

安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《概率论》期末试卷（一卷）

（闭卷，时间 120 分钟）

考场登记表序号_____

题号	一	二	三	总分
得分				

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

- 设任意两个随机事件 A 和 B 满足条件 $AB = \overline{A}\overline{B}$ ，则 ()

(A) $A \cup B = \emptyset$ (B) $A \cup B = \Omega$
(C) $A \cup B = A$ (D) $A \cup B = B$
- 设 A, B 为随机事件，且 $P(B) > 0$ ， $P(A|B) = 1$ ，则必有 ()

(A) $P(A \cup B) > P(A)$ (B) $P(A \cup B) > P(B)$
(C) $P(A \cup B) = P(A)$ (D) $P(A \cup B) = P(B)$
- 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n > 1$) 独立同分布，其方差为 $\sigma^2 > 0$ 。令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，则 ()

(A) $\text{cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$ (B) $\text{cov}(X_1, Y) = \sigma^2$
(C) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$ (D) $D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$
- 已知离散型随机变量 X 的可能取值为 $-2, 0, 2, \sqrt{5}$ ，相应的概率依次为 $\frac{1}{a}, \frac{3}{2a}, \frac{5}{4a}, \frac{7}{8a}$ ，则 $P\{|X| \leq 2 | X \geq 0\}$ 等于 ()

(A) $\frac{21}{29}$ (B) $\frac{22}{29}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$
- 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数， $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度函数，若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为某个分布的概率密度函数，则 a, b 应满足 ()

(A) $2a + 3b = 4$ (B) $3a + 2b = 4$ (C) $a + b = 1$ (D) $a + b = 2$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设两两独立的三事件 A, B, C 满足条件 $ABC = \emptyset$, $P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$, 且已知

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}, \text{ 则 } P(A) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 且 $E[(X-1)(X-2)] = 1$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9, 若 $Z = X - 0.4$, 则 Y 与 Z 的相关系数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ 0.2 & -1 < x \leq 0, \\ 1 & x > 0, \end{cases}$$

则 $P(X=0) = \underline{\hspace{2cm}};$

5. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \mu$, 方差 $D(X) = \sigma^2$, 则由切比雪夫不等式, 有

$$P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、分析计算题（共 70 分）

1. (10 分) 实习生用一台机器接连独立制造的 3 个同种零件, 第 i 个零件是不合格品的概率为

$$p_i = \frac{1}{1+i} \quad (i=1,2,3). \text{ 以 } X \text{ 表示 3 个零件中合格品的个数, 求 } P\{X=2\}.$$

2. (12 分) 若 (X, Y) 的联合概率分布为

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.1
1	0	0.2	c

且 $P\{XY \neq 0\} = 0.4$, $P\{Y \leq 0 | X \leq 0\} = \frac{2}{3}$. 计算:

(1) a, b, c 的值; (2) X 及 Y 的边际概率分布 (边际分布列); (3) $X+Y$ 的概率分布 (分布列).

3. (12 分) 玻璃杯成箱出售, 每箱 20 只, 假设各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率分别为 0.8, 0.1, 0.1. 一位顾客欲购一箱玻璃杯, 在购买时售货员随意取一箱, 而顾客开箱随机地查看 4 只, 若无残次品, 则买下该箱玻璃杯, 否则退回. 求:

(1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率; (2) 在顾客买下的一箱中, 确实没有残次品的概率.

4. (12 分) 在长为 a 的线段的中点两侧随机独立地各取一点, 求两点间的距离小于 $a/3$ 的概率。

5. (14 分) 设随机变量 (X, Y) 具有概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{8}, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求: (1) 相关系数 ρ_{XY} ; (2) 方差 $D(X+Y)$.

6. (10 分) 阐述随机变量序列依概率收敛、 r 阶收敛的定义以及它们之间的关系。