

北 京 交 通 大 学

2016-2017-1-《微积分 B (上)》期末考试 参考答案

一、单项选择题 (每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 下列说法中与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 定义等价的说法是 【 A 】.

(A) $\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists N, \forall n \geq N, |x_n - a| < 100\varepsilon;$ (B) $\forall \varepsilon > 1, \exists N, \forall n > N, |x_n - a| < \varepsilon;$

(C) $\forall N, \exists \varepsilon > 0, \forall n > N, |x_n - a| < \varepsilon;$ (D) $\exists N, \forall \varepsilon > 0, \forall n > N, |x_n - a| < \varepsilon;$

2. 已知函数 $f(u)$ 可导, $y = f(x^3)$ 当自变量 x 在 $x = -1$ 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时, 相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.3, 则 $f'(-1) =$ 【 A 】.

(A) -1 (B) 0.1 (C) 1 (D) 0.5

3. 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -\frac{1}{2}$, 则在点 $x = a$ 处 【 B 】.

(A) $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$. (B) $f(x)$ 取得极大值
(C) $f(x)$ 取得极小值 (D) $f(x)$ 的导数不存在.

4. 在下列等式中, 正确的结果是 【 C 】.

(A) $\int f'(x) dx = f(x)$ (B) $\int df(x) = f(x)$
(C) $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$ (D) $d \int f(x) dx = f(x).$

5. 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 【 A 】.

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数;
(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数;
(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数;
(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必为单调增函数.

二、填空题 (每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 极坐标方程 $\rho = a(1 + \cos \theta)$ 在 $(a, \frac{\pi}{2})$ 点处的切线的直角坐标方程为 $y = x + a$.

2. 设 $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$, 则 $dF(x^2) =$ $2x\sqrt{1+x^4} dx$.

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{2-x}} = \frac{\pi}{4e}$.

解: 原式 $= \int_1^{+\infty} \frac{de^x}{e^{2x} + e^2} = \frac{1}{e} \arctan \frac{e^x}{e} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4e}$.

4. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) = x - 1$.

5. 微分方程 $y'' + y = x \cos 2x + e^{2x}$ 的一个特解形式可设为

$y^* = (ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x + ke^{2x}$.

三、(每小题 8 分, 满分 16 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} e^{-x}$.

解 1: 原式 $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - x]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{2}(\frac{1}{x})^2 + o(\frac{1}{x^2})) - x]} = e^{-\frac{1}{2}}$.

解 2: 令 $\frac{1}{x} = t$, 则原式 $= e^{\lim_{t \rightarrow 0^+} [t^2 \ln(1+t) - \frac{1}{t}]} = e^{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+t} - 1}{2t}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

2. 求 $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

解: 设 $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int e^t 2t dt = 2 \int t de^t = 2 \left(te^t - \int e^t dt \right) \\ &= 2(t-1)e^t + c = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + c. \end{aligned}$$

四、(每小题 8 分, 满分 16 分)

1. 计算积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx$

解: 利用奇偶函数在对称区间上的积分性质有 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos^2 x dx = 0$. 2 分

$$\text{原式} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{8}$$
 8 分

2. 设 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = te^t \end{cases} (t \neq -1)$ 确定了函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^t(1+t)}{2t+2} = \frac{e^t}{2}$ 4 分

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{e^t}{2} \frac{1}{2t+2} = \frac{e^t}{4(t+1)}.$$
 8 分

五、(满分 8 分) $f(x)$ 是二阶连续可导的奇函数, 且满足 $f'(x) - \int_0^x f(t-x)dt = 2$, 求 $f(x)$.

解: 对积分 $\int_0^x f(t-x)dt$ 进行换元, 设 $t-x = -u$, 则 $dt = -du$,

$$\text{故 } \int_0^x f(t-x)dt = \int_x^0 f(-u)(-du) = \int_0^x f(-u)du = \int_0^x -f(u)du, \quad 2 \text{ 分}$$

$$\text{故方程变为 } f'(x) + \int_0^x f(u)du = 2 \quad 4 \text{ 分}$$

注意到 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(0) = 0$; 由上式得 $f'(0) = 2$,

$$\text{归结为求解初值问题 } \begin{cases} f''(x) + f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 2 \end{cases} \quad 6 \text{ 分}$$

特征方程为 $r^2 + 1 = 0, r = \pm i$, 于是通解为

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

代入初值求得常数 $C_1 = 0, C_2 = 2$ 故所求函数为 $f(x) = 2 \sin x$ 8 分

六、(满分 8 分) (1) 利用微分中值定理证积分中值定理, 即设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ 使得 } \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

证法 1: 设 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 满足拉格朗日中值定理的条件,

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a), \text{ 即 } \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

证法 2: 设 $F(x) = (b-a) \int_a^x f(t)dt - (x-a) \int_a^b f(t)dt$,

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $F(a) = F(b) = 0$.

故由罗尔定理知 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

六、(满分 8 分) (2) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足 $f(0) = 0$, $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$,

则 $\exists \xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$.

证: 设 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(0) = 0$.

因为 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$, 可得 $\int_0^1 (f(x) - x)dx = 0$,

由 (1), $\exists \eta \in (0, 1)$, 使得 $0 = \int_0^1 F(x)dx = F(\eta)(1-0)$.

于是, 对 $F(x)$ 在 $[0, \eta]$ 上用罗尔定理, 知 $\exists \xi \in (0, 1)$, 使得

$$F'(\xi) = 0, \quad \text{即} \quad f'(\xi) = 1.$$

七、(满分 8 分) 已知函数 $y = f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, 求: (1) 函数的单调区间以及极值; (2) 函数图形的凹凸区间和拐点; (3) 函数图形的渐近线.

$$\text{解: } y' = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}; \quad y'' = e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^3}.$$

(1) 当 $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 时, $y' > 0$; 当 $x \in (0, 1)$ 时, $y' < 0$.

因此, 函数的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $[1, +\infty)$;

函数的单调递减区间为 $(0, 1]$.

没有极大值, 极小值为 $f(1) = \frac{1}{e}$.

(2) 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $y'' < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 所以,

函数的上凸区间为 $(-\infty, 0)$, 凹区间为 $(0, +\infty)$.

函数在 $x = 0$ 处没有定义, 故拐点不存在.

(3) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$, 所以 $x=0$ 是垂直渐近线;

$$\text{又由于 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1,$$

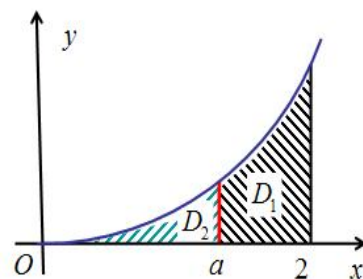
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) = 1,$$

所以, 函数图形的斜渐近线为 $y = x + 1$.

八、(满分 8 分) 设 D_1 是抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$

及 $y = 0$ 所围成的平面区域; D_2 是抛物线 $y = 2x^2$ 和直线

$x = a, y = 0$ 所围成的平面区域, 其中 $0 < a < 2$.



(1) D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为 V_1 ; D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积为 V_2 , 求 V_1 和 V_2 ; (2) 当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值, 并求出最大值.

$$\text{解: (1) } V_1 = \pi \int_a^2 (2x^2)^2 dx = \pi \int_a^2 4x^4 dx = \frac{4}{5} \pi (32 - a^5); \quad \cdots 2 \text{ 分}$$

$$V_2 = \int_0^a 2\pi x \cdot 2x^2 dx = 4\pi \int_0^a x^3 dx = \pi a^4. \quad \cdots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 设 } V = V_1 + V_2 = \frac{4}{5} \pi (32 - a^5) + \pi a^4, \text{ 则}$$

$$V' = 4\pi a^3 (1 - a), \quad \cdots 6 \text{ 分}$$

因此, $a = 1$ 是满足 $0 < a < 2$ 的唯一的驻点, 且 $V''(1) = -4\pi < 0$,

因此, $a = 1$ 是极大值点即最大值点, 此时 $V_1 + V_2$ 取得最大值

$$V_{\max} = V(1) = \frac{129}{5} \pi. \quad \cdots 8 \text{ 分}$$

九、(满分 6 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明:

$$(1) \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) f''(x) dx;$$

$$(2) \text{ 设 } M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|, \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M}{12} (b-a)^3.$$

$$\text{证明: (1) } \int_a^b (x-a)(x-b) f''(x) dx = \int_a^b (x-a)(x-b) df'(x)$$

$$\begin{aligned} &= (x-a)(x-b)f'(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)d((x-a)(x-b)) \\ &= -\int_a^b f'(x)(2x-(a+b))dx \\ &= -\int_a^b (2x-(a+b))df(x) = -(2x-(a+b))f(x) \Big|_a^b + 2\int_a^b f(x)dx \\ &= 2\int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

移项, 得 $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$ (4 分)

(2) 由 (1) 得

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx \right| \leq \frac{1}{2} M \int_a^b |(x-a)(x-b)|dx \\ &= \frac{M}{12} (b-a)^3 \end{aligned}$$

因此, $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M}{12} (b-a)^3$. (6 分)

北 京 交 通 大 学

2017-2018-1-《微积分 B (上)》期末考试 参考答案

一、单项选择题 (每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 设函数 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷型间断点 $x_0 = 2$ 和可去间断点 $x_1 = 1$, 则 【 A 】.

(A) $a = 2, b = e$; (B) $a = 2, b = 1$; (C) $a = 0, b = 1$; (D) $a = 1, b = e$.

2. 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x + 2, f'(0) = 0$, 则 【 B 】.

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

解: 将 $f'(0) = 0$ 代入原方程, 易知 $f''(0) = 2 \neq 0$, 故 $x = 0$ 是极值点;

3. 设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) < 0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$ 的大小顺序是 【 B 】.

(A) $f'(1) < f'(0) < f(1) - f(0)$ (B) $f'(1) < f(1) - f(0) < f'(0)$

(C) $f(1) - f(0) < f'(1) < f'(0)$ (D) 无法判断.

4. 设 $f(x)$ 处处可导, 则 【 A 】.

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$;

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$.

5. 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解是 【 D 】.

(A) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$; (B) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + (C_1 + C_2) y_3$;

(C) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$; (D) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$;

二、填空题 (每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 曲线 $y^2 = x^3$ 在点 (4, 8) 处的曲率是 $\frac{3}{80\sqrt{10}}$.

2. 设 $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3} dt$, 则 $dF(x^2) = 2x\sqrt{1+x^6} dx$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n} = e^{\int_0^{\ln 2} (1+x) dx} = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$.

4. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x^2 + \int_0^1 xf(t)dt$, 则 $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x$.

5. 微分方程 $y'' + y = x \sin 2x + e^{2x}$ 的一个特解形式可设为

$$y^* = (ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x + ke^{2x}.$$

三、(每小题 8 分, 满分 16 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[1 + (x + 2^x - 1) \right]^{\frac{1}{x + 2^x - 1}} \right\}^{1 + \frac{2^x - 1}{x}} = e^{1 + \ln 2} = 2e$.

2.
$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+x+1}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(-x^2+x+1)}{\sqrt{-x^2+x+1}} + \frac{3}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}} \\ &= -\sqrt{-x^2+x+1} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C \\ &= -\sqrt{-x^2+x+1} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

四、(每小题 8 分, 满分 16 分)

1. 计算积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+x^2} + \sin^2 x \right) \cos^2 x dx$.

解: 利用奇偶函数在对称区间上的积分性质有 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^2 x dx = 0$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x - \sin^4 x dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

2. 设 $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = te^{2t} \end{cases} (t \neq -\frac{1}{2})$ 确定了函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2t}(1+2t)}{2t+1} = e^{2t};$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2e^{2t} \frac{1}{2t+1} = \frac{2e^{2t}}{2t+1}.$$

五、(满分 8 分) 设 $f(x)$ 可导, 满足方程 $f(x) = \sin x - \int_0^x f(x-t)dt$, 求 $f(x)$.

解: 对积分 $\int_0^x f(x-t)dt$ 进行换元, 设 $x-t=u$, 则 $dt=-du$, 故

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u)du \quad 2 \text{ 分}$$

故方程变为

$$f(x) = \sin x - \int_0^x f(u)du \quad \text{两边求导得}$$

$$f'(x) = \cos x - f(x) \quad \text{注意到 } f(0) = 0,$$

归结为求解初值问题 $\begin{cases} f'(x) + f(x) = \cos x \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad 4 \text{ 分}$

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{-\int 1 dx} \left[\int \cos x e^{\int 1 dx} dx + C \right] = e^{-x} \left[\int \cos x e^x dx + C \right] \\ &= e^{-x} \left[\frac{1}{2} (\cos x + \sin x) e^x + C \right] \quad 6 \text{ 分}\end{aligned}$$

代入初值 $f(0) = 0$ 求得常数 $C = -\frac{1}{2}$ 故所求函数为

$$f(x) = \frac{1}{2} (\cos x + \sin x - e^{-x}) \quad 8 \text{ 分}$$

六、(满分 8 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(2) 存在不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

证明: (1) 令 $g(x) = f(x) + x - 1$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $g(0) = -1 < 0$, $g(1) = 1 > 0$,

故由零点定理知存在 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$g(\xi) = f(\xi) + \xi - 1 = 0, \quad \text{即} \quad f(\xi) = 1 - \xi.$$

(2) 根据拉格朗日中值定理, 存在 $\eta \in (0, \xi) \subset (0,1)$, $\zeta \in (\xi, 1) \subset (0,1)$, 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{1 - \xi}{\xi}, \quad f'(\zeta) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{\xi}{1 - \xi}, \quad 6 \text{ 分}$$

$$\text{于是, } f'(\eta)f'(\zeta) = \frac{1 - \xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{1 - \xi} = 1. \quad 8 \text{ 分}$$

七、(满分 8 分) (1) 讨论函数 $f(x) = xe^{-x}$ 的单调性, 并求其极值; (2) 讨论方程 $x = ae^x$ 的实根个数.

$$\text{解: (1) } \because f'(x) = (1-x)e^{-x} \begin{cases} > 0, & x < 1, \\ = 0, & x = 1, \\ < 0, & x > 1, \end{cases} \quad 2 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) \in \uparrow (-\infty, 1), f(x) \in \downarrow (1, +\infty), \text{ 且极大值为 } f_{\max} = f(1) = \frac{1}{e}. \quad 4 \text{ 分}$$

(2) $x = ae^x$ 的实根个数 $\Leftrightarrow y = xe^{-x}$ 与 $y = a$ 的交点个数.

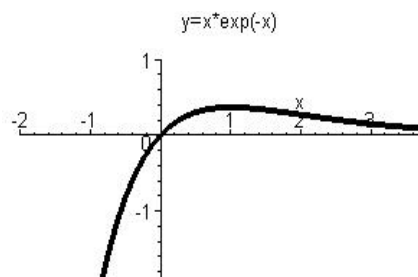
$$\text{由 (1) 及 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \quad ((-\infty) \cdot (+\infty)),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

可知 ① 当 $a \leq 0$ 或 $a = \frac{1}{e}$ 时, 原方程只有一个实根;

② 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 原方程有两个实根;

③ 当 $a > \frac{1}{e}$ 时, 原方程没有实根.



八、(满分 8 分) 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成的平面图形 D . (1) 求 D 的面积; (2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得的旋转体的体积.

解: (1) 设切线的切点的横坐标为 x_0 , 则所求的切线方程为 $y = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0)$,

由切线过原点知 $\ln x_0 - 1 = 0$, 故 $x_0 = e$... 1 分

故切线方程为 $y = \frac{1}{e}x$ 2 分

D 的面积为 $A = \int_0^1 (e^y - ey) = \frac{e}{2} - 1$... 4 分

(2) 切线、 x 轴及直线 $x = e$ 所围三角形绕直线 $x = e$ 旋转所得的圆锥的体积

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi e^2, \quad \dots 5 \text{ 分}$$

曲线、 x 轴及直线 $x = e$ 旋转所得的旋转体体积

$$V_2 = \pi \int_0^1 (e - e^y)^2 dy = \frac{\pi}{2}(-e^2 + 4e - 1), \quad \dots 7 \text{ 分}$$

因此所求旋转体的体积为

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3). \quad 8 \text{ 分}$$

九、(满分 6 分) 设 $f(x)$ 是连续函数, 其中 $F'(x) = f(x)$, 求证: $F(x)$ 为偶函数的充分必要条件是 $f(x)$ 为奇函数.

证明: 必要性: 因为 $F(x)$ 为偶函数, 所以 $F(-x) = F(x)$,

两边求导得

$$F'(-x)(-1) = F'(x), \text{ 即 } -f(-x) = f(x),$$

从而 $f(x)$ 为奇函数.

充分性: 注意到 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 4 分

当 $f(x)$ 为奇函数时, 只需说明函数 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数即可.

设 $G(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则 $G(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt$, 令 $t = -u$,

$$G(-x) = -\int_0^x f(-u)du = \int_0^x f(u)du = G(x).$$

北 京 交 通 大 学

2018-2019-1-《微积分 B (上)》期末考试 参考答案

一、单项选择题 (每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 【 D 】.

(A) $f(x) = |x| \sin |x|$; (B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$;

(C) $f(x) = \cos |x|$; (D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 则 【 D 】.

(A) 当 $f'(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$; (B) 当 $f''(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$;

(C) 当 $f'(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$; (D) 当 $f''(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

解: 画图即得正确答案, 事实上

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ 0 &= \int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)dx = f\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & x < 1 \\ \ln x & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数为 【 D 】.

(A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x < 1 \\ x(\ln x - 1) & x \geq 1 \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1 & x \geq 1 \end{cases}$

4. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \sqrt{x}) dx$, 则 【 C 】.

(A) $M > N > K$; (B) $M > K > N$; (C) $K > M > N$; (D) $K > N > M$;

解: 因为 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x^2+2x}{1+x^2} dx = \pi + 0 = \pi$;

$$\text{而 } K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \sqrt{x}) dx > \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \pi ;$$

$$\text{注意到 } \frac{1+x}{e^x} \leq 1 \Rightarrow N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \pi, \text{ 故 } K > M > N.$$

5. 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解,

C_1, C_2 是任意常数, 则方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 3f(x)$ 的通解是 【 D 】.

(A) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3;$

(B) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + (C_1 + C_2) y_3;$

(C) $y = (C_1 + 1) y_1 + (C_2 + 1) y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3;$

(D) $y = (C_1 + 1) y_1 + (C_2 + 1) y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3;$

解: $y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 是齐次线性微分方程的解, 于是齐次方程的通解为

$$Y = C_1 (y_1 - y_3) + C_2 (y_2 - y_3),$$

由解的叠加原理, 得到 $y^* = y_1 + y_2 + y_3$ 是方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 3f(x)$ 的一个特解,

于是, 由线性微分方程解的结构知:

$$y = Y + y^* = C_1 (y_1 - y_3) + C_2 (y_2 - y_3) + y_1 + y_2 + y_3 \text{ 是通解.}$$

二、填空题 (每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 当 $x = \underline{\quad\quad\quad}$ 时, 双曲线 $xy = 1$ 的曲率半径 R 达到最小.

$$\text{解: } y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}, \text{ 于是 } R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{2}{x^3}\right|} = \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \geq \sqrt{2}.$$

$$\text{且 } x^2 = \frac{1}{x^2}, \text{ 即 } x = \pm 1 \text{ 时, } R \text{ 取得最小值 } \sqrt{2}.$$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \underline{\ln 2}.$

解: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^{+\infty} \frac{de^x}{e^x(1+e^x)} = \int_0^{+\infty} \frac{de^x}{(e^x+0.5)^2-0.5^2} = \left(\ln \left| \frac{e^x}{e^x+1} \right| \right)_0^{+\infty} = \ln 2.$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \cdots + n^4}{n^5} = \frac{\int_0^1 x^4 dx}{5} = \frac{1}{5}.$

4. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x^2 + \int_0^1 xf(t)dt$, 则 $f(x) = \underline{\quad} x^2 + \frac{2}{3}x \underline{\quad}.$

5. 微分方程 $y'' + y' - 2y = e^{-2x} + \cos x$ 的一个特解形式可设为

$\underline{\quad} y^* = Axe^{-2x} + B \cos x + C \sin x.$

三、(每小题 8 分, 满分 16 分) 1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{\sin t} - \cos t) dt}{x \ln(1+2x)}.$

解:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{\sin t} - \cos t) dt}{x \ln(1+2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{\sin t} - \cos t) dt}{2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} \cos x + \sin x}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. $\int e^x \arctan \sqrt{e^x - 1} dx.$

解: 令 $\sqrt{e^x - 1} = t \Rightarrow e^x - 1 = t^2 \Rightarrow x = \ln(1+t^2)$, 于是 $dx = \frac{2tdt}{1+t^2}.$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int (1+t^2) \frac{2t}{1+t^2} \arctan t dt = \int 2t \arctan t dt = \int \arctan t dt^2 \\ &= t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt. \\ &= t^2 \arctan t - t + \arctan t + C = e^x \arctan \sqrt{e^x - 1} - \sqrt{e^x - 1} + C. \end{aligned}$$

四、(每小题 8 分, 满分 16 分)

1. 计算积分 $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx.$

解: 原式 $= -\frac{1}{2} \int_0^2 (2-2x) \sqrt{2x-x^2} dx + \int_0^2 \sqrt{2x-x^2} dx$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2x-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 + \int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2} dx = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. 设函数 $f(x)$ 存在二阶导数, 并且有 $y = f(-x \sin x)$, 试求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx} = f'(-x \sin x)(-\sin x - x \cos x)$;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(-x \sin x)(\sin x + x \cos x)^2 + f'(-x \sin x)(x \sin x - 2 \cos x).$$

五、(满分 8 分) 设 $f(x)$ 二阶导数连续, 满足 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 求函数 $f(x)$.

解: 将方程 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$ 变为 $f(x) = \sin x - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$.

$$\text{两边对 } x \text{ 求导得 } f'(x) = \cos x - \int_0^x f(u)du - xf(x) + xf(x) \quad \text{即 } f'(x) = \cos x - \int_0^x f(u)du.$$

两边对 x 求导得 $f''(x) = -\sin x - f(x)$.

$$\text{注意到 } f(0) = 0, f'(0) = 1, \text{ 归结为求解初值问题 } \begin{cases} f''(x) + f(x) = -\sin x \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

特征方程 $r^2 + 1 = 0$, $r = \pm i$, 于是齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

因为 $\lambda + \omega i$ 是特征方程的根, 于是令非齐次方程的特解为

$$y^* = x(A \cos x + B \sin x).$$

$$y^{*'} = (A \cos x + B \sin x) + x(-A \sin x + B \cos x).$$

$$y^{*''} = 2(-A \sin x + B \cos x) + x(-A \cos x - B \sin x).$$

代入方程得 $2(-A \sin x + B \cos x) = -\sin x$, 于是

$$A = \frac{1}{2}, B = 0, \text{ 即 } y^* = \frac{1}{2}x \cos x.$$

因此, 通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x \cos x$.

代入初值 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ 求得常数 $C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}$ 故所求函数为

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + x \cos x).$$

六、(满分 8 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 且

$$2f(0) = \int_0^2 f(x)dx = f(2) + f(3),$$

证明: (1) 存在 $\eta \in (0, 2)$, 使得 $f(\eta) = f(0)$; (2) 存在 $\xi \in (0, 3)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

证: 1) 由积分中值定理知存在 $\eta \in (0, 2)$, 使得 $2f(0) = \int_0^2 f(x)dx = 2f(\eta)$,

即 $f(\eta) = f(0)$.

或: 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $[0, 2]$ 上用拉格朗日中值定理得存在 $\eta \in (0, 2)$, 使

$$2f(0) = \int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = F'(\eta)(2 - 0) = 2f(\eta),$$

即 $f(\eta) = f(0)$.

2) 又因为 $f(0) = \frac{f(2) + f(3)}{2}$, 利用介值性定理, 存在 $\zeta \in [2, 3]$, 使得

$$f(\zeta) = \frac{f(2) + f(3)}{2} \quad \text{即有 } f(\zeta) = f(0).$$

由于 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 在 $[0, \eta]$ 和 $[\eta, \zeta]$ 上用罗尔定理,

存在 $\xi_1 \in (0, \eta)$, $f'(\xi_1) = 0$, 存在 $\xi_2 \in (\eta, \zeta)$, $f'(\xi_2) = 0$.

再次 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上用罗尔定理得, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 3)$, 使得

$$f''(\xi) = 0.$$

七、(满分 8 分) 方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根, 求实数 k 的范围.

解: 设 $F(x) = x^5 - 5x + k$, 则 $F'(x) = 5(x^4 - 1) = 5(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.

于是, $x < -1, F'(x) > 0; -1 < x < 1, F'(x) < 0; x > 1, F'(x) > 0$.

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$.

结合单调性知, $F(-1) > 0, F(1) < 0$ 才能有三个根.

即 $F(-1) = 4 + k > 0, F(1) = -4 + k < 0$. 因此, 有 $-4 < k < 4$.

八、(满分 8 分) 非负函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足: $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 1$ 及坐标轴所围图形的面积为 2.

(1) 求函数 $f(x)$; (2) a 为何值时, 所围图形绕 x 轴一周所得的旋转体体积最小?

解: 1) 由方程 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$, 得

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{3a}{2}, \quad \text{即} \quad \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{3a}{2}. \quad \text{于是, } f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + Cx.$$

$$\text{注意到 } f(0) = 0, \quad \int_0^1 f(x)dx = 2, \quad \text{从而 } 2 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{3}{2}ax^2 + Cxdx = \frac{a}{2} + \frac{C}{2}.$$

$$\text{于是 } C = 4 - a, \quad \text{即 } f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + (4 - a)x.$$

$$(2) \quad V = \int_0^1 \pi [f(x)]^2 dx = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{10}a^2 + a + 16 \right).$$

$$V' = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{5}a + 1 \right) = 0, \quad \text{得 } a = -5.$$

又 $V'' = \frac{\pi}{15} > 0$, 所以 $a = -5$ 为唯一极小值点, 因此, 当 $a = -5$ 时 V 取得最小值.

九、(满分 6 分) 设 $f(x)$ 三阶可导, 且满足 $f''(x) + [f'(x)]^2 = 2 \sin x$, 试讨论 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处是否可能取得极值点或拐点, 并说明理由.

解: 由 $f(x)$ 三阶可导, 知 $f''(x), f'(x), f(x)$ 均连续.

对于方程 $f''(x) + [f'(x)]^2 = 2 \sin x$.

(1) 若 $f'(0) \neq 0$, 则 $f''(0) \neq 0$, 因此, $x = 0$ 不是极值点, 且 $(0, f(0))$ 不是拐点.

(2) 若 $f'(0) = 0$, 易知 $f''(0) = 0$. 而方程两边再求导, 得

$$f'''(x) = 2 \cos x - 2f'(x)f''(x). \quad (*)$$

将 $f'(0) = 0, f''(0) = 0$ 代入 $(*)$ 式, 易得 $f'''(0) = 2 \neq 0$.

故 $(0, f(0))$ 是拐点 (事实上, 二阶导为零、三阶导不为零的点, 都是拐点).

再当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x) \downarrow \Rightarrow f'(x) > 0 = f'(0) \Rightarrow f(x) \uparrow$;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x) \uparrow \Rightarrow f'(x) > 0 = f'(0) \Rightarrow f(x) \uparrow$.

因此, $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点.

北 京 交 通 大 学

2019-2020-1-《微积分 B (上)》期末考试 参考答案

一、单项选择题 (每小题 4 分, 满分 20 分)

1. 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为 【 C 】.

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 无穷多个.

解: $f(x) = \frac{x(1-x)(1+x)}{\sin \pi x}$, 所以, 可去间断点为 $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

2. 函数 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$. 若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则必有 【 A 】.

(A) $f(0)=0$; (B) $f'(0)=0$; (C) $f(0)+f'(0)=0$; (D) $f(0)-f'(0)=0$.

解: $F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1+|\sin x|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = c \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

再由 $f(x)$ 可导, 知有 $f(0)=0$, $f'(0)=c$.

3. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ” 表示 “ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有 【 A 】.

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数; (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数;

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数; (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

解: $f(x)$ 是偶函数时, 只有过原点的 $F(x)$, 才是奇函数, 所以 (B) 错误;

令 $f(x)=1$ 时, 则 $F(x)=x+C$, 所以 (C) 错误;

令 $f(x)=2x$ 时, 则 $F(x)=x^2+C$, 所以 (D) 错误.

4. 以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的微分方程是 【 D 】.

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$; (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$;

(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$; (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

解: $(r-1)(r^2+4)=0 \Rightarrow r^3-r^2+4r-4=0$.

5. 函数 $f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x) + 3x(f'(x))^2 = 1 - e^{-x}$, 若 $f'(x_0)=0$ ($x_0 \neq 0$), 则 【 B 】.

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;

(C) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值; $(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

解: 因 $x_0 f''(x_0) = 1 - e^{-x_0} \neq 0 \Rightarrow f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(x_0)$ 必为 $f(x)$ 的极值.

又 $f''(x_0) = \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0} > 0 \Rightarrow f(x_0)$ 是极小值.

二、填空题 (每小题 4 分, 满分 20 分)

1. 曲线 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 **【 $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ 】**.

解: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 + x} = \frac{1}{2}$; $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x(2x+1)}{2(2x+1)} = -\frac{1}{4}$.

所以, 斜渐近线为: $y = kx + b = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$.

2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} + |x| \right) dx =$ **【 $\frac{\pi^2}{4}$ 】**.

解: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} + |x| \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{\pi^2}{4}$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right) =$ **【 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 】**.

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \cos \frac{k\pi}{n}} \frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1 + \cos \pi x} dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) d\frac{\pi x}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

4. $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt =$ **【 $\sin x^2$ 】**.

解: $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin t^2 dt = \sin x^2$.

5. 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为 **【 $y = \frac{x}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right)$ 】**.

解: 原方程变换为 $y' + \frac{2}{x}y = \ln x$, 则

$$y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(C + \int \ln x e^{\int \frac{2}{x} dx} dx \right) = x^{-2} \left(C + \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 \right).$$

再由 $y(1) = -\frac{1}{9}$, 得 $y = \frac{x}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right)$.

三、(满分 10 分) 求不定积分 $\int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx &= \int \arctan \frac{1}{x} d \arctan x \\ &= \arctan \frac{1}{x} \cdot \arctan x - \int \arctan x d \arctan \frac{1}{x} \\ &= \arctan \frac{1}{x} \cdot \arctan x + \int \arctan x d \arctan x \\ &= \arctan \frac{1}{x} \cdot \arctan x + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{另 1: } \int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx &= \int \frac{\arctan u}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{-1}{u^2} du = - \int \frac{\arctan u}{1+u^2} du \\ &= - \int \arctan u d \arctan u = - \frac{1}{2} (\arctan u)^2 + C \\ &= - \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{1}{x} \right)^2 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{另 2: } \int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx &= \int \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{1+x^2} dx = \int \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) d \arctan x \\ &= \frac{\pi}{2} \arctan x - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{另 3: } \int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx &= \int \frac{u}{\csc^2 u} (-\csc^2 u) du \quad \text{let } x = \cot u \\ &= \int -u du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{1}{2} (\operatorname{arccot} x)^2 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{错解: } \int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx &= \int \arctan \frac{1}{x} d \arctan x \\ &= \arctan \frac{1}{x} \cdot \arctan x - \int \arctan x d \arctan \frac{1}{x} \\ &= \arctan \frac{1}{x} \cdot \arctan x - \int \frac{\arctan \frac{1}{u}}{1+u^2} du \quad u = \frac{1}{x} \\ &= \arctan \frac{1}{x} \cdot \arctan x - \int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx \quad (*) \end{aligned}$$

所以, $\int \frac{1}{1+x^2} \arctan \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{x} \cdot \arctan x + C$.

注: 不定积分的结果表达不唯一, 但仅仅只差一个常数.

四、(满分 10 分) $y = y(x)$ 是区间 $(-\pi, \pi)$ 内过点 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线, 且当 $-\pi < x < 0$ 时, 曲线上任一点处的法线都过原点; 当 $0 \leq x < \pi$ 时, $y(x)$ 满足方程 $y'' + y + x = 0$. 求函数 $y(x)$ 的表达式.

解: 当 $-\pi < x < 0$ 时,
$$\begin{cases} yy' + x = 0, \\ y(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{\pi^2 - x^2};$$

当 $0 \leq x < \pi$ 时,
$$\begin{cases} y'' + y = -x, \\ y(0) = \pi, y'(\pi) = 0. \end{cases} \Rightarrow y = \pi \cos x + \sin x - x,$$

所以,
$$y = y(x) = \begin{cases} \sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0, \\ \pi \cos x + \sin x - x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

五、(满分 10 分) 假设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 过点 $A(0, f(0))$ 与 $B(1, f(1))$ 的直线与 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c))$, 其中 $0 < c < 1$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f''(\xi) = 0$.

证: 令 $F(x) = f(x) - (f(1) - f(0))x - f(0)$, 则

在 $[0, c]$ 区间上, 利用 Rolle 定理, $\exists \eta_1 \in (0, c)$, 使 $F'(\eta_1) = 0$;

在 $[c, 1]$ 区间上, 利用 Rolle 定理, $\exists \eta_2 \in (c, 1)$, 使 $F'(\eta_2) = 0$;

因此, 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 区间上, 再次利用 Rolle 定理, $\exists \xi \in (\eta_1, \eta_2)$,

使 $F''(\xi) = 0$. 即 $f''(\xi) = 0$.

六、(满分 10 分) 设当 $x \in [2, 4]$ 时, 有不等式 $ax + b \geq \ln x$, 其中 a, b 是常数. 试求 a, b 的值, 使得积分 $I = \int_2^4 (ax + b - \ln x) dx$ 取得最小值.

解: 由题意, 知 $ax + b$ 与 $\ln x$ 相切于 $[2, 4]$ 内的点 $x = x_0$, 则有

$$\begin{cases} ax_0 + b = \ln x_0, \\ a = \frac{1}{x_0}, \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{e^{b+1}}$$

因此,
$$I = \int_2^4 (ax + b - \ln x) dx = 6a + 2b - \int_2^4 \ln x dx = \frac{6}{e^{b+1}} + 2b - 6 \ln 2 + 2.$$

令 $\frac{dI}{db} = 0$, 得 $b = \ln 3 - 1$, 进而 $a = \frac{1}{3}$.

—— 唯一驻点

此时, I 取得最小值 $I_{\min} = 2 \ln 3 - 6 \ln 2 + 2$.

七、(满分 10 分) 已知曲线 L 的方程 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases} \quad (t \geq 0).$

(1) 讨论 L 的凹凸性;

(2) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出该切线的方程;

(3) 求此切线、 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

解: 由已知, 有 $x'_t = 2t$, $y'_t = 4 - 2t$, 所以

$$y'_x = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2}{t} - 1, \quad y''_x = \frac{-2}{t^2} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{-1}{t^3} < 0.$$

(1) 当 $t = 0$ 时, $x = 1$, 故曲线 L 在定义域 $[1, +\infty)$ 上, 是向上凸函数;

(2) 令切线 $y = k(x+1)$, 由题设, 有

$$\begin{cases} 4t_0 - t_0^2 = k(t_0^2 + 2), \\ k = \frac{2}{t_0} - 1, \end{cases} \Rightarrow t_0 = 1, k = 1, x_0 = 2, y_0 = 3.$$

因此, 所求切线的方程: $y = x + 1$;

(3) 由题意, 有

$$S = \frac{3 \times 3}{2} - \int_1^2 y dx = \frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2) 2t dt = \frac{9}{2} - \frac{13}{6} = \frac{7}{3}.$$

八、(满分 10 分) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ 求 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 的表达式.

解: 当 $-1 \leq x < 0$ 时, $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x (2t + \frac{3}{2}t^2) dt = x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}$;

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^0 (2t + \frac{3}{2}t^2) dt + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t + 1)^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} - \int_0^x t dt \frac{1}{e^t + 1} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \int_0^x \frac{1}{e^t + 1} dt \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + x - \ln(e^x + 1) + \ln 2. \end{aligned}$$

$$\text{所以, } F(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0 \\ x - \ln(e^x + 1) - \frac{x}{e^x + 1} + \ln 2 - \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

北 京 交 通 大 学

2020-2021-1-《微积分 B (上)》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

1、已知 a 为常数, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{ax} = e^2$, 则 【 A 】.

- (A) $a = 1$ (B) $a = -1$ (C) $a = 2$ (D) $a = -2$.

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1} \right)^{ax} = e^{2a} = e^2 \Rightarrow a = 1$.

2、下列反常积分中收敛的是 【 D 】.

- (A) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ (B) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ (C) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$ (D) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^2}$.

解: $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x} = \int_e^{+\infty} (\ln x) d \ln x = \frac{1}{2} [(\ln x)^2]_e^{+\infty} = +\infty - \frac{1}{2} = +\infty$;

$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = [\ln(\ln x)]_e^{+\infty} = +\infty$;

$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} = \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{\sqrt{\ln x}} = [2\sqrt{\ln x}]_e^{+\infty} = +\infty$;

$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^2} = \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{(\ln x)^2} = \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_e^{+\infty} = 1$.

3、函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数, 且 $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则 【 B 】.

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值
 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的一个极小值
 (C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

解: $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $f'(0) = 0, f''(0) = 0$, 但是无法确定是否有三阶导数.

根据极限的保号性定理, 在 0 点空心邻域内, $f''(x)$ 恒正, 故 $f(x)$ 凹.

因此, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

4、设函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t) dt$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为 **【 C 】**.

(A) 0

(B) 2

(C) 1

(D) 4.

解: $f'(x) = 2x \ln(2+x^2)$.

5、微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{3x}$ 的特解形式为 **【 D 】**.

(A) Ae^{3x} (B) Axe^{3x} (C) $(Ax+B)e^{3x}$ (D) $x(Ax+B)e^{3x}$.

解: 特征方程: $r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 3$.

故特解形式: $y^* = x^k \cdot (Ax+B) \cdot e^{3x} = x \cdot (Ax+B) \cdot e^{3x}$.

二、填空题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

1. $\int_{-1}^1 (x^2 \sin x^5 + \sqrt{1-x^2}) dx = -\frac{\pi}{2}$.

解: $\int_{-1}^1 (x^2 \sin x^5 + \sqrt{1-x^2}) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

2. 若连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = xe^x - \int_0^1 f(x) dx$, 则 $f(x) = \frac{xe^x - 1}{2}$.

解: 设 $A = \int_0^1 f(x) dx$, 则 $f(x) = xe^x - A$, 因此

$$A = \int_0^1 (xe^x - A) dx = 1 - A,$$

所以, $A = \frac{1}{2}$, 此时 $f(x) = \frac{xe^x - 1}{2}$.

3. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+n} \right) = \frac{\ln 3}{2}$.

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{2+x} dx = \ln 3 - \ln 2$.

4. 设常数 $k > 0$, 则方程 $\frac{\ln x}{x} + k = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内根的个数为 1.

解: 中学的函数图像, 显然 $y_1 = \ln x$ 与 $y_2 = -kx$ 只有 1 个交点.

5. 若连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 $f(x) = 0$.

解: $f'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = Ce^x$, 注意到 $f(0) = 0$, 故 $f(x) = 0$.

三、(满分 10 分) 计算 $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

$$\begin{aligned} \text{解 1: } \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+1-x)\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 \frac{2d\sqrt{x}}{(1+(\sqrt{x})^2)} = 2 \arctan \sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

解 2:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x} &= t, x = 1-t^2, dx = -2tdt. \\ \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} &= \int_1^0 \frac{-2tdt}{(1+t^2)t} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

四、(满分 10 分) 设 $\begin{cases} x = (t-1)e^t \\ y = 1-t^4 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\text{解: } x'_t = e^t + (t-1)e^t = te^t, \quad y'_t = -4t^3,$$

$$\text{所以, } \frac{dy}{dx} = \frac{-4t^3}{te^t} = \frac{-4t^2}{e^t};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{-4t^2}{e^t} \right)' \cdot \frac{1}{te^t} = \frac{4t-8}{e^{2t}}.$$

五、(满分 10 分) 求 $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$ 的单调区间与凹凸区间.

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2(x-1)^2 - 4x^3(x-1)}{4(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3},$$

$$\text{令 } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ 得 } x_1 = 0, \quad x_3 = 3;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^4} \right)' = \frac{3x}{(x-1)^4}, \quad \text{令 } \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{ 得 } x_1 = 0.$$

x	$(-\infty, 0)$	$x_1 = 0$	$(0, 1)$	$x_2 = 1$	$(1, 3)$	$x_3 = 3$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	----	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	----	+	+	+
$f(x)$	凸增	拐了	凹增	间断点	凹减	极小值	凹增

因此, 单调增区间: $(-\infty, 1)$ 、 $[3, +\infty)$; 单调减区间: $(1, 3]$;

凸区间: $(-\infty, 0]$; 凹区间: $[0, 1)$ 、 $(1, +\infty)$.

六、(满分 10 分) 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = -3$ 的通解.

解: 1) 先求齐次方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 通解:

特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$, 特征根为 $r_1 = -1, r_2 = 3$,

故, 齐次方程的通解为: $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$,

2) 再求非齐次的特解:

设 $y^* = x^0 \cdot A \cdot e^{0x} = A$,

代入原方程, 得 $A = 1$, 即 $y^* = 1$,

故非齐次方程的通解为: $y = Y + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + 1$.

七、(满分 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (1 - \sin 2t)^{\frac{1}{t}} dt}{(e^x - 1) \ln(1 + x)}$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (1 - \sin 2t)^{\frac{1}{t}} dt}{(e^x - 1) \ln(1 + x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (1 - \sin 2t)^{\frac{1}{t}} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}} \cdot 2x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}. \end{aligned}$$

八、(满分 10 分) 记曲线段 $x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0, 0 \leq x \leq 1)$ 与直线 $x = 0, x = 1$ 及 x 轴所围成的平面图形为 D , 求 D 的面积以及图形 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

$$\text{解: 1) } S = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{—— 中学的圆与扇形图形面积.}$$

$$\text{或 } S = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2) V = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 (4 - x^2) dx = \frac{11\pi}{3}.$$

北 京 交 通 大 学

2021-2022-1-《微积分 B (上)》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

1、若 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 点处 【 D 】.

(A) 必可导 (B) 必不可导 (C) 不连续 (D) 连续但不一定可导.

解: 设 $f(x) = x$, $x_0 = 0$, 则选项 (A)、(C) 均不成立;

设 $f(x) = x$, $x_0 \neq 0$, 则选项 (B) 不成立;

由 $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x) - f(x_0)\| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, 即 $|f(x)|$ 在 x_0 点必连续,

但 $|f(x)| = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处不可导. 故选 (D).

2、设 $f(x) = 2^x + 5^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 【 D 】.

(A) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量 (B) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小量
(C) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量 (D) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价的无穷小量.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 5^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2 + 5^x \ln 5}{1} = \ln 10$. 故选 (D).

3、设 $f(x), g(x)$ 有二阶导数, 且 $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $f'(x_0) \cdot g'(x_0) > 0$, 则 【 C 】.

(A) x_0 不是 $f(x) \cdot g(x)$ 的驻点
(B) x_0 是 $f(x) \cdot g(x)$ 的驻点, 但不是它的极值点
(C) x_0 是 $f(x) \cdot g(x)$ 的驻点, 且是它的极小值点
(D) x_0 是 $f(x) \cdot g(x)$ 的驻点, 且是它的极大值点.

解: 令 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, 则

$$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$F''(x) = f''(x) \cdot g(x) + f'(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g''(x),$$

故, $F'(x_0) = 0$, $F''(x_0) = 2f'(x_0) \cdot g'(x_0) > 0$. 故选 (C).

4、函数 $y = \sin 2x$ 在 R 上的一个原函数与导函数分别为 【 C 】.

- (A) $2\cos 2x, \frac{1}{2}\cos 2x$ (B) $\frac{1}{2}\cos 2x, 2\cos 2x$
 (C) $\sin^2 x, 2\cos 2x$ (D) $\cos^2 x, 2\cos 2x$.

解: $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x, y' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$. 故选 (C).

5、下列反常积分中, 收敛的是 【 C 】.

- (A) $\int_0^1 \frac{1}{x(x+1)} dx$ (B) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$ (C) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ (D) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$.

解: $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_0^1 \frac{dx}{x} - \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = [\ln x]_0^1 - [\ln(x+1)]_0^1 = [0 - (-\infty)] - [\ln 2 - 0] = +\infty$;

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2}[(x-1)^{-2}]_1^2 = -\frac{1}{2}[1 - (+\infty)] = +\infty;$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{(\ln x)^2} = \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_e^{+\infty} = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_{-\infty}^{+\infty} = (+\infty_1) - (+\infty_2) \text{ 未定}.$$

二、填空题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

1. 若 $f(x) = \begin{cases} (\sin 2x + e^{2ax} - 1)/x, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $a = \text{【 } -2 \text{ 】}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1+a)x}{x} = 2(1+a) = a \Rightarrow a = -2$.

2. 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 则 $dy|_{x=0} = \text{【 } dx \text{ 】}$.

解: 方程两边, 对 x 求导, 得

$$\frac{1}{x^2 + y} d(x^2 + y) = d(x^3 y) + \cos x dx,$$

$$\text{整理, 得 } \frac{1}{x^2 + y} (2x dx + dy) = 3x^2 y dx + x^3 dy + \cos x dx.$$

再由 $x = 0$, 知 $y = 1$, 代入上式, 得 $dy = dx$.

3. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^x , 则 $\int x f'(x) dx = \text{【 } x^2 e^x + C \text{ 】}$.

解: 由已知, 得 $f(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x$, $\int f(x) dx = xe^x - C$, 故

$$\int x f'(x) dx = \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx = xe^x + x^2 e^x - xe^x + C = x^2 e^x + C.$$

4. 微分方程 $y' - \frac{y}{x} = \ln x$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 的特解为 **【 $y = \frac{1}{2} x \ln^2 x$ 】**.

解: 令 $P(x) = \frac{-1}{x}$, $Q(x) = \ln x$, 则

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x)dx} \left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right) \\ &= x \left(C + \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = x \left(C + \frac{1}{2} \ln^2 x \right). \end{aligned}$$

再由 $y|_{x=1} = 0$, 知 $C = 0$, 因此, $y = \frac{x \ln^2 x}{2}$.

5. 曲线 $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为 **【 $y = 3x - 7$ 】**.

解: $x'_t = 2t$, $y'_t = 3t^2$, 所以, 当 $t=2$ 时, $x=5$, $y=8$, 且

$$k = \frac{dy}{dx} \bigg|_{t=2} = \frac{3t^2}{2t} \bigg|_{t=2} = 3.$$

因此, 切线方程为 $y - 8 = 3(x - 5)$, 即 $y = 3x - 7$.

三 (10 分) 若 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 求 a, b .

解: 由已知, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (ax^2 + bx + 1)}{x^2} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (2ax + b)}{2x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [e^x - (2ax + b)] = 0 \Rightarrow b = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2a}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 2a) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = 1.$$

四 (10 分) (I) 判定函数 $f(x) = xe^{-x}$ 的单调性, 并求其极值; (II) 讨论 $x = ae^x$ 的实根个数.

解: (I) $\because f'(x) = (1-x)e^{-x} \begin{cases} > 0, & x < 1, \\ = 0, & x = 1, \\ < 0, & x > 1, \end{cases}$

$$\therefore f(x) \in \uparrow (-\infty, 1), f(x) \in \downarrow (1, +\infty), \text{ 且极大值为 } f_{\max} = f(1) = \frac{1}{e}.$$

(II) $x = ae^x$ 的实根个数 $\Leftrightarrow y = xe^{-x}$ 与 $y = a$ 的交点个数.

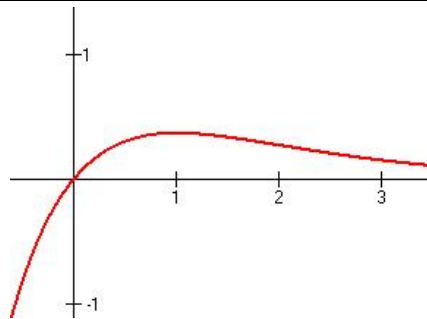
$$\text{由 (I) 及 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty, \quad ((-\infty) \cdot (+\infty))$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^L}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

可知 ① 当 $a \leq 0$ 或 $a = \frac{1}{e}$ 时, 原方程只有一个实根;

② 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 原方程有两个实根;

③ 当 $a > \frac{1}{e}$ 时, 原方程没有实根.



五 (10 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性.

解: 由 $y \ln y - x + y = 0$, 易知 $y' = \frac{1}{2 + \ln y}$, $y'' = -\frac{1}{y(2 + \ln y)^3}$, $y''(1) = -\frac{1}{8}$.

再由二阶导数 y'' 在 $x = 1$ 附近是连续函数, 由 $y''(1) = -\frac{1}{8}$ 可知在 $x = 1$ 附近 $y'' < 0$,

故曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 1$ 附近是凸的.

六 (10 分) (I) 求曲线 $y = \ln x$ 与其在点 $(e, 1)$ 处的切线、 x 轴所围成的平面图形 G 的面积 A ;

(II) 求上述平面图形 G 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积 V .

解: (I) $\because y' = \frac{1}{x}, y'(e) = \frac{1}{e}$,

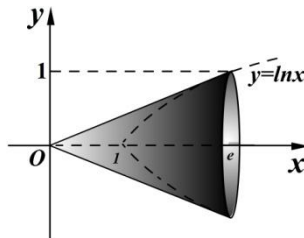
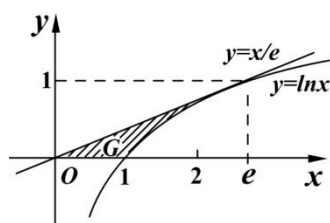
$\therefore$ 切线方程为 $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$, 即 $y = \frac{x}{e}$.

$$A = \frac{e}{2} - \int_1^e \ln x dx = \frac{e}{2} - [x(\ln x - 1)] \Big|_1^e = \frac{e}{2} - 1.$$

$$(II) V = \frac{1}{3} \pi e - \pi \int_1^e \ln^2 x dx = \frac{1}{3} \pi e - \pi [x \ln^2 x] \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{3} \pi e - \pi (e - 2 \int_1^e \ln x dx) = \frac{1}{3} \pi e - \pi [e - 2x(\ln x - 1)] \Big|_1^e$$

$$= \frac{1}{3} \pi e - \pi (e - 2) = 2\pi(1 - \frac{e}{3}).$$



七 (10 分) 求微分方程 $y'' - y = x$ 的通解.

解: 原方程对应的齐次方程为 $y'' - y = 0$,

特征方程为 $r^2 - 1 = 0$, 特征根为 $r_1 = -1, r_2 = 1$. 齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

原方程有一个特解 $y^* = -x$, 故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x.$$

八 (10 分) 设 $f(x)$ 连续且不恒等于零, 且 $f(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^1 t f^2(t)dt$, 求 $f(x)$.

解: $f'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = C e^x$, (3+2)

..... 5 分

又 $f(0) = \int_0^1 t f^2(t)dt$, 即

..... 7 分

$$C = \int_0^1 t f(t)dx = C^2 \int_0^1 t e^{2t} dx = \frac{C^2}{4} (e^2 + 1)$$

又 $C \neq 0$, 则 $C = \frac{4}{e^2 + 1}$.

..... 9 分

所以, $f(x) = \frac{4}{e^2 + 1} e^x$.

..... 10 分

北 京 交 通 大 学

2022-2023-1-《微积分 B (上)》期末考试 参考答案

一、单项选择题 (每小题 4 分, 满分 20 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ b, & x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x} - a, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 (D).

(A) $a=b=e$ (B) $a=b=e^{-1}$ (C) $a=-b=e^{-1}$ (D) $a=-b=-e^{-1}$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x < 0, \\ b + \ln(1+x), & x \geq 0 \end{cases}$ 若 f 在 $x=0$ 处可导, 则 (B).

(A) $a=-1, b=-1$ (B) $a=1, b=1$ (C) $a=2, b=2$ (D) $a=2, b=1$.

3. 设常数 $k > 0$, 则函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为 (B).

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0.

4. 设 $f(x) = \int_0^{\sqrt{1+x}-1} \ln(1+t) dt$, $g(x) = e^x - x - 1$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 (B).

(A) 等价无穷小 (B) 同阶但非等价无穷小
(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小.

5. 微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{3x}$ 的特解形式为 (其中 A, B 为常数) (D).

(A) Ae^{3x} (B) Axe^{3x} (C) $(Ax+B)e^{3x}$ (D) $x(Ax+B)e^{3x}$.

二、填空题 (每小题 4 分, 满分 20 分)

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \underline{\ln 2}$.

2. 由方程 $\sin(x+y) = y^2 \cos x$ 确定的曲线 L 在点 $(0,0)$ 处的切线方程是 $\underline{x+y=0}$.

3. 设 $f(x)$ 满足 $\int \frac{\sin x}{f(x)} dx = \cos^3 x + C$, 则 $\int f(x) dx = \underline{-\frac{1}{3} \tan x + C}$.

4. $\int_{-1}^1 (x^2 \sin x^5 + \sqrt{1-x^2}) dx = \underline{\frac{\pi}{2}}$.

5. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+n} \right)$ 的值是 $\frac{\ln 3}{2}$.

三、(满分 10 分) 如果 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - ax + b}{x^2 - 4} = -\frac{1}{4}$, 求 a, b .

解:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - ax + b) = 4 - 2a + b = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - ax + b}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - a}{2x} = \frac{4 - a}{4} = -\frac{1}{4},$$

所以 $a = 5, b = 6$.

四、(满分 10 分) 函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - 2\arctan t, \\ y = \frac{t^3}{3} - t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{1 - \frac{2}{1+t^2}} = 1 + t^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2t}{1 - \frac{2}{1+t^2}} = \frac{2t(1+t^2)}{t^2 - 1}.$$

五、(满分 10 分) 设 $x > 0$, 求处处满足不等式 $\ln x \leq A\sqrt{x}$ 的最小正数 A .

$$\text{解: 设 } f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}},$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}},$$

当 $2 - \ln x = 0$, 即 $x = e^2$ 时, $f(x)$ 取最大值 $\frac{2}{e}$, 所以 $A = \frac{2}{e}$.

六、(满分 10 分) 求解常微分方程的初值问题: $\begin{cases} x^2 dy = (xy - x^2) dx, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

$$\text{解: 易知 } \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -1,$$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int -e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) \\ = x(C - \ln x)$$

代入 $y(1) = 1$, 得 $C = 1$, 因此, $y = x(1 - \ln x)$.

七、(满分 10 分) 过点 $(0, 1)$ 作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 A , 又 L 与 x 轴交于 B 点. 区

域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解: 设 $A(x_0, \ln x_0)$, 切线斜率 $\frac{1}{x_0}$, 切线方程为

$$y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0),$$

代入 $(0, 1)$ 点得 $x_0 = e^2$, $A(e^2, 2)$, AB 的方程为

$$y = \frac{2}{e^2 - 1}(x - 1).$$

$$S = \int_1^{e^2} \left(\ln x - \frac{2}{e^2 - 1}(x - 1) \right) dx$$

$$= x(\ln x - 1) \Big|_1^{e^2} - \frac{1}{e^2 - 1}(x - 1)^2 \Big|_1^{e^2}$$

$$= e^2 + 1 - (e^2 - 1) = 2$$

$$V = \pi \int_1^{e^2} \ln^2 x dx - \frac{1}{3} \pi 2^2 (e^2 - 1)$$

$$= \pi x (\ln^2 x - 2 \ln x + 2) \Big|_1^{e^2} - \frac{4}{3} \pi (e^2 - 1)$$

$$= 2\pi(e^2 - 1) - \frac{4}{3}\pi(e^2 - 1) = \frac{2}{3}\pi(e^2 - 1)$$

八、(满分 10 分) 设 $|a| \leq 1$, 求积分 $I(a) = \int_{-1}^1 |x - a| e^{2x} dx$ 取最小值时 a 为何值.

解: 需要去掉绝对值, 因此, 有

$$I(a) = \int_{-1}^1 |x - a| e^{2x} dx$$

$$= \int_{-1}^a (a - x) e^{2x} dx + \int_a^1 (x - a) e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^a (a - x) d e^{2x} + \frac{1}{2} \int_a^1 (x - a) d e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2} (a - x) e^{2x} \Big|_{-1}^a + \frac{1}{2} \int_{-1}^a e^{2x} dx + \frac{1}{2} (x - a) e^{2x} \Big|_a^1 - \frac{1}{2} \int_a^1 e^{2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} (a + 1) e^{-2} + \frac{1}{4} (e^{2a} - e^{-2}) + \frac{1}{2} (1 - a) e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - e^{2a})$$

$$= \frac{1}{2} e^{2a} - \frac{1}{2} (e^{-2} + e^2) a + \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^{-2}$$

$$I'(a) = e^{2a} - \frac{1}{2} (e^{-2} + e^2)$$

当 $e^{2a} = \frac{1}{2} (e^{-2} + e^2)$, 即 $a = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} (e^{-2} + e^2)$ 时, $I(a)$ 取最小值.

北 京 交 通 大 学

2023-2024-1-《微积分 B (上)》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

1、 $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}, & x \neq 1 \\ 4, & x = 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续, 则 a, b 用数组 (a, b) 表示为 **【 】**.

- (A) $(2, -2)$ (B) $(-2, 2)$ (C) $(-2, -2)$ (D) $(2, 2)$.

解: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(ax+b)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}{(3x+1)-(x+3)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \cdot (ax+b)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2ax+2b}{(x-1)} = 4.$$

所以, $a=2, b=-2$.

故选 (A).

2、设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 **【 】**.

- (A) 可导 (B) 连续但不可导
(C) 左可导但右不可导 (D) 右可导但左不可导.

解: $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{x} = 1;$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 e^{-x} = 0.$$

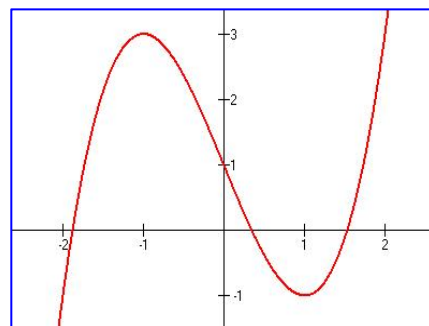
故选 (B).

3、方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 在定义域内 **【 】**.

- (A) 无实根 (B) 有唯一实根
(C) 有两个实根 (D) 有三个实根.

解: 由 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, 得驻点: $x = \pm 1$, 并有

$$f(-1) = 3, \quad f(1) = -1.$$



故选 (D).

4、设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 则 $f'(0) = \mathbf{【 】}$.

- (A) 1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 0.

解: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}$. 故选 (B).

5、按待定函数法, 微分方程 $y'' - 2y' + 10y = e^x \cos 3x$ 的一个特解形式为 【 】.

- (A) $e^x(A \cos 3x + B \sin 3x)$ (B) $Ae^x \cos 3x$
(C) $xe^x(A \cos 3x + B \sin 3x)$ (D) $Axe^x \cos 3x$.

解: 对应的齐次方程的特征方程 $r^2 - 2r + 10 = 0$, 特征根 $r_{1,2} = 1 \pm 3i$. 故选 (C).

二、填空题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

1、广义积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx =$ 【 】.

解: $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} (e^{-x^2})_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2}$.

2、已知曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin \frac{t}{2} \end{cases}$, 则曲线 L 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的法线方程为 【 】.

解: 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, 曲线 L 上的点为 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 且 $k = -\frac{dx}{dy} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -\frac{-\sin t}{\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}$,

故所求法线方程为: $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}x$, 或 $2y - 4\sqrt{2}x - \sqrt{2} = 0$.

3、已知 $\frac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int f(x) \cdot \frac{\cos x}{x} dx =$ 【 】.

解: $\int f(x) \cdot \frac{\cos x}{x} dx = \int \frac{\cos x}{x} d \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{x} \right)^2 + C = \frac{\cos^2 x}{2x^2} + C$.

4、积分 $I_1 = \int_1^2 \ln x dx$ 与 $I_2 = \int_1^2 \ln(2x) dx$ 的大小关系是 【 】.

解: 当 $x \in [1, 2]$ 时, 有 $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x > \ln x$, 故 $I_2 > I_1$.

5、 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2} =$ 【 】.

解: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2} \frac{1}{n} = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} (e - 1)$.

三、(满分 10 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = (1+ax^2)^{\frac{3}{2}} - 1$ 和 $\beta(x) = 1 - \cos x$ 满足 $\alpha(x) \sim \beta(x)$. 试确定 a 的值.

解: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\alpha(x) = (1+ax^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \sim \frac{3}{2}ax^2, \quad \beta(x) = 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 3a = 1, \text{ 故 } a = \frac{1}{3}.$$

四、(满分 10 分) 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + xy = e$ 所确定, 求 $y''(0)$.

解: 将方程 $e^{x+y} + xy = e$ 两端对 x 求导, 得

$$e^{x+y}(1+y') + y + xy' = 0, \quad *$$

上式 (*) 两端再对 x 求导, 得

$$e^{x+y}(1+y')^2 + y''e^{x+y} + 2y' + xy'' = 0, \quad **$$

将 $x = 0$ 代入方程 $e^{x+y} + xy = e$, 得 $y(0) = 1$.

再将 $x = 0$, $y(0) = 1$ 代入方程 (*), 得 $y'(0) = -e^{-1} - 1$,

最后, 将 $x = 0$, $y = 1$ 及 $y'(0) = -e^{-1} - 1$ 代入方程 (**),

$$\text{得 } y''(0) = 2e^{-1} + e^{-2}.$$

五、(满分 10 分) 研究函数 $y = x^x$ 在 $(0.1, +\infty)$ 内的最大值与最小值.

解: 由 $y' = y(\ln x + 1) = 0$, 得 $x = e^{-1}$.

当 $0.1 < x < e^{-1}$ 时, $y' < 0$, 故 $y = x^x$ 在 $(0.1, e^{-1}]$ 上单调递减;

当 $x > e^{-1}$ 时, $y' > 0$, 故 $y = x^x$ 在 $[e^{-1}, +\infty)$ 上单调递增;

因此, $y = x^x$ 在 $x = e^{-1}$ 处取得最小值 $y_{\min} = y(e^{-1}) = \frac{1}{\sqrt[e]{e}}$;

再由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, 故函数 $y = x^x$ 在 $(0.1, +\infty)$ 内, 无最大值.

六、(满分 10 分) 求微分方程 $xy'' - y' + x^2 = 0$ 的通解.

解: 1) 若 $x = 0$, 则 $y' = 0$, 即 $y = C_1$.

2) 若 $x \neq 0$, 将方程转化为 $y'' - \frac{1}{x}y' = -x$, 于是有

$$y' = e^{\int -P(x)dx} \left(C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \right)$$

$$= e^{\ln x} \left(C + \int -1 dx \right) = Cx - x^2$$

$$\text{所以, } y = \frac{C}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + C_1 = C_1 + C_2 x^2 - \frac{1}{3} x^3. \quad (\text{设 } C = 2C_2)$$

注: 方法不唯一. 利用欧拉法 (令 $x = e^t$ 换元) 或降阶法 (有 x 无 y , 设 $y' = p(x)$ 换元),

已可以求解微分方程, 最终结果应该一样.

七、(满分 10 分) 求抛物线 $y^2 = 3(3-x)$ 及抛物线在 $(0, 3)$ 处的切线和 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的立体的体积.

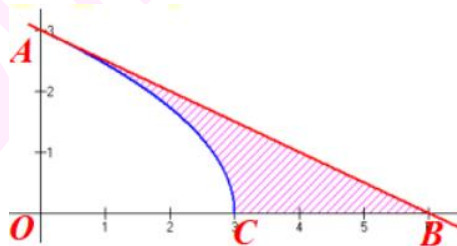
解: 由已知, 有 $2y \cdot y' = -3$, 因此, $y'(0) = -\frac{1}{2}$,

所以, 过 $(0, 3)$ 的切线方程为: $y - 3 = -\frac{1}{2}x$.

该切线与 x 轴的交点坐标为 $(6, 0)$.

$$\text{因此, } V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 6 - \pi \int_0^3 y^2 dx.$$

$$= 18\pi - \frac{27}{2} \pi = \frac{9\pi}{2}.$$



八、(满分 10 分) 求函数 $f(x) = \int_{-1}^x (1+t) \arctan t dt$ 的极小值.

解: 易知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上显然连续.

再由 $f'(x) = (1+x) \arctan x = 0$, 得 $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递增;

当 $-1 < x < 0$ 时, $y' < 0$, 故 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递减;

当 $x > 0$ 时, $y' > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增;

因此, $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值 $f(-1) = \int_{-1}^{-1} (1+t) \arctan t dt = 0$;

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值 $f(0) = \int_{-1}^0 (1+t) \arctan t dt$.

$$\text{计算有 } \min f(x) = f(0) = \int_{-1}^0 (1+t) \arctan t dt = \frac{\ln 2 - 1}{2}.$$

北 京 交 通 大 学

2024-2025-1-《微积分 B (上)》期末考试 参考答案

一、单选题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}, & x \neq -1 \\ a, & x = -1 \end{cases}$ 在 $x = -1$ 处连续, 则常数 $a =$ 【 】.

- (A) 0 (B) -2 (C) -4 (D) 2.

解: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 2}{1} = -4$, 所以, $a = -4$. 故选 (C).

2. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{1 - \cos 2x} = 1$, 其中 $f(0) = 0$, 则 $f'(0) =$ 【 】.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{(2x)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} f'(0) = 1$. 故选 (C).

3. 设常数 $k > 0$, 则函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为 【 】.

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0.

解: 由 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e - x}{xe} = 0$, 得驻点 $x = e$.

当 $0 < x < e$ 时, $y' > 0$, 故 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, e]$ 上单调递增;

当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 故 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调递减;

再由 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty$, $f(e) = \ln(e) - 1 + k = k > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. 故选 (B).

4. 设函数 $f(x)$ 连续, $x > 0$, 且 $\int_0^{x^2} f(t) dt = x^2(x+1)$, 则 $f(2) =$ 【 】.

- (A) 4 (B) $12 + 2\sqrt{2}$ (C) $1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (D) $12 - 2\sqrt{2}$.

解: 等式两边对求导, 得

$$f(x^2) \cdot 2x = 3x^2 + 2x, \text{ 即 } f(x^2) = \frac{3x+2}{2}.$$

所以, 令 $x = \sqrt{2}$, 则 $f(2) = \frac{3\sqrt{2}+2}{2} = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$. 故选 (C).

5. 按待定函数法, 微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{-2x}$ 的一个特解应具有形式 【 】.

(A) Axe^{-2x} (B) $(Ax+B)e^{-2x}$ (C) $(Ax^2+Bx+C)e^{-2x}$ (D) $x(Ax+B)e^{-2x}$.

解: 对应的齐次方程的特征方程 $r^2 - 5r + 6 = 0$, 特征根 $r_{1,2} = 2, r_2 = 3$. 故选 (B).

二、填空题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

6. 若 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx =$ 【 】.

解: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x de^{-x^2} = -\frac{1}{2} (xe^{-x^2})_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$
 $= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

7. 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应的点处的切线方程为 【 】.

解: 当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, 曲线 L 上的点为 $(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$, 且 $k = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{-3\cos^2 t \cdot \sin t}{3\sin^2 t \cdot \cos t} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1$,

故所求切线方程为: $y - \frac{\sqrt{2}}{4} = -(x - \frac{\sqrt{2}}{4})$, 或 $x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. 设 $\ln f(t) = \cos t$, 则 $\int \frac{tf'(t)}{f(t)} dt =$ 【 】.

解: $\int \frac{tf'(t)}{f(t)} dt = \int t d[\ln f(t)] = t \cdot \ln f(t) - \int \ln f(t) dt$
 $= t \cos t - \int \cos t dt = t \cos t - \sin t + C.$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 3x - \sin x} =$ 【 】.

解: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 3x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^x(e^{\pi-x} - 1)}{\sin 3x - \sin x} = e^\pi \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{\sin 3x - \sin x}$
 $= e^\pi \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-1}{3\cos 3x - \cos x} = \frac{-e^\pi}{2\cos \pi} = \frac{e^\pi}{2}.$

10. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} (\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{2n^2} + \sqrt[3]{3n^2} + \dots + \sqrt[3]{n \cdot n^2}) =$ 【 】.

解: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} (\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{2n^2} + \sqrt[3]{3n^2} + \dots + \sqrt[3]{n \cdot n^2}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4}.$

三、(满分 10 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \sin ax, & x \leq 0, \\ e^{2x} + b, & x > 0 \end{cases}$, 确定常数 a, b , 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解: 由已知, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故由

$$f(0-0) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(0+0) = 1+b, \quad \text{知 } b = -1.$$

再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 以及

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin ax - 0}{x} = a;$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{2x} - 1 - 0}{x} = 2, \quad \text{知 } a = 2.$$

综上所述, $a = 2, b = -1$.

四、(满分 10 分) 设 $y = f(x+y)$, $f''(x)$ 存在, 且 $f'(x) \neq 1$, 求 y'' .

解: 方程 $y = f(x+y)$ 两边同时对 x 求导, 得

$$\frac{dy}{dx} = f'(x+y) \cdot (1 + \frac{dy}{dx}), \quad \text{整理, 得 } \frac{dy}{dx} = \frac{f'}{1-f'}. \quad (*)$$

式 (*) 两边, 再同时对 x 求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \left(\frac{f'}{1-f'} \right)'_x \\ &= \frac{(1-f')(1+y')f'' + (1+y')f' \cdot f''}{(1-f')^2} \\ &= \frac{f''}{(1-f')^3}. \end{aligned}$$

五、(满分 10 分) 求 $f(x) = xe^{-x}$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的最值.

解: 由 $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} = 0$, 得 $x = 1$.

当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x) = xe^{-x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减;

当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x) = xe^{-x}$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递增;

因此, $f(x) = xe^{-x}$ 在 $x=1$ 处, 取得最大值 $f_{\max} = f(1) = \frac{1}{e}$;

再由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 故函数 $f(x) = xe^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 无最小值.

六、(满分 10 分) 求微分方程 $y'' - 9y = \cos 3x$ 的通解.

解: 1) 先求齐次方程 $y'' - 9y = 0$ 通解:

特征方程为 $r^2 - 9 = 0$ ，易知特征根为 $r_1 = -3$, $r_2 = 3$ 。

故，齐次方程的通解为: $Y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$ 。

2) 再求非齐次的特解:

设 $y^* = x^0 (A \cos 3x + B \sin 3x)$,

代入原方程, 得 $A = -\frac{1}{18}$, $B = 0$, 即 $y^* = -\frac{1}{18} \cos 3x$ 。

故非齐次方程的通解为: $y = Y + y^* = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{18} \cos 3x$ 。

七、(满分 10 分) 设曲线 $y = x^3 - ax + b$ 与直线 $x = -1$, $x = 1$ 及 x 轴围成一个平面图形, 该图

形绕 x 轴旋转得到一个旋转体。问当 a , b 为何值时该旋转体的体积最小?

解: 由已知, 有 $V = \pi \int_{-1}^1 y^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^3 - ax + b)^2 dx$ -- 5 分.

$$= \pi \int_{-1}^1 (x^6 - 2ax^4 + 2bx^3 + a^2x^2 - 2abx + b^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^6 - 2ax^4 + a^2x^2 + b^2) dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{3} (a - \frac{3}{5})^2 + b^2 + \frac{4}{175} \right).$$
 -- 8 分.

即当 $a = \frac{3}{5}$, $b = 0$ 时, $V_{\min} = \frac{8\pi}{175}$. --10 分.

八、(满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x \geq 1$ 上是正值连续函数。

试求函数 $F(x) = \int_1^x \left[\left(\frac{2}{x} + \ln x \right) - \left(\frac{2}{t} + \ln t \right) \right] f(t) dt$ 在 $x \geq 1$ 时的最小值。

解: 易知函数 $F(x) = \left(\frac{2}{x} + \ln x \right) \int_1^x f(t) dt - \int_1^x \left(\frac{2}{t} + \ln t \right) f(t) dt$ 在 $[1, +\infty)$ 上可导。

再由 $F'(x) = (x-2)x^{-2} \int_1^x f(t) dt = 0$, 得 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ 。

当 $1 < x < 2$ 时, $F'(x) < 0$, 故 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减。

当 $x > 2$ 时, $F'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增。

因此, $F(x)$ 在 $x = 2$ 处取得最小值 $F(2)$ 。