

《概率论与数理统计》 期末考试卷 A 参考答案

一、填空题〔每小题 5 分，共计 25 分〕

1、 $\overline{ABC}$ ； 2、0.25； 3、 $t(n-1)$ ； 4、 $\left[(n-1)s^2/\chi_{1-\alpha}^2(n-1), +\infty\right)$ ；
 $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ ； 5、 $F(4, 2)$ 。

二、〔计 10 分〕解：记 A_i 为事件“第 i 个人自己抽到自己礼物”，
 $i=1, 2, \dots, n$ 。有条件知：

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = \dots = P(A_{n-1} A_n) = \frac{1}{n \cdot (n-1)}$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1 A_2 A_4) = \dots = P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) = \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}$$

.....

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

于是，由全概率公式可知，所求概率为：

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}。$$

三、〔计 14 分〕解：(1) 由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = a \int_0^1 y^2 dy \int_0^y x^2 dx = \frac{a}{18}$ 得：
 $a = 18$ 。

$$\begin{aligned} (2) \quad p_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \\ &= \begin{cases} \int_x^1 18 \cdot x^2 y^2 dy = 6x^2(1-x^3), & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同理, } p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx \\ &= \begin{cases} \int_0^y 18 \cdot x^2 y^2 dx = 6y^5, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。 \end{aligned}$$

因 $p_X(x) \cdot p_Y(y) \neq p(x, y)$ ，则随机变量 X 与 Y 不是相互独立的。

(3) 由随机变量和的密度计算公式知： $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x) dx$

$$= \begin{cases} \int_0^{z/2} 18 \cdot x^2 \cdot (z-x)^2 dx = 0.3z^5, & 0 \leq z < 1 \\ \int_{z-1}^{z/2} 18 \cdot x^2 \cdot (z-x)^2 dx = -0.3z^5 + 6z^2 - 9z + 3.6, & 1 \leq z \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

四、【计 12 分】解：由

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right] \end{aligned}$$

因此， $\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ 。可求参数 μ 和 σ^2 的最大似然估计量为：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s_n^2。$$

由于 $E(\hat{\mu}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \mu$ ， $E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2$ ，因此 $\hat{\mu}$ 是 μ 的无偏估计量，而 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的有偏估计量。若取统计量

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

则 s^2 是 σ^2 的无偏估计量。

五、【计 14 分】

解：（1）由正则方程 $\begin{cases} n\beta_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta_1 = \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta_0 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \beta_1 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \end{cases}$ ，代入数据可解得

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = \frac{2.4675}{0.0186} = 132.6613 \\ \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x} = 49.1250 - 132.6613 \times 0.1563 = 28.3900 \end{cases}$$

即线性回归方程是: $\hat{y} = 28.3900 + 132.6613x$ 。

(2) 由 $S_T = S_R + S_e$, $S_R = \hat{\beta}_1^2 l_{xx}$, $S_T = l_{yy}$, 可得回归方程方差分析表如下:

来 源	平方和	自 由 度	均 方 和	F 比
回 归	$S_R = 327.3417$	$f_R = 1$	$MS_R = 327.3417$	184.7478
残 差	$S_e = 17.7183$	$f_e = 10$	$MS_e = 1.7718$	
总 计	$S_T = 345.0600$	$f_T = 11$		

由 $F_{1-\alpha}(1,10) = 4.96$, 因为 $F = 184.7478 > 4.96 = F_{1-\alpha}(1,10)$, 所以在 $\alpha = 0.05$ 下, 回归方程是显著的。

(3) 当 $x = 0.20$, $E(\hat{y}) = 28.3900 + 132.6613 \times 0.20 = 54.9223$ 。

$$\begin{aligned} \delta = \delta(x) &= t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot \sqrt{\frac{S_e}{n-2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{l_{xx}}} \\ &= 2.2281 \cdot \sqrt{\frac{17.7183}{10}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(0.20 - 0.1563)^2}{0.0186}} = 3.2299 \end{aligned}$$

因此, y 的预测值为 $54.9223 \pm 3.2299 = [51.6924, 58.1522]$ 。

六、【计 10 分】解: 检验假设: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$$\text{取检验统计量: } t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_w \sqrt{1/m + 1/n}} \sim t(m+n-2)$$

$$\text{其中 } m=8, n=9, S_w^2 = \frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2}。$$

当 $\alpha = 0.05$ 时, 拒绝域为

$$W = \{t \mid |t| > t_{0.975}(15)\} = \{t \mid |t| > 2.1314\}。$$

$$\text{由 } \left| \hat{t} \right| = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_w \sqrt{1/m + 1/n}} \right| = 2.3656 \in W \text{ 知: 因此, 不能认为 } X \text{ 与 } Y \text{ 的均值}$$

是相等的。

七、【计 10 分】辛钦大数定理: 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 若 X_n 的数学期望存在, 则 $\{X_n\}$ 服从大数定律。

证明：由于 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $E(X_n) = \mu$, 记 X_n 的特征函数为 $\varphi(t)$, 于是有: $\varphi'(0) = \mu i$ 。由特征函数的性质知: $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 的特征函数为

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi^n\left(\frac{t}{n}\right) = [1 + \mu i t + o(1/n)]^n。$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{Y_n}(t) = e^{\mu i t}$, 即 $X_n \xrightarrow{P} \mu$, 从而 $\{X_n\}$ 服从大数定律。

八、【计 5 分】解：略。