

2019-2020 第一学期《数学分析》(下)A卷参考答案及评分标准

一、填空题(每题3分, 共9分)

1. $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$; 2. $\frac{4}{3}\pi$; 3. $\frac{1}{2}$.

二、计算题(共58分)

4. (6分) 计算极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

解

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1 \times 1}{1^2 + 1^2} \\ &= \frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{分} \end{aligned}$$

5. (6分) 设 $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{y}{x}}$, 计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= 2ye^{-\arctan \frac{y}{x}} + (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{y}{x}} \cdot (-1) \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2ye^{-\arctan \frac{y}{x}} - xe^{-\arctan \frac{y}{x}} \\ &= (2y - x)e^{-\arctan \frac{y}{x}}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(2y - x)e^{-\arctan \frac{y}{x}} \right] \\ &= (-1)e^{-\arctan \frac{y}{x}} + (2y - x)e^{-\arctan \frac{y}{x}} \cdot (-1) \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= \frac{y^2 - x^2 - xy}{x^2 + y^2} e^{-\arctan \frac{y}{x}}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{分} \end{aligned}$$

6. (6分) 计算二重积分 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, 其中D 为直线 $y = x, y = x + a, y = a$ 和 $y = 3a$ ($a > 0$) 所围成.

解法一 令 $y - x = u, y = v$, 即 $x = v - u, y = v, J = -1$,

$$D' = \{(u, v) | 0 \leq u \leq a, a \leq v \leq 3a\}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

于是有

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{D'} [(v-u)^2 + v^2] \cdot |J| du dv \\ &= \int_0^a du \int_a^{3a} (2v^2 - 2uv + u^2) dv \\ &= 14a^4. \quad \dots\dots\dots 3分\end{aligned}$$

解法二 $D = \{(x, y) | a \leq y \leq 3a, y - a \leq x \leq y\}$,

$$\begin{aligned}I &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_a^{3a} (2ay^2 - a^2y + \frac{1}{3}a^3) dy \\ &= 14a^4. \quad \dots\dots\dots 6分\end{aligned}$$

7. (10分) 计算曲线积分 $\int_L (\frac{-y}{4x^2+y^2} + 3y)dx + (\frac{x}{4x^2+y^2} + 2x)dy$, 其中L是以(1, 0)为中心, 以R为半径($R > 1$)的圆周, 取逆时针方向.

解 首先

$$\int_L \frac{-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x}{4x^2+y^2} dy + \int_L 3y dx + 2x dy = I_1 + I_2,$$

其中 $I_1 = \frac{-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x}{4x^2+y^2} dy$, $I_2 = \int_L 3y dx + 2x dy$. 由Green公式可知,

$$I_2 = \iint_D (2 - 3) dx dy = - \iint_D dx dy = -\pi R^2,$$

其中 $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 \leq R^2\}$. $\dots\dots\dots 4分$

下计算 I_1 . 记 $P(x, y) = \frac{-y}{4x^2+y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{4x^2+y^2}$, 易验证 $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$. 作包含在圆L内的椭圆 $l: 4x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$ 且 r 充分小, 并取顺时针方向. 于是由Green公

式

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{L \cup l} \frac{-y}{4x^2 + y^2} dx + \frac{x}{4x^2 + y^2} dy - \int_l \frac{-y}{4x^2 + y^2} dx + \frac{x}{4x^2 + y^2} dy \\
 &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_l P dx + Q dy \\
 &= - \int_l P dx + Q dy.
 \end{aligned}$$

其中 D_1 是有 L 和 l 围成的闭区域. 椭圆 l 的参数方程为 $x = \frac{1}{2}r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\theta : 2\pi \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 I_2 &= - \int_l P dx + Q dy \\
 &= - \int_{2\pi}^0 \left[\frac{-r \sin \theta}{r^2} \left(\frac{1}{2}r \cos \theta \right)' + \frac{\frac{1}{2}r \cos \theta}{r^2} (r \sin \theta)' \right] d\theta \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

所以 $I = I_1 + I_2 = \pi - \pi R^2$ 6分

8. (10分) 计算第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$, 其中 Σ 是下半球面 $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 取上侧.

解 由于球面 Σ 上的点 (x, y, z) 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 所以

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^{\frac{1}{2}}} = \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy. \quad \dots\dots\dots 3分$$

记平面 $\sigma: z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$, 取下侧. 记 Σ 和 σ 围成的立体为 $\Omega: \{(x, y, z) | -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq z \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, 取内侧. 由 Gauss 公式得

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\Sigma \cup \sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy - \iint_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy \\
 &= - \iiint_{\Omega} (1 + 1 + 1) dx dy dz - \iint_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy \\
 &= -2\pi - 0 \\
 &= -2\pi. \quad \dots\dots\dots 7分
 \end{aligned}$$

9. (10分) 设 $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 求 n 元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ 在单位

球面 $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$ 上的最大值和最小值.

解 球面点集 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ 是紧集, 函数 $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ 是 R^n 上的连续函数, 所以 $f(\vec{x})$ 在紧集 $\{\vec{x} | x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ 上必有最大值

和最小值. 作辅助函数 $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{k=1}^n a_k x_k + \lambda(\sum_{k=1}^n x_k^2 - 1)$3分

易知

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{x_1} = a_1 + 2\lambda x_1, \\ L_{x_2} = a_2 + 2\lambda x_2, \\ \dots \\ L_{x_n} = a_n + 2\lambda x_n, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1. \end{array} \right.$$

令 $L_{x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$. 可得: $x_k = -\frac{a_k}{(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}}}, k = 1, 2, \dots, n, \lambda = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}}$

或 $x_k = \frac{a_k}{(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}}}, k = 1, 2, \dots, n, \lambda = -\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}}$. 于是有 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$\sum_{k=1}^n a_k x_k = \pm(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}}$. 所以 f 在球面 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ 上的最大值为 $(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}}$, 最

小值为 $-(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}}$7分

10. (10分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x^2 z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = xy$, 平面 $y = x$, $x = 1$ 和 $z = 0$ 所围成.

解 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq xy, xy \in D_{xy}\}$, 其中 $D_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$2分

于是

$$\begin{aligned}& \iiint_{\Omega} x^2 z dx dy dz \\&= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{xy} x^2 z dz \\&= \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} x^4 y^2 dx dy \\&= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x x^4 y^2 dy \\&= \frac{1}{48}. \quad \dots\dots\dots 8分\end{aligned}$$

三、证明题(共33分)

11. (10分) 设 $I(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \sin(2xt) dt$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 证明:

(1) $I(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续;

(2) $I''(x) - (4x^2 - 2)I(x) + 2x = 0$.

证明 (1) 易知 $f(x, t)$ 在 $(-\infty, +\infty) \times (0, \infty)$ 上连续; 又 $|e^{-t^2} \sin 2xt| \leq e^{-t^2}$, 且 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 由 Weierstrass 定理知 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin 2xt dt$ 关于 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛. 由连续性定理, $I(x)$ 关于 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. $\dots\dots\dots 5分$

(2) 记 $f(x, t) = e^{-t^2} \sin 2xt$, 则 $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) = 2te^{-t^2} \cos 2xt$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) = -4t^2 \sin 2xt$. 注意到在 $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$ 上成立: $|\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)| = |2te^{-t^2} \cos 2xt| \leq 2te^{-t^2}$, 且 $\int_0^{+\infty} 2te^{-t^2} dt$ 收敛; $|\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t)| = |-4t^2 e^{-t^2} \sin 2xt| \leq 4t^2 e^{-t^2}$, 且 $\int_0^{+\infty} 4t^2 e^{-t^2} dt$ 收敛. 依据 Weierstrass 判别法知反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$ 和 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛. 由可导性定理和分部积分法可得

$$\begin{aligned}I''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) dt \\&= -4 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \sin 2xt dt \\&= 2 \int_0^{+\infty} t \sin 2xt de^{-t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[te^{-t^2} \sin 2xt \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t^2} d(t \sin 2xt) \right] \\
&= -2 \left[I(x) - x \int_0^{+\infty} \cos 2xd e^{-t^2} \right] \\
&= -2 \left[I(x) - x \left(e^{-t^2} \cos 2xt \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t^2} d \cos 2xt \right) \right] \\
&= (4x^2 - 2)I(x) - 2x.
\end{aligned}$$

所以成立

$$I''(x) - (4x^2 - 2)I(x) + 2x = 0. \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

证毕

12. (9分) 证明: 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} (a > 0)$ 上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于常数.

证明 在曲面 Σ : $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} (a > 0)$ 上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则 $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$. 记 $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$ 则 $F_x(P_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, $F_y(P_0) = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$, $F_z(P_0) = \frac{1}{2\sqrt{z_0}}$. 曲面 Σ 在点 P_0 处的切平面 π 方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0.$$

即

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1. \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

易见, 切平面 π 在三坐标轴上的截距之和 $\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0}$ 满足: $\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a$. 证毕 $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

13. (6分) 设二元函数: $f(x, y) = \frac{1}{1 - xy}$, $(x, y) \in D = [0, 1) \times [0, 1)$, 证明: f 在 D 上不一致连续.

证明 取 $\varepsilon_0 = 1$. 对 $\forall \delta > 0$, ($\delta < \frac{1}{10}$), 取 $P_1(1 - \delta, 1 - \frac{\delta}{2})$, $P_2(1 - \delta, 1 - \frac{\delta}{4})$, 易见 $P_1, P_2 \in D$, 且 $d(P_1, P_2) = \frac{\delta}{4} < \delta$. 但是,

$$\begin{aligned}
|f(P_1) - f(P_2)| &= \left| \frac{1}{1 - (1 - \delta)(1 - \frac{\delta}{2})} - \frac{1}{1 - (1 - \delta)(1 - \frac{\delta}{4})} \right| \\
&= 2 \frac{1 - \delta}{(3 - \delta)(5 - \delta)\delta} \geq \frac{2}{15} \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) \\
&> \frac{6}{5} > \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

所以函数 $f(x, y) = \frac{1}{1-xy}$ 在 D 上不一致连续. 证毕 6分

14. (8分) 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [-\pi, 0), \\ 0 & , \quad x \in [0, \pi), \end{cases}$$

(1) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数展式;

(2) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(1) 解

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 1 dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 1 \cos nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{-1}{n\pi} [1 - (-1)^n], \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin nx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin(2k+1)}{2k+1} + \dots \right] \\ &= \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0), \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pm\pi, \quad \dots\dots\dots 5分 \\ 0, & x \in [0, \pi). \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 证明 由 Parseval 等式知

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

即

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 1 dx = 1.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \dots\dots\dots 3\text{分}$$

证毕