

安徽大学2022-2023学年第一学期

《高等代数（上）》期末考试试卷（B卷）

（闭卷 时间120分钟）

考场登记表序号 _____

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

一、填空题 (每小题4分, 共20分)

得分

1. 设 A 是3阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, $|A| = 2$, 则 $|A^*| =$ _____.

2. 5阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$ _____.

3. 设 n 是正整数, 则矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n =$ _____.

4. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是线性空间 V 的基, $\eta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\eta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\eta_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\eta_4 = \varepsilon_1$. 若向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 $(1, -1, 1, -1)$, 则 α 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标为_____.

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的基, $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, 从 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的过渡矩阵为 P , 则行列式 $|P| =$ _____.

二、选择题 (每小题3分, 共15分)

得分

6. A, B 均是 n 阶矩阵, 则下列命题正确的是 ()
- (A) AB 的秩大于 A 的秩. (B) $AB = BA$.
- (C) $AB = 0$ 当且仅当 $A = 0$ 或 $B = 0$. (D) 可能有 $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

7. 设 A, B, C, D 为 n 阶矩阵, O 为 n 阶零矩阵, $a_i, b_i, c_i, d_i (i = 1, 2)$ 为实数, 则下列正确的是 ()

- (A)
$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$
- (B)
$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & D \end{vmatrix} = -|A||B|.$$
- (C)
$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A|^2 - |B|^2.$$
- (D)
$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}.$$

8. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有零解的充要条件是 ()

- (A) A 的列向量组线性相关.
 (B) A 的列向量组线性无关.
 (C) A 的行向量组线性相关.
 (D) A 的行向量组线性无关.

9. 设 A, B 都是 2 阶方阵, $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, A^*, B^* 分别是 A, B 的伴随矩阵, 且 $|A| = 2, |B| = 3$, 则 $C^* =$ ()

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}.$ (B) $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}.$
 (C) $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}.$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}.$

10. 设 V_1, V_2, V_3 都是线性空间 V 的子空间, 则 $V_1 + V_2 + V_3$ 是直和的充要条件是 ()

- (A) $V = V_1 + V_2 + V_3.$
 (B) $V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{0\}$, 且 $V_2 \cap V_3 = \{0\}.$
 (C) $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}.$
 (D) 对任意 $1 \leq i \neq j \leq 3, V_i \cap V_j = \{0\}.$

三、计算题 (每小题10分, 共30分)

得分	
----	--

11 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & & \\ & b & a+b & a & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & b & a+b & a \\ & & & & b & a+b \end{vmatrix}$, 其中 $a \neq b$.

- 12 设在4维行向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中, V_1 是由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的子空间, V_2 是由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 生成的子空间, 其中 $\alpha_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, 2, 1)$, $\alpha_3 = (2, 1, 0, 1)$, $\beta_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $\beta_2 = (1, -1, -3, -1)$, $\beta_3 = (-1, 1, -1, 1)$. 求 $V_1 + V_2$ 的一组基.

13. 设 a 是参数, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 - x_5 = a \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 7x_4 + x_5 = -12. \end{cases}$$

问 a 取何值时使得方程组有解? 并在有解时求其全部解.

四、证明题(每小题10分, 共30分)

得分

14. 证明任何数域 $\mathbb{F}$ 均包含有理数域 $\mathbb{Q}$.

15. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 证明: V 不能表示成它的两个真子空间的并。

16. 设 A 是 $m \times n$ 实方阵, A^T 为 A 的转置. 证明: $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$, 并举例说明上述结论对复矩阵不成立.

五、论述题(共5分, 开放式回答, 无标准答案)

得分	
----	--

17. 请谈谈你对矩阵的秩的理解和认识.