出它与一般的可测函数之间的某种联系, 那将是极为有益的. 这正是下面的定理

定理7 (可测函数与简单函数的关系) 简单函数逼近定理

(1) 若 $f(x)$ 在 E 上非负可测, 则存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得对任意 $x \in E$, $\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x)$, $k=1, 2, \dots$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x)$;

(2) 若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得对任意 $x \in E$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x)$. 若 $f(x)$ 还在 E 上有界, 则上述收敛可以是一致的.

证明 (1) 若 $f(x)$ 在 E 上非负可测. 对任意自然数 k , 将 $[0, k]$ 划分为 $k2^k$ 等份, 令

$$E_{k,j} = E\left[\frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}\right], \quad j = 1, 2, \dots, k2^k;$$

$$E_k = E[f(x) \geq k], \quad k = 1, 2, \dots$$

作函数列

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^k}, x \in E_{k,j}, \\ k, x \in E_k, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, k2^k; k = 1, 2, \dots,$$

则 $\varphi_k(x)$ 是简单函数, 且

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x) \leq f(x), k = 1, 2, \dots.$$

设 $x \in E$, 若 $f(x) \neq +\infty$, 则当 $k > f(x)$ 时, $0 \leq f(x) - \varphi_k(x) \leq 2^{-k}$; 若 $f(x) = +\infty$, 则 $\varphi_k(x) = k, k = 1, 2, \dots$, 于是对任意 $x \in E, \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x)$.

(2) 若 $f(x)$ 是一般的可测函数, 则 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, 其中 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 分别是 $f(x)$ 的正部和负部. 由(1), 存在可测简单函数列 $\{\varphi_k^+(x)\}$ 和 $\{\varphi_k^-(x)\}$, 使得对任意 $x \in E$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k^+(x) = f^+(x), \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k^-(x) = f^-(x).$$

令 $\varphi_k(x) = \varphi_k^+(x) - \varphi_k^-(x)$, 则 $\{\varphi_k(x)\}$ 是可测简单函数列, 且对任意 $x \in E$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x)$.

(证明: 设 $f_1(x), f_2(x)$ 为可测集 E 上的简单函数, 下证 $f_1(x) - f_2(x)$ 仍为 E 上的简单函数.

$$\text{令 } f_1(x) = \sum_{k=1}^p C_k^{(1)} \chi_{E_k^{(1)}}(x)$$

$$f_2(x) = \sum_{j=1}^q C_j^{(2)} \chi_{E_j^{(2)}}(x)$$

其中 $E = \bigcup E_k^{(1)}$, $E_k^{(1)}$ 两两不相交, 且均可测 ($i=1, 2$), 则

$$f_1(x) - f_2(x) = \sum_{k,j} (C_k^{(1)} - C_j^{(2)}) \chi_{E_k^{(1)} \cap E_j^{(2)}}(x)$$

其中求和号是对一切 $k=1, \dots, p, j=1, \dots, q$ 取值的, 就是说,

差 $f_1 - f_2$ 是一个在可测集 $E_k^{(1)} \cap E_j^{(2)}$ 上取常数值

$C_k^{(1)} - C_j^{(2)}$ (共 pq 个) 的简单函数.)

若 $f(x)$ 在 E 有界, 设 $\sup\{|f(x)| : x \in E\} = M$, 则由(1)的证明可知, 任意对 $k > M$,

$$\sup\{|f^+(x) - \varphi_k^+(x)| : x \in E\} \leq \frac{1}{2^k},$$

$$\sup\{|f^-(x) - \varphi_k^-(x)| : x \in E\} \leq \frac{1}{2^k},$$

因此, $\sup\{|f(x) - \varphi_k(x)| : x \in E\} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 从而

$\{\varphi_k(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$.

六、常见的可测函数（如：简单函数、连续函数、连续函数与可测函数的复合函数）

例3 区间 $[a, b]$ 上的连续函数和单调函数都是可测函数.

证明：记 $[a, b] = E$.

(1) 设 $f(x)$ 是 E 上的连续函数，则由第二章习题14知，对 $\forall a \in \mathbf{R}$, $E[f \geq a]$ 是闭集，从而是可测集，所以由定理1知 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

(2) 设 $f(x)$ 是 E 上的单调递增函数（单调递减类似可证）. 对 $\forall a \in \mathbf{R}$,

若 $a \in f(E)$, 则必然存在 $x_0 \in E$ 使 $f(x_0) = a$, 且当 $x \in (x_0, +\infty) \cap E$ 时, $f(x) > a$.
故 $E[f > a] = (x_0, +\infty) \cap E$, 是可测集.

若 a 小于 $f(E)$ 中的任何数, 则 $E[f > a] = E$, 是可测集.

若 a 大于 $f(E)$ 中的任何数, 则 $E[f > a] = \emptyset$, 是可测集.

综上, 对 $\forall a \in \mathbf{R}$, $E[f > a]$ 都是可测集, 所以由定理1知 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

我们还可以看到定义在可测集 $E \subset \mathbf{R}^n$ 的任何连续函数都是可测函数. 不过需先明确在一般点集(不限于区间或域)上的连续函数是怎样定义的.

定义2 定义在 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的实函数 $f(x)$ 称为在 $x_0 \in E$ 连续, 如果 $y_0 = f(x_0)$ 有限, 而且对于 y_0 的任一邻域 V , 存在 x_0 的某邻域 U , 使得 $f(U \cap E) \subset V$, 即只要 $x \in E$ 且 $x \in U$ 时, 便有 $f(x) \in V$. 如果 $f(x)$ 在 E 中每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 E 上连续.

$f(x)$ 在 $x_0 \in E$ 处连续

$\Leftrightarrow f(x_0)$ 有限, 且对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使对 $\forall x \in E \cap U(x_0, \delta)$, 有 $f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$.

显然, 一个函数在其定义域中的每一个孤立点都是连续的.

设 $f(x)$ 是定义在 E 上的实函数, x_0 是 E 的孤立点, 则 $\exists \delta_0 > 0$, 使 $U(x_0, \delta_0) \cap E = \{x_0\}$, 故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_0$, 对 $\forall x \in E \cap U(x_0, \delta) = \{x_0\}$, $f(x) = f(x_0) \in U(f(x_0), \varepsilon)$.

定理2 可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数是可测函数.

证明 设 $x \in E[f > a]$, 则由连续性假设, 存在 x 的某邻域 $U(x)$, 使

$$U(x) \cap E \subset E[f > a].$$

因此, 令 $G = \bigcup_{x \in E[f > a]} U(x)$, 则

$$\begin{aligned} G \cap E &= \left[\bigcup_{x \in E[f > a]} U(x) \right] \cap E \\ &= \bigcup_{x \in E[f > a]} U(x) \cap E \subset E[f > a] \end{aligned}$$

反之, 显然有 $G \supset E[f > a]$, 因此

$$E[f > a] \subset G \cap E[f > a] \subset G \cap E,$$

从而 $E[f > a] = G \cap E$. 但 G 是开集 (因为它是一族开集之并), 而 E 为可测集, 故其交 $G \cap E$ 仍为可测集.

例： $\mathbb{R}^1$ 上的可微函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 是可测函数

$g_n(x)$

证明： 由于

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

从而 $f'(x)$ 是一列可测函数的极限，故 $f'(x)$ 是可测函数.

利用了可测函数列的极限函数仍为可测函数.

复合函数的可测性

第四章习题 6

设 $f(x)$ 是 R 上的连续函数， $g(x)$ 是 $E \subset R^n$ 上的可测函数，则 $f \circ g(x) = f(g(x))$ 在 E 上可测.

(方法一)

证明：要证 $f(g(x))$ 是可测函数，只要证对任意实数 a ,

$$E[f \circ g > a] = \{x \in E : f(g(x)) > a\}$$

是可测集即可.

由于 f 在 $F = R$ 上连续，故 $F[f > a]$ 为 R 中的开集，而直线上的开集可表示成至多可数个互不相交的开区间的并，故不妨令

$$F[f > a] = \bigcup_i (a_i, b_i)$$

其中 (a_i, b_i) 是 F 的构成区间.

从而由 g 可测，可知 $E[f \circ g > a] = \bigcup_i E[a_i < g < b_i]$ 为可测集.

第四章习题 6

设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, $g(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的可测函数, 则 $f \circ g(x) = f(g(x))$ 在 E 上可测.

(方法二)

证明: 若 $g(x)$ 是 E 上的可测函数, 则 $g(x)$ 总可表示成一系列简单函数 $\{\varphi_n(x)\}$ 的极限, 即

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$$

因为 $f(x)$ 连续, 故

$$f(g(x)) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi_n(x))$$

所以 $f(g(x))$ 是简单函数列的极限, 故为可测函数.

注: 若 $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x)$ 为简单函数,

则 $f(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \chi_{E_i}(x)$ 仍为 E 上简单函数。

七、几乎处处的定义

定义4 设 π 是一个与集合 E 的点 x 有关的命题, 如果存在 E 的子集 M , 满足 $mM=0$, 使得 π 在 $E \setminus M$ 上恒成立, 也就是说, $E \setminus E[\pi \text{ 成立}]$ 是零测度集, 则我们称 π 在 E 上几乎处处成立, 或说 π a. e. 于 E .

例2 $|\tan x| < \infty$ a. e. 于 $\mathbf{R}^1$; $[0, 1]$ 上的狄利克雷函数 $D(x)=0$ a. e. 于 $[0, 1]$.

注意: 根据零测度性质, 由 π_1 a. e. 于 E 且 π_2 a. e. 于 E , 显然可得“ π_1 且 π_2 ”a. e. 于 E , “ π_1 或 π_2 ”a. e. 于 E .

例3 设 $f(x)=g(x)$ a. e. 于 E , 且 $g(x)=h(x)$ a. e. 于 E , 则 $f(x)=h(x)$ a. e. 于 E .

注2：在一零测度集上改变函数的取值不影响函数的可测性

即： 设 $f(x)=g(x)$ a.e.于 E ， $f(x)$ 在 E 上可测， 则 $g(x)$ 在 E 上也可测

证明： 令 $E_1 = E_{[f \neq g]}$ ， $E_2 = E_{[f = g]}$ ， 则 $m E_1 = 0$
从而 $g(x)$ 在 E_1 上可测，

另外 $f(x)$ 在 E_2 上可测， 从而 $g(x)$ 在 E_2 上也可测， 进一步 $g(x)$ 在 $E = E_1 \cup E_2$ 上也可测。

注： 用到了可测函数关于子集、并集的性质