

2023 – 2024 学年第 1 学期
安徽大学数学科学学院《高等代数 (上)》模拟试卷 A
(闭卷笔试 120 分钟)

题号	一	二	三	总分
分数				

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

得分	
----	--

1. 已知 5 阶行列式 $|A| = 2, |B| = 3$, 求 10 阶行列式 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} =$ _____.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^n =$ _____.

3. 矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的解 $X =$ _____.

4. $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & 8 & -8 & x^3 \end{vmatrix}$ 的根为 _____.

5. 在 4 维行向量空间 $\mathbb{F}^4$ 中, $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), V_2 = L(\beta_1, \beta_2)$, 其中 $\alpha_1 = (1, -1, 1, 1), \alpha_2 = (-2, 1, 2, -1), \alpha_3 = (-4, 3, 0, -3), \beta_1 = (1, 2, 1, 0), \beta_2 = (4, 2, -2, 1)$, 则 $V_1 + V_2$ 的维数为 _____, $V_1 \cap V_2$ 的维数为 _____.

二、简答题 (每问 5 分, 共 20 分, 判断叙述是否正确并简要说明理由.)

得分	
----	--

6. 设三个向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s; \beta_1, \dots, \beta_t; \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3 , 则 $r_3 \leq r_1 + r_2$.

7. 已知 A 是 $s \times n$ 的矩阵, B 是 $m \times n$ 的矩阵, X 是 $n \times 1$ 的列向量, 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解的充要条件是 A 与 B 的行向量组等价.

8. 已知 A, B 分别为 $m \times n, n \times s$ 矩阵, 并且 $r(B) = n$, 若 $AB = O$, 则 $A = O$.

9. 设 $\mathbb{F}$ 是数域. 存在矩阵 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 使得 $AB - BA$ 为单位阵.

三、解答题 (每小题 12 分, 共 60 分, 需给出详细解答过程. 禁止使用课本习题的结论或其他参考书中的结论.)

得分	
----	--

10. 设 $|A|$ 是 n 阶行列式, $|A|$ 的第 (i, j) 元素 $a_{ij} = |i - j|$, 试求 $|A|$ 的值.

11. 设 A 是二阶矩阵, 若有 $n > 2$, 使 $A^n = O$, 求证: $A^2 = O$.

12. 在 3 维行向量空间 $\mathbb{F}^3$ 中, 求从基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵, 其中
 $\varepsilon_1 = (1, 1, 0), \varepsilon_2 = (2, 1, 3), \varepsilon_3 = (0, 1, -1),$
 $\eta_1 = (1, 0, 0), \eta_2 = (2, 1, 0), \eta_3 = (-1, 0, 1).$

13. 给定数域 $\mathbb{F}$, 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 级可逆方阵, A 的前 r 个行向量组成的矩阵为 B ,
 后 $n-r$ 个行向量组成的矩阵为 C , n 元线性方程组 $BX = \mathbf{0}$ 与 $CX = \mathbf{0}$ 的解空间分别为
 V_1, V_2 , 证 $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$.

14. 设 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 是所有 2 阶实矩阵构成的实线性空间, $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上线性变换, 且对任意
 $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \mathcal{A}(X) = PX$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

- (1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵
 A .
 (2) 求 $\mathcal{A}$ 的核的基与像的基.