

**安徽大学2023-2024学年第一学期
数学分析（下）期末考试试卷（B卷）**

一、填空题(每空5分, 计20分)

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^3 + y^3}$ _____; 2. 设 $b > a > 0$, 则 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx =$ _____;
3. 函数 $z = x^2 + xy + y^2$ 在 $(1,1)$ 处的方向导数的最小值为 _____;
4. $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz =$ _____.

二、计算题(记50分)

5. (10分) 计算二重积分 $\iint_D e^{x+y} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$;
6. (10分) 计算第二类曲线积分 $\int_L y dx + z dy + x dz$, 其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 从 x 轴正向看, 此圆周的方向是逆时针方向;
7. (10分) 计算第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2 + x^2}} dx dz$, 其中 Σ 是抛物面 $y = x^2 + z^2$ 与平面 $z = 1$ 和 $z = 2$ 所围立体的表面, 方向取外侧;
8. (10分) 当 $x > 0, y > 0, z > 0$ 时, 计算函数

$$f(x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$$

在单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的最大值;

9. (10分) 设 $z = f(x^2 - y^2, 2xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

三、解析题(10分)

10. (10分) 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 的连续性和可微性.

四、证明题(20分)

11. (10分) . 证明曲面 $f(2x - 3z, 2y - 4z) = 0$ 的所有切平面都与一定直线平行, 其中函数 f 具有连续偏导数;

12. (10分) . 记 $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin 2xt dt$, 证明:

$$\dot{I}(x) - 2xI(x) + 1 = 0.$$