

第二章 点集

一、度量空间、n维欧氏空间

1、度量空间的定义、距离的定义

2、欧几里得距离、n维欧氏空间: 对 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, 规定距离

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$(\mathbf{R}^n, d)$ 称为 n 维欧氏空间, 其中 d 称为欧几里得距离.

3、领域的定义: $\mathbf{R}^n$ 中所有和定点 P_0 之距离小于定数 $\delta > 0$ 的点的全体, 即集合

$$\{P: d(P, P_0) < \delta\}$$

称为点 P_0 之 δ 邻域, 并记为 $U(P_0, \delta)$.

4、点列的收敛: 设 $\{P_n\}$ 为 $\mathbf{R}^m$ 中一点列, $P_0 \in \mathbf{R}^m$, 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $d(P_n, P_0) \rightarrow 0$, 则称点列 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0 . 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \text{ 或 } P_n \rightarrow P_0 (n \rightarrow \infty).$$

用邻域的术语来说就是: 对于 P_0 的任一邻域 $U(P_0)$, 存在某个自然数 N , 使当 $n > N$ 时, $P_n \in U(P_0)$.

5、点集间的距离

两个非空的点集 A, B 的距离定义为 $d(A, B) = \inf_{\substack{P \in A \\ Q \in B}} d(P, Q)$.

6、有界点集的定义

设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中一点集, 如果 $\delta(E) < \infty$, 则称 E 为有界点集.

点集 E 的直径 $\delta(E) = \sup_{\substack{P \in E \\ Q \in E}} d(P, Q)$

E 为有界点集 $\Leftrightarrow$ 存在常数 K , 使对于所有的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, 都有

$$|x_i| \leq K (i=1, 2, \dots, n)$$

$\Leftrightarrow$ 存在常数 K , 对所有 $x \in E$ 有 $d(x, 0) < K$,

这里 $0 = (0, 0, \dots, 0)$, 称为 n 维空间的原点.

7、 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的区间、区间的体积

二、聚点、内点、界点

1、 $\mathbf{R}^n$ 中点的分类 设 E 是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集, P_0 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个定点, 研究 P_0 与 E 的关系.

P_0 为 E 的内点: $\exists U(P_0)$ 使 $U(P_0) \subset E$ 内点一定属于 E

P_0 为 E 的边界点: 对任意 $U(P_0)$, 有 $U(P_0) \cap E \neq \emptyset$, $U(P_0) \cap E^c \neq \emptyset$ 边界点不一定属于 E

P_0 为 E 的聚点: P_0 的任一邻域内都含有无穷多个属于 E 的点 聚点不一定属于 E

下面的三个陈述是等价的:

- (1) P_0 是 E 的聚点;
- (2) 在 P_0 的任一邻域内, 至少含有一个属于 E 而异于 P_0 的点;
- (3) 存在 E 中互异的点所成点列 $\{P_n\}$, 使 $P_n \rightarrow P_0$ ($n \rightarrow \infty$).

P_0 为 E 的外点: $\exists U(P_0)$ 使 $U(P_0) \subset E^c$

P_0 为 E 的孤立点: $\exists U(P_0)$, 使 $U(P_0) \cap E = \{P_0\}$

2、各种点之间的关系

- (1) E 的内点必为 E 的聚点, 但 E 的聚点不一定是 E 的内点, 还可能是 E 的界点.
- (2) E 的内点一定属于 E , E 的外点一定不属于 E , E 的聚点和界点可以属于 E , 也可以不属于 E .
- (3) E 的孤立点必为 E 的界点, 但 E 的界点除可能是 E 的孤立点外, 还可能是 E 的聚点.

3、各种点所成的集合的定义

设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个点集,有

(1) E 的全体内点所成的集合,称为 E 的开核,记为 $\overset{\circ}{E}$.

(2) E 的全体聚点所成的集合,称为 E 的导集,记为 E' .

(3) E 的全体界点所成的集合,称为 E 的边界,记为 ∂E .

(4) $E \cup E'$ 称为 E 的闭包,记为 $\overline{E}$.

$$\overset{\circ}{E} = \{x : \exists U(x) \subset E\}$$

$$E' = \{x : \forall U_o(x) \cap E \neq \emptyset\}$$

$$\overline{E} = \{x : \forall U(x) \cap E \neq \emptyset, U(x) \cap E^c \neq \emptyset\}$$

闭包也可以表示为其他形式, 例如: $\overline{E} = E \cup \partial E = \overset{\circ}{E} \cup \partial E = E' \cup \{E \text{ 的孤立点}\}$

三、开集、闭集

1、开集、闭集的定义

设 $E \subset \mathbf{R}^n$, 如果 E 的每一点都是 E 的内点, 则称 E 为开集. E 为开集 $\Leftrightarrow E \subset \overset{\circ}{E}$, 也即 $E = \overset{\circ}{E} \Leftrightarrow \partial E \cap E = \emptyset$

设 $E \subset \mathbf{R}^n$, 如果 E 的每一个聚点都属于 E , 则称 E 为闭集. E 为闭集 $\Leftrightarrow E' \subset E \Leftrightarrow \overline{E} = E \Leftrightarrow \partial E \subset E$

2、开集、闭集的性质

- (1) 对任何 $E \subset \mathbf{R}^n$, $\overset{\circ}{E}$ 是开集, E' 和 $\overline{E}$ 都是闭集.
- (2) 设 E 是开集, 则 E^c 是闭集; 设 E 是闭集, 则 E^c 是开集.
- (3) 任意多个开集之并仍是开集, 有限多个开集之交仍是开集.
- (4) 任意多个闭集之交仍为闭集, 有限多个闭集之并仍为闭集.
- (5) (海涅—博雷尔有限覆盖定理)

设 F 是一个有界闭集, $\mathcal{M}$ 是一族开集 $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$, 它覆盖了 F (即 $F \subset \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$),

则 $\mathcal{M}$ 中一定存在有限多个开集 $U_1, U_2, \dots, U_m$, 它们同样覆盖了 F

(即 $F \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$). 有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖

四、直线上的开集、闭集的构造

1、构成区间的定义

设 G 是直线上的开集. 如果开区间 $(\alpha, \beta) \subset G$, 而且端点 α, β 不属于 G , 那么称 (α, β) 为 G 的构成区间.

2、余区间的定义

设 A 是直线上的闭集, 称 A 的余集 A^c 的构成区间为 A 的余区间或邻接区间.

3、开集构造定理

直线上任一个非空开集可以表示成有限个或可数个互不相交的构成区间的和集.

4、闭集构造定理

直线上的闭集 F 或者是全直线, 或者是从直线上挖掉有限个或可数个互不相交的开区间(即 F 的余区间)所得到的集.

5、康托尔集 P

(1) 康托尔集的构造

(2) 康托尔集的性质: P 是完备集; P 没有内点, 是一个疏朗集; P 的基数为 c ; P 是闭集

五、紧集：具有有限开覆盖性质的集合

n维欧氏空间中的紧集即为有界闭集。