

数 学 实 验

题 目 Segway Tours

学 院 _____ 理学院

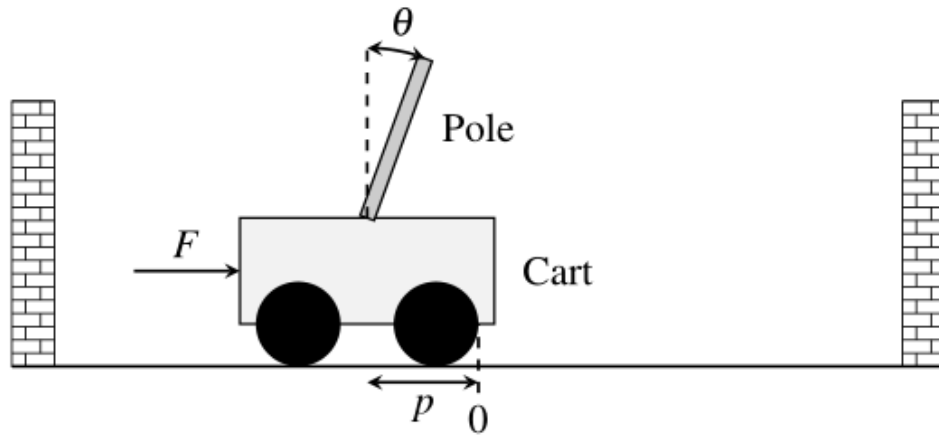
专 业 信息与计算科学

姓 名 _____

学 号 _____

二〇二一年 七月一日

Segway Tours



一个平衡车可以用位置 P , 速度 P' , 角度 θ , 角速度 θ' 来描述, 把它写成向量形式:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} P \\ P' \\ \theta \\ \theta' \end{bmatrix}$$

输入这个模型得只有 u , 即对平衡车的力, 在 n 时刻, 我们可以输入 $u[n]$, 这个系统可以用线性模型描述为:

$$\vec{X}[n+1] = A\vec{X}[n] + \vec{b}u[n]$$

A 是一个 4×4 的矩阵, b 是一个 4×1 的矩阵。在给定初始状态 $\vec{x}[0]$ 的情况下, 试问如何用 N 步达到最后的状态 $\vec{x}_f$ 呢?

(a) 用 $\vec{x}[0]$ 和 $u[0]$ 表达 $\vec{x}[1]$ 。

$$\vec{x}[1] = A\vec{x}[0] + \vec{b}u[0]$$

(b) 用 $\vec{x}[0]$ 和输入的 $u[0], u[1]$ 表达 $\vec{x}[2]$, 用 $\vec{x}[0]$ 和输入的 $u[0], u[1], u[2]$ 表达 $\vec{x}[3]$,

用 $\vec{x}[0]$ 和输入的 $u[0], u[1], u[2], u[3]$ 表达 $\vec{x}[4]$ 。

根据线性模型知:

$$\vec{x}[2] = A\vec{x}[1] + \vec{b}u[1]$$

代入 $\vec{x}[1] = A\vec{x}[0] + \vec{b}u[0]$, 得:

$$\vec{x}[2] = A(A\vec{x}[0] + \vec{b}u[0]) + \vec{b}u[1]$$

化简, 得:

$$\vec{x}[2] = A^2\vec{x}[0] + A\vec{b}u[0] + \vec{b}u[1]$$

同理得到 $\vec{x}[3]$:

$$\vec{x}[3] = A(A^2\vec{x}[0] + A\vec{b}u[0] + \vec{b}u[1]) + \vec{b}u[2]$$

化简, 得:

$$\vec{x}[3] = A^3\vec{x}[0] + A^2\vec{b}u[0] + A\vec{b}u[1] + \vec{b}u[2]$$

同理可得 $\vec{x}[4]$:

$$\vec{x}[4] = A^4\vec{x}[0] + A^3\vec{b}u[0] + A^2\vec{b}u[1] + A\vec{b}u[2] + \vec{b}u[3]$$

(c) 用 $\vec{x}[0]$ 和输入的 $u[0], \dots, u[N-1]$ 表达 $u[N]$ 。

$$\vec{x}[N] = A^N\vec{x}[0] + \sum_{n=0}^{N-1} A^{N-1-n}\vec{b}u[n]$$

为了下一步计算, 这里给出了矩阵 A 和向量 $\vec{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0.22 & -0.17 & -0.01 \\ 0 & 0.10 & 1.14 & 0.10 \\ 0 & 1.66 & 2.85 & 1.14 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.21 \\ -0.03 \\ -0.44 \end{bmatrix}$$

假设平衡车得初始状态为:

$$\vec{x}[0] = \begin{bmatrix} -0.3853493 \\ 6.1032227 \\ 0.8120005 \\ -14 \end{bmatrix}$$

现在通过控制输入 $u[0], \dots, u[N-1]$ 达到最终状态 $\vec{x}_f = \vec{0}$, $\vec{x}_f = \vec{0}$ 意味着平衡车

竖直向上且停止。

(d) 可以在两步达到 $\vec{x}_f = \vec{0}$ 吗?

根据公式 $\vec{x}[2] = A^2\vec{x}[0] + A\vec{b}u[0] + \vec{b}u[1]$, 其中 $\vec{x}[2] = \vec{x}_f = \vec{0}$ 。

变形上式, 得到:

$$A\vec{b}u[0] + \vec{b}u[1] = \vec{x}_f - A^2\vec{x}[0]$$

令 $A_2 = [A\vec{b}, \vec{b}]$, $U = \begin{bmatrix} u[0] \\ u[1] \end{bmatrix}$, $B_2 = \vec{x}_f - A^2\vec{x}[0]$, 得:

$$A_2U = B_2$$

利用 MATLAB 求解线性方程组, 得到:

$$\begin{cases} u[0] = -3.11881188729381 \\ u[1] = -1.284737395238204 \end{cases}$$

对答案进行验证, 计算 $A_2U = B_2$ 的 2 范数为 0.2418, 因此认为两步无法达到最终的状态 $\vec{x}_f$ 。

(e) 可以在三步达到 $\vec{x}_f = \vec{0}$ 吗?

同样根据公式

$$\vec{x}[3] = A^3\vec{x}[0] + A^2\vec{b}u[0] + A\vec{b}u[1] + \vec{b}u[2]$$

令 $A_3 = [A^2\vec{b}, A\vec{b}, \vec{b}]$, $U = \begin{bmatrix} u[0] \\ u[1] \\ u[2] \end{bmatrix}$, $B_3 = \vec{x}_f - A^3\vec{x}[0]$, 得:

$$A_3U = B_3$$

利用 MATLAB 求解得到:

$$\begin{cases} u[0] = -7.245407128567499 \\ u[1] = 8.633925277158380 \\ u[2] = -1.876776887106062 \end{cases}$$

计算 $A_3U = B_3$ 的 2 范数为 0.0236, 因此认为三步无法达到最终的状态 $\vec{x}_f$ 。

(f) 可以在四步达到 $\vec{x}_f = \vec{0}$ 吗?

根据公式

$$\vec{x}[4] = A^4\vec{x}[0] + A^3\vec{b}u[0] + A^2\vec{b}u[1] + A\vec{b}u[2] + \vec{b}u[3]$$

$$\text{令 } A_4 = [A^3\vec{b}, A^2\vec{b}, A\vec{b}, \vec{b}], \quad U = \begin{bmatrix} u[0] \\ u[1] \\ u[2] \\ u[3] \end{bmatrix}, \quad B_4 = \vec{x}_f - A^4\vec{x}[0], \quad \text{得:}$$

$$A_4 U = B_4$$

利用 MATLAB 求解得到:

$$\begin{cases} u[0] = -13.248750750137665 \\ u[1] = 23.733251248639156 \\ u[2] = -11.571818716797430 \\ u[3] = 1.465159727250111 \end{cases}$$

计算 $A_4 U = B_4$ 的 2 范数为 $4.496415296406552e-16$, 因此认为四步可以达到最终的状态 $\vec{x}_f$ 。

(g) 如果可以在四步达到 $\vec{x}_f = \vec{0}$, 找到合适的输入。

根据上一问的求解, 知:

$$\begin{cases} u[0] = -13.248750750137665 \\ u[1] = 23.733251248639156 \\ u[2] = -11.571818716797430 \\ u[3] = 1.465159727250111 \end{cases}$$

(h) 考虑一般的矩阵 A 和向量 $\vec{b}$, 在什么状况下

$$\text{span}\{\vec{b}, A\vec{b}, \dots, A^{N-1}\vec{b}\}$$

对于 $\vec{x}_f = \vec{0}$ 在 N 步是“可达到的”。

考虑 $A_N = [A^{N-1}\vec{b}, A^{N-2}\vec{b}, \dots, A^2\vec{b}, A\vec{b}, \vec{b}]$, $B_N = \vec{x}_f - A^N\vec{x}[0]$ 。

若 $r(A_N) = r(A_N, B_N)$, 则方程有解。

代码:

```
clear,clc
A=[1 0.05 -0.01 0
    0 0.22 -0.17 -0.01
    0 0.10 1.14 0.10
    0 1.66 2.85 1.14
    ];
b=[0.01;0.21;-0.03;-0.44];
x0=[-0.3853493;6.1032227;0.8120005;-14];
xf=[0;0;0;0];
%%
bb=xf-A*A*x0;
aa=[A*b,b];
u=linsolve(aa,bb);
norm(aa*u-bb)
%%
aa=[A*A*b,A*b,b];
bb=xf-A^3*x0;
u=linsolve(aa,bb);
norm(aa*u-bb)
%%
aa=[A^3*b,A*A*b,A*b,b];
bb=xf-A^4*x0;
u=linsolve(aa,bb);
norm(aa*u-bb)
```