

# 安徽大学 2022—2023 学年第一学期

## 《高等代数（上）》 考试试卷（A 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

考场登记表序号\_\_\_\_\_

| 题号  | 一 | 二 | 三、1 | 三、2 | 三、3 | 三、4 | 总分 |
|-----|---|---|-----|-----|-----|-----|----|
| 得分  |   |   |     |     |     |     |    |
| 阅卷人 |   |   |     |     |     |     |    |

一、填空题（每空 4 分，共 20 分）填写不完整或结果没有化简均不得分。

得分

1. 设  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$  是  $1, 2, \dots, 6, 7$  的排列，其逆序数为 10。则排列  $x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1$  的逆序数为\_\_\_\_\_。

2. 在方阵  $A = \begin{pmatrix} x & 2 & 1 & 2 \\ x & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & x \\ 9 & 4 & x & 0 \end{pmatrix}$  的行列式中， $x^3$  的系数为\_\_\_\_\_。

3. 分别求方阵  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{2022} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-2022} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，以及  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2022} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、简答题（每问 5 分，共 20 分）判断叙述是否正确并简要说明理由。

得分

1. 设二阶方阵  $A$  满足  $A^2 = I$ ，则总有  $A = \pm I$ 。
2. 设  $n$  阶实方阵  $B$  满足  $BB^T = O$ ，则总有  $B = O$ 。
3. 设  $n \geq 2$ ，考虑  $\mathbb{R}^n$  中的线性子空间  $X, Y$ 。则其并  $X \cup Y$  是线性子空间当且仅当  $X \cup Y = X + Y$ 。
4. 对于任意  $n$  阶方阵  $A$ ，总存在方阵  $B$  使得  $A = B^*$ 。

三、解答题（每小题 15 分，共 60 分）需给出详细解答过程。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。

1. 解矩阵方程  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 13 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ 。

得分

2. 设  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$ ，其中  $n \geq 2$ ， $a_{ij} = \begin{cases} a+x, & j=1 \\ x-j, & i=j \geq 2 \\ j, & i \neq j \text{ 且 } j \geq 2 \end{cases}$ 。

得分

这里， $x$  和  $a$  均为未定元。试计算行列式  $|A|$ 。

3. 给定四维向量组  $a_1 = (1, 2, -1, 1)$ ， $a_2 = (1, 3, -1, 2)$ ， $a_3 = (2, 5, 0, 5)$ ， $a_4 = (1, 2, 1, 3)$ ， $a_5 = (5, 12, 1, 13)$ 。试求出其所有的极大线性无关组。

得分

4. 设 $n$ 阶实方阵 $A$ 满足 $A^2 + A = 2I$ 。考虑 $U = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid A\alpha = \alpha\}$ 且 $V = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid A\alpha = -2\alpha\}$ 。这里， $\mathbb{R}^n$ 表示 $n$ 维实的列向量空间。  
试证明： $U$ 和 $V$ 均为 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，且满足 $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ 。

|    |  |
|----|--|
| 得分 |  |
|----|--|

## 参考答案与评分标准

一、填空题（每空 4 分，填写不完整或结果没有化简均不得分）。

$$11, \quad 3, \quad \begin{pmatrix} 2^{2022} & 0 \\ 1 - 2^{2022} & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{2022}} & 0 \\ \frac{1}{2^{2022}} - 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2^{1011} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

二、简答题（每小题 5 分，判断正误 1 分，说明理由 4 分，可酌情给分）。

1. 错误。例如： $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A^2 = I$ 。
2. 正确。计算  $\text{tr}(BB^T) = \sum_{ij} b_{ij}^2$ , 为零, 又  $B$  为实方阵, 故  $B = 0$ 。
3. 正确。首先, 我们总有  $X \cup Y \subseteq X + Y$ , 且  $X + Y$  总是线性子空间。若  $X \cup Y$  是线性子空间, 则对加法封闭。故,  $X + Y \subseteq X \cup Y$ 。
4. 错误。回顾  $B^*$  的 rank 只能取值为  $n, 1, 0$ 。故, 存在方阵  $A$ , 其不是任何方阵的伴随方阵。

三、解答题（每小题 15 分，需给出详细解答过程，可酌情给分。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。）

1. 两边乘以  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , 同时除以 -3, 得到如下

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

两边取转置, 等同于解两个非齐次方程。

(5 分)

得到结果如下:

$$X \text{ 的转置} = \begin{pmatrix} (5-3t)/2 & (5-3s)/2 \\ (3-t)/2 & (-1-s)/2 \\ t & s \end{pmatrix}$$

这是,  $s, t$  为参数。取转置, 即可得到所求。

(15 分)

2. 第一列中提取  $(x+a)$ , 故  $|A| = (x+a)|A'|$ , 其中  $A'$  是将  $A$  的第一列全换成 1 所得的新方阵。

(3 分)

注意到在  $|A'|$  中,  $x$  的次数为  $n-1$ , 首项系数为 1。

注意到,  $x=4, 6, \dots, 2n$ , 行列式为 0。故,  $|A'| = (x-4)(x-6)\dots(x-2n)$ 。

(12 分)

故,  $|A| = (x+a)(x-4)(x-6)\dots(x-2n)$ 。

(15 分)

3. 对矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 12 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 13 \end{pmatrix}$  作行变换为  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$ , 故秩为 3。 (5 分)

考虑相应的三元子集, 共 10 组, 我们发现仅有的极大无关组为

$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \{\beta_1, \beta_2, \beta_4\}, \{\beta_1, \beta_2, \beta_5\}, \{\beta_1, \beta_3, \beta_4\}, \{\beta_1, \beta_3, \beta_5\}, \{\beta_1, \beta_4, \beta_5\}$

(这里需要论证一番)

故, 将这些  $\beta$  换为相应的  $\alpha$  即可, 共六组。 (15 分)

4. 根据定义 (加法和数乘封闭), 可以验证  $U$  和  $V$  均为  $\mathbb{R}^n$  的线性子空间。 (3 分)

可以直接证明  $U \cap V = 0$  (需细节)。 (6 分)

对于任意向量  $\alpha$ , 考虑分解

$$\alpha = (A - I)\alpha + (A + 2I)\alpha,$$

前者落在  $V$  中, 后者落在  $U$  中 (需要论证)。证毕! (15 分)