

2014-2015 (2) 2013 级信计专业《概率论与数理统计》 期末考试卷 (A)

参考答案

一、填空题〔每小题 5 分， 共计 30 分〕

1、 A, B, C 是三个随机事件至少有一个发生， A, B 发生且 C 不发生；

2、 $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{7}{12}$ ； 3、 $Z = X + Y \sim \chi^2(m+n)$ ； 4、 $\bar{x} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)$ ；

5、 $\frac{1}{n}$ ； 6、 经验信息。

二、〔计 10 分〕证明：记第 k 次取出的是黑球的事件为 B_k

($k=1, 2, 3, \dots$)。显然，当 $k=1$ ，有 $p(B_1) = \frac{b}{b+r}$ 。当 $k=2$ 时，

$$p(B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2 | B_1) + p(\bar{B}_1) \cdot p(B_2 | \bar{B}_1) = \frac{b}{b+r}。$$

假设当 $k \leq n$ 时，有 $P(B_k) = \frac{b}{b+r}$ 。则当 $k = n+1$ 时，

$$\begin{aligned} p(B_{n+1}) &= p(B_1 B_{n+1}) + p(\bar{B}_1 B_{n+1}) = p(B_1) \cdot p(B_{n+1} | B_1) + p(\bar{B}_1) \cdot p(B_{n+1} | \bar{B}_1) \\ &= \frac{b}{b+r} \cdot \frac{b+c}{b+r+c} + \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b}{b+r+c} = \frac{b}{b+r}。 \end{aligned}$$

因此，由数学归纳法知： $P(B_k) = \frac{b}{b+r}$ ($k=1, 2, 3, \dots$)

三、〔计 14 分〕解：(1) 由

$$1 = \iint_{R^2} p(x, y) dx dy = k \int_0^1 x dx \int_0^1 y^2 dy = \frac{k}{6}, \text{ 因此 } k = 6;$$

$$(2) \text{ 由于 } p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 6xy^2 dy = 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \text{ 且}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 6xy^2 dx = 3y^2, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \text{ 因此有}$$

$$p(x, y) = p_X(x) p_Y(y)$$

故随机变量 X 与 Y 独立。

$$(3) \text{ 由公式可得： } p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y(z-x) dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^z 6x(z-x)^2 dx = \frac{1}{2}z^4, & 0 < z \leq 1 \\ \int_{z-1}^1 6x(z-x)^2 dx = -\frac{1}{2}z^4 + 3z^2 - 2z, & 1 < z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

四、【计 10 分】解：似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda^{-1} \exp(-x_i/\lambda) = \lambda^{-n} \exp(-\lambda^{-1} \sum_{i=1}^n x_i)$$

即 $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = -n \ln \lambda - \lambda^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$ 。由

$$\frac{d \ln L}{d \lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

解得 $\hat{\lambda} = \bar{x}$ ，此即为参数 λ 的最大似然估计。由于

$$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{x}) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \lambda = \lambda$$

因此， $\hat{\lambda} = \bar{x}$ 是参数 λ 的无偏估计。

五、【计 14 分】解：由数据表可得： $\bar{x} = 6$ ， $\bar{y} = 210.4$ ， $l_{xx} = 40$ ， $l_{xy} = 1478$ ， $l_{yy} = 54649.2$ 。

(1) 由 $\hat{\beta}_1 = l_{xy}/l_{xx} = 36.95$ ， $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = -11.3$ ，因此， y 对 x 的线性回归方程为： $\hat{y} = -11.3 + 36.95x$ 。

(2) 由 $S_R = \hat{\beta}_1^2 l_{xx} = 54612.1$ ， $S_e = S_T - S_R = 37.1$ ，可得下列方差分析表

来源	平方和	自由度	均方	F 比
回归	$S_R = 54612.1$	$f_R = 1$	$MS_R = 54612.1$	4416.07
残差	$S_e = 37.1$	$f_e = 3$	$MS_e = 12.37$	
总计	$S_T = 54649.2$	$f_T = 4$		

由于 $\hat{F} = 4416.07 > F_{0.95}(1, 3) = 10.13$ ，因此 (1) 中回归方程是显著的；

(3) 当 $x = 12$ ， y 的预测值为 $\hat{y} = 432.1$ 。

六、【计 12 分】解：(1) 检验假设： $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

取检验统计量： $F = \frac{S_x^2}{S_y^2} \sim F(m-1, n-1)$

其中 $m=n=6$ 。

当 $\alpha=0.05$ 时, 拒绝域为

$$\begin{aligned} W &= \{F \mid F > F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) \text{ 或 } F < F_{\alpha/2}(m-1, n-1)\} \\ &= \{F \mid F > 7.15 \text{ 或 } F < 1/7.15\} \end{aligned}$$

由于 $\hat{F} = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{7.4286 \times 10^{-6}}{7.7143 \times 10^{-6}} = 0.9630 \notin W$, 因此, 可以认为两批电子

器件的方差相等。

(2) 检验假设: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时, 取检验统计量为:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

其中 $s_w^2 = \frac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}{m+n-2}$, $m=n=6$ 。

当 $\alpha=0.05$ 时, 拒绝域为

$$W = \{t \mid |t| > t_{1-\alpha/2}(m+n-2)\} = \{t \mid |t| > 2.2281\}$$

由于 $|t| = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \right| = 1.2589 \notin W$, 因此, 可以认为两批电子器件的均

值相等。

七、【计 10 分】辛钦大数定律: 设 $\{X_n\}$ 为独立、同分布的随机变量序列。

若 X_n 的数学期望存在, 则 $\{X_n\}$ 服从大数定律, 即记 $E(X_n) = \mu$, 则有

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} \mu。$$

证明: 记 X_n 的特征函数为 $\varphi(t)$, 由于 $\varphi'(0) = iE(X_n) = \mu i$, 于是, $\varphi(t)$ 在 0 点有展开式: $\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + o(t) = 1 + i\mu t + o(t)$ 。

再由 $\{X_n\}$ 为独立、同分布的随机变量序列, 以及特征函数的性质可得 Y_n 的特征函数为

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n = \left[1 + i\mu \frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n$$

因此, 对任意的 t 有: $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) = e^{i\mu t}$, 而 $e^{i\mu t}$ 正是退化分布的特征函数。故 $Y_n \xrightarrow{P} \mu$ 。