国外电子与通信教材系列

PEARSON
Prentice Hall

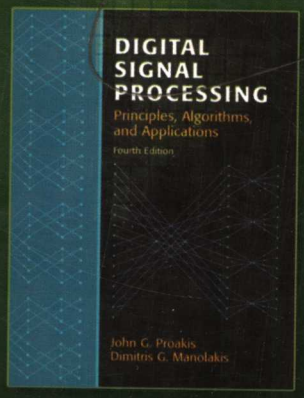
数字信号处理

（第四版）

Digital Signal Processing

Principles, Algorithms, and Applications

Fourth Edition



[美] John G. Proakis
Dimitris G. Manolakis 著

方艳梅　刘永清　等译

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

http://www.phei.com.cn

数字信号处理（第四版）

Digital Signal Processing

Principles, Algorithms, and Applications, Fourth Edition

本书是数字信号处理的经典教材，是作者在多年教学的基础上编写而成的。其版本不断更新，内容涵盖了离散时间信号、系统和现代数字信号处理的基础知识，其每一章均从基本概念入手，详细阐述各种基本理论与分析方法，并在介绍中给出许多数字信号处理的应用实例，以及基于 MATLAB 的仿真实验。

本书可作为电子工程、计算机工程、信号处理以及通信工程等专业的本科和研究生教材，也适合于教师和广大科技工作者参考使用。



书号：978-7-121-04042-9
定价：98.00 元

作者简介

John G. Proakis：美国东北大学电子与计算机工程系的教授，其研究方向为数字通信与数字信号处理，主要包括自适应滤波、自适应通信系统、自适应均衡技术、多径衰落信道的通信、雷达侦测、信号参数估计、通信系统建模与仿真、最优化技术、统计分析等，已多次出版《数字信号处理》和《数字通信》等经典著作。

Dimitris G. Manolakis：工作于美国麻省理工学院林肯实验室，主要研究方向是数字通信与数字信号处理。

责任编辑：余　义
责任美编：毛惠庚

传播教育信息　共享教育资源
华信教育资源网
www.huaxin.edu.cn(www.hxedu.com.cn)
欢迎登录　获取优质教学资源

ISBN 978-7-121-03496-1

本书贴有激光防伪标志，凡没有防伪标志者，属盗版图书

定价：78.00 元

TN911.72
177
2007

国外电子与通信教材系列

数字信号处理

（第四版）

Digital Signal Processing

Principles, Algorithms, and Applications

Fourth Edition

[美] John G. Proakis
Dimitris G. Manolakis 著

方艳梅 刘永清 等译

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内容简介

本书全面系统地阐述了数字信号处理的基础知识，其中前10章讲述了确定性数字信号处理的知识，包括离散时间信号及系统的介绍、z变换、傅里叶变换、频率分析以及滤波器设计等。后4章则介绍了随机数字信号处理的知识，主要学习多速率数字信号处理、线性预测、自适应滤波以及功率谱估计。本书内容全面丰富、系统性强、概念清晰。叙述深入浅出，为了帮助读者深刻理解基本理论和分析方法，书中列举了大量的精选例题，同时还给出了许多基于MATLAB的仿真实验。另外，在各章的最后还附有习题，以帮助读者进一步巩固所学知识。

本书可作为电子工程、计算机工程、信号处理以及通信工程等专业的本科和研究生教材，也适合于教师和广大科技工作者参考使用。

Simplified Chinese edition Copyright © 2007 by PEARSON EDUCATION ASIA LIMITED and Publishing House of Electronics Industry.

Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications, Fourth Edition, ISBN: 0131873741 by John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis. Copyright © 2007. All Rights Reserved.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall.

This edition is authorized for sale only in the People's Republic of China (excluding the Special Administrative Region of Hong Kong and Macau).

本书中文简体字翻译版由电子工业出版社和Pearson Education培生教育出版亚洲有限公司合作出版。未经出版者预先书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书封面贴有Pearson Education培生教育出版集团激光防伪标签，无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号　图字：01-2006-7672

图书在版编目（CIP）数据

数字信号处理：第4版/（美）普埃克（Proakis J. G.）等著；方艳梅等译

北京：电子工业出版社，2007.6

（国外电子与通信教材系列）

书名原文：Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications, Fourth Edition

ISBN 978-7-121-03496-1

Ⅰ.数… Ⅱ.①普… ②方… Ⅲ.数字信号-信号处理-教材 Ⅳ.TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第075786号

责任编辑：余　义

印　　刷：北京季蜂印刷有限公司

装　　订：三河市皇庄路通装订厂

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱　邮编：100036

开　　本：787×1092　1/16　　印张：51.75　字数：1325千字

印　　次：2007年6月第1次印刷

定　　价：78.00元

凡所购买电子工业出版社的图书有缺损问题，请向购买书店调换；若书店售缺，请与本社发行部联系。联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

序

2001年7月间，电子工业出版社的领导同志邀请各高校十几位通信领域方面的老师，商量引进国外教材问题。与会同志对出版社提出的计划十分赞同，大家认为，这对我国通信事业、特别是对高等院校通信学科的教学工作会很有好处。

教材建设是高校教学建设的主要内容之一。编写、出版一本好的教材，意味着开设了一门好的课程，甚至可能预示着一个崭新学科的诞生。20世纪40年代MIT林肯实验室出版的一套28本雷达丛书，对近代电子学科、特别是对雷达技术的推动作用，就是一个很好的例子。

我国领导部门对教材建设一直非常重视。20世纪80年代，在原教委教材编审委员会的领导下，汇集了高等院校几百位富有教学经验的专家，编写、出版了一大批教材；很多院校还根据学校的特点和需要，陆续编写了大量的讲义和参考书。这些教材对高校的教学工作发挥了极好的作用。近年来，随着教学改革不断深入和科学技术的飞速进步，有的教材内容已比较陈旧、落后，难以适应教学的要求，特别是在电子学和通信技术发展神速、可以讲是日新月异的今天，如何适应这种情况，更是一个必须认真考虑的问题。解决这个问题，除了依靠高校的老师和专家撰写新的符合要求的教科书外，引进和出版一些国外优秀电子与通信教材，尤其是有选择地引进一批英文原版教材，是会有好处的。

一年多来，电子工业出版社为此做了很多工作。他们成立了一个“国外电子与通信教材系列”项目组，选派了富有经验的业务骨干负责有关工作，收集了230余种通信教材和参考书的详细资料，调来了100余种原版教材样书，依靠由20余位专家组成的出版委员会，从中精选了40多种，内容丰富，覆盖了电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等方面，既可作为通信专业本科生和研究生的教学用书，也可作为有关专业人员的参考材料。此外，这批教材，有的翻译为中文，还有部分教材直接影印出版，以供教师用英语直接授课。希望这些教材的引进和出版对高校通信教学和教材改革能起一定作用。

在这里，我还要感谢参加工作的各位教授、专家、老师与参加翻译、编辑和出版的同志们。各位专家认真负责、严谨细致、不辞辛劳、不怕琐碎和精益求精的态度，充分体现了中国教育工作者和出版工作者的良好美德。

随着我国经济建设的发展和科学技术的不断进步，对高校教学工作会不断提出新的要求和希望。我想，无论如何，要做好引进国外教材的工作，一定要联系我国的实际。教材和学术专著不同，既要注意科学性、学术性，也要重视可读性，要深入浅出，便于读者自学；引进的教材要适应高校教学改革的需要，针对目前一些教材内容较为陈旧的问题，有目的地引进一些先进的和正在发展中的交叉学科的参考书；要与国内出版的教材相配套，安排好出版英文原版教材和翻译教材的比例。我们努力使这套教材能尽量满足上述要求，希望它们能放在学生们的课桌上，发挥一定的作用。

最后，预祝“国外电子与通信教材系列”项目取得成功，为我国电子与通信教学和通信产业的发展培土施肥。也恳切希望读者能对这些书籍的不足之处、特别是翻译中存在的问题，提出意见和建议，以便再版时更正。

吴佑寿

中国工程院院士、清华大学教授

“国外电子与通信教材系列”出版委员会主任

出 版 说 明

进入21世纪以来，我国信息产业在生产和科研方面都大大加快了发展速度，并已成为国民经济发展的支柱产业之一。但是，与世界上其他信息产业发达的国家相比，我国在技术开发、教育培训等方面都还存在着较大的差距。特别是在加入WTO后的今天，我国信息产业面临着国外竞争对手的严峻挑战。

作为我国信息产业的专业科技出版社，我们始终关注着全球电子信息技术的发展方向，始终把引进国外优秀电子与通信信息技术教材和专业书籍放在我们工作的重要位置上。在2000年至2001年间，我社先后从世界著名出版公司引进出版了40余种教材，形成了一套“国外计算机科学教材系列”，在全国高校以及科研部门中受到了欢迎和好评，得到了计算机领域的广大教师与科研工作者的充分肯定。

引进和出版一些国外优秀电子与通信教材，尤其是有选择地引进一批英文原版教材，将有助于我国信息产业培养具有国际竞争能力的技术人才，也将有助于我国国内在电子与通信教学工作中掌握和跟踪国际发展水平。根据国内信息产业的现状、教育部《关于“十五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》的指示精神以及高等院校老师们反映的各种意见，我们决定引进“国外电子与通信教材系列”，并随后开展了大量准备工作。此次引进的国外电子与通信教材均来自国际著名出版商，其中影印教材约占一半。教材内容涉及的学科方向包括电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等，其中既有本科专业课程教材，也有研究生课程教材，以适应不同院系、不同专业、不同层次的师生对教材的需求，广大师生可自由选择和自由组合使用。我们还将与国外出版商一起，陆续推出一些教材的教学支持资料，为授课教师提供帮助。

此外，“国外电子与通信教材系列”的引进和出版工作得到了教育部高等教育司的大力支持和帮助，其中的部分引进教材已通过“教育部高等学校电子信息科学与工程类专业教学指导委员会”的审核，并得到教育部高等教育司的批准，纳入了“教育部高等教育司推荐——国外优秀信息科学与技术系列教学用书”。

为做好该系列教材的翻译工作，我们聘请了清华大学、北京大学、北京邮电大学、南京邮电大学、东南大学、西安交通大学、天津大学、西安电子科技大学、电子科技大学、中山大学、哈尔滨工业大学、西南交通大学等著名高校的教授和骨干教师参与教材的翻译和审校工作。许多教授在国内电子与通信专业领域享有较高的声望，具有丰富的教学经验，他们的渊博学识从根本上保证了教材的翻译质量和专业学术方面的严格与准确。我们在此对他们的辛勤工作与贡献表示衷心的感谢。此外，对于编辑的选择，我们达到了专业对口；对于从英文原书中发现的错误，我们通过与作者联络、从网上下载勘误表等方式，逐一进行了修订；同时，我们对审校、排版、印制质量进行了严格把关。

今后，我们将进一步加强同各高校教师的密切关系，努力引进更多的国外优秀教材和教学参考书，为我国电子与通信教材达到世界先进水平而努力。由于我们对国内外电子与通信教育的发展仍存在一些认识上的不足，在选题、翻译、出版等方面的工作中还有许多需要改进的地方，恳请广大师生和读者提出批评及建议。

电子工业出版社

教材出版委员会

主　任	吴佑寿	中国工程院院士、清华大学教授
副主任	林金桐	北京邮电大学校长、教授、博士生导师
	杨千里	总参通信部副部长，中国电子学会会士、副理事长 中国通信学会常务理事、博士生导师
委　员	林孝康	清华大学教授、博士生导师、电子工程系副主任、通信与微波研究所所长 教育部电子信息科学与工程类专业教学指导分委员会委员
	徐安士	北京大学教授、博士生导师、电子学系主任
	樊昌信	西安电子科技大学教授、博士生导师 中国通信学会理事、IEEE 会士
	程时昕	东南大学教授、博士生导师
	郁道银	天津大学副校长、教授、博士生导师 教育部电子信息科学与工程类专业教学指导分委员会委员
	阮秋琦	北京交通大学教授、博士生导师 计算机与信息技术学院院长、信息科学研究所所长 国务院学位委员会学科评议组成员
	张晓林	北京航空航天大学教授、博士生导师、电子信息工程学院院长 教育部电子信息科学与电气信息类基础课程教学指导分委员会副主任委员 中国电子学会常务理事
	郑宝玉	南京邮电大学副校长、教授、博士生导师 教育部电子信息与电气学科教学指导委员会委员
	朱世华	西安交通大学副校长、教授、博士生导师 教育部电子信息科学与工程类专业教学指导分委员会副主任委员
	彭启琮	电子科技大学教授、博士生导师、通信与信息工程学院院长 教育部电子信息科学与电气信息类基础课程教学指导分委员会委员
	毛军发	上海交通大学教授、博士生导师、电子信息与电气工程学院副院长 教育部电子信息与电气学科教学指导委员会委员
	赵尔沅	北京邮电大学教授、《中国邮电高校学报（英文版）》编委会主任
	钟允若	原邮电科学研究院副院长、总工程师
	刘　彩	中国通信学会副理事长兼秘书长，教授级高工 信息产业部通信科技委副主任
	杜振民	电子工业出版社原副社长
	王志功	东南大学教授、博士生导师、射频与光电集成电路研究所所长 教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会主任委员
	张中兆	哈尔滨工业大学教授、博士生导师、电子与信息技术研究院院长
	范平志	西南交通大学教授、博士生导师、信息科学与技术学院院长

译 者 序

本书是数字信号处理的经典教材，是作者在多年教学的基础上编写而成的。其版本不断更新，内容涵盖了离散时间信号、系统和现代数字信号处理的基础知识。本书的每一章均从基本概念入手，详细阐述各种基本理论与分析方法，并在介绍中给出了许多数字信号处理的应用实例，以及基于 MATLAB 的仿真实验。在学习完本书以后，学生即可掌握数字信号处理的基础知识及实际应用。

本书作者 John G. Proakis 是美国东北大学电子与计算机工程系的教授，其研究方向为数字通信与数字信号处理，主要包括自适应滤波、自适应通信系统、自适应均衡技术、多径衰落信道的通信、雷达侦测、信号参数估计、通信系统建模与仿真、最优化技术、统计分析等，已多次出版《数字信号处理》和《数字通信》等经典著作。第二位作者 Dimitris G. Manolakis 工作于美国麻省理工学院林肯实验室，主要研究方向是数字通信与数字信号处理。他们在本书中融入多年的教学及实践经验，并且注重理论与实际相结合。

本书共分为 14 章及两个附录，其中前 10 章讲述了基本数字信号处理知识，依次为：绪论、离散时间信号与系统、z 变换及其在 LTI 系统分析中的应用、信号的频率分析、LIT 系统的频域分析、信号的采样与重建、离散傅里叶变换的特性及应用、DFT 的有效计算：快速傅里叶变换算法、离散时间系统的实现、数字滤波器设计。后 4 章介绍了高级数字信号处理，包括多速率数字信号处理、线性预测和最优线性滤波器、自适应滤波器以及功率谱估计。附录 A 介绍随机数发生器，附录 B 摘录了用于线性相位 FIR 滤波器设计的转换系数表。最后，作者还给出了参考书目及精选习题答案。

参加本书翻译工作的有方艳梅、刘永清、梁小萍、杨锐、屈振华，由方艳梅和刘永清完成全书的审校工作。

限于译者水平，本书疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

译者

2007 年 5 月

前　言

本书是作者近几年来在为本科生和研究生讲授数字信号处理课程的基础上编写的，主要介绍离散时间信号、系统和现代数字处理的基础知识，以及它们在电子工程、计算机工程和计算机科学等专业方面的应用。本书可作为本科生在离散系统和数字信号处理方面的一学期或两学期课程的教材，同时也可作为一年级研究生在数字信号处理方面的一学期课程的教材。

本书假定学生事先已掌握了积分学（包括常微分方程）和连续时间信号的线性系统的知识（包括拉普拉斯变换）。虽然本书第4章将描述周期或非周期信号的傅里叶级数和傅里叶变换，但我们期望读者在先修课程中已经了解了这部分内容。

本书在理论知识和实际应用之间进行了较好的折中。书中提供了大量经过精心设计的习题，以便帮助学生掌握课程的内容。解答手册仅供教师下载。此外，在出版社的网站上为教师准备了图表及幻灯片。

在本书的第四版中，我们增加了关于自适应滤波器的新章节，并陆续修改和更新了关于多采样率数字信号处理、信号采样和重构等章节。同时，增加了关于离散余弦变换的新内容。

第1章描述模拟信号的模数转换过程所涉及到的操作。描述了正弦信号的采样过程，解释了混叠问题，并且对信号量化和数模转换的一般术语进行了描述，但分析部分将留待后续章节描述。

第2章主要论述时域的线性时不变（移不变）离散时间系统和离散时间信号。导出了卷积和，并根据系统的冲激响应周期将其分为有限长冲激响应（FIR）和无限长冲激响应（IIR）。描述了由差分方程表征的线性时不变系统，并得到了具有初始条件的差分方程的解。本章最后总结了离散时间相关性问题。

第3章介绍 z 变换，包括双边 z 变换和单边 z 变换，并给出了确定逆 z 变换的方法。论述了在线性时不变系统的分析过程中如何使用 z 变换，并证实了系统的重要特性都与 z 域特征有关，如因果性和稳定性。

第4章论述频域中的信号分析。描述了连续时间信号和离散时间信号的傅里叶级数和傅里叶变换。

在第5章中，通过频率响应函数表征了频域中的线性时不变（LTI）离散时间系统，并确定了对周期和非周期信号的响应。描述了一些重要类型的离散时间系统，包括谐振器、槽口滤波器、梳状滤波器、全通滤波器和振荡器等。同时，也考察了一些简单 FIR 和 IIR 滤波器的设计。此外，还介绍了最小相位、混合相位和最大相位系统的概念，以及去卷积的问题。

第6章讲述连续时间信号的采样以及由采样信号重构原始信号的内容。所涉及的范围包括带通信号的采样和重构，离散时间信号的采样及模数和数模转换过程。本章中还包含有对过采样的模数和数模转换器的处理。

第7章讨论 DFT 的性质和应用。描述了用 DFT 执行线性滤波的两种方法，并说明了使用 DFT 对信号进行频率分析的方法。本章最后讨论了离散余弦变换。

第8章涉及 DFT 的有效计算。本章描述了基2、基4和分裂基快速傅里叶变换（FFT）算法，以及 FFT 算法在卷积和相关计算中的应用。对于用线性滤波计算 DFT 的方法，介绍了 Goertzel 算法和线性调频 z 变换两种方法。

第 9 章介绍 IIR 和 FIR 系统的实现方法。包括直接型、级联型、并联型、格型和带抽头的格型滤波器结构的实现。本章同时分析了在数字实现 FIR 和 IIR 系统过程中的量化效应。

第 10 章介绍数字 FIR 和 IIR 滤波器的设计技术。设计技术包括离散时间的直接方法和通过各种变换将模拟滤波器转换成数字滤波器的方法。

第 11 章介绍采样率变换及其在多采样率数字信号处理中的应用。除了描述了通过整数和有理数因子的抽取和插值之外,还介绍了对于任意因子的采样率转换方法,以及多相位滤波器结构的实现。本章还讨论了数字滤波器组、二通道的正交镜像滤波器(QMF)和 M 通道的 QMF 组。

第 12 章介绍线性预测和最优线性维纳滤波器。本章还描述了求解归一化方程的 Levinson-Durbin 算法和 Schur 算法,以及 AR 格型和 ARMA 格型抽头滤波器。

第 13 章介绍基于 LMS 算法和递归最小平方(RLS)算法的单通道自适应滤波器。直接型 FIR 和格型 RLS 算法及滤波器结构均在本章介绍。

第 14 章讲述功率谱估计。描述了不带参数的方法和基于模型(带参数的)的方法,还描述了基于特征组合的方法,包括 MUSIC 和 ESPRIT。

事先已经学习过离散系统的高年级学生,可以先快速浏览第 1 章至第 5 章的内容,然后仔细学习第 6 章至第 10 章的内容。

对于研究生一年级的数字信号处理课程,前 6 章供学生复习离散时间系统,教师可以快速浏览大部分内容,然后讲述第 7 章到第 11 章的内容,再选讲第 12 章至第 14 章的部分内容。

本书中提供了很多例题和近 500 道习题。部分习题的答案列在本书的后面。很多习题可以通过类似 MATLAB 这样的软件包在计算机上得到数值解。学生还可以使用本书配套的手册Student Manual for Digital Signal Processing with MATLAB。MATLAB 软件是本教材的基本软件工具。教师可能还希望参考其他一些包含基于计算机练习的补充教材,例如,由 C.S.Burrus 等编写的 Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB (Prentice Hall,1994)。

我们受益于很多有才华的同事,他们通过阅览本书前几版提供了许多有价值的建议,其中有 W.E.Alexander, G.Arslan, Y.Bresler, J.Deller, F.DePiero, V.Ingle, J.S.Kang, C.Keller, H.Lev-Ari, L.Merakos, W.Mikhael, P.Monticciolo, C.Nikias, M.Schetzen, E.Serpedin, T.M.Sullivan, H.Trussell, S.Wilson 和 M.Zoltowski。我们同时基于 R.Price 的建议及其他相关见解,增加了关于分裂基 FFT 算法的内容。最后,我们要感谢许多那些已毕业的学生的建议和意见,特别是 A.L.Kok, J.Lin, E.Sozer 和 S.Srinidhi,他们协助准备了几幅图表和解答手册。

JOHN G. PROAKIS
DIMITRIS G. MANOLAKIS

反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为；歪曲、篡改、剽窃本作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序，保护权利人的合法权益，我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为，本社将奖励举报有功人员，并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话：（010）88254396；（010）88258888

传　　真：（010）88254397

E-mail　：dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路173信箱

　　电子工业出版社总编办公室

邮　　编：100036

目　录

第 1 章　绪论 …… 1
1.1　信号、系统及信号处理 …… 1
1.1.1　数字信号处理系统的基本组成 …… 3
1.1.2　数字信号处理与模拟信号处理相比的优点 …… 3
1.2　信号分类 …… 4
1.2.1　多通道信号与多维信号 …… 4
1.2.2　连续时间信号和离散时间信号 …… 6
1.2.3　连续值信号与离散值信号 …… 7
1.2.4　确定性信号与随机信号 …… 8
1.3　连续时间信号与离散时间信号中的频率概念 …… 8
1.3.1　连续时间正弦信号 …… 8
1.3.2　离散时间正弦信号 …… 9
1.3.3　谐相关的复指数信号 …… 12
1.4　模数和数模转换 …… 13
1.4.1　模拟信号采样 …… 14
1.4.2　采样定理 …… 19
1.4.3　连续幅度信号的量化 …… 22
1.4.4　正弦信号的量化 …… 24
1.4.5　量化采样信号的编码 …… 25
1.4.6　数模转换 …… 25
1.4.7　数字信号与系统及离散时间信号与系统的分析 …… 26
1.5　小结与参考文献 …… 26
习题 …… 27

第 2 章　离散时间信号与系统 …… 30
2.1　离散时间信号 …… 30
2.1.1　离散时间信号的基本元素 …… 31
2.1.2　离散时间信号的分类 …… 33
2.1.3　离散时间信号的简单处理 …… 36
2.2　离散时间系统 …… 38
2.2.1　系统的输入-输出描述 …… 39
2.2.2　离散时间系统的结构图表示 …… 41
2.2.3　离散时间系统的分类 …… 42
2.2.4　离散时间系统的互连 …… 48
2.3　离散时间线性时不变系统的分析 …… 50

2.3.1 线性系统的分析方法 …… 50
2.3.2 离散时间信号分解为冲激信号 …… 51
2.3.3 LTI 系统对任意输入的响应:卷积和 …… 52
2.3.4 卷积的性质以及 LTI 系统的互连 …… 58
2.3.5 因果 LTI 系统 …… 60
2.3.6 线性时不变系统的稳定性 …… 62
2.3.7 有限长和无限长冲激响应的系统 …… 64
2.4 由差分方程描述的离散时间系统 …… 64
2.4.1 递归和非递归的离散时间系统 …… 65
2.4.2 由常系数差分方程描述的线性时不变系统的特性 …… 68
2.4.3 线性常系数差分方程的解 …… 71
2.4.4 线性时不变递归系统的冲激响应 …… 77
2.5 离散时间系统的实现 …… 79
2.5.1 线性时不变系统的实现结构 …… 79
2.5.2 FIR 系统的递归和非递归实现 …… 82
2.6 离散时间信号的相关性 …… 84
2.6.1 互相关和自相关序列 …… 86
2.6.2 自相关和互相关序列的性质 …… 87
2.6.3 周期序列的相关性 …… 90
2.6.4 输入-输出相关序列 …… 92
2.7 小结与参考文献 …… 94
习题 …… 94

第 3 章 z 变换及其在线性时不变系统分析中的应用 …… 108
3.1 z 变换 …… 108
3.1.1 z 正变换 …… 108
3.1.2 z 逆变换 …… 113
3.2 z 变换的性质 …… 115
3.3 有理 z 变换 …… 125
3.3.1 极点和零点 …… 125
3.3.2 因果信号的极点位置和时域行为 …… 127
3.3.3 线性时不变系统的系统函数 …… 128
3.4 z 逆变换 …… 131
3.4.1 围线积分法求 z 逆变换 …… 131
3.4.2 幂级数展开法求 z 逆变换 …… 133
3.4.3 部分分式展开法求 z 逆变换 …… 134
3.4.4 有理 z 变换的分解 …… 140
3.5 z 域线性时不变系统的分析 …… 141
3.5.1 有理系统函数的系统响应 …… 142
3.5.2 暂态响应和稳态响应 …… 142

3.5.3 因果性和稳定性 …… 143
3.5.4 零极点抵消 …… 145
3.5.5 多阶极点和稳定性 …… 146
3.5.6 二阶系统的稳定性 …… 147
3.6 单边 z 变换 …… 150
3.6.1 定义和性质 …… 151
3.6.2 差分方程的求解 …… 154
3.6.3 具有非零初始条件的零极点系统的响应 …… 155
3.7 小结与参考文献 …… 156
习题 …… 157

第 4 章 信号的频率分析 …… 165
4.1 连续时间信号的频率分析 …… 165
4.1.1 连续时间周期信号的傅里叶级数 …… 166
4.1.2 周期信号的功率密度谱 …… 169
4.1.3 连续时间非周期信号的傅里叶变换 …… 172
4.1.4 非周期信号的能量密度谱 …… 175
4.2 离散时间信号的频率分析 …… 178
4.2.1 离散时间周期信号的傅里叶级数 …… 178
4.2.2 周期信号的功率密度谱 …… 181
4.2.3 离散时间非周期信号的傅里叶变换 …… 183
4.2.4 傅里叶变换的收敛性 …… 185
4.2.5 非周期信号的能量密度谱 …… 188
4.2.6 傅里叶变换和 z 变换的关系 …… 191
4.2.7 倒谱 …… 193
4.2.8 单位圆上有极点的信号的傅里叶变换 …… 194
4.2.9 信号的频域分类:带宽的概念 …… 195
4.2.10 某些自然信号的频率范围 …… 197
4.3 频域和时域的信号特性 …… 198
4.4 离散时间信号傅里叶变换的性质 …… 200
4.4.1 傅里叶变换的对称性质 …… 201
4.4.2 傅里叶变换的定理和性质 …… 206
4.5 小结与参考文献 …… 214
习题 …… 215

第 5 章 LTI 系统的频域分析 …… 222
5.1 线性时不变系统的频域特性 …… 222
5.1.1 对复指数和正弦信号的响应:频率响应函数 …… 222
5.1.2 正弦输入信号的稳态和暂态响应 …… 229
5.1.3 周期输入信号的稳态响应 …… 230
5.1.4 非周期输入信号的响应 …… 230

5.2 LTI 系统的频率响应 …… 232
5.2.1 具有有理系统函数系统的频率响应 …… 232
5.2.2 频率响应函数的计算 …… 234
5.3 LTI 系统输出的相关函数和频谱 …… 237
5.3.1 输入-输出相关函数和频谱 …… 237
5.3.2 随机输入信号的相关函数和功率谱 …… 238
5.4 作为频率选择滤波器的线性时不变系统 …… 240
5.4.1 理想滤波器特性 …… 241
5.4.2 低通、高通和带通滤波器 …… 243
5.4.3 数字谐振器 …… 247
5.4.4 槽口滤波器 …… 249
5.4.5 梳状滤波器 …… 250
5.4.6 全通滤波器 …… 253
5.4.7 数字正弦振荡器 …… 255
5.5 逆系统和去卷积 …… 257
5.5.1 线性时不变系统的可逆性 …… 257
5.5.2 最小相位、最大相位及混合相位系统 …… 260
5.5.3 系统辨识与去卷积 …… 263
5.5.4 同态去卷积 …… 265
5.6 小结与参考文献 …… 266
习题 …… 266

第 6 章 信号的采样与重建 …… 282
6.1 理想的连续时间信号采样与重建 …… 282
6.2 连续时间信号的离散时间处理 …… 290
6.3 模数转换器和数模转换器 …… 295
6.3.1 模数转换器 …… 295
6.3.2 量化与编码 …… 296
6.3.3 量化误差分析 …… 299
6.3.4 数模转换器 …… 300
6.4 连续时间带通信号的采样与重建 …… 302
6.4.1 均匀或一阶采样 …… 302
6.4.2 交叉或非均匀二阶采样 …… 306
6.4.3 带通信号的表示 …… 311
6.4.4 利用带通信号表示进行采样 …… 313
6.5 离散时间信号采样 …… 314
6.5.1 离散时间信号采样和插值 …… 314
6.5.2 带通离散时间信号表示和采样 …… 318
6.6 过采样 A/D 转换器和 D/A 转换器 …… 319
6.6.1 过采样 A/D 转换器 …… 319

6.6.2 过采样 D/A 转换器 …… 324
6.7 小结与参考文献 …… 325
习题 …… 325

第 7 章 离散傅里叶变换的特性及应用 …… 332
7.1 频域采样:离散傅里叶变换 …… 332
7.1.1 离散时间信号的频域采样和重建 …… 332
7.1.2 离散傅里叶变换 …… 336
7.1.3 DFT 是线性变换 …… 339
7.1.4 DFT 与其他变换的关系 …… 341
7.2 DFT 的性质 …… 343
7.2.1 周期性、线性和对称性 …… 344
7.2.2 两个 DFT 的乘法和圆周卷积 …… 348
7.2.3 DFT 的其他性质 …… 352
7.3 基于 DFT 的线性滤波算法 …… 356
7.3.1 在线性滤波中使用 DFT …… 356
7.3.2 长数据序列滤波 …… 360
7.4 利用 DFT 对信号进行频率分析 …… 362
7.5 离散余弦变换 …… 367
7.5.1 FDCT …… 367
7.5.2 IDCT …… 368
7.5.3 DCT 是正交变换 …… 369
7.6 小结与参考文献 …… 372
习题 …… 372

第 8 章 DFT 的有效计算:快速傅里叶变换算法 …… 379
8.1 DFT 的有效计算:FFT 算法 …… 379
8.1.1 直接计算 DFT …… 380
8.1.2 用分而治之的方法计算 DFT …… 380
8.1.3 基 2 FFT 算法 …… 384
8.1.4 基 4 FFT 算法 …… 391
8.1.5 分裂基 FFT 算法 …… 395
8.1.6 FFT 算法的实现 …… 398
8.2 FFT 算法的应用 …… 399
8.2.1 有效计算两个实序列的 DFT …… 399
8.2.2 有效计算 $2N$ 点实序列的 DFT …… 400
8.2.3 FFT 算法在线性滤波与相关分析中的应用 …… 400
8.3 用线性滤波法计算 DFT …… 402
8.3.1 Goertzel 算法 …… 402
8.3.2 调频 z 变换算法 …… 403
8.4 DFT 计算中的量化效应 …… 407

8.4.1 直接计算 DFT 的量化误差 …… 407
8.4.2 FFT 算法的量化误差 …… 409
8.5 小结与参考文献 …… 412
习题 …… 412

第 9 章 离散时间系统的实现 …… 417
9.1 离散时间系统的实现结构 …… 417
9.2 FIR 系统的结构 …… 418
9.2.1 直接型结构 …… 418
9.2.2 级联型结构 …… 419
9.2.3 频率采样结构 …… 421
9.2.4 格型结构 …… 423
9.3 IIR 系统的结构 …… 431
9.3.1 直接型结构 …… 431
9.3.2 信号流图和转置结构 …… 432
9.3.3 级联型结构 …… 435
9.3.4 并联型结构 …… 437
9.3.5 IIR 系统的格型结构和格型梯状结构 …… 439
9.4 数的表示 …… 445
9.4.1 数的定点表示 …… 445
9.4.2 二进制数的浮点表示 …… 447
9.4.3 舍入与截尾引起的误差 …… 449
9.5 滤波器系数的量化效应 …… 452
9.5.1 滤波器系数量化效应的敏感度分析 …… 453
9.5.2 FIR 滤波器的系数量化 …… 459
9.6 数字滤波器中的舍入效应 …… 460
9.6.1 递归系统的极限环振荡 …… 461
9.6.2 尺度变换以防止溢出 …… 464
9.6.3 数字滤波器定点实现中量化效应的统计描述 …… 465
9.7 小结与参考文献 …… 471
习题 …… 472

第 10 章 数字滤波器设计 …… 481
10.1 整体考虑 …… 481
10.1.1 因果性及其含义 …… 481
10.1.2 实际选频滤波器的特性 …… 484
10.2 FIR 滤波器的设计 …… 485
10.2.1 对称和反对称的 FIR 滤波器 …… 485
10.2.2 使用窗函数设计线性相位 FIR 滤波器 …… 488
10.2.3 采用频率采样方法设计线性相位 FIR 滤波器 …… 492
10.2.4 最优等纹波线性相位 FIR 滤波器的设计 …… 498

10.2.5 FIR 微分器设计 …… 508
10.2.6 希尔伯特变换器的设计 …… 509
10.2.7 线性相位 FIR 滤波器设计方法的比较 …… 514
10.3 从模拟滤波器设计 IIR 滤波器 …… 516
10.3.1 用导数逼近设计 IIR 滤波器 …… 517
10.3.2 用冲激不变设计 IIR 滤波器 …… 520
10.3.3 利用双线性变换设计 IIR 滤波器 …… 524
10.3.4 通用模拟滤波器的特性 …… 527
10.3.5 基于双线性变换的数字滤波器设计的一些例子 …… 534
10.4 频率变换 …… 537
10.4.1 模拟域频率变换 …… 537
10.4.2 数字域频率变换 …… 538
10.5 小结与参考文献 …… 540
习题 …… 541

第 11 章 多速率数字信号处理 …… 552
11.1 引言 …… 552
11.2 以因子 D 抽取 …… 556
11.3 以因子 I 内插 …… 558
11.4 以有理因子 I/D 转换采样率 …… 560
11.5 采样率转换的实现 …… 563
11.5.1 多相滤波器结构 …… 563
11.5.2 滤波器和下采样器/上采样器的相互交换 …… 565
11.5.3 利用级联积分器的梳状滤波器转换采样率 …… 565
11.5.4 抽取和内插滤波器的多相结构 …… 567
11.5.5 有理采样率转换的结构 …… 570
11.6 采样率转换的多级实现 …… 571
11.7 带通信号的采样率转换 …… 573
11.8 以任意因子的采样率转换 …… 575
11.8.1 利用多相内插器任意重采样 …… 575
11.8.2 利用 Farrow 滤波器结构任意重采样 …… 576
11.9 多速率信号处理的应用 …… 577
11.9.1 移相器的设计 …… 577
11.9.2 不同采样率数字系统的接口技术 …… 578
11.9.3 窄带低通滤波器的实现 …… 579
11.9.4 语音信号子带编码 …… 580
11.10 数字滤波器组 …… 581
11.10.1 均匀滤波器组的多相结构 …… 585
11.10.2 复用转接器 …… 586
11.11 双通道正交镜像滤波器组 …… 587

11.11.1 消除混叠效应 …… 589
11.11.2 准确重构的条件 …… 590
11.11.3 QMF 组的多相形式 …… 590
11.11.4 线性相位 FIR QMF 组 …… 590
11.11.5 IIR QMF 组 …… 592
11.11.6 准确重构双通道 FIR QMF 组 …… 592
11.11.7 子带编码中的双通道 QMF 组 …… 594
11.12 *M* 通道 QMF 组 …… 594
11.12.1 无混叠和准确重构的条件 …… 595
11.12.2 *M* 通道 QMF 组的多相形式 …… 596
11.13 小结与参考文献 …… 599
习题 …… 600
第 12 章 线性预测和最优线性滤波器 …… 607
12.1 随机信号、相关函数和功率谱 …… 607
12.1.1 随机过程 …… 607
12.1.2 平稳随机过程 …… 608
12.1.3 统计(集合)平均 …… 608
12.1.4 联合随机过程的统计平均 …… 609
12.1.5 功率谱密度 …… 610
12.1.6 离散时间随机信号 …… 611
12.1.7 离散时间随机过程的时间平均 …… 612
12.1.8 均值遍历过程 …… 613
12.1.9 相关遍历过程 …… 614
12.2 平稳随机过程的修正表示 …… 615
12.2.1 有理功率谱 …… 616
12.2.2 滤波器参数和自相关序列的关系 …… 617
12.3 前向和后向线性预测 …… 618
12.3.1 前向线性预测 …… 618
12.3.2 后向线性预测 …… 620
12.3.3 格型前向和后向预测器的最优反射系数 …… 623
12.3.4 AR 过程和线性预测的关系 …… 624
12.4 正规方程的解 …… 624
12.4.1 Levinson-Durbin 算法 …… 624
12.4.2 Schur 算法 …… 627
12.5 线性预测误差滤波器的性质 …… 631
12.6 AR 格型和 ARMA 格梯型滤波器 …… 633
12.6.1 AR 格型结构 …… 634
12.6.2 ARMA 过程和格梯型滤波器 …… 635
12.7 用于滤波和预测的维纳滤波器 …… 637

12.7.1 FIR 维纳滤波器 …… 637
12.7.2 线性均方估计的正交性原理 …… 639
12.7.3 IIR 维纳滤波器 …… 640
12.7.4 非因果维纳滤波器 …… 644
12.8 小结与参考文献 …… 645
习题 …… 646

第 13 章 自适应滤波器 …… 650
13.1 自适应滤波器的应用 …… 650
13.1.1 系统标识或系统模型 …… 651
13.1.2 自适应通道均衡器 …… 652
13.1.3 电话通道数据传输中的回声消除 …… 654
13.1.4 对宽带信号中的窄带干扰的抑制 …… 656
13.1.5 自适应线谱增强器 …… 660
13.1.6 自适应噪声消除 …… 660
13.1.7 语音信号的线性预测编码 …… 661
13.1.8 自适应阵列 …… 664
13.2 自适应直接型 FIR 滤波器——LMS 算法 …… 665
13.2.1 最小均方误差准则 …… 666
13.2.2 LMS 算法 …… 668
13.2.3 随机梯度相关算法 …… 669
13.2.4 LMS 算法的性质 …… 670
13.3 自适应直接型滤波器——RLS 算法 …… 675
13.3.1 RLS 算法 …… 676
13.3.2 LDU 因式分解与平方根算法 …… 679
13.3.3 快速 RLS 算法 …… 680
13.3.4 直接型 RLS 算法的性质 …… 682
13.4 自适应格子-梯型滤波器 …… 684
13.4.1 递归最小二乘方格子-梯型算法 …… 684
13.4.2 其他格型算法 …… 701
13.4.3 格子-梯型算法的性质 …… 702
13.5 小结与参考文献 …… 705
习题 …… 705

第 14 章 功率谱估计 …… 709
14.1 基于有限长信号观察的功率谱估计 …… 709
14.1.1 能量密度谱计算 …… 709
14.1.2 随机信号的自相关和功率谱估计:周期图 …… 713
14.1.3 使用 DFT 的功率谱估计 …… 716
14.2 功率谱估计的非参数化方法 …… 718
14.2.1 Bartlett 方法:平均周期图 …… 718

14.2.2 Welch 方法:平均修正的周期图 …… 720
14.2.3 Blackman 和 Tukey 图基方法:平滑周期图 …… 721
14.2.4 非参数的功率谱估计器的性能特征 …… 723
14.2.5 非参数的功率谱估计器的计算需求 …… 726
14.3 功率谱估计的参数化方法 …… 727
14.3.1 自相关和模型参数之间的关系 …… 728
14.3.2 AR 模型参数的 Yule-Walker 求解方法 …… 730
14.3.3 AR 模型参数的 Burg 求解方法 …… 730
14.3.4 AR 模型参数的非约束条件的最小二乘方求解方法 …… 733
14.3.5 AR 模型参数的顺序估计方法 …… 734
14.3.6 AR 模型阶数的选择 …… 734
14.3.7 功率谱估计的 MA 模型 …… 735
14.3.8 功率谱估计的 ARMA 模型 …… 736
14.3.9 一些实验结果 …… 738
14.4 滤波器组方法 …… 743
14.4.1 周期图的滤波器组实现 …… 743
14.4.2 最小方差谱估计 …… 745
14.5 功率谱估计的本征分析方法 …… 747
14.5.1 Pisarenko 谐波分解方法 …… 748
14.5.2 具有白噪声的正弦信号的自相关矩阵的本征分解 …… 750
14.5.3 MUSIC 算法 …… 751
14.5.4 ESPRIT 算法 …… 753
14.5.5 阶数选择准则 …… 755
14.5.6 实验结果 …… 755
14.6 小结与参考文献 …… 757
习题 …… 758
附录 A 随机数字发生器 …… 766
附录 B 线性相位 FIR 滤波器设计的转换系数表 …… 770
参考文献 …… 775
习题答案 …… 788
索引 …… 797

第1章 绪 论

数字信号处理是过去四十年快速发展起来的科学和工程领域。这种快速发展是数字计算机技术和集成电路技术迅猛发展的结果。四十年以前的数字计算机及相关硬件相对庞大和昂贵,因此,其使用仅限制于一般用途的非实时(脱机)科学计算和商业应用。集成电路技术的快速发展[从中规模集成电路(MSI)到大规模集成电路(LSI),再到现在的超大规模集成电路(VLSI)],促进了功率更大、体积更小、速度更快、价格更便宜的数字计算机及特殊用途的数字硬件技术的发展。这些更便宜的、相对更快的数字电路使得构造更复杂的数字系统成为可能,以执行更复杂的数字信号处理功能和任务,这些任务通常太复杂、太昂贵,以至于不能由模拟电路或模拟信号处理系统来执行。因此,很多传统上由模拟方法执行的信号处理任务,现在都可由更廉价和更可靠的数字硬件来实现。

这并不是说数字信号处理就是所有信号处理问题的合适解决方案。事实上,对于很多带宽相当宽的信号,需要实时处理。对于这样的信号,模拟信号处理或光信号处理是唯一可能的解决方案。然而,对于可用数字电路并具有充分速率执行信号处理任务的场合,我们通常优先考虑使用数字电路。

数字电路不但能产生更廉价、更可靠的数字处理系统,而且还具有其他一些优点。特别是,数字处理硬件允许可编程操作。借助软件,人们可以更容易地修改将由硬件执行的信号处理函数。数字硬件及其相关软件在系统设计方面提供了更大的灵活性。同时,数字硬件和软件实现与模拟电路和模拟信号处理系统相比,通常具有更高的精度。基于上述原因,在过去的三十年里,数字信号处理理论和应用得到了迅猛发展。

本书的目的是讲述用于信号数字处理的基本分析工具和技术。先介绍一些必要的术语,然后描述在模拟信号转换成适合数字处理的数字信号的过程中所涉及的重要操作。正如我们所看到的,模拟信号的数字处理有一些缺陷。首先,模拟信号到数字形式的转换是由信号采样和量化来完成的,这将产生失真,从而阻止我们从量化后的采样信号重构原始模拟信号。但通过适当地选择量化过程中的采样率和量化精度,这种失真量可以得到控制。其次,在对量化的采样信号进行数字处理时,必须考虑有限精度效应。尽管本书中也会讲述这些重要问题,但重点会放在数字信号处理系统的分析和设计以及计算技术方面。

1.1 信号、系统及信号处理

信号定义为随着时间、空间或其他自变量而变化的物理量。数学上,我们把一个信号描述为一个或几个自变量的函数。例如,函数

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 5t \\ s_2(t) &= 20t^2 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

描述了两个信号,一个随着自变量 t(时间)线性变化,而另一个随着 t 二次方变化。作为另一个例子,考虑函数

$$s(x, y) = 3x + 2xy + 10y^2 \tag{1.1.2}$$

该函数描述了具有两个自变量 x 和 y 的信号,这两个自变量可以表示一个平面上的两个空间坐标。

由式(1.1.1)和式(1.1.2)描述的信号属于一类准确定义的信号,指定了对于自变量的函数依赖关系。然而,有些情况下这种函数关系是未知的,或者太复杂以至于没有任何实际用处。

例如,某种语音信号(见图 1.1.1)不能由式(1.1.1)这样的表达式函数化描述。一般来说,一段语音可被高精度表示为几种不同幅度和频率的总和,即

$$\sum_{i=1}^{N} A_i(t)\sin[2\pi F_i(t)t + \theta_i(t)] \tag{1.1.3}$$

其中,$\{A_i(t)\}$,$\{F_i(t)\}$和$\{\theta_i(t)\}$分别是正弦信号的(可能时变的)幅度、频率和相位的集合。事实上,要解释由任何一段短时语音信号承载的信息内容或消息,一种方法是测量该短时段信号所包含的幅度、频率和相位。

自然信号的另一个例子是心电图(ECG)。这样一类信号给医生提供了病人心脏条件的信息。类似地,脑电图信号(EEG)提供了脑行为的信息。

语音、心电图和脑电图信号是一些作为单个自变量(如时间)的函数的信息载体信号例子。具有两个自变量的函数信号的例子是图像信号,在这种情况下的自变量是空间坐标。这些只是实际中遇到的无数自然信号的几个例子。

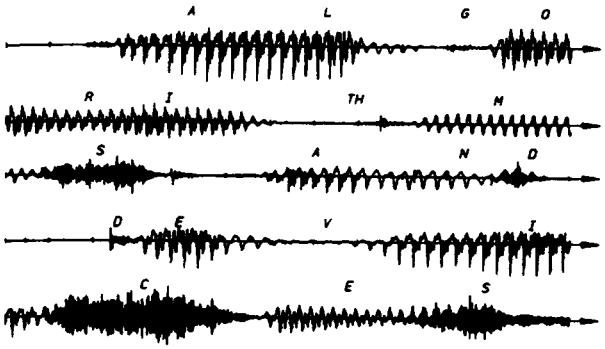


图 1.1.1 语音信号的例子

与自然信号相关的信号是生成信号。例如,语音信号是靠压迫穿过声带的气流而生成的。图像是将胶片对一幅场景或一个物体曝光而获得的。这样的信号生成通常与某个系统相关联,以对某些刺激或压力做出响应。在一个语音信号中,系统由声带和声道或声腔组成。与该系统相结合的激励被称为信源。因此,我们有语音信号、图像信号和各种其他类型的信源。

系统也可以被定义为对某个信号执行某种操作的一台物理设备。例如,用于降低破坏有用信息载体信号的噪声和干扰的滤波器,被称为一个系统。在这种情况下,滤波器对系统执行一些操作,从而有效地降低(滤去)有用信息载体信号夹杂的噪声和干扰。

当一个信号经过一个系统(如滤波)时,我们就说已经对该信号进行了处理。在这种情况下,对信号进行处理的含义是从有用信号中对噪声和干扰信号进行滤波。一般来说,系统由对信号所执行的操作所表征。例如,如果操作是线性的,那么系统就称为线性的。如果对信号的操作是非线性的,那么系统就称为非线性的,等等。这类操作通常指信号处理。

就目的来说,可以很方便地将系统的定义扩展为不仅包括物理设备,还包括对信号操作的软件实现。在一台数字计算机上所进行的数字信号处理,对信号所执行的操作是由一些软件程序指定的数学操作所组成的。在这种情况下,程序代表了系统的软件实现,因此,我们可以在数字计算机上按照一系列数学操作实现某个系统;也就是说,我们用软件实现了一个数字信号处理系统。例如,一台数字计算机可以编程来执行数字滤波。此外,对信号的数字处理也可通过配置数字硬件(逻辑电路)实现以执行所需要的特定操作。在这类实现中,我们用一台物理设备来执行特定的操作。从广义上讲,一个数字系统可以结合数字硬件和软件一起实现,每一部分都执行自身的一套特定操作。

本书在数字意义上(包括软件或硬件)涉及信号处理。由于实际中遇到的很多信号是模拟信

号,所以我们也会考虑将模拟信号转换成要处理的数字信号的问题。因此,我们将主要论述数字系统。由这样的系统所执行的操作通常可以由数学方式来表达。通过执行相应数学操作的程序来实现这一系统的方法或规则集,我们称之为算法。通常,实现一个系统以完成所需操作和计算的方法或算法有很多,包括软件和硬件方法。实际上,我们有兴趣设计能够高效、快速计算并容易实现的算法。因此,在学习数字信号处理过程中的一个主要话题就是讨论一些用于执行滤波、相关和谱分析等操作的高效算法。

1.1.1 数字信号处理系统的基本组成

在科学和工程上遇到的大多数信号是自然模拟信号。也就是说,信号是连续变量的函数,这些连续变量(如时间或空间)通常在一个连续的范围内取值。这类信号可直接被合适的模拟系统处理(如滤波器、频谱分析仪或倍频器),以改变信号的特征或提取有用信息。在这种情况下,我们说信号是直接以模拟形式处理的,如图 1.1.2 所示。输入信号和输出信号均是模拟形式的信号。

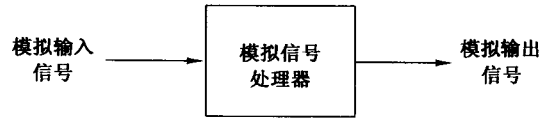


图 1.1.2 模拟信号处理

数字信号处理提供了处理模拟信号的备用方法,如图 1.1.3 所示。要执行数字处理,需要在模拟信号和数字处理器之间有一个接口。这个接口称为模数(A/D)转换器。A/D 转换器的输出是数字信号,该信号适合作为数字处理器的输入。

数字处理器可以是一个对输入信号执行所需操作的大的可编程数字计算机,或是一个小的可编程微处理器。也可以是一个对输入信号执行指定操作集的硬连线数字处理器。可编程机器可通过更改软件来灵活地更改信号的处理操作,而硬连线机器则较难重新配置。因此,人们常用可编程的信号处理器。另一方面,当信号处理操作被定义好之后,操作的硬连线实现可被优化,从而导致更便宜的信号处理器,而硬件实现要比对应的软件实现快。在应用中,数字信号处理器的数字输出通常是以模拟形式提交给用户的,例如语音通信,因此我们必须提供从数字域到模拟域的另一个接口。这种接口称为数模(D/A)转换器。这样的信号是以模拟形式提供给用户的,如图 1.1.3 中的方框图所示。然而,还有另外一些包含信号分析的实际应用,在这种应用中,有用信息是以数字形式搬运的,不需要 D/A 转换器。例如,在雷达信号的数字处理中从雷达信号提取的信息(如飞机的方位和速度),可被简单地打印到纸上。在这种情况下,不需要 D/A 转换器。

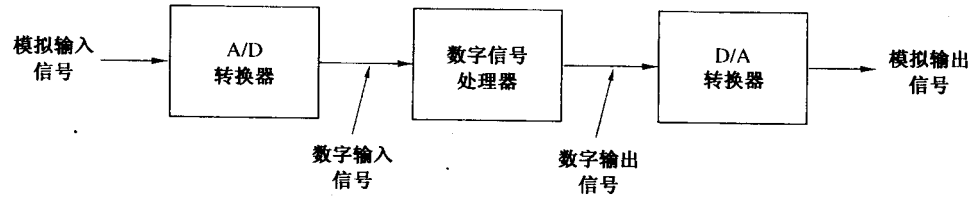


图 1.1.3 数字信号处理系统的方框图

1.1.2 数字信号处理与模拟信号处理相比的优点

正如前面简单提到的那样,有很多理由使我们优先采用模拟信号的数字信号处理,而不是在模拟域直接进行处理。首先,一个数字编程系统仅通过更改程序就可灵活性地重新配置数字信号

处理操作。模拟系统的重新配置通常意味着对硬件的重新设计,还要进行测试和校验以观察其是否能正常操作。

精度的考虑在确定信号处理器的形式方面同样起着重要作用。模拟电路组件的容错性使得系统设计者很难控制模拟信号处理系统的精度。然而,数字系统可对精度要求提供很好的控制。这些需求需要依次指定 A/D 转换器和数字信号处理器的精度需求,包括字长、浮点算术运算和定点算术运算、相似性因子等参数。

数字信号很容易无损坏地存储在磁性介质(如磁盘或磁带)中,并且不用考虑在 A/D 转换过程中引入的信号保真度损失。从而信号就成为可传输的信号,并且可以在脱机的远程实验室进行处理。数字信号处理方法同时允许更复杂的信号处理算法的实现。通常对模拟形式的信号执行准确的数学运算是非常困难的,但是这些相同的运算可以在一台数字计算机上使用软件实现。

在有些情况下,信号处理系统的数字实现比相应的模拟实现更便宜。较低的费用可能是由于数字硬件更便宜的缘故,或是数字实现所提供的灵活性修改的结果。

由于这些优点,数字信号处理已经在广泛的学科领域的实际系统中应用,如语音处理、电话信道传输、图像处理和传输、地震学和地球物理学、石油开采、核爆炸的检测、外层空间接收到的信号的处理等,其中一些应用在后续的章节中讲述。

然而,正如已经指出的那样,数字实现有它的局限性。一种实际限制是 A/D 转换器和数字信号处理器的运算速度。我们将会看到,具有极宽带宽的信号需要快采样率的 A/D 转换器和快速的数字信号处理器。因此,对于一些较大带宽的模拟信号,数字处理方法已经超出数字硬件的技术发展水平。

1.2 信号分类

在处理信号或分析系统对信号的响应时所采用的方法,主要依赖于特定信号的特征属性。有些技术只适用于特定类别的信号。因此,在信号处理中的任何调查研究都应该始于特定应用中的信号分类。

1.2.1 多通道信号与多维信号

正如在 1.1 节所阐述的,信号是由一个或几个自变量的函数所描述的。函数值(即因变量)可以是实值标量、复值量或矢量。例如,信号

$$s_1(t) = A\sin 3\pi t$$

是一个实值信号。然而,信号

$$s_2(t) = Ae^{j3\pi t} = A\cos 3\pi t + jA\sin 3\pi t$$

是一个复数值信号。

在一些应用中,信号是由多个信源和多个传感器生成的。这样的信号可以用矢量形式依次表示。图 1.2.1 显示了代表地震所产生的地面加速度的矢量信号的三个分量。这种加速度是由三种基本类型的弹性波所导致的。主波(P)和次波(S)在岩体内传播,分别是纵向的和横向的。第三种类型的弹性波由于靠近地表传播,因此称为面波。如果 $s_k(t)$, $k=1,2,3$ 代表从第 k 个传感器发出的电信号,它是时间的函数,那么 $p=3$ 的信号集可以由矢量 $\boldsymbol{S}_3(t)$ 表示,即

$$\boldsymbol{S}_3(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix}$$

我们称这样的矢量信号为多维信号。例如，在心电图中，3 导和 12 导的心电图信号经常被使用，分别产生 3 通道和 12 通道信号。

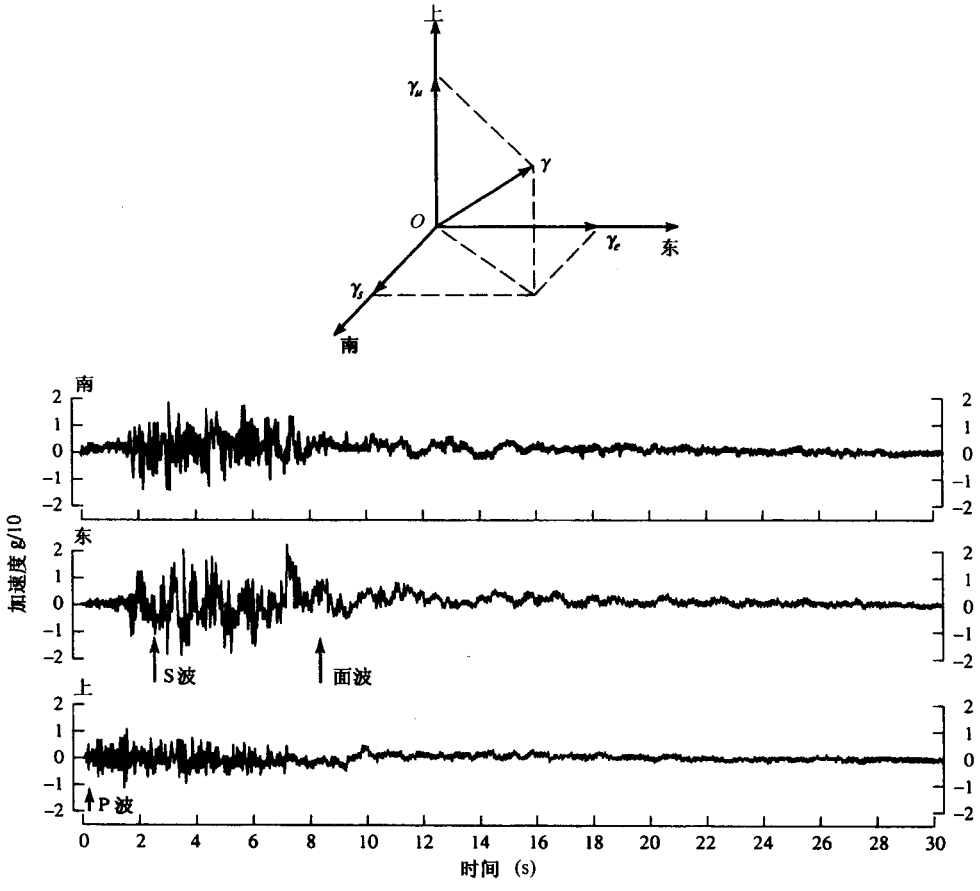


图 1.2.1　离震中几千米处测量的地面加速度的三个分量(摘自 Earthquakes，B.A.Bold，©1988 W.H.Freeman and Company，版权许可)

现在我们把注意力转移到自变量。如果信号是单个自变量的函数，那么该信号就称为一维信号。另一方面，如果信号是 M 个自变量的函数，那么该信号就称为 M 维信号。

图 1.2.2 所示的图片是二维信号的一个例子，即在每一点的强度或亮度 $I(x,y)$是两个自变量的函数。另一方面，黑白电视画面可以被表示为 $I(x,y,t)$，即亮度是时间的函数。因此，电视画面可被视为三维信号。相反，彩色电视画面可以被三个形为 $I_r(x,y,t)$，$I_g(x,y,t)$，$I_b(x,y,t)$的强度函数来描述，分别代表三个主色调(红、绿、蓝)作为时间的函数。因此，彩色电视画面是一个三通道的三维信号，可由下列矢量表征：

$$\boldsymbol{I}(x,y,t)=\begin{bmatrix} I_r(x,y,t) \\ I_g(x,y,t) \\ I_b(x,y,t) \end{bmatrix}$$

本书主要涉及单通道的一维实值或复值信号，我们简单称之为信号。用数学术语表示时，这些信号被描述为单个自变量的函数。虽然自变量不一定是时间，但在实际中通常使用 t 作为自变量。在多种场合，在本书中所开发的用于一维单通道信号的信号处理运算和算法均可以扩展到多通道和多维信号。

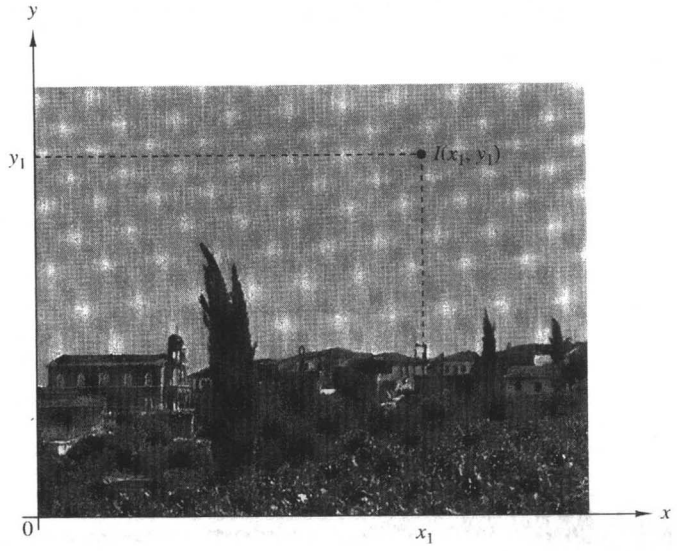


图 1.2.2 二维信号举例

1.2.2 连续时间信号和离散时间信号

取决于时间(自)变量的特征和取值,信号可以进一步分成四种不同的类型。连续时间信号或模拟信号是在每一个时间值上有定义且在一个连续的区间(a, b)内取值的信号,其中 a 可以是 $-\infty$,b 可以是 ∞。数学上,这些信号可以由一个连续变量的函数描述。图 1.1.1 中的语音波形和信号 $x_1(t)=\cos\pi t$, $x_2(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$, $-\infty<t<\infty$ 均是模拟信号的例子。离散时间信号只定义在某些特定的时间值上。这些时间点不需要是等距的,但在实际中为了计算方便和数学上易于处理,通常等间隔取值。信号 $x(t_n)=\mathrm{e}^{-|t_n|}$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$ 是离散时间信号的一个例子。如果我们使用离散时间的序号 n 作为自变量,那么信号值就会变成整型变量(如一个数列)的函数。这样,一个离散时间信号就可以被一系列实数或复数数学表示。为了强调信号的离散时间特性,我们用 $x(n)$而不是 $x(t)$来代表这种信号。如果时间取值 tn 是等间隔的(即 $t_n=nT$),那么也可以使用符号 $x(nT)$。例如,序列

$$x(n)=\begin{cases}0.8^n, & n\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.2.1}$$

是离散时间信号,其图形表示如图 1.2.3 所示。

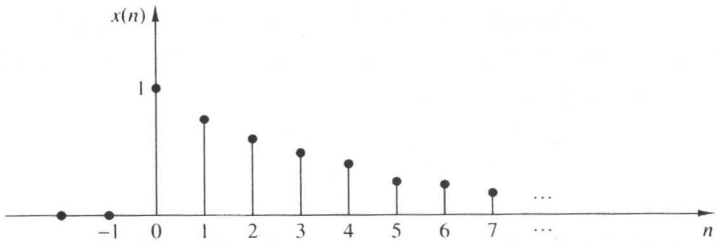


图 1.2.3 离散时间信号的图形表示:$x(n)=0.8^n$, $n>0$; $x(n)=0$, $n<0$

在应用中，离散时间信号可能以下列两种方式出现：

1. 通过在离散时间点上选择模拟信号值。该过程称为采样，将在 1.4 节详细讨论。在规则的时间间隔上采取的所有测量手段都能提供离散时间信号。例如，图 1.2.3 中的信号 $x(n)$ 可以对模拟信号 $x(t)=0.8^t, t\geqslant 0, x(t)=0, t<0$ 进行每秒钟一次采样获得。
2. 通过在一段时间内累积某个变量。例如，计算某条给定街道每小时通过的汽车的数目，或者记录每天的黄金价格，可以生成离散时间信号。图 1.2.4 显示了乌夫太阳黑子数目的图形。该离散时间信号的每个样本提供了在一年期间观察到的太阳黑子数目。

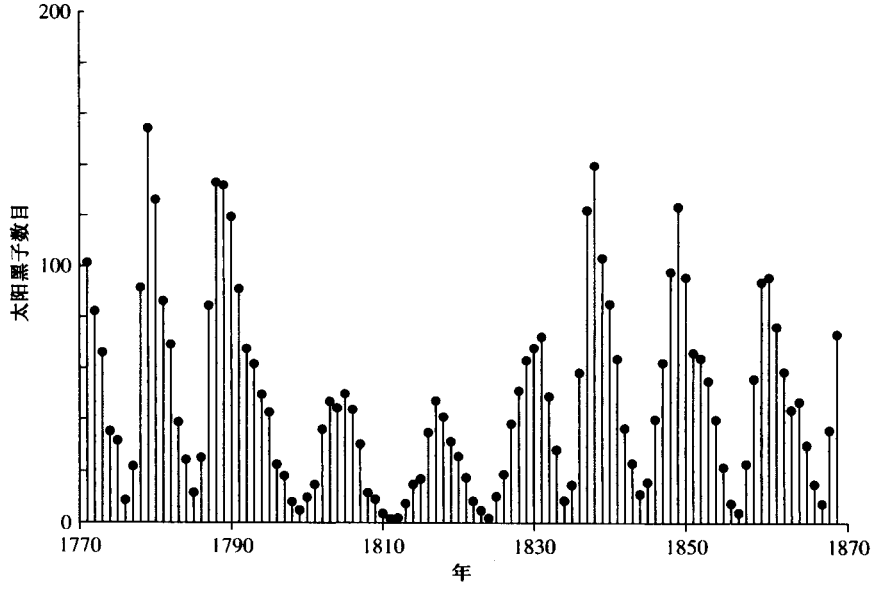


图 1.2.4　乌夫太阳黑子数目(1770 ~ 1869)

1.2.3　连续值信号与离散值信号

连续时间信号或离散时间信号的值可以是连续的或离散的。如果一个信号在一个有限或无限范围内取所有可能的值，就称之为连续值信号。或者，如果信号只在可能取值的有限集上取值，就称之为离散值信号。通常，这些信号是等距的，因而可以表达为两个连续值之间距离的整数倍。具有离散值的离散时间信号称为数字信号。图 1.2.5 显示了取四种可能值之一的数字信号。

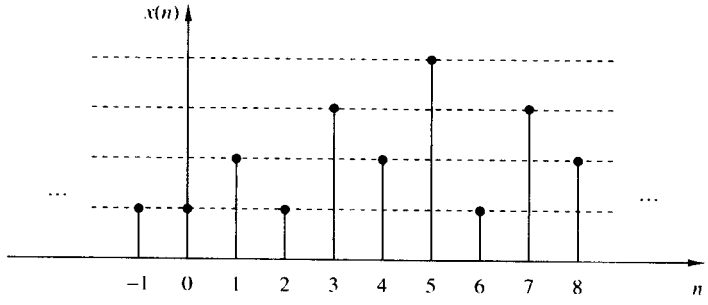


图 1.2.5　有四种幅值的数字信号

要对一个信号进行数字处理，该信号在时间上必须是离散的且取值也是离散的。如果信号以模拟形式处理，那么要首先通过在离散时间点对模拟信号进行采样，得到离散时间信号，然后将其

值量化到某个离散值集上(正如本章后面描述的),以便将该信号转化为数字信号。将连续值信号转化为离散值信号的过程称为量化,其基本上是一个近似过程。量化可以只通过四舍五入和截断完成。例如,如果数字信号中允许信号值是 0 到 15 的整数,那么连续信号值就被量化到这些值上。于是,如果量化过程中执行截断,信号值 8.58 就被近似为 8;如果执行四舍五入近似,则取值为 9。模数转换过程的说明将在后续章节给出。

1.2.4 确定性信号与随机信号

信号的数学分析和处理需要信号本身具有可用的数学表达式。这种数学描述通常称为信号模型,并导致了信号的另一种分类。任何可以被一个显式数学表达式、一个数据表或者一个定义好的规则所唯一描述的信号,称为确定性信号。该术语用来强调这样一个事实,即信号的过去、现在和将来的所有取值都可以准确知道,不存在任何不确定性。

然而,在很多实际应用中,有些信号不能被数学公式显式表达到一个合理的精度,或者是这样的描述太复杂以至于没有任何实际用处。缺乏这种关系暗含着这一信号在时间轴上以不可知的方式展开。我们称这样的信号为随机信号。噪声生成器的输出、图 1.2.1 中的地震信号和图 1.1.1 中的语音信号都是随机信号的例子。

对随机信号进行理论分析的数学框架是由概率论和随机过程提供的。适合于本书需要的分析方法的基本元素将在 1.2.1 节描述。

应强调的是,现实世界信号的分类是确定的还是随机的并不是很明确。有时,两种方法均能导致有意义的结果,均可提供对信号行为的更深入考察。但有些时候,错误的分类可能会导致错误的结果,因为有些数学工具可能只适用于确定性信号,而另外一些信号只适用于随机信号。这一点将会在我们考察特定的数学工具时变得更加清楚。

1.3 连续时间信号与离散时间信号中的频率概念

工程和科学领域的学生相当熟悉频率的概念。例如,在收音机、高保真系统或彩色照片的频谱滤波器的设计中,这是一个基本概念。从物理学的角度来看,我们知道频率与特定类型的周期运动密切相关,这种周期运动是由正弦函数描述的谐波振荡。频率的概念与时间的概念直接相关。实际上,它具有时间倒数的维数。因此,我们希望时间特性(连续或离散)将会相应地影响到频率的特性。

1.3.1 连续时间正弦信号

一个简单的谐波振荡数学上可由如下连续时间信号描述:

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \theta), \quad -\infty < t < \infty \tag{1.3.1}$$

如图 1.3.1 所示。$x(t)$所用的下标 a 代表模拟信号。该信号由三个参数完全表征:A 是正弦的幅度,Ω 是单位为弧度/秒(rad/s)的频率,而 θ 是单位为弧度(rad)的相位。我们经常使用以周期数/秒或赫兹(Hz)为单位的频率 F 代替 Ω,其中

$$\Omega = 2\pi F \tag{1.3.2}$$

按照 F 的定义,式(1.3.1)可表示为

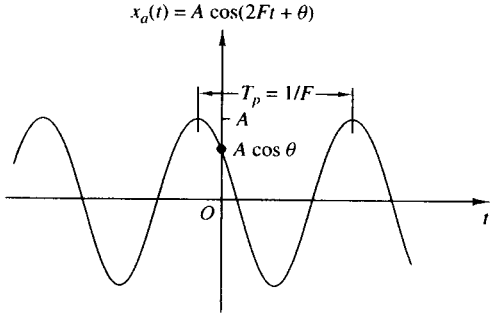


图 1.3.1 模拟正弦信号的例子

$$x_a(t) = A\cos(2\pi Ft + \theta), \quad -\infty < t < \infty \tag{1.3.3}$$

我们将同时使用式(1.3.1)和式(1.3.3)来表示正弦信号。

式(1.3.3)中的模拟正弦信号可由下列属性来表征：

A1. 对于每一个固定的频率值 F，$x_a(t)$是周期的。事实上，使用三角法原理，很容易证明

$$x_a(t + T_p) = x_a(t)$$

其中，$T_p = 1/F$ 是正弦信号的基础周期。

A2. 具有不同频率的连续时间正弦信号是能自我区分的。

A3. 增加频率 F 会导致信号振荡率的增加，也就是说，在给定的时间间隔内将包含更多的周期。

我们观察到，对于 $F = 0$，周期值 $T_p = \infty$ 与基本关系式 $F = 1/T_p$ 保持一致。由于时间变量 t 的连续性，我们可以无限制地增加频率 F，相应地信号振荡率也会增加。

我们描述的正弦信号关系式可以转化成复指数信号

$$x_a(t) = Ae^{j(\Omega t+\theta)} \tag{1.3.4}$$

利用欧拉恒等式

$$e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\sin\phi \tag{1.3.5}$$

该信号可很容易地表达成正弦信号的形式。按照定义，频率原本是一个正的物理量。如果我们将频率解释为周期信号的每单位时间的周期数，那么这一点很明显；然而，在很多情况下，只因数学方面的方便性，我们需要引入负频率。为了说明这一点，我们回忆式(1.3.1)的正弦信号可以表达为

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega t+\theta)} \tag{1.3.6}$$

上式是根据式(1.3.5)得出的。注意，正弦信号可以通过两个等幅的复共轭指数信号的相加得到，这种相加操作有时称为移相器，如图 1.3.2 所示。随着时间的推移，移相器以 $\pm\Omega$ rad/s 的角频率沿相反方向旋转。由于正频率对应于一般转动的逆时针方向，因此负频率则对应于转动的负频率方向。

为了数学表示的方便，在本书中我们同时使用正负频率。因此，模拟正弦信号的频率范围是 $-\infty < F < \infty$。

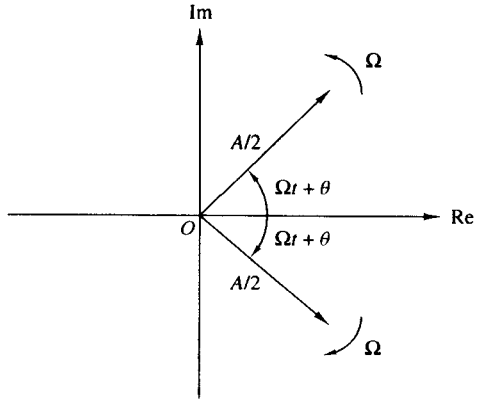


图 1.3.2　由复共轭指数对(移相器)所表示的余弦信号

1.3.2　离散时间正弦信号

一个离散时间正弦信号可以表示为

$$x(n) = A\cos(\omega n + \theta), \quad -\infty < n < \infty \tag{1.3.7}$$

其中，n 是整型变量，称为样本数。A 是正弦信号的幅度，ω 是单位为弧度/样本(rad/样本)的频率，而 θ 是单位为弧度(rad)的相位。

我们可使用由下式定义的频率变量 f 来代替 ω：

$$\omega \equiv 2\pi f \tag{1.3.8}$$

关系式(1.3.7)变成

$$x(n) = A\cos(2\pi f n + \theta), \quad -\infty < n < \infty \tag{1.3.9}$$

频率 f 是表示每个样本的周期数的一维变量。在 1.4 节考察模拟正弦信号的采样时,我们将离散时间正弦信号的频率变量 f 对应于模拟正弦信号的以周期数/秒为单位的频率 F。目前,我们暂时认为式(1.3.7)中的离散时间正弦信号与式(1.3.1)所给出的离散时间正弦信号无关。图 1.3.3 显示了频率为 $\omega = \pi/6$ rad/s($f = 1/12$ 周期/样本)的正弦信号,其相位为 $\theta = \pi/3$。

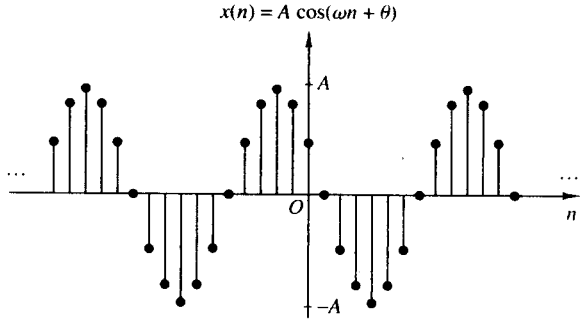


图 1.3.3 离散正弦信号的例子($\omega = \pi/6$ 和 $\theta = \pi/3$)

与连续时间正弦信号相反,离散时间正弦信号由下列属性表征:

B1. 一个离散时间正弦信号仅当频率 f 是有理数时才是周期的。

按照定义,离散时间信号 $x(n)$ 是周期的,周期为 $N(N>0)$,当且仅当

$$x(n+N) = x(n) \quad \text{对于所有} n \tag{1.3.10}$$

式(1.3.10)中 N 的最小值称为基础周期。

周期性的证明很简单。由频率为 f_0 的一个正弦信号是周期的,从而有

$$\cos[2\pi f_0(N+n)+\theta] = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

当且仅当存在一个整数 k 满足

$$2\pi f_0 N = 2k\pi$$

或

$$f_0 = \frac{k}{N} \tag{1.3.11}$$

时,该式成立。由式(1.3.11)可知,仅当其频率 f_0 可以表示为两个整数的比值(即 f_0 是有理数)时,一个离散时间正弦信号才是周期的。

为确定周期正弦信号的基础周期 N,我们将频率 f_0 表示为式(1.3.11)的形式,并消去公因子,以使 k 和 N 互为素数。于是,正弦信号的基础周期等于 N。可以看出较小的频率改变会导致周期较大的改变。例如,注意到 $f_1 = 31/60$ 意味着 $N_1 = 60$,而 $f_2 = 30/60$ 导致 $N_2 = 2$。

B1. 频率被 2π 的整数倍分割的离散时间信号是相同的信号。

要证明这一推论,先考虑正弦信号 $\cos(\omega_0 n + \theta)$。很容易推出

$$\cos[(\omega_0 + 2\pi)n + \theta] = \cos(\omega_0 n + 2\pi n + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta) \tag{1.3.12}$$

于是，所有正弦序列

$$x_k(n) = A\cos(\omega_k n + \theta), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.3.13}$$

其中

$$\omega k = \omega_0 + 2k\pi, \qquad -\pi \leqslant \omega_0 \leqslant \pi$$

是无区别的(即相同的)。任何一个从频率为 $|\omega| > \pi$ 或 $|f| > 1/2$ 的正弦信号导出的序列，与从频率为 $|\omega| < \pi$ 的正弦信号导出的序列是相等的。由于这种相似性，我们称频率为 $|\omega| > \pi$ 的正弦信号是频率为 $|\omega| < \pi$ 的相应正弦信号的混叠。于是，我们将 $-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$ 或者 $-1/2 \leqslant f \leqslant 1/2$ 范围的信号称为唯一的，而 $|\omega| > \pi$ 或 $f > 1/2$ 范围的所有频率为混叠。读者应注意到离散时间正弦信号和连续时间正弦信号之间的差别，后者使得不同信号的 Ω 或 F 取值在整个范围 $-\infty < \Omega < \infty$ 或 $-\infty < F < \infty$。

B3. 离散时间信号的最高振荡率在 $\omega = \pi$(或 $\omega = -\pi$)或 $f = 1/2$(或 $f = -1/2$)时达到。

要说明这一特性，让我们首先研究正弦信号序列

$$x(n) = \cos\omega_0 n$$

在频率从 0 变到 π 时的特征。为了简化讨论，我们取值 $\omega_0 = 0, \pi/8, \pi/4, \pi/2, \pi$，对应于 $f = 0, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2$，这会导致周期序列的周期为 $N = \infty, 16, 8, 4, 2$，如图 1.3.4 所示。注意到当信号的频率增加时信号的周期减小。事实上，我们可以看到当频率增加时，信号振荡率增加。

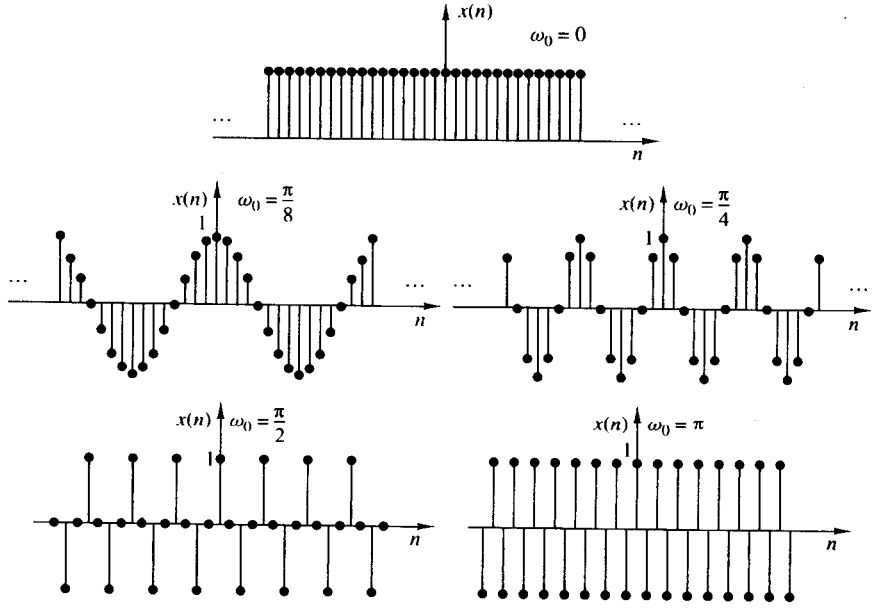


图 1.3.4　频率 ω_0 取各种值时的信号 $x(n) = \cos\omega_0 n$

为了解 $\pi \leqslant \omega_0 \leqslant 2\pi$ 会发生什么，我们考虑频率 $\omega_1 = \omega_0$ 和 $\omega_2 = 2\pi - \omega_0$ 时的信号。注意到当 ω_1 从 π 变到 2π 时，ω_2 从 π 变到 0。容易看出

$$\begin{aligned} x_1(n) &= A\cos\omega_1 n = A\cos\omega_0 n \\ x_2(n) &= A\cos\omega_2 n = A\cos(2\pi - \omega_0)n \\ &= A\cos(-\omega_0 n) = x_1(n) \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

因此,ω_2 是 ω_1 的混叠。如果我们用正弦函数代替余弦函数,除了在相位 180°处正弦信号 $x_1(n)$和 $x_2(n)$之间的差别外,结果基本相同。在任何情况下,当我们将离散时间正弦信号的相对频率 ω_0 从 π 增加到 2π 时,其振荡率会减小。正如 $\omega_0=0$ 的情况,对于 $\omega_0=2\pi$,其结果是一个常信号。显然,在 $\omega_0=\pi$(或 $f=1/2$)具有最高振荡率。

正如连续时间信号的情况,离散时间信号也可引入负频率。为此,我们使用等式

$$x(n)=A\cos(\omega n+\theta)=\frac{A}{2}e^{j(\omega n+\theta)}+\frac{A}{2}e^{-j(\omega n+\theta)} \tag{1.3.15}$$

由于频率间隔 2π 整数倍的离散时间正弦信号都是相同的,所以在任意区间 $\omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_1+2\pi$ 内的频率组成所有的离散时间正弦信号或复指数信号。因此,离散时间信号的频率范围是有限的,其持续时间为 2π。通常,我们选择范围 $0\leqslant\omega\leqslant2\pi$ 或 $-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi(0\leqslant f\leqslant1,-1/2\leqslant f\leqslant1/2)$,我们称其为主值区间。

1.3.3 谐相关的复指数信号

正弦信号和复指数信号在信号与系统的分析中起着主要作用。在有些情况下,我们需要处理一组谐相关的复指数信号(或正弦信号)。这些信号是一组周期复指数信号,其基础频率是某单个正频率的倍数。虽然我们的讨论仅限于复指数信号,但相同特性对于正弦信号同样成立。我们将考虑连续时间和离散时间形式的复指数信号。

连续时间指数信号。作为连续时间基本信号的谐相关指数信号形式是

$$s_k(t)=e^{jk\Omega_0 t}=e^{j2\pi kF_0 t}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1.3.16}$$

注意,对于每一个 k 值,$s_k(t)$是基础周期为 $1/(kF_0)=T_p/k$ 或基础频率为 kF_0 的周期信号。由于周期为 T_p/k 的周期信号同时也是周期为 $k(T_p/k)=T_p$(对任何正整数 k)的周期信号,因此我们看到所有的 $s_k(t)$信号都具有公共周期 T_p。更进一步,按照 1.3.1 节,F_0 允许取任何值并且组中的所有成员是不同的,这意味着如果 $k_1\neq k_2$,那么 $s_{k1}(t)\neq s_{k2}(t)$。

从式(1.3.16)中的基本信号,我们可以构造谐相关复指数信号的线性组合,形式为

$$x_a(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k s_k(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\Omega_0 t} \tag{1.3.17}$$

其中,c_k,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$是任意的复常数。信号 $x_a(t)$是基础周期为 $T_p=1/F_0$ 的周期信号,式(1.3.17)的表示形式称为 $x_a(t)$的傅里叶级数展开。复值常数称为傅里叶级数系数,信号 $s_k(t)$称为 $x_a(t)$的第 k 次谐波。

离散时间指数。如果一个离散时间复指数序列的相对频率是一个有理数,那么该序列是周期的,因此我们选择 $f_0=1/N$ 并且定义谐相关复指数如下:

$$s_k(n)=e^{j2\pi kf_0 n},\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1.3.18}$$

对照连续时间情况,我们注意到

$$s_{k+N}(n)=e^{j2\pi n(k+N)/N}=e^{j2\pi n}s_k(n)=s_k(n)$$

与式(1.3.10)一致,这意味着式(1.3.18)所描述的组中只有 N 个不同的周期复指数序列。进一步,组中的所有成员均具有 N 个样本的公共周期。很明显,我们可以挑选任何连续 N 个复指数,即从 $k=n_0$ 到 $k=n_0+N-1$,从而形成基础频率为 $f_0=1/N$ 的谐相关组。为了方便,我们经常挑选对应于 $n_0=0$ 的组,即

$$s_k(n) = e^{j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \tag{1.3.19}$$

正如在连续时间信号的情况，很明显线性组合

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k s_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \tag{1.3.20}$$

导致了基础周期为 N 的周期信号。下面我们会看到，这是一个周期离散时间序列的傅里叶级数表示，其中，傅里叶系数为 $\{c_k\}$。序列 $s_k(n)$ 称为 $x(n)$ 的第 k 次谐波。

例 1.3.1 存储在数字信号处理器内存中的是如下正弦信号的一个周期：

$$x(n) = \sin\left(\frac{2\pi n}{N} + \theta\right)$$

其中，$\theta = 2\pi q/N$，q 和 N 均是整数。

(a) 确定如何利用该表得到具有相同相位的谐相关的正弦信号的值。

(b) 确定如何利用该表得到具有相同频率但不同相位的正弦信号。

解：

(a) 设 $x_k(n)$ 代表正弦信号序列

$$x_k(n) = \sin\left(\frac{2\pi nk}{N} + \theta\right)$$

这是一个频率为 $f_k = k/N$ 且与 $x(n)$ 谐相关的正弦信号。但 $x_k(n)$ 可以表达为

$$x_k(n) = \sin\left[\frac{2\pi(kn)}{N} + \theta\right]$$

$$= x(kn)$$

因此我们观察到 $x_k(0) = x(0)$，$x_k(1) = x(k)$，$x_k(2) = x(2k)$，等等。因此，正弦序列 $x_k(n)$ 可通过 $x(n)$ 的值表从 $x(0)$ 开始取第 k 个 $x(n)$ 的值获得。按此方式，我们可以生成频率为 $f_k = k/N$，$k = 0, 1, \cdots, N-1$ 的所有谐相关正弦信号的值。

(b) 通过从内存位置 $q = \theta N/2\pi$（q 是整数）处取序列的第一个值，我们可以控制频率为 $f_k = k/N$ 的正弦信号的相位 θ。因此，初始相位 θ 控制表中的起始位置，并且在序号 (kn) 每次超过 N 时环绕该表。

1.4 模数和数模转换

实际应用中我们感兴趣的信号大多是模拟信号，如语音信号、生物学信号、地震信号、雷达信号、声呐信号和各种通信信号如音频与视频等。要通过数字方法处理模拟信号，有必要先将它们转换成数字形式，即转换成具有有限精度的数字序列。这一过程称为模数转换(A/D)，而相应的设备称为 A/D 转换器(ADC)。

从概念上，我们将 A/D 转换视为三步完成过程，如图 1.4.1 所示。

1. **采样**。这是连续时间信号到离散时间信号的转换过程，通过对连续时间信号在离散时间点处取样本值获得。因此，如果 $x_a(t)$ 是采样器的输入，那么输出是 $x_a(nT) \equiv x(n)$，其中 T 称为采样间隔。
2. **量化**。这是离散时间连续值信号转换到离散时间离散值(数字)信号的转换过程。每个信号样本值是从可能值的有限集中选取的。未量化样本 $x(n)$ 和量化输出 $x_q(n)$ 之间的差称为量化误差。
3. **编码**。在编码过程中，每一个离散值 $x_q(n)$ 由 b 位的二进制序列表示。

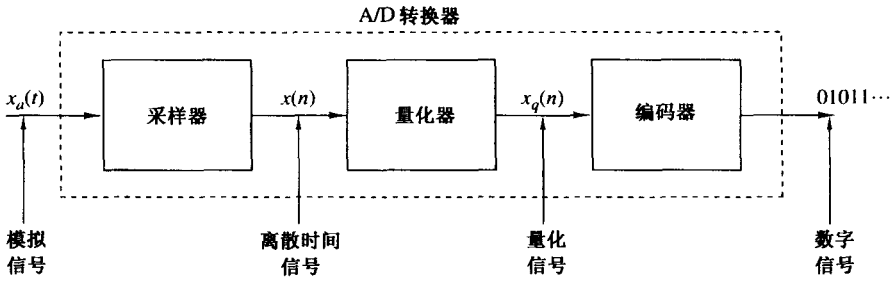


图 1.4.1 模数转换器的基本组成部分

虽然我们将 A/D 转换器模型化为采样器,然后是量化器和编码器,但实际上 A/D 转换是由单个设备执行的,输入 $x_a(t)$而产生一个二进制码字。采样和量化操作可以按任意顺序执行,但实际上采样总是在量化之前执行的。

在实际应用的很多场合(例如,语音处理),需要将处理的数字信号转化成模拟信号(很明显,我们不能听到代表语音信号的采样序列,或者不能看到相应于一个电视信号的数字)。将数字信号转化成模拟信号的过程是熟知的数模(A/D)转换。所有 D/A 转换器通过执行某种插值操作连接数字信号的点,其精度依赖于 D/A 转换过程的质量。图 1.4.2 说明了 D/A 转换的样本形式,称为零阶保持或阶梯近似。其他近似也是可能的,如线性连接一对连续样本(线性插值),通过三个连续样本点的二次插值,等等。存在一种最优(理想)插值吗? 对于具有有限的频率范围(有限带宽)的信号,在下面的章节中引入的采样定理指定了插值的最优形式。

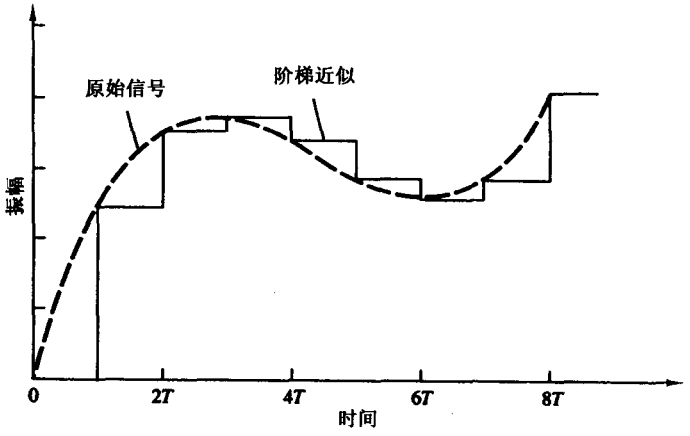


图 1.4.2 零阶保持数模转换

采样和量化在本节论述。特别地,我们将演示在信号带宽有限的情况下,采样既不会导致信息丢失,也不会引入信号失真。原则上,模拟信号可以从样本重构,只要采样率足够高以避免通常所说的"混叠"问题。另一方面,量化是一个导致信号失真的不可倒转或不可逆的过程。我们将要证明失真量依赖于 A/D 转换过程的精度,通常由位数测量。影响选择 A/D 转换器精度的因素是花费和采样率。一般来说,随着精度和/或采样率的增加,成本也会增加。

1.4.1 模拟信号采样

模拟信号采样有很多方式。我们只限于讨论在实际中最常使用的采样类型,即周期采样或均匀采样。这可由下列关系式描述:

$$x(n) = x_a(nT), \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.4.1}$$

其中，$x(n)$是通过对模拟信号 $x_a(t)$每隔 T 秒取样本值获得的离散时间信号。这一过程在图 1.4.3 中描述。在两个连续的样本之间的时间间隔 T 称为采样周期或采样间隔，其倒数 $1/T = F_s$ 称为采样率(样本数/s)或采样频率(Hz)。

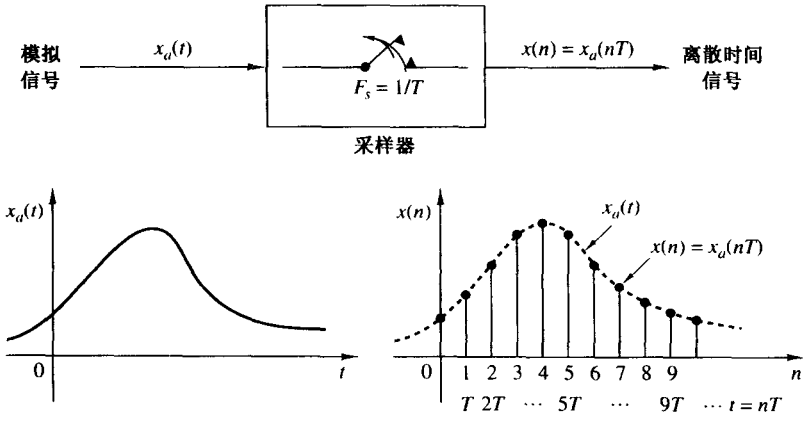


图 1.4.3　模拟信号的周期采样

周期采样建立了连续时间信号的时间变量 t 和离散时间信号的时间变量 n 之间的关系。事实上，这些变量是通过采样周期 T 或等价地通过采样率 $F_s = 1/T$ 线性相关的，即

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \tag{1.4.2}$$

由式(1.4.2)推出，在模拟信号的频率变量 F(或 Ω)和离散时间信号的频率变量 f(或 ω)之间存在一种关系。为建立此关系，考虑模拟正弦信号形式

$$x_a(t) = A\cos(2\pi Ft + \theta) \tag{1.4.3}$$

如果以 $F_s = 1/T$ 个样本/s 的采样率进行周期采样，那么有

$$\begin{aligned} x_a(nT) \equiv x(n) &= A\cos(2\pi FnT + \theta) \\ &= A\cos\left(\frac{2\pi nF}{F_s} + \theta\right) \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

如果比较式(1.4.4)和式(1.3.9)，则会注意到两个频率变量 F 和 f 呈线性关系，即

$$f = \frac{F}{F_s} \tag{1.4.5}$$

或等价于

$$\omega = \Omega T \tag{1.4.6}$$

式(1.4.5)中的关系证实了相对频率或归一化频率这一命名，有时用来描述频率变量 f。如式(1.4.5)的含义那样，只要知道了采样率 F_s，我们就可以用 f 确定以赫兹为单位的频率 F。

我们回顾一下 1.3.1 节，对于连续时间正弦信号的频率变量 F 或 Ω 的范围是

$$\begin{aligned} -\infty < F < \infty \\ -\infty < \Omega < \infty \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

然而，离散时间正弦信号的情形不同。从 1.3.2 节我们看到

$$-\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$$
$$-\pi < \omega < \pi \tag{1.4.8}$$

将式(1.4.5)和式(1.4.6)代入式(1.4.8),我们发现当以 $F_s = 1/T$ 的采样率采样时,连续时间正弦信号的频率一定会落在某个范围,即

$$-\frac{1}{2T} = -\frac{F_s}{2} \leqslant F \leqslant \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T}$$

或等价于

$$-\frac{\pi}{T} = -\pi F_s \leqslant \Omega \leqslant \pi F_s = \frac{\pi}{T} \tag{1.4.10}$$

这些关系总结在表 1.1 中。

表 1.1 频率变量之间的关系

连续时间信号		离散时间信号
$\Omega = 2\pi F$		$\omega = 2\pi f$
$\frac{\text{弧度}}{\text{秒}}$ Hz		$\frac{\text{弧度}}{\text{样本}}$ $\frac{\text{周期数}}{\text{样本}}$
	$\omega = \Omega T, f = F/F_s$	$-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$
		$-\frac{1}{2} \leqslant f \leqslant \frac{1}{2}$
	$\Omega = \omega/T, F = f \cdot F_s$	
$-\infty < \Omega < \infty$		$-\pi/T \leqslant \Omega \leqslant \pi/T$
$-\infty < F < \infty$		$-F_2/2 \leqslant F \leqslant F_s/2$

从这些关系可以看出,连续时间信号和离散时间信号的基本不同是,频率 F 和 f 或者 Ω 和 ω 的取值范围不同。连续时间信号的周期采样包含了无限频率范围的变量 F(或 Ω)到有限频率范围的变量 f(或 ω)的映射。由于离散时间信号的最高频率是 $\omega = \pi$ 或 $f = 1/2$,由此推出,对于某一个采样率 F_s,相应的 F 和 Ω 的最高值是

$$F_{\max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T}$$
$$\Omega_{\max} = \pi F_s = \frac{\pi}{T} \tag{1.4.11}$$

所以,采样引入了争议,既然连续时间信号的最高频率 $F_{\max} = F_s/2$ 或者 $\Omega_{\max} = \pi F_s$,即信号以速率 $F_s = 1/T$ 采样时可以被唯一区分,那么对于频率大于 $F_s/2$ 的信号会如何呢? 让我们看看下面的例子。

例 1.4.1 通过考察下面两种模拟正弦信号,这些频率关系的含义可以被正确地描述:

$$x_1(t) = \cos 2\pi(10)t$$
$$x_2(t) = \cos 2\pi(50)t \tag{1.4.12}$$

其采样率为 $F_s = 40$ Hz。相应的离散时间信号或序列是

$$x_1(n) = \cos 2\pi\left(\frac{10}{40}\right)n = \cos\frac{\pi}{2}n$$
$$x_2(n) = \cos 2\pi\left(\frac{50}{40}\right)n = \cos\frac{5\pi}{2}n \tag{1.4.13}$$

然而，$\cos 5\pi n/2 = \cos(2\pi n + \pi n/2) = \cos \pi n/2$。因此 $x_2(n) = x_1(n)$。于是两个正弦信号是相同的，结果是不可区分的。如果给出由 $\cos(\pi/2)n$ 所生成的样本值，那么样本值是对应于 $x_1(t)$还是 $x_2(t)$就会引起争议。既然当两个信号以 $F_s = 40$ 个样本/s 的速率采样时，$x_2(t)$准确等于 $x_1(t)$，我们就说，在 40 个样本/s 的采样率时，频率 $F_2 = 50$ Hz 的信号是频率 $F_1 = 10$ Hz 的信号的混叠。

值得注意的是不只 F_2 是 F_1 的混叠。事实上，对于 40 个样本/s 的采样率，频率 $F_3 = 90$ Hz 同样是 F_1 的混叠，还有频率 $F_4 = 130$ Hz，等等。所有以 40 个样本/s 的采样率的正弦信号 $\cos 2\pi(F_1 + 40k)t$，$k = 1,2,3,4,\cdots$均生成相等的值。结果，它们都是 $F_1 = 10$ Hz 的信号的混叠。

一般来说，连续时间正弦信号的采样

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \theta) \tag{1.4.14}$$

以 $F_s = 1/T$ 的采样率将产生一个离散时间信号

$$x(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \theta) \tag{1.4.15}$$

其中，$f_0 = F_0/F_s$ 是正弦信号的相对频率。如果假定 $-F_s/2 \leqslant F_0 \leqslant F_s/2$，那么 $x(n)$的频率 f_0 就会落在频率范围 $-1/2 \leqslant f_0 \leqslant 1/2$，即离散时间信号的频率范围。在这种情况下，$F_0$ 和 f_0 之间是一对一的关系，因此有可能从样本 $x(n)$标识(或重构)模拟信号 $x_a(t)$。

另一方面，如果正弦信号

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_k t + \theta) \tag{1.4.16}$$

其中，

$$F_k = F_0 + kF_s, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1.4.17}$$

以速率 F_s 采样，很明显，频率 F_k 将会落在基础频率范围 $-F_s/2 \leqslant F \leqslant F_s/2$ 之外。于是采样后的信号是

$$\begin{aligned} x(n) \equiv x_a(nT) &= A\cos\left(2\pi \frac{F_0 + kF_s}{F_s} n + \theta\right) \\ &= A\cos(2\pi n F_0/F_s + \theta + 2\pi kn) \\ &= A\cos(2\pi f_0 n + \theta) \end{aligned}$$

它与从式(1.4.14)采样所得到的式(1.4.15)中的离散时间信号相同。因此，无数的连续时间正弦信号通过采样可由相同的离散时间信号(即相同样本集)表示出来。从而，如果给定序列 $x(n)$，那么这些样本值表示哪一个连续时间信号 $x_a(t)$将会引起争议。也就是说，频率 $F_k = F_0 + kF_s$，$-\infty < k < \infty$(k 是整数)在采样以后与频率 F_0 是无法区分的，因此它们是 F_0 的混叠。这种连续时间信号和离散时间信号的频率变量之间的关系如图 1.4.4 所示。

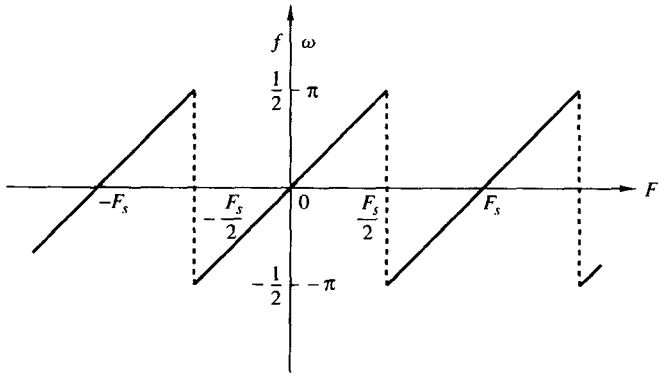


图 1.4.4　在周期采样的情况下，连续时间信号和离散时间信号的频率变量之间的关系

一个混叠的例子在图 1.4.5 说明,当所用的采样率为 $F_s = 1$ Hz 时,频率为 $F_0 = \frac{1}{8}$ Hz 和 $F_1 = -\frac{7}{8}$ Hz 的两个正弦信号生成相同的样本。从式(1.4.17)容易推出,对于 $k = -1$, $F_0 = F_1 + F_s = (-\frac{7}{8} + 1)$ Hz $= \frac{1}{8}$ Hz。

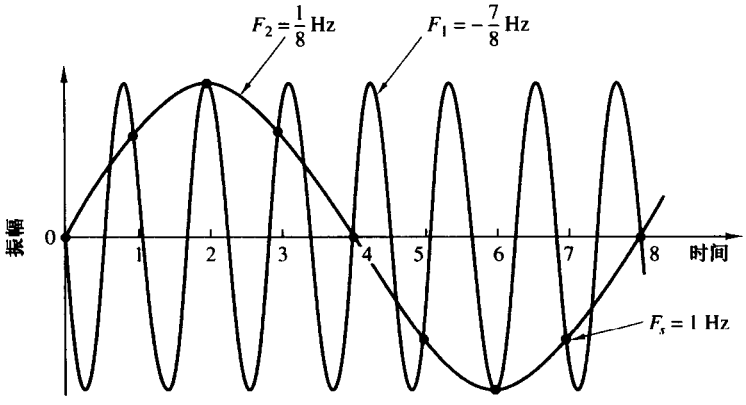


图 1.4.5 混叠示例

既然对应于 $\omega = \pi$ 的频率 $F_s/2$ 是可以用采样率 F_s 唯一表征的最高频率,那么确定大于 $F_s/2$ ($\omega = \pi$)的任一(混叠)频率到小于 $F_s/2$ 的等价频率的映射是一件简单的事情。我们可以使用 $F_s/2$ 或 $\omega = \pi$ 作为枢轴点,并将混叠频率反射或"对折"到范围 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$。由于反射点是 $F_s/2(\omega = \pi)$,所以频率 $F_s/2(\omega = \pi)$就称为对折频率。

例 1.4.2 考虑模拟信号

$$x_a(t) = 3\cos 100\pi t$$

(a) 确定避免混叠所需要的最小采样率。

(b) 假设信号采样率为 $F_s = 200$ Hz,采样后得到的离散时间信号是什么?

(c) 假设信号采样率为 $F_s = 75$ Hz,采样后得到的离散时间信号是什么?

(d) 如果生成与(c)得到的相同样本,相应的信号频率 $0 < F < F_s/2$ 是什么?

解:(a) 模拟信号的频率是 $F = 50$ Hz,因此避免混叠所需要的最小采样率是 $F_s = 100$ Hz。

(b) 如果信号采样率为 $F_s = 200$ Hz,那么离散时间信号是

$$x(n) = 3\cos\frac{100\pi}{200}n = 3\cos\frac{\pi}{2}n$$

(c) 如果信号采样率为 $F_s = 75$ Hz,那么离散时间信号是

$$x(n) = 3\cos\frac{100\pi}{75}n = 3\cos\frac{4\pi}{3}n$$

$$= 3\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)n$$

$$= 3\cos\frac{2\pi}{3}n$$

(d) 对于 $F_s = 75$ Hz 的采样率,我们有

$$F = fF_s = 75f$$

(c)中的正弦信号的频率是 $f = 1/3$。因此,

$$F = 25\ \text{Hz}$$

显然，正弦信号

$$y_a(t) = 3\cos 2\pi Ft$$

$$= 3\cos 50\pi t$$

以 $F_s = 75$ Hz 的采样率采样可生成相同的样本。因此，在采样率为 $F_s = 75$ Hz 时，频率 $F = 50$ Hz 是频率 $F = 25$ Hz 的混叠。

1.4.2　采样定理

对于给定的任意模拟信号，我们应该如何选定采样周期 T 或采样率 F_s 呢？要回答这一问题，我们必须具备一些关于被采样信号的特征信息。尤其是，我们必须具备一些涉及到信号的频率范围的一般信息。这些信息一般对我们有用。例如，我们一般都知道语音信号的频率成分低于 3000 Hz。另一方面，电视信号一般都包含大到 5 MHz 的重要频率成分。这些信号的信息内容包含在各种频率成分的振幅、频率和相位中，但这些信号特征的细节知识在得到信号之前对我们是不可用的。事实上，处理这些信号的目的通常是提取这些细节信息。然而，如果我们知道一般类型信号的最大频率范围（如语音信号类型、视频信号类型等），那么就可以指定将模拟信号转换成数字信号所必需的采样率。

假设任何模拟信号都可以表示成不同振幅、频率和相位的正弦信号的和，即

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(2\pi F_i t + \theta_i) \tag{1.4.18}$$

其中，N 代表频率成分的数目。所有信号（如语音信号和视频信号）都可以通过任意的短时分割服从于这样一种表示形式。这些振幅、频率和相位通常会从一个时间段到另一个时间段随着时间慢慢改变。然而，假定这些频率不会超过某个已知频率，也就是 $F_{\max}$。例如，对于语音信号类型 $F_{\max} = 3000$ Hz，而对于电视信号 $F_{\max} = 5$ MHz。对于任何一种给定类型的信号的不同实现方式，最大频率可能会稍有变化，因此通过将模拟信号通过一个滤波器以严重衰减大于 $F_{\max}$ 的频率成分，我们希望能保证 $F_{\max}$ 不会超过某个预定的值。于是我们肯定这一族中没有一个信号包含大于 $F_{\max}$ 的频率成分。实际中，这样的滤波通常在采样之前使用。

鉴于对 $F_{\max}$ 的了解，我们可以选择合适的采样率。我们知道，当信号以 $F_s = 1/T$ 的采样率采样时，一种可以被准确重构的模拟信号的最高频率是 $F_s/2$。高于 $F_s/2$ 或低于 $-F_s/2$ 的任何频率都会导致与 $-F_s/2 \leqslant F \leqslant F_s/2$ 范围内的相应频率相同的样本。为了避免由混叠引起的争议，我们必须选择充分高的采样率。也就是说，我们必须选择大于 $F_{\max}$ 的 $F_s/2$。因此，为了避免混叠问题，可选择 F_s 使其满足

$$F_s > 2F_{\max} \tag{1.4.19}$$

其中，$F_{\max}$ 是模拟信号中的最大频率成分。采这种方式选择采样率，模拟信号中的任何频率分量，即 $|F_i| < F_{\max}$，就都可以映射成某个离散时间正弦信号，其频率

$$-\frac{1}{2} \leqslant f_i = \frac{F_i}{F_s} \leqslant \frac{1}{2} \tag{1.4.20}$$

或等价为

$$-\pi \leqslant \omega_i = 2\pi f_i \leqslant \pi \tag{1.4.21}$$

既然 $|f| = \frac{1}{2}$ 或 $|\omega| = \pi$ 是离散时间信号中的最高（唯一）频率，那么按照式(1.4.19)选择采样率就可以避免混叠问题。换言之，条件 $F_s > 2F_{\max}$ 保证了模拟信号中的所有频率成分都能映射到频率

在基础区间内的相应的离散时间频率成分。这样,模拟信号的所有频率分量都可无混淆地表示成采样的形式,因此使用合适的插值(数模转换)方法,模拟信号可以从样本值无失真地重构。这个"合适的"或理想的插值公式是由采样定理指定的。

采样定理。如果包含在某个模拟信号 $x_a(t)$ 中的最高频率是 $F_{max}=B$,而信号以采样率 $F_s>2F_{max}\equiv 2B$ 采样,那么 $x_a(t)$ 可以从样本值准确恢复,插值函数为

$$g(t)=\frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt} \tag{1.4.22}$$

于是,$x_a(t)$ 可以表示为

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a\left(\frac{n}{F_s}\right)g\left(t-\frac{n}{F_s}\right) \tag{1.4.23}$$

其中,$x_a(n/F_s)=x_a(nT)\equiv x(n)$ 是 $x_a(t)$ 的样本。

当 $x_a(t)$ 的采样以最小采样率 $F_s=2B$ 执行时,式(1.4.23)中的重构公式变成

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a\left(\frac{n}{2B}\right)\frac{\sin 2\pi B(t-n/2B)}{2\pi B(t-n/2B)} \tag{1.4.24}$$

采样率 $F_N=2B=2F_{max}$ 称为奈奎斯特率。图 1.4.6 展示了使用式(1.4.22)中的插值函数的理想 D/A 转换过程。

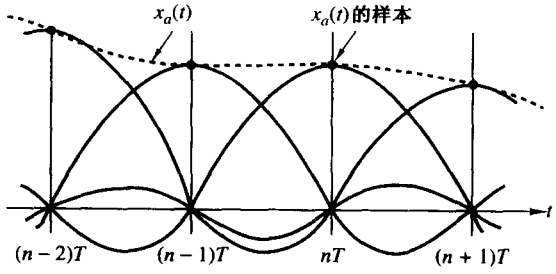


图 1.4.6 理想的 D/A 转换(插值)

可以从式(1.4.23)或式(1.4.24)观察到,从 $x(n)$ 重构 $x_a(t)$ 是一个复杂的过程,包含了插值函数 $g(t)$ 及其时移 $g(t-nT)$ 的加权和,其中 $-\infty<n<\infty$,权重因子是样本 $x(n)$。由于复杂性和式(1.4.23)或式(1.4.24)所需样本的无限数目,这些重构公式主要是理论上的。实际上的插值方法将在第 6 章给出。

例 1.4.3 考虑模拟信号

$$x_a(t)=3\cos 50\pi t+10\sin 300\pi t-\cos 100\pi t$$

该信号的奈奎斯特率是什么?

解:上述信号所代表的频率是

$$F_1=25\text{ Hz},\qquad F_2=150\text{ Hz},\qquad F_3=50\text{ Hz}$$

于是 $F_{max}=150$ Hz,按照式(1.4.19)有

$$F_s>2F_{max}=300\text{ Hz}$$

奈奎斯特率是 $F_N=2F_{max}$。因此,

$$F_N=300\text{ Hz}$$

讨论：应观察到，信号成分 $10\sin 300\pi t$ 以奈奎斯特率 $F_N = 300$ Hz 采样，导致样本 $10\sin \pi n$，而它等于零。换言之，我们对模拟信号在它的零相交点进行采样，因此完全失去了这个信号成分。如果正弦信号在某些量上具有相位偏差，则这种情形就不会发生。在这种情况下，对 $10\sin(300\pi t + \theta)$ 以奈奎斯特率 $F_N = 300$ Hz 进行采样，生成样本

$$\begin{aligned} 10\sin(\pi n + \theta) &= 10(\sin \pi n \cos\theta + \cos \pi n \sin\theta) \\ &= 10\sin\theta \cos \pi n \\ &= (-1)^n 10\sin\theta \end{aligned}$$

于是，如果 $\theta \neq 0$ 或 π，以奈奎斯特率所产生的正弦信号的样本不全是零。然而，当相位 θ 未知时，我们仍然不能从样本得到正确的振幅。能够避免这种潜在麻烦的一种简单补救方法就是以大于奈奎斯特率的采样率进行采样。

例 1.4.4　考虑模拟信号

$$x_a(t) = 3\cos 2000\pi t + 5\sin 6000\pi t + 10\cos 12\,000\pi t$$

(a) 该信号的奈奎斯特率是什么？

(b) 假定现在以 $F_s = 5000$ Hz 的采样率对该信号进行采样。采样后得到的离散时间信号是什么？

(c) 如果使用理想插值，能够从这些样本重构的模拟信号 $y_a(t)$ 是什么？

解：

(a) 信号中存在的频率是

$$F_1 = 1\text{ kHz}, \qquad F_2 = 3\text{ kHz}, \qquad F_3 = 6\text{ kHz}$$

于是 $F_{\max} = 6$ kHz，根据采样定理有

$$F_s > 2F_{\max} = 12\text{ kHz}$$

奈奎斯特率是

$$F_N = 12\text{ kHz}$$

(b) 既然我们已经选择 $F_s = 5$ kHz，那么对折频率是

$$\frac{F_s}{2} = 2.5\text{ kHz}$$

并且这是由采样信号唯一表达的最大频率。利用式(1.4.2)可得

$$\begin{aligned} x(n) = x_a(nT) &= x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) \\ &= 3\cos 2\pi\left(\tfrac{1}{5}\right)n + 5\sin 2\pi\left(\tfrac{3}{5}\right)n + 10\cos 2\pi\left(\tfrac{6}{5}\right)n \\ &= 3\cos 2\pi\left(\tfrac{1}{5}\right)n + 5\sin 2\pi\left(1 - \tfrac{2}{5}\right)n + 10\cos 2\pi\left(1 + \tfrac{1}{5}\right)n \\ &= 3\cos 2\pi\left(\tfrac{1}{5}\right)n + 5\sin 2\pi\left(-\tfrac{2}{5}\right)n + 10\cos 2\pi\left(\tfrac{1}{5}\right)n \end{aligned}$$

最后，我们得到

$$x(n) = 13\cos 2\pi\left(\tfrac{1}{5}\right)n - 5\sin 2\pi\left(\tfrac{2}{5}\right)n$$

相同的结果可以使用图 1.4.4 得到。事实上，由于 $F_s = 5$ kHz，那么对折频率就是 $F_s/2 = 2.5$ kHz。这是可以被采样信号唯一表示的最大频率。从式(1.4.17)我们有 $F_0 = F_k - kF_s$。因此 F_0 可以从 F_k 减去 F_s 的整数倍，即 $-F_s/2 \leqslant F_0 \leqslant F_s/2$。频率 F_1 小于 $F_s/2$，因此不受混叠的影响。然而，其他两个频率大于对折频率，将会受到混叠影响而改变。事实上，

$$F_2' = F_2 - F_s = -2\ \text{kHz}$$

$$F_3' = F_3 - F_s = 1\ \text{kHz}$$

从式(1.4.5)推出 $f_1 = \frac{1}{5}, f_2 = -\frac{2}{5}$,并且 $f_3 = \frac{1}{5}$,与上述结果一致。

(c) 由于只有 1 kHz 和 2 Hz 的频率分量在采样信号中表示,因此我们可以恢复的模拟信号是

$$ya(t) = 13\cos 2000\pi t - 5\sin 4000\pi t$$

上式明显不同于原始信号 $x_a(t)$。原始模拟信号的失真是由于使用了低采样率产生的混叠效应引起的。

虽然混叠是要避免的缺陷,但是有两种基于混叠效应开发的有益的实际应用。这些应用是频闪观测仪和示波镜。这两种仪器设计为混叠操作,以便将高频率表示为低频率。

为了详细阐述,考虑一个将高频率分量限制到一个给定频率带宽 $B_1 < F < B_2$ 的信号,其中 $B_2 - B_1 \equiv B$ 定义为信号的带宽。我们假定 $B \ll B_1 < B_2$。这个条件意味着信号中的频率分量比该信号的带宽大得多。这样的信号通常称为带通或窄带信号。现在,如果该信号以采样率 $F_s \geqslant 2B$ 采样,但 $F_s \ll B_1$,那么该信号中包含的所有频率分量将会是 $0 < F < F_s/2$ 范围中频率的混叠。结果,如果我们考察在基础范围 $0 < F < F_s/2$ 中的频率范围,那么既然我们知道频率带宽 $B_1 < F < B_2$,我们就精确知道了频率范围。于是,如果信号是一个窄带(带通)信号,那么我们从以采样率 $F_s > 2B$ 对信号进行采样得到的样本重构该原始信号,其中 B 是带宽。这一结论组成了采样定理的另一种形式,我们称之为带通形式以区别于采样定理的前一种形式,带通形式一般适用于所有类型的信号。后者有时称为基带形式。带通形式的采样定理在 6.4 节详细描述。

1.4.3 连续幅度信号的量化

正如我们看到的,一个数字信号是一个数字(样本)序列,其中每个数可以由有限数字(有限精度)表示。

通过把每个样本值表示为一个有限(而不是无限)的数字,将一个离散时间连续幅度信号转换成数字信号的过程,称为量化。在用离散值级别的有限集表示连续值信号时引入的误差称为量化误差或量化噪声。

我们将对样本 $x(n)$的量化器操作表示为 $Q[x(n)]$,并且让 $x_q(n)$代表量化器输出端的量化后样本序列。因此,

$$x_q(n) = Q[x(n)]$$

于是,量化误差是定义为量化值和实际样本值之差的序列 $e_q(n)$。因此,

$$e_q(n) = x_q(n) - x(n) \tag{1.4.25}$$

我们用一个例子说明量化过程。考虑下面的离散时间信号

$$x(n) = \begin{cases} 0.9^n, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

它是用采样率 $F_s = 1$ Hz 对模拟指数信号 $x_a(t) = 0.9^t\ (t \geqslant 0)$进行采样得到的[见图 1.4.7(a)]。表 1.2 显示了 $x(n)$的前 10 个样本值,观察表 1.2 可以看到样本值 $x(n)$的描述需要 n 位有效位。很明显,信号不能通过使用一个计算器或一台数字计算机被处理,因为只有最初的几个样本值被存储和操作。例如,大多数计算器只处理 8 位有效数字。

然而,假定我们只需要使用一位有效位。要剔除多余的位,我们可以简单地丢弃(截断)或通过对结果数字四舍五入进行取舍。生成的量化后的信号 $x_q(n)$显示在表 1.2 中。我们只讨论通过四舍五入后的量化,它只像对待截断一样简单。阶段过程图形表示为图 1.4.7(b)。在数字信号中

允许出现的值称为量化级别，而两个连续的量化级别之间的距离称 Δ 为量化步长或分辨率。四舍五入量化器只将 $x(n)$ 的每个样本赋值为最近的量化级别。相反，一个执行截短的量化器会将 $x(n)$ 的每个样本值赋值为低于它的量化级别。截断时的量化误差 $e_q(n)$ 限制为 $-\Delta/2$ 到 $\Delta/2$。即

$$-\frac{\Delta}{2} \leqslant e_q(n) \leqslant \frac{\Delta}{2} \tag{1.4.26}$$

换言之，瞬间的量化误差不能超过量化步长的一半(见表 1.2)。

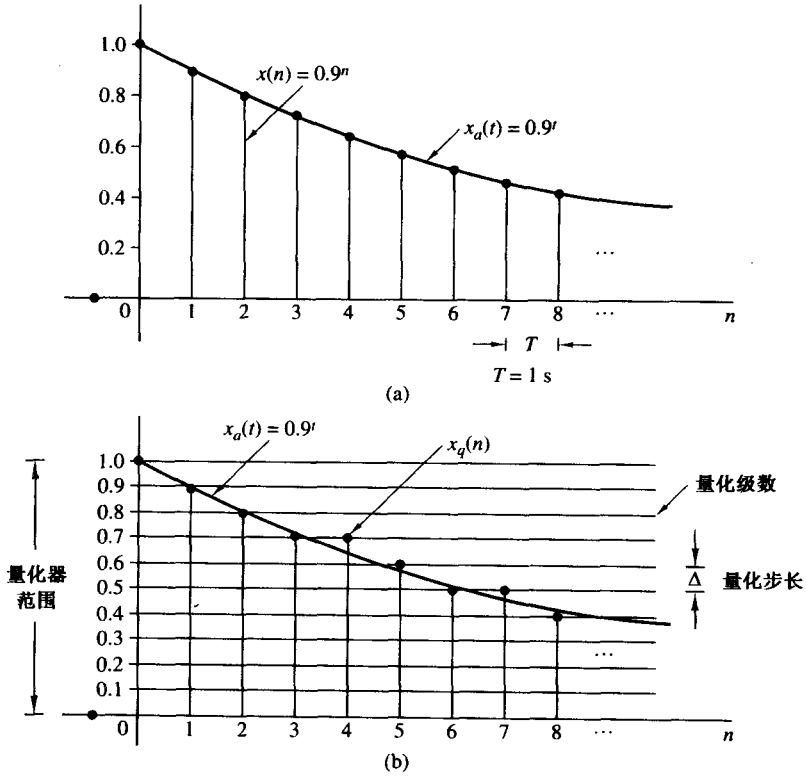


图 1.4.7　量化示例

表 1.2　使用截断或四舍五入的保留一位有效数字的量化的数字说明

n	$x(n)$ 离散时间信号	$x_q(n)$ (截断)	$x_q(n)$ (四舍五入)	$e_q(n) = x_q(n) - x(n)$ (四舍五入)
0	1	1.0	1.0	0.0
1	0.9	0.9	0.9	0.0
2	0.81	0.8	0.8	−0.01
3	0.729	0.7	0.7	−0.029
4	0.6561	0.6	0.7	0.0439
5	0.590 49	0.5	0.6	0.009 51
6	0.531 441	0.5	0.5	−0.031 441
7	0.478 296 9	0.4	0.5	0.021 703 1
8	0.430 467 21	0.4	0.4	−0.030 467 21
9	0.387 420 489	0.3	0.4	0.012 579 511

如果 x_{min} 和 x_{max} 代表 $x(n)$ 的最小值和最大值,并且 L 是量化级数,那么

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L-1} \tag{1.4.27}$$

我们定义信号的动态范围为 $x_{max} - x_{min}$。在我们的例子中,有 $x_{max} = 1$, $x_{min} = 0$,且 $L = 11$,导致 $\Delta = 0.1$。注意,如果动态范围固定,增加量化级数 L 会导致量化步长的减小。因此,量化误差增加而量化器的精度增加。实际上,通过选择充分的量化级数,我们可以将量化误差减小到一个有效的量级。

理论上,模拟信号的量化总是会导致信息损失。这是由量化引入的不明确结果。事实上,量化是一个不可逆的或不可转换的过程(即多对一映射),因为在关于某个量化级别 $\Delta/2$ 距离内的所有样本都被赋予了相同值。这种含糊性使得对量化过程的准确量化分析变得极为困难。这一部分内容我们将在第 6 章使用统计分析来深入讨论。

1.4.4 正弦信号的量化

图 1.4.8 使用矩形网格说明了模拟正弦信号 $x_a(t) = A\cos \Omega_0 t$ 的采样和量化过程。量化器范围内的横线指示了所允许的量化级。纵线指明采样时间。所以,从原始模拟信号 $x_a(t)$,通过采样我们可以得到离散时间信号 $x(n) = x_a(nT)$ 以及量化后的离散时间、离散振幅信号 $x_q(nT)$。实际上,阶梯信号 $x_q(t)$ 可以通过零阶保持得到。这种分析是非常有用的,因为正弦信号被用做 A/D 转换器中的测试信号。

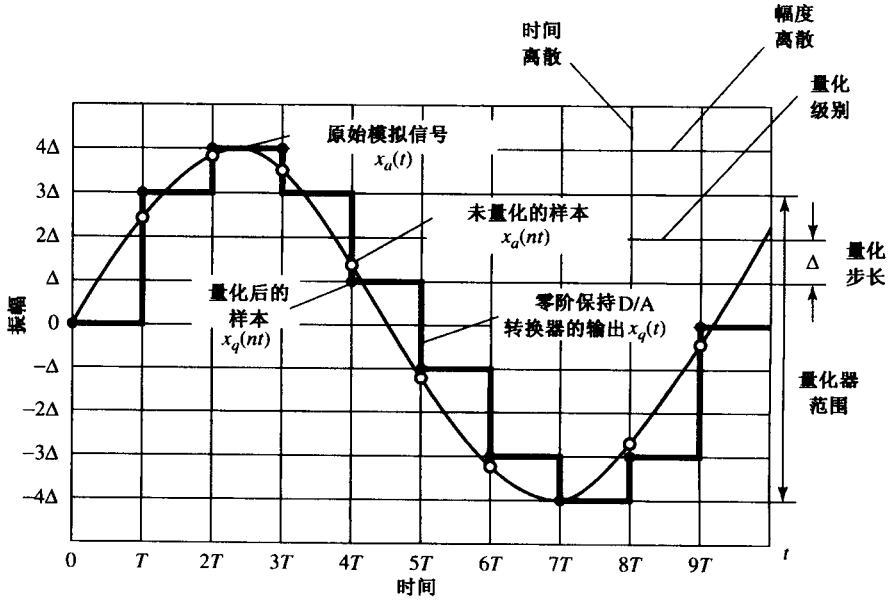


图 1.4.8 正弦信号的采样和量化

如果采样率 F_s 满足采样定理,那么量化误差是 A/D 转换过程中的唯一误差。

因此,我们可以通过对模拟信号 $x_a(t)$ 而不是离散时间信号 $x(n) = x_a(nT)$ 进行量化而评价量化误差。观察图 1.4.8 表明信号 $x_a(t)$ 在量化级之间几乎是线性的(见图 1.4.9)。相应的量化误差 $e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$ 显示在图 1.4.9 中。在图 1.4.9 中,τ 代表 $x_a(t)$ 在量化级内停留的时间。均方误差功率 P_q 是

$$P_q = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} e_q^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} e_q^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.4.28}$$

由于 $e_q(t) = (\Delta/2\tau)t$，$-\tau \leqslant t \leqslant \tau$，我们有

$$P_q = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left(\frac{\Delta}{2\tau}\right)^2 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\Delta^2}{12} \tag{1.4.29}$$

如果量化器有 b 位精度，而且量化器覆盖整个范围 $2A$，那么量化步长是 $\Delta = 2A/2^b$。所以，

$$P_q = \frac{A^2/3}{2^{2b}} \tag{1.4.30}$$

信号 $x_a(t)$的平均功率是

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}(A\cos\Omega_0 t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2} \tag{1.4.31}$$

A/D 转换器输出的质量通常由信号和量化噪声之比(SQNR)测量，它是信号功率与噪声功率之比：

$$\mathrm{SQNR} = \frac{P_x}{P_q} = \frac{3}{2}\cdot 2^{2b}$$

用 dB 表示的 SQNR 是

$$\mathrm{SQNR(dB)} = 10\lg \mathrm{SQNR} = 1.76 + 6.02b \tag{1.4.32}$$

上式说明字长每增加一位即每两个量化级，SQNR 近似增加 6 dB。

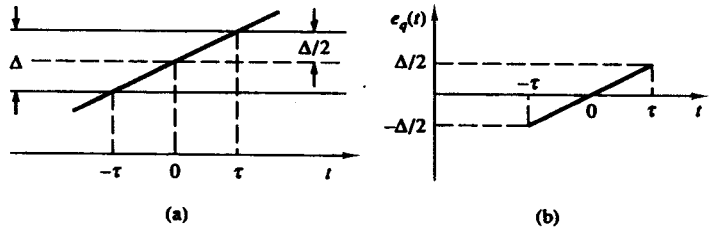


图 1.4.9　量化误差 $e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$

虽然式(1.4.32)是由正弦信号获得的，但在第 6 章我们将会看到，对每一种动态范围横跨整个量化器范围的信号相似结果均成立。这种关系极为重要，因为它指明了具体应用所需要的位数，以保证给定的信噪比。例如，大多数光盘播放器使用 44.1 kHz 的采样率和 16 位采样分辨率，这对应于 SQNR 大于 96 dB。

1.4.5　量化采样信号的编码

在一个 A/D 转换器中的编码过程为每一个量化级别赋予一个唯一的二进制数。如果有 L 级，那么我们至少需要 L 个不同的二进制数。如果字长为 b 位，那么我们可以生成 2^b 个不同的二进制数。因此有 $2^b \geqslant L$，或者等价有 $b \geqslant \mathrm{lb}\,L$。因此，编码器所需要的位数是大于或等于 $\mathrm{lb}\,L$ 的最小整数。在我们的例子中(见表 1.2)，容易看出需要一个 $b = 4$ 位的编码器。商业上可用的 A/D 转换器可以是 $b = 16$ 位或更小的有限精度。一般来说，采样率越高及量化越精细，设备就越昂贵。

1.4.6　数模转换

要将数字信号转换成模拟信号，可以使用模数(D/A)转换器。如前所述，D/A 转换器的任务是完成样本之间的插值。

采样定理指出了带限信号的最佳插值。然而,这种插值类型太复杂,因此正如前面指出的一样,不大实用。从实际观点出发,最简单的 D/A 转换器是图 1.4.2 所示的零阶保持,它只保持一个恒定的样本值,直到接收到下一个样本。附加的改进方法可以使用线性方法得到。

图 1.4.10 所示的插值是用直线段连接两个连续样本。更好的插值可以使用更复杂的高阶插值技术得到。

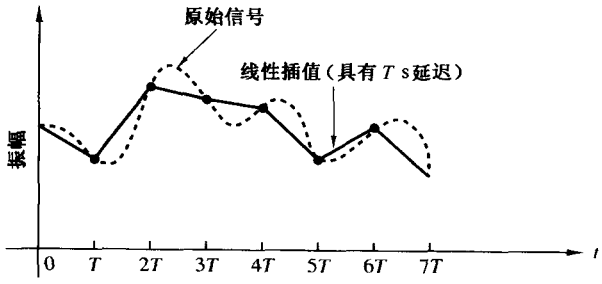


图 1.4.10 线性点连接器(具有 T s 延迟)

一般来说,次优插值技术导致所通过频率超过对折频率。这样的频率分量不是我们所需要的,通常要将插值器的输出通过一个适当的模拟滤波器(称为后滤波器或平滑滤波器),以除去该频率分量。

这样,D/A 转换通常包含一个次优插值器,再跟随一个后滤波器。D/A 转换器将在第 6 章中详细讨论。

1.4.7 数字信号与系统及离散时间信号与系统的分析

我们已经看到,一个数字信号定义为一个整数自变量的函数,并且它的值是所有可能值的有限集。这种信号的好处是可由数字计算机提供可能的结果。计算机对表示为'0'和'1'的串进行操作。该串的长度(字长)是固定的、有限的,通常是 8,12,16 或 32 位。在计算中的有限字长效应会引起数字信号处理系统分析的复杂性。为了避免这种复杂性,在分析中我们通常会忽略数字信号与系统的量化特性,而将它们视为离散时间信号与系统。

在第 6 章、第 9 章和第 10 章中,我们将考察使用有限字长的后果。这是一个重要的话题,因为很多数字信号处理问题是通过采用定点运算的小型计算机或微处理器来解决的。因此,我们必须仔细看待有限精度运算的问题,并在所需要完成的信号处理任务的软件或硬件的设计中认真考虑这一问题。

1.5 小结与参考文献

在这一章中,我们试图提供采用数字信号处理方法代替模拟信号处理方法的动机。给出了数字信号处理系统的基本元素,并定义了将模拟信号转换成便于处理的数字信号时所需要的操作。尤其重要的是采样定理,它由奈奎斯特于 1928 年提出,之后由香农于 1949 年在他的经典论文中加以推广。在 1.4.2 节描述的采样定理将在第 6 章详细推导。引入正弦信号主要用于说明混叠现象和采样定理的后续开发。

本章还介绍了量化效应,这是在 A/D 转换过程中的固有现象。信号量化问题在统计意义上得到了很好的处理,这将在第 6 章、第 9 章和第 10 章描述。

最后,简单描述了信号重构或 D/A 转换问题。基于阶梯插值的信号重构将在 6.3 节描述。

数字信号处理有无数的实际应用。Oppenheim 在 1978 年出版的书中介绍了在语音处理、图像处理、雷达信号处理、声纳信号处理及地球物理信号处理的应用。

习题

1.1 按照是否属于(1)一维或多维信号,(2)单通道或多通道信号,(3)连续时间或离散时间信号,(4)模拟或数字信号(按幅度),对下列信号进行分类,并给出简单的解释。

(a) 在纽约证券交易所的公共事业股票的闭市价格。

(b) 一部彩色电影。

(c) 运动中的汽车方向盘相对于汽车参考帧的位置。

(d) 运动中的汽车方向盘相对于地面参考帧的位置。

(e) 一个小孩每个月的重量和高度测量。

1.2 确定下列哪一个信号是周期的,并计算它们的基础周期。

(a) $\cos 0.01\pi n$　　(b) $\cos(\pi \frac{30n}{105})$　　(c) $\cos 3\pi n$　　(d) $\sin 3n$　　(e) $\sin(\pi \frac{62n}{10})$

1.3 确定下列哪一个信号是周期的。在信号是周期信号的情况下,说明它的基础周期。

(a) $x_a(t) = 3\cos(5t + \pi/6)$

(b) $x(n) = 3\cos(5n + \pi/6)$

(c) $x(n) = 2\exp[j(n/6 - \pi)]$

(d) $x(n) = \cos(n/8)\cos(\pi n/8)$

(e) $x(n) = \cos(\pi n/2) - \sin(\pi n/8) + 3\cos(\pi n/4 + \pi/3)$

1.4 (a) 证明信号

$$s_k(n) = e^{j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

的基础周期是 $N_p = N/\mathrm{GCD}(k, N)$,其中 GCD 是 k 和 N 的最大公约数。

(b) 对于 $N = 7$ 的情况,基础周期是什么?

(c) 对于 $N = 16$ 的情况,基础周期又是什么?

1.5 考虑下列模拟正弦信号:

$$x_a(t) = 3\sin(100\pi t)$$

(a) 画出信号 $x_a(t)$,$0 \leqslant t \leqslant 30$ ms。

(b) 信号 $x_a(t)$以采样率 $F_s = 300$ Hz 采样。确定离散时间信号 $x(n) = x_a(nT)$的频率,$T = 1/F_s$,并证明该信号是周期的。

(c) 计算在 $x(n)$的一个周期内的样本数。在与 $x_a(t)$的同一幅图上画出 $x(n)$。该离散时间信号的周期(以 ms 为单位)是什么?

(d) 能否找到一个采样率 F_s,使得信号 $x(n)$达一个值为 3 的峰值?满足这一要求的最小 F_s 是多少?

1.6 一个基础周期为 $T_p = 1/F_0$ 的连续时间正弦信号 $x_a(t)$,以采样率 $F_s = 1/T$ 进行采样,生成一个离散时间正弦信号 $x(n) = x_a(nT)$。

(a) 如果 $T/T_p = k/N$(即 T/T_p 是有理数),证明 $x(n)$是周期的。

(b) 如果 $x(n)$是周期的,基础周期 T_p(以 s 为单位)是多少?

(c) 解释下列语句:如果 $x(n)$的基础周期 T_p(以 s 为单位)是 $x_a(t)$的周期的整数倍,那么 $x(n)$是周期的。

1.7 一全模拟信号包含最大 10 kHz 的频率。

(a) 什么样的采样率范围可以使得该信号能够从样本完全重构。

(b) 假设我们以采样率 $F_s = 8$ kHz 对该信号进行采样,对于频率 $F_1 = 5$ kHz,检查会发生什么情形。

(c) 对于频率 $F_2 = 9$ kHz,重复(b)。

1.8 一个模拟心电图(ECG)信号包含最大 100 Hz 的有用频率。

(a) 该信号的奈奎斯特率是什么?

(b) 假定我们对该信号以 250 Hz 的采样率进行采样,能够以该采样率唯一表征的信号的最高频率是什么?

1.9 模拟信号 $x_a(t) = \sin(480\pi t) + 3\sin(720\pi t)$ 以 600 Hz 的采样率进行采样。

(a) 确定 $x_a(t)$ 的奈奎斯特率。

(b) 确定对折频率。

(c) 所得到的离散时间信号 $x(n)$ 的频率(以 rad 为单位)是什么?

(d) 如果 $x(n)$ 通过一个理想的 D/A 转换器,那么重构信号 $y_a(t)$ 是什么?

1.10 一个数字通信链路携带二进码字代表输入信号

$$x_a(t) = 3\cos 600\pi t + 2\cos 1800\pi t$$

该链路以 10 000 位/s 的速率传输,并且每个输入样本量化成 1024 个不同的电压级别。

(a) 采样率和对折频率是什么?

(b) 信号 $x_a(t)$ 的奈奎斯特率是什么?

(c) 所产生的离散时间信号 $x(n)$ 的频率是什么?

(d) 分辨率 Δ 是什么?

1.11 考虑图 P1.11 所示的简单信号处理系统。A/D 和 D/A 转换器的采样周期分别是 $T = 5$ ms 和 $T' = 1$ ms。如果输入信号是

$$x_a(t) = 3\cos 100\pi t + 2\sin 250\pi t \quad (t \text{ 以 s 为单位})$$

确定该系统的输出 $y_a(t)$。后滤波器除去了大于 $F_s/2$ 的所有频率成分。

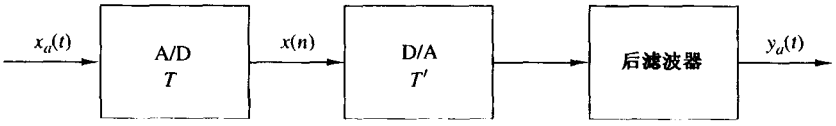


图 P1.11

1.12 (a) 使用正弦函数的周期特性,推导例 1.4.2 中离散时间信号的 $x(n)$ 的表达式。

(b) 如果在重构过程中我们假定 $F_s = 10$ kHz,从 $x(n)$ 得到的模拟信号是什么?

1.13 离散时间信号 $x(n) = 6.35\cos(\pi/10)n$ 以分辨率(a) $\Delta = 0.1$ 或(b) $\Delta = 0.02$ 量化。每种情况下的 A/D 转换器需要多少位?

1.14 对于动态范围为 1 V 的地震信号进行采样,采样率是 $F_s = 20$ Hz,使用 8 位 A/D 转换器,确定采样的位率和分辨率。在所产生的数字地震信号中所表示的最大频率是什么?

1.15 正弦信号的采样:混叠。考虑连续时间正弦信号

$$x_a(t) = \sin 2\pi F_0 t, \qquad -\infty < t < \infty$$

既然 $x_a(t)$ 可以被数学描述,那么它的采样版本可以由每 T s 的值描述。采样信号由下式描述:

$$x(n) = x_a(nT) = \sin 2\pi \frac{F_0}{F_s} n, \qquad -\infty < n < \infty$$

其中,$F_s = 1/T$ 是采样率。

(a) 对于 $F_s = 5$ kHz 和 $F_0 = 0.5$ kHz,2 kHz,3 kHz 和 4.5 kHz,画出信号 $x(n)$,$0 \leqslant n \leqslant 99$。解释每幅图的相似性和差别。

(b) 假定 $F_0 = 2$ kHz 及 $F_s = 50$ kHz。

1. 绘出信号 $x(n)$的图形。信号 $x(n)$的频率 f_0 是什么?

2. 绘出通过采取 $x(n)$的偶数样本点所产生的信号 $y(n)$的图形。这是正弦信号吗? 为什么? 如果是的话,其频率如何?

1.16 正弦信号 A/D 转换中的量化误差。假设 $x_q(n)$是对信号 $x(n) = \sin 2\pi f_0 n$ 量化所得到的信号。量化误差功率 P_q 定义为

$$P_q = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^2(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}[x_q(n) - x(n)]^2$$

量化信号的"质量"可以由信号和量化噪声之比(SQNR)测量,定义为

$$\text{SQNR} = 10\lg\frac{P_x}{P_q}$$

其中,P_x 是未量化信号 $x(n)$的功率。

(a) 对于 $f_0 = 1/50$ 和 $N = 200$,写程序对信号 $x(n)$进行量化,用截断法量化到 64,128,256 量化级。在每种情况下绘出信号 $x(n)$,$x_q(n)$和 $e(n)$的图形并计算相应的 SQNR。

(b) 使用四舍五入法代替截断法重复(a)。

(c) 对(a)和(b)的结果加以说明。

(d) 比较实验测量的 SQNR 和由式(1.4.32)理论预测的 SQNR,对其中的差别和相似性加以说明。

第 2 章　离散时间信号与系统

在第 1 章中，我们向读者介绍了信号的许多重要类型，并描述了将模拟信号转换成离散时间信号的采样过程。此外，我们还详细介绍了离散时间正弦信号的特性。正弦信号是一种重要的基本信号，它是构建各种复杂信号的基石。然而，还有一些其他基本信号在信号处理中也很重要，我们将在这一章介绍这些离散时间信号，这些信号是用来描述复杂信号的基本函数或者是构建复杂信号的基石。

本章的重点是描述离散时间系统的一般特性，尤其是线性时不变(LTI)这一类系统。我们将定义并介绍 LTI 系统的许多重要的时域特性，而且还要推导一个重要的公式——称为卷积公式。有了卷积公式，我们就可以计算 LTI 系统对于任意输入信号的输出响应。除了卷积公式之外，我们还将介绍差分方程，它是描述 LTI 系统输入-输出关系的另一种方法。此外，我们还要讲述 LTI 系统的递归和非递归实现。

我们重点研究 LTI 系统的目的有两个：第一，有大量的数学方法可以用来分析 LTI 系统；第二，许多实际系统不是 LTI 系统，就是可以用 LTI 系统来近似的系统。我们还会介绍两个信号的相关性，这是因为相关性在数字信号处理中是非常重要的，而且与卷积公式也特别相似。本章将给出信号的自相关和互相关定义以及它们的性质。

2.1　离散时间信号

正如我们在第 1 章所讨论的，离散时间信号 $x(n)$是整型自变量的函数。图形化的描述如图 2.1.1 所示。值得注意的重要一点是，离散时间信号在两个连续样本之间的时刻并没有定义。此外，如果认为在 n 不是整数时，$x(n)$等于零，这也是错误的，仅仅是 $x(n)$对非整型 n 值没有定义。

接下来我们假设，对于所有整数 n，$-\infty < n < \infty$，离散时间信号都有定义，通常我们把 $x(n)$视为信号的第 n 个样本，即使信号 $x(n)$本身就是离散时间的(即不是通过采样模拟信号得到的)。如果 $x(n)$确实是从模拟信号 $x_a(t)$采样得到的，那么 $x(n) \equiv x_a(nT)$，其中 T 是采样周期(即两个连续样本间的间隔时间)。

除了用图 2.1.1 的图形化方法来表示离散时间信号或序列外，还有一些其他非常方便的表示方法，主要有：

1. 函数表示，比如

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, 3 \\ 4, & n = 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

2. 表格表示，比如

n	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$x(n)$	$\cdots$	0	0	0	1	4	1	0	0	$\cdots$

3. 序列表示

一个有限长信号或序列，它的时间零点由符号 ↑ 进行指示，这个序列可以表示为

$$x(n)=\{\cdots 0,\underset{\uparrow}{0},1,4,1,0,0,\cdots\} \tag{2.1.2}$$

一个序列 $x(n)$，$n<0$ 时的值为零，它可表示为

$$x(n)=\{\underset{\uparrow}{0},1,4,1,0,0,\cdots\} \tag{2.1.3}$$

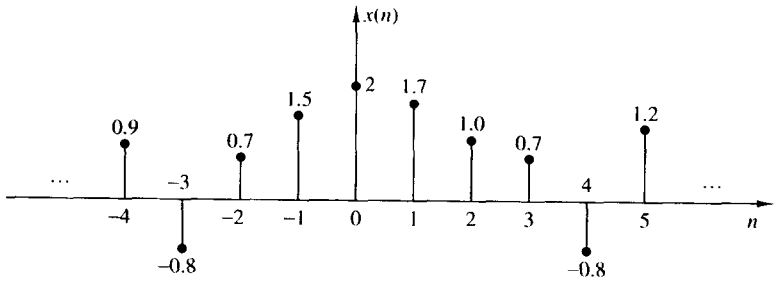


图 2.1.1　离散时间信号的图形表示

对于在 $n<0$ 时值为零的序列 $x(n)$，它的时间零点可以理解为序列的第一个(最左边的)点。一个有限长序列可以表示为

$$x(n)=\{3,-1,\underset{\uparrow}{-2},5,0,4,-1\} \tag{2.1.4}$$

然而，满足条件 $n<0$ 时 $x(n)=0$ 的有限长序列，可以表示为

$$x(n)=\{\underset{\uparrow}{0},1,4,1\} \tag{2.1.5}$$

式(2.1.4)中的信号(在时间上)包括 7 个样本或点，所以它被称为或确定为 7 点序列，类似地，式(2.1.5)中的序列是一个 4 点序列。

2.1.1　离散时间信号的基本元素

在离散时间信号和系统的研究中，会频繁出现许多基本信号，它们并起着非常重要的作用，这些信号定义如下。

1. 单位采样序列表示为 $\delta(n)$，定义为

$$\delta(n)\equiv\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{2.1.6}$$

换言之，单位采样序列就是这样一个信号：除了在 $n=0$ 处的值为 1 外，其他处的值均为 0，这类信号有时视为单位冲激。与模拟信号 $\delta(t)$不同，虽然它也称为单位冲激，而且也定义为除了 $t=0$ 外处处为 0，$\delta(t)$还具有单位面积，但是单位采样序列在算术上并没有那么复杂，$\delta(n)$的图形表示如图 2.1.2 所示。

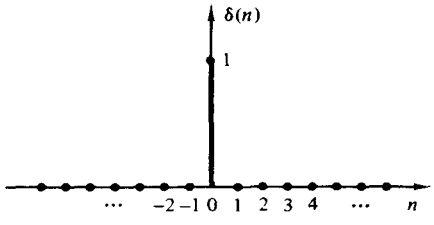


图 2.1.2　单位采样信号的图形表示

2. 单位阶跃信号表示为 $u(n)$，定义为

$$u(n)\equiv\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{2.1.7}$$

图 2.1.3 画出了单位阶跃信号。

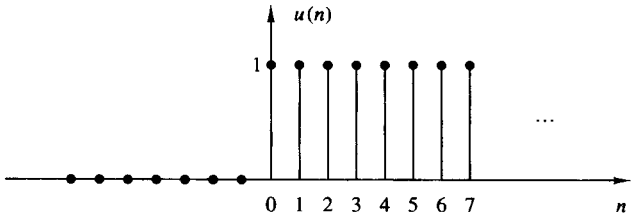


图 2.1.3 单位阶跃信号的图形表示

3. 单位斜坡信号表示为 $u_r(n)$,定义为

$$u_r(n) \equiv \begin{cases} n, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \qquad (2.1.8)$$

该信号如图 2.1.4 所示。

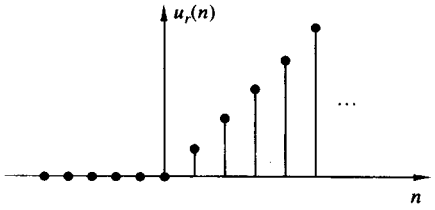


图 2.1.4 单位斜坡信号的图形表示

4. 指数信号的形式为

$$x(n) = a^n \quad \text{对于所有} n \qquad (2.1.9)$$

如果参数 a 是实数,那么 $x(n)$就是实信号。图 2.1.5 画出了不同参数值 a 的$x(n)$的图形。

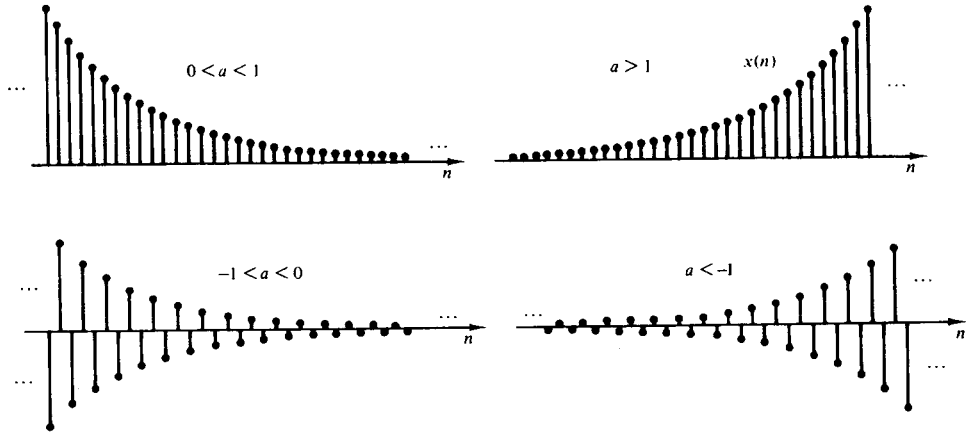


图 2.1.5 指数信号的图形表示

当参数 a 是复数时,它可表示为

$$a \equiv re^{j\theta}$$

现在 r 和 θ 成了参数,因此 $x(n)$又可表示为

$$\begin{aligned} x(n) &= r^n e^{j\theta n} \\ &= r^n(\cos\theta n + j\sin\theta n) \end{aligned} \qquad (2.1.10)$$

因为 $x(n)$现在是复数,所以我们可以用 n 函数的形式分别表示和画出它的实部

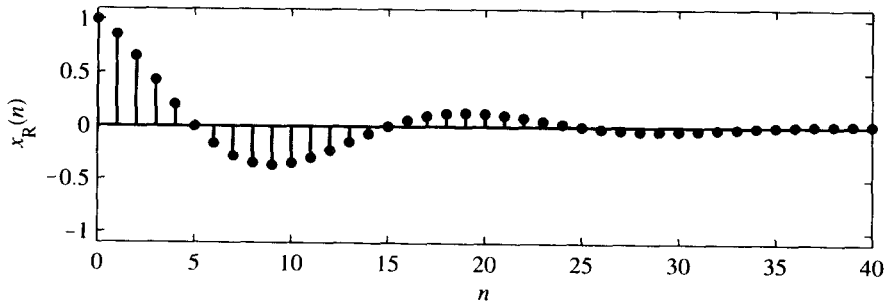
$$x_R(n) \equiv r^n \cos\theta n \qquad (2.1.11)$$

和虚部

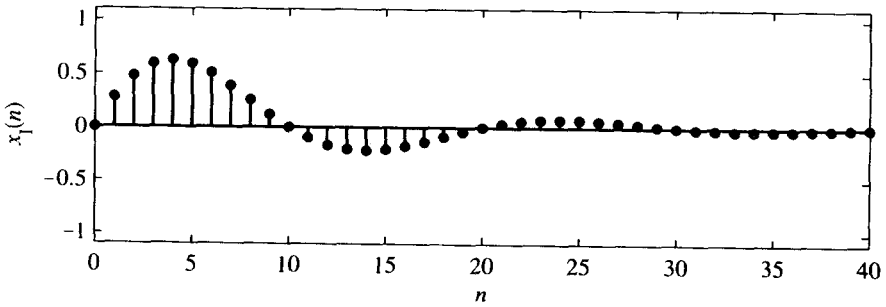
$$x_I(n) \equiv r^n \sin\theta n \qquad (2.1.12)$$

图 2.1.6 画出了 $r=0.9$ 和 $\theta=\pi/10$ 时的 $x_R(n)$和 $x_I(n)$的图形。我们注意到,信号$x_R(n)$和 $x_I(n)$是

衰减(指数衰退)的余弦函数和衰减的正弦函数。角变量 θ 仅仅是正弦信号频率,之前我们用(归一化)频率变量 ω 进行表示。很明显,如果 $r=1$,那么就不会出现衰减,并且 $x_R(n)$, $x_I(n)$和 $x(n)$具有固定的单位幅值。



(a)



(b)

图 2.1.6　复指数信号的实部和虚部图

另外,式(2.1.10)给出的信号 $x(n)$还可以通过幅度函数

$$|x(n)| = A(n) \equiv r^n \tag{2.1.13}$$

和相位函数

$$\angle x(n) = \phi(n) \equiv \theta n \tag{2.1.14}$$

来进行图形化表示。图 2.1.7 画出了 $r=0.9$ 和 $\theta=\pi/10$ 时的 $A(n)$和$\phi(n)$的图形。我们看到,相位函数对 n 是线性的,然而,相位仅仅定义在区间 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 或与等价的区间 $0\leqslant\theta<2\pi$ 内。因此,$\phi(n)$通常画在区间 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 或者 $0\leqslant\theta<2\pi$ 内,换言之,在画相位图之前,我们要从$\phi(n)$中减去 2π 的倍数,这就等价于用$\phi(n)$模 2π 来表示函数$\phi(n)$。

2.1.2　离散时间信号的分类

用数学方法分析离散时间信号和系统依赖于信号的特征。在这一节中,我们将根据许多不同的特征对离散时间信号进行分类。

能量信号和功率信号。信号 $x(n)$的能量 E 定义为

$$E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \tag{2.1.15}$$

我们使用了 $x(n)$的幅度平方值,因此这个定义既适用于复数信号又适用于实数信号。信号的能

量可以是有限的,也可以是无限的。如果 E 有限(即 $0<E<\infty$),那么 $x(n)$称为能量信号。有时,我们给 E 加个下标 x,记为 E_x,来强调 E_x 是信号 $x(n)$的能量。

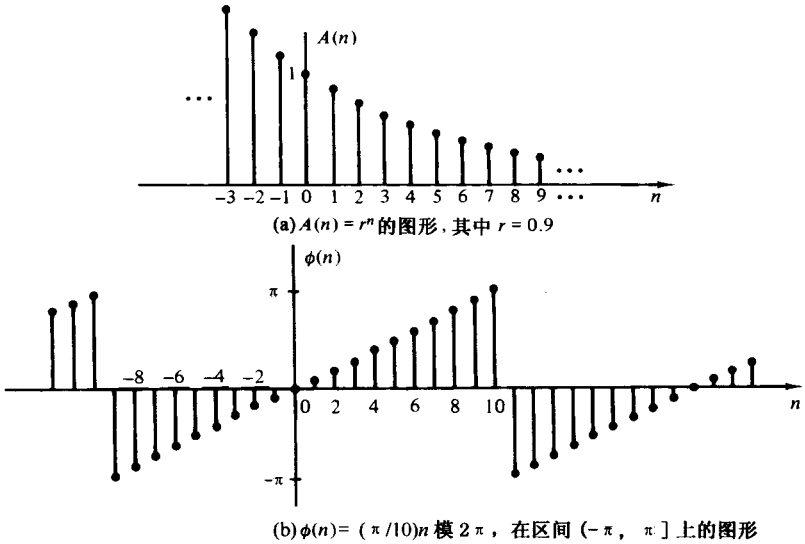


图 2.1.7 复指数信号的幅度和相位函数图:(a) $A(n)=r^n$ 的图形,其中 $r=0.9$;(b) $\phi(n)=(\pi/10)n$ 模 2π,在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的图形

许多具有无限能量的信号只有有限平均功率。离散时间信号 $x(n)$的平均功率定义为

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x(n)|^2 \tag{2.1.16}$$

如果在有限区间 $-N\leqslant n\leqslant N$ 内定义 $x(n)$的信号能量为

$$E_N\equiv\sum_{n=-N}^{N}|x(n)|^2 \tag{2.1.17}$$

那么信号能量 E 可以表示为

$$E\equiv\lim_{N\to\infty}E_N \tag{2.1.18}$$

因而信号 $x(n)$的平均功率可以表示为

$$P\equiv\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}E_N \tag{2.1.19}$$

很明显,若 E 有限,则 $P=0$。另一方面,如果 E 无限,那么平均功率 P 也许是有限的或无限的。如果 P 有限(不等于 0),那么该信号称为功率信号。下面的例子说明了这样的信号。

例 2.1.1 计算单位阶跃序列的功率和能量。单位阶跃信号的平均功率为

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}u^2(n)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{2N+1}=\lim_{N\to\infty}\frac{1+1/N}{2+1/N}=\frac{1}{2}$$

因此,单位阶跃序列是功率信号,它的能量是无限的。

同样，可以证明，复指数序列 $x(n)=Ae^{j\omega_0 n}$ 的平均功率为 A^2，因此它是功率信号。单位斜坡序列既不是功率信号，也不是能量信号。

周期信号和非周期信号。正如在 1.3 节所定义的，信号 $x(n)$ 是周期为 $N(N>0)$ 的周期信号，当且仅当

$$x(n+N)=x(n) \text{ 对于所有} n \tag{2.1.20}$$

满足式(2.1.20)的最小值 N 称为(基本)周期。如果没有满足式(2.1.20)的 N 值，那么该信号就称为非周期或者不定期信号。

我们已经注意到，形式为

$$x(n)=A\sin 2\pi f_0 n \tag{2.1.21}$$

的正弦信号，当 f_0 是有理数时，即 f_0 可以表示为

$$f_0=\frac{k}{N} \tag{2.1.22}$$

时，它是周期性信号，其中 k 和 N 是整数。

如果周期信号 $x(n)$ 在一个单周期内取有限值，那么在一个周期内，即在区间 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 内，$x(n)$ 的能量是有限的。但是，对于 $-\infty<n<\infty$，周期信号的能量是无限的。另一方面，周期信号的平均功率是有限的，并且等于一个单周期内的平均功率。因此，如果 $x(n)$ 是基本周期为 N 的周期信号并且取值有限，那么它的功率为

$$P=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 \tag{2.1.23}$$

所以，周期信号是功率信号。

对称(偶)和反对称(奇)信号。如果

$$x(-n)=x(n) \tag{2.1.24}$$

那么实信号 $x(n)$ 就称为对称(偶)信号。

另一方面，如果

$$x(-n)=-x(n) \tag{2.1.25}$$

那么信号 $x(n)$ 称为反对称(奇)信号。

我们注意到，如果 $x(n)$ 是奇信号，则 $x(0)=0$。奇、偶对称信号的例子如图 2.1.8 所示。

我们想要说明的是，任意信号都可以表示为两个信号分量之和，其中之一是偶信号，另一个是奇信号。偶信号分量是通过将 $x(n)$ 和 $x(-n)$ 相加再除 2 得到的，即

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)] \tag{2.1.26}$$

很明显，$x_e(n)$ 满足式(2.1.24)的对称条件。类似地，根据关系式

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)] \tag{2.1.27}$$

可构建一个奇信号分量 $x_o(n)$。同样，它显然满足式(2.1.25)，因此，它确实是奇信号。现在，若将式(2.1.26)和式(2.1.27)所定义的两个信号分量相加，就得到 $x(n)$，即

$$x(n)=x_e(n)+x_o(n) \tag{2.1.28}$$

因此，任意信号均可以表示成式(2.1.28)的形式。

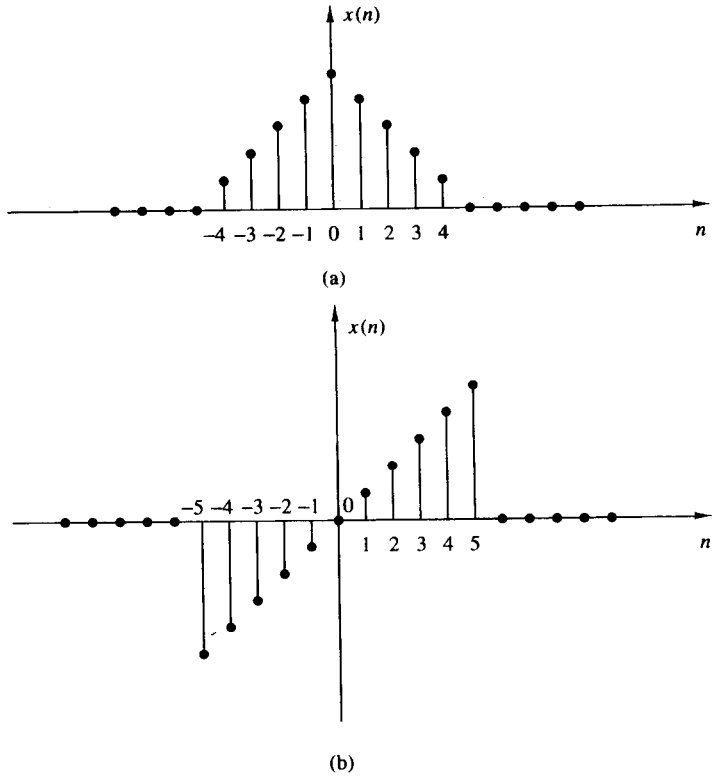


图 2.1.8 (a)偶信号和(b)奇信号的实例

2.1.3 离散时间信号的简单处理

在这一节,我们将考虑包括自变量和信号幅度(因变量)的简单的更改或者处理操作。

自变量(时间)转换。通过将自变量 n 替换为 $n-k$,其中 k 是整数,就可以将信号 $x(n)$在时间上平移。如果 k 是正整数,则时间平移使得信号在时间上延迟了 k 个单位。如果 k 是负整数,则时间平移使得信号超前了 $|k|$ 个单位。

例 2.1.2 信号 $x(n)$如图 2.1.9(a)所示,画出信号 $x(n-3)$和 $x(n+2)$的图形表示。

解:信号 $x(n-3)$是由 $x(n)$在时间上延迟 3 个单位得到的,如图 2.1.9(b)所示。另一方面,信号 $x(n+2)$是由 $x(n)$在时间上超前 2 个单位得到的,如图 2.1.9(c)所示。注意,延迟对应于信号在时间轴上向右移,而超前意味着在时间轴上向左移。

如果信号 $x(n)$存储在磁带上或磁盘上,或者可能在计算机的存储器内,那么通过引入延迟或超前来改变信号起点就是一个相对简单的操作。另一方面,如果信号不是存储的,而是由某个物理现象实时产生的,那么就不可能在时间上超前该信号,这是因为这样操作所需要的样本还没有产生。然而,通常可以在已经产生的信号样本中插入一定的延迟,但是在物理上却无法看到未来的信号样本。所以,在实时信号处理应用中,超前信号起点的操作是物理上不可实现的。

另一种改变时间起点的方法是将自变量 n 替换为 $-n$,操作的结果将信号关于原点 $n=0$ 进行反转或映射。

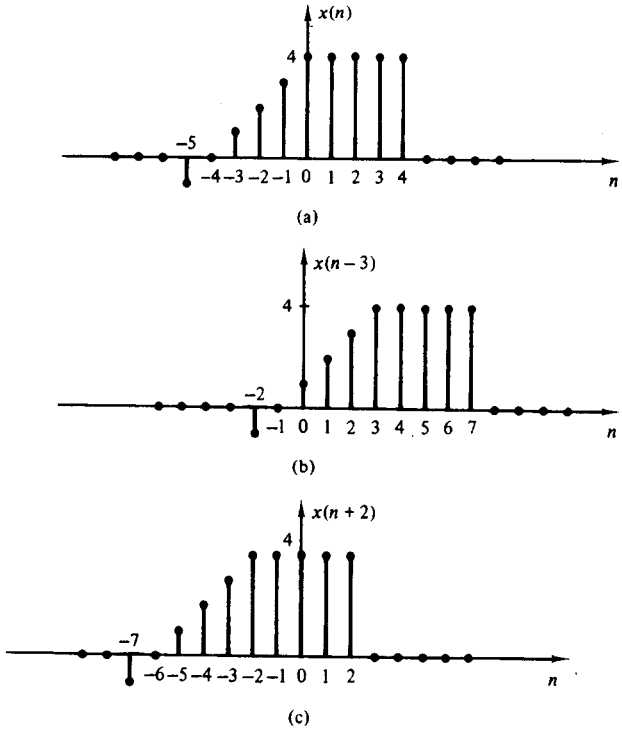


图 2.1.9　信号及其延迟和超前形式的图形表示

例 2.1.3　画出信号 $x(-n)$和 $x(-n+2)$的图形表示，其中信号 $x(n)$如图 2.2.10(a)所示。

解：新的信号 $y(n)=x(-n)$如图 2.1.10(b)所示。注意，$y(0)=x(0)$，$y(1)=x(-1)$，$y(2)=x(-2)$，等等。同样，$y(-1)=x(1)$，$y(-2)=x(2)$，等等。因此，$y(n)$就仅仅是 $x(n)$关于原点 $n=0$ 的反射或反转。信号 $y(n)=x(-n+2)$就是 $x(-n)$在时间上延迟两个单位，最后的信号如图 2.1.10(c)所示。一种简单验证图 2.1.10(c)结果正确性的方法就是计算样本，比如 $y(0)=x(2)$，$y(1)=x(1)$，$y(2)=x(0)$，$y(-1)=x(3)$，等等。

值得注意的一点是，对信号的反转和延迟(或超前)操作是不可交换的。如果将时间延迟操作表示为 TD，反转操作表示为 FD，那么可以写成

$$\begin{aligned}\mathrm{TD}_k[x(n)] &= x(n-k), \qquad k>0\\ \mathrm{FD}[x(n)] &= x(-n)\end{aligned} \tag{2.1.29}$$

现在，

$$\mathrm{TD}_k\{\mathrm{FD}[x(n)]\}=\mathrm{TD}_k[x(-n)]=x(-n+k) \tag{2.1.30}$$

而

$$\mathrm{FD}\{\mathrm{TD}_k[x(n)]\}=\mathrm{FD}[x(n-k)]=x(-n-k) \tag{2.1.31}$$

注意，因为 $x(n-k)$和 $x(-n+k)$中的符号 n 和 k 是不同的，所以结果是信号 $x(n)$和 $x(-n)$右移了 k 个样本，这对应于时间延迟。

改变自变量的第三种方法是将 n 替换为 μn，其中 μ 是整数。我们把这种时间基的改变视为时间缩放或下采样。

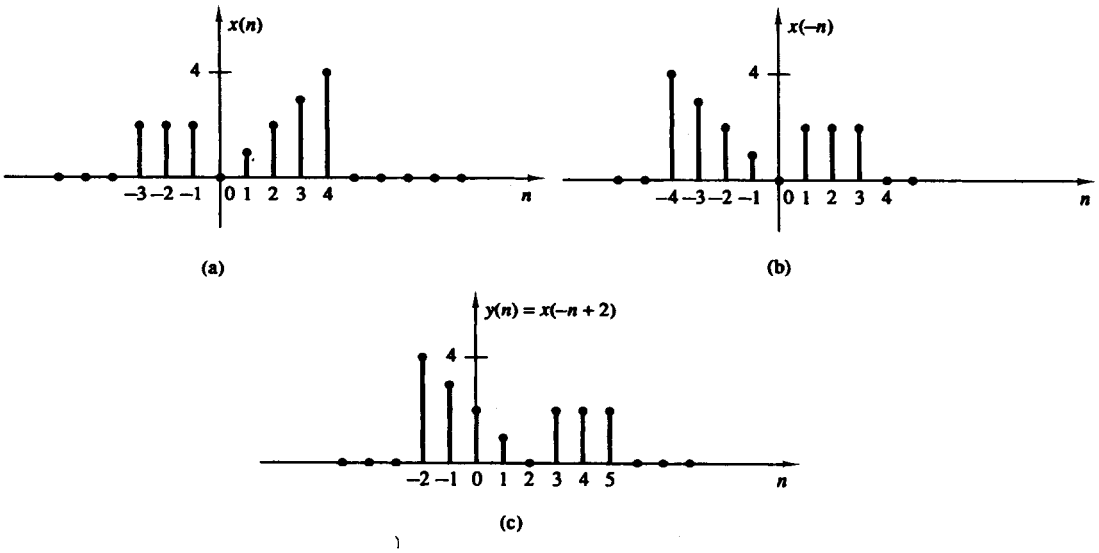


图 2.1.10 反转和移位操作的图形说明

例 2.1.4 画出信号 $y(n)=x(2n)$的图形表示,其中信号 $x(n)$如图 2.1.11(a)所示。

解:我们注意到信号 $y(n)$是由 $x(n)$从 $x(0)$开始取间隔的样本得到的,这样,$y(0)=x(0)$,$y(1)=x(2)$,$y(2)=x(4)$,…,$y(-1)=x(-2)$,$y(-2)=x(-4)$,依次类推。换言之,我们跳过了 $x(n)$中的奇数样本而保留了偶数样本,最后的信号如图 2.1.11(b)所示。

如果信号 $x(n)$原先是通过采样模拟信号 $x_a(t)$得到的,那么 $x(n)=x_a(nT)$,其中 T 是采样间隔。现在 $y(n)=x(2n)=x_a(2Tn)$,因此,例 2.1.4 中描述的时间缩放操作就将采样率由 $1/T$ 变为了 $1/2T$,即,将速率降低了一个因子 2,这称为下采样操作。

序列的加、乘和缩放。对离散时间信号的幅度修改包括加、乘和缩放。

信号的幅度缩放常数 A 是通过对每个信号样本乘以 A 实现的。因此,得出

$$y(n)=Ax(n), \qquad -\infty < n < \infty$$

两个信号 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的和是信号 $y(n)$,它在每个时刻的值就等于这两个信号在该时刻值的和,即,

$$y(n)=x_1(n)+x_2(n), \qquad -\infty < n < \infty$$

两个信号的乘积类似地定义为样本对样本的积,即

$$y(n)=x_1(n)x_2(n), \qquad -\infty < n < \infty$$

2.2 离散时间系统

在许多数字信号处理应用中,我们希望能设计出一个器件或算法,以对离散时间信号执行某些规定的运算,这样的器件或算法称为离散时间系统。具体来说,离散时间系统就是一个器件或算法,它根据某种详细定义的规则,对称为输入或激励的离散时间信号进行运算,以产生称为系统输出或响应的另一个离散时间信号。通常,我们把系统视为对输入信号 $x(n)$进行一种运算或一组运算,以产生输出信号 $y(n)$。我们说,输入信号 $x(n)$被系统转换成信号 $y(n)$,并将 $x(n)$和 $y(n)$的一般关系表示为

$$y(n) \equiv \mathcal{T}[x(n)] \tag{2.2.1}$$

其中，符号$\mathcal{T}$表示系统对 $x(n)$进行的转换(也称为运算)或处理以产生 $y(n)$。图 2.2.1 用图形化方法描述了式(2.2.1)的数学关系。



图 2.2.1　离散时间系统的结构图表示

还有很多方法用来描述系统的特性以及系统为产生 $y(n)$而对 $x(n)$所做的运算。在这一章，我们将介绍系统的时域特性，并从系统的输入-输出描述入手。输入-输出描述关注系统的终端特性，而忽略了系统的详细内部结构或者实现形式。后面在第 9 章中，我们将会讲述离散时间系统的执行过程，并介绍系统实现的不同结构。

2.2.1　系统的输入-输出描述

离散时间系统的输入-输出描述由数学表达式或规则组成，它明确地定义了输入和输出信号的关系(输入-输出关系)。系统的准确内部结构是未知的或者被忽略。因此，与系统交互的唯一方法就是利用它的输入和输出终端(即对用户来说，系统假定为一个黑匣子)。为了反映这个观点，我们使用图 2.2.1 描述的图形表示，以及式(2.2.1)中的一般输入-输出关系式，或者等价的符号

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n) \tag{2.2.2}$$

这仅仅说明 $y(n)$是系统$\mathcal{T}$对激励 $x(n)$的响应。下面的例子说明了几个不同的系统。

例 2.2.1　计算如下系统对输入信号的响应：

$$x(n) = \begin{cases} |n|, & -3 \leqslant n \leqslant 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(a) $y(n) = x(n)$(恒等系统)

(b) $y(n) = x(n-1)$(单位延迟系统)

(c) $y(n) = x(n+1)$(单位超前系统)

(d) $y(n) = 1/3[x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$(滑动平均滤波器)

(e) $y(n) = \text{median}\{x(n+1), x(n), x(n-1)\}$(中值滤波器)

(f) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \cdots$(累加器)

解：首先，明确地计算出输入信号的样本值

$$x(n) = \{\cdots, 0, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, \cdots\}$$

接下来，利用输入-输出关系计算每个系统的输出。

(a) 在这种情况下，输出和输入信号完全一样，这样的系统即是我们熟知的恒等系统。

(b) 这个系统仅仅对输入延迟了一个样本。因此，它的输出为

$$x(n) = \{\cdots, 0, 3, 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 2, 3, 0, \cdots\}$$

(c) 在这种情况下，系统超前输入一个样本。例如，在 $n=0$ 时刻，输出值 $y(0) = x(1)$。系统对于给定输入的响应为

$$x(n)=\{\cdots,0,3,2,1,0,\underset{\uparrow}{1},2,3,0,\cdots\}$$

(d) 这个系统的输出在任何时刻都是当前样本值、最近的过去样本值以及最近的将来样本值的平均。例如,在 $n=0$ 时刻时,输出为

$$y(0)=\frac{1}{3}[x(-1)+x(0)+x(1)]=\frac{1}{3}[1+0+1]=\frac{2}{3}$$

对每个 n 值重复计算,就得到输出信号

$$y(n)=\{\cdots,0,1,\frac{5}{3},2,1,\underset{\uparrow}{\frac{2}{3}},1,2,\frac{5}{3},1,0,\cdots\}$$

(e) 在时刻 n,这个系统选择三个输入样本 $x(n-1)$,$x(n)$和 $x(n+1)$中的中值作为它的输出。因此,该系统对输入信号 $x(n)$的响应为

$$y(n)=\{0,2,2,1,1,\underset{\uparrow}{1},2,2,0,0,0,\cdots\}$$

(f) 这个系统基本上是一个累加器,用来计算在当前时刻以前的所有输入值的连续和,该系统对给定输入的响应为

$$y(n)=\{\cdots,0,3,5,6,\underset{\uparrow}{6},7,9,12,0,\cdots\}$$

我们注意到,例 2.2.1 中所考虑的几个系统,在时刻 $n=n_0$ 的输出不仅依赖于 $n=n_0$ 时刻的输入值,而且还依赖于 $n=n_0$ 前、后的作用到系统的输入值。例如,例题中所考虑的累加器,我们看到在 $n=n_0$ 时刻的输出不仅依赖于 $n=n_0$ 时刻的输入,而且还依赖于 $x(n)$在 $n=n_0-1$,$n=n_0-2$ 以及其后的值。通过简单的代数运算,累加器的输入-输出关系可以写为

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)=\sum_{k=-\infty}^{n-1}x(k)+x(n)\\&=y(n-1)+x(n)\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

它证明了术语"累加"。的确,系统通过将当前的输入值与先前的输出值相加(累加)计算出当前的输出值。

再进一步观察这个看上去非常简单的系统,还可以得到其他一些有趣的结论。假如,给定 $n\geqslant n_0$ 时的输入信号 $x(n)$,我们希望计算该系统在 $n\geqslant n_0$ 时的输出 $y(n)$。对于 $n=n_0,n_0+1,\cdots$,由式(2.2.4)得出

$$y(n_0)=y(n_0-1)+x(n_0)$$

$$y(n_0+1)=y(n_0)+x(n_0+1)$$

以此类推。现在,我们在计算 $y(n_0)$时遇到了问题,这是因为 $y(n_0)$的计算依赖于 $y(n_0-1)$,然而,

$$y(n_0-1)=\sum_{k=-\infty}^{n_0-1}x(k)$$

即,$y(n_0-1)$"概括"了在 n_0 时刻以前已经作用到系统的所有输入对系统所产生的影响。所以,当 $n\geqslant n_0$ 时,系统对作用于 $n=n_0$ 时刻的输入 $x(n)$的响应,结合了该输入以及先前已经作用到系统的所有输入的影响结果。因此,$n\geqslant n_0$ 时的 $y(n)$,并不是由 $n\geqslant n_0$ 时的输入 $x(n)$唯一确定。

求解 $n \geqslant n_0$ 时的 $y(n)$需要的额外信息是初始条件 $y(n_0-1)$,这个值概括了先前输入到系统的所有值的影响。因此,初始条件 $y(n_0-1)$和 $n \geqslant n_0$ 时的输入序列 $x(n)$一起唯一确定了 $n \geqslant n_0$ 时的输出序列 $y(n)$。

如果累加器在 n_0 之前没有激励,那么初始条件 $y(n_0-1)=0$。在这种情况下,我们说该系统为初始弛豫。因为 $y(n_0-1)=0$,所以输出序列 $y(n)$只依赖于 $n \geqslant n_0$ 时的输入序列 $x(n)$。

习惯上,假设每个系统在 $n=-\infty$ 时都是弛豫的。在这种情况下,如果输入 $x(n)$作用于 $n=-\infty$,那么对应的输出 $y(n)$由给定的输入单独唯一确定。

例 2.2.2　式(2.2.30)所描述的累加器被序列 $x(n)=nu(n)$激励,计算在以下条件下的输出:

(a) 初始弛豫,即 $y(-1)=0$。

(b) 初始条件为 $y(-1)=1$。

解:系统的输出序列定义为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)=\sum_{k=-\infty}^{-1}x(k)+\sum_{k=0}^{n}x(k)$$

$$=y(-1)+\sum_{k=0}^{n}x(k)$$

$$=y(-1)+\frac{n(n+1)}{2}$$

(a) 如果系统是初始弛豫,那么 $y(-1)=0$。因此,

$$y(n)=\frac{n(n+1)}{2},\qquad n\geqslant 0$$

(b) 另一方面,如果初始条件为 $y(-1)=1$,那么

$$y(n)=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2},\qquad n\geqslant 0$$

2.2.2　离散时间系统的结构图表示

现在我们介绍一种非常有用的离散时间系统的结构图表示。为此,我们需要定义一些可以相互连接以构建复杂系统的的基本运算单元。

加法器。图 2.2.2 所示的系统(加法器)用于执行两个信号序列相加以构成另一个(和)序列,这个序列表示为 $y(n)$。注意,执行加法并不需要存储任何一个序列。换言之,加法运算无记忆。

常数乘法器。图 2.2.3 描述了这个运算,它的表达式仅仅是对输入 $x(n)$增加了一个缩放因子。注意,该运算同样也是无记忆的。

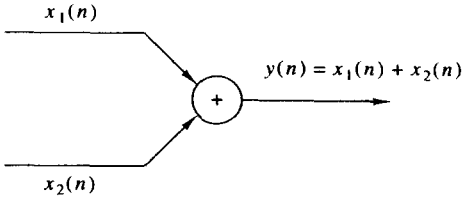


图 2.2.2　加法器的图形表示

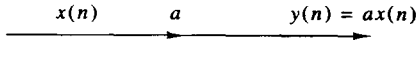


图 2.2.3　常数乘法器的图形表示

信号乘法器。图 2.2.4 示例了两个信号序列相乘构成另一个(积)序列,这个序列在图中表示为 $y(n)$。和先前两种情况一样,可以把乘法运算视为无记忆的。

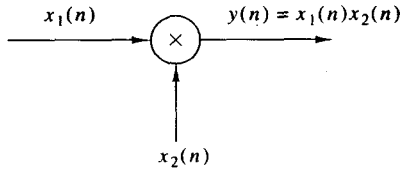


图 2.2.4 信号乘法器的图形表示

单位延迟元件。单位延迟是一个特殊的系统,它仅仅将通过它的信号延迟一个样本。图 2.2.5画出了这样的系统。如果输入信号是 $x(n)$,则输出为 $x(n-1)$。实际上,样本 $x(n-1)$在 $n-1$ 时刻就存储在存储器中,在 n 时刻再从存储器中取出,这样就构成了

$$y(n)=x(n-1)$$

因此,这个基本运算单元是需要存储器的。我们用符号 z^{-1}来表示单位延迟,这在第 3 章讨论 z 变换时,将经常看到。

单位超前元件。与单位延迟不同,单位超前元件将输入 $x(n)$在时间上向前移动一个样本以生成 $x(n+1)$。图 2.2.6 表示了这个运算,其中运算符 z 用来表示单位超前。我们注意到,任何这样的超前元件在实时中是物理上不可实现的,这是因为实际上要观察信号的未来。另一方面,如果把信号存储在计算机的存储器内,那么就可以在任意时间调出任何样本。在这样的非实时应用中,就有可能在时间上超前信号 $x(n)$。

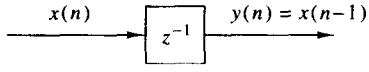


图 2.2.5 单位延迟元件的图形表示

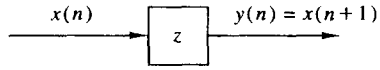


图 2.2.6 单位延迟元件的图形表示

例 2.2.3 利用上面介绍的基本运算单元,画出离散时间系统的结构图表示,已知它的输入-输出关系为

$$y(n)=\frac{1}{4}y(n-1)+\frac{1}{2}x(n)+\frac{1}{2}x(n-1) \tag{2.2.5}$$

其中,$x(n)$是输入,$y(n)$是系统的输出。

解:根据式(2.2.5),通过将输入 $x(n)$乘以 0.5,先前的输入 $x(n-1)$乘以 0.5,将两个乘积相加,然后再加上先前输出 $y(n-1)$的 1/4,就得到了输出 $y(n)$。图 2.2.7(a)画出了该系统的实现结构图。对式(2.2.5)做简单的重新排列,即

$$y(n)=\frac{1}{4}y(n-1)+\frac{1}{2}[x(n)+x(n-1)] \tag{2.2.6}$$

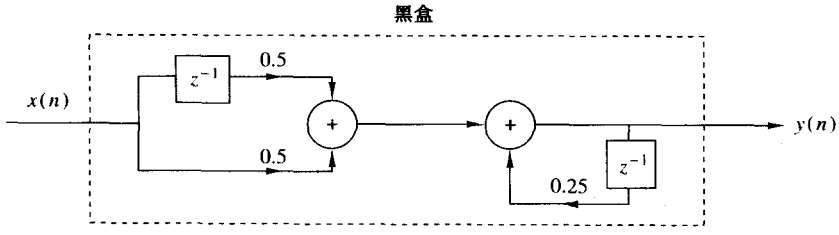
便可得出图 2.2.7(b)所示的实现结构图。注意,如果从输入-输出或者外部描述的"观点"来看待"系统",那么我们并不关心系统是如何实现的。另一方面,如果采用系统的内部描述,那么我们就可以准确地了解系统的基本运算单元是如何配置的。就这样的实现形式,我们可以看到,如果系统中存在的所有延迟器在 $n=n_0$ 时的值为零(即所有存储器置为零),那么这个系统在 $n=n_0$ 时就是弛豫的。

2.2.3 离散时间系统的分类

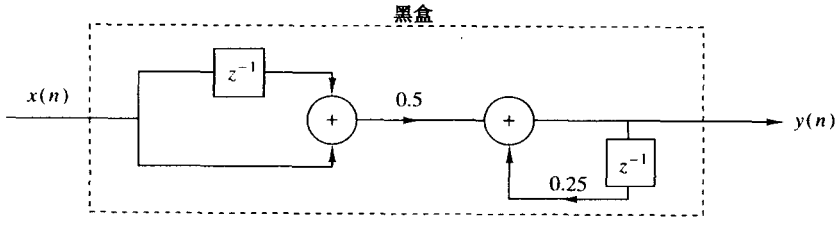
在分析以及设计系统时,需要根据系统满足的特性对它们进行分类。实际上,在这一章以及接下来的章节中所介绍的用于分析和设计离散时间系统的数学方法很大程度上依赖于所要考虑系统的一般特性。基于这个原因,我们有必要介绍用来描述系统一般特性的许多性质和分类。

有一点需要强调,一个系统若具有特定的性质,那么这个性质对所有可能的输入信号都必须满足。如果一个性质只对某些输入而不是其他的信号满足,那么该系统就不具有这个性质。因此,一个反例就足够证明一个系统不具有某种性质。然而,为了证明系统具有某个性质,必须证明这个性质对所有可能的输入信号都满足。

静态系统与动态系统。如果一个离散时间系统在任意时刻 n 的输出至多依赖于同一时刻的输入样本，而与过去或者将来的输入样本无关，那么该系统就称为静态的或者无记忆的。对于其他任何情况，则该系统称为动态的或者有记忆的。如果系统在时刻 n 的输出完全由区间 $n-N$ $(N\geqslant 0)$到 n 内的输入样本确定，那么该系统称为具有长为 N 的存储。如果 $N=0$，那么系统是静态的。如果 $0<N<\infty$，那么系统称为有限存储。但是，如果 $N=\infty$，那么系统称为无限存储。



(a)



(b)

图 2.2.7　系统 $y(n)=0.25y(n-1)+0.5x(n)+0.5x(n-1)$的实现结构图

由以下输入-输出方程

$$y(n)=ax(n) \tag{2.2.7}$$

$$y(n)=nx(n)+bx^3(n) \tag{2.2.8}$$

所描述的系统都是静态的或者无记忆的。注意，在计算当前输出时，无须存储任何过去的输入或输出值。另一方面，由以下输入-输出关系

$$y(n)=x(n)+3x(n-1) \tag{2.2.9}$$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}x(n-k) \tag{2.2.10}$$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}x(n-k) \tag{2.2.11}$$

所描述的系统是动态系统或者是具有存储器的系统。式(2.2.9)和式(2.2.10)描述的系统具有有限存储，而式(2.2.11)描述的系统具有无限存储。

我们注意到，静态或者无记忆系统通常由形式为

$$y(n)=\mathcal{T}[x(n),n] \tag{2.2.12}$$

的输入-输出方程来描述，这里并不包括延迟元件(存储器)。

时不变系统与时变系统。我们可以把一般的系统类别再分为两大类：时不变系统和时变系

统。如果系统的输入-输出特性不随着时间变化,那么该系统称为时不变系统。为了详细说明这一点,假设有一个弛豫系统$\mathcal{T}$,当它被输入信号 $x(n)$激励时,产生输出信号 $y(n)$。因此,可以写为

$$y(n)=\mathcal{T}[x(n)] \tag{2.2.13}$$

现在假设同样的输入信号在时间上延迟了 k 个单位产生 $x(n-k)$,并且再次作用到同一系统。如果系统的特性不随着时间变化,那么该弛豫系统的输出就是 $y(n-k)$,即系统的输出与对 $x(n)$的响应相同,只是在时间上延迟了 k 个单位,这与输入的延迟相同。这样,我们就可以定义如下的时不变或者平移不变系统。

定义。一个弛豫系统$\mathcal{T}$是时不变或者平移不变系统,当且仅当

$$x(n)\xrightarrow{\mathcal{T}}y(n)$$

这意味着,对任何输入信号 $x(n)$和任意时间平移量 k,

$$x(n-k)\xrightarrow{\mathcal{T}}y(n-k) \tag{2.2.14}$$

为了确定一个给定系统是否为时不变系统,需要进行前面定义所指定的测试。基本方法是,用一个任意的输入序列 $x(n)$激励系统,产生一个输出序列,记为 $y(n)$。下一步,将输入序列延迟一定数量 k 并重新计算输出。通常,输出可以写为

$$y(n,k)=\mathcal{T}[x(n-k)]$$

现在,如果对于所有可能的 k 值,输出 $y(n,k)=y(n-k)$,那么该系统就是时不变的。另一方面,如果即使只对一个 k 值,输出 $y(n,k)\neq y(n-k)$,那么该系统就是时变的。

例 2.2.4 确定图 2.2.8 所示的系统是时不变的还是时变的。

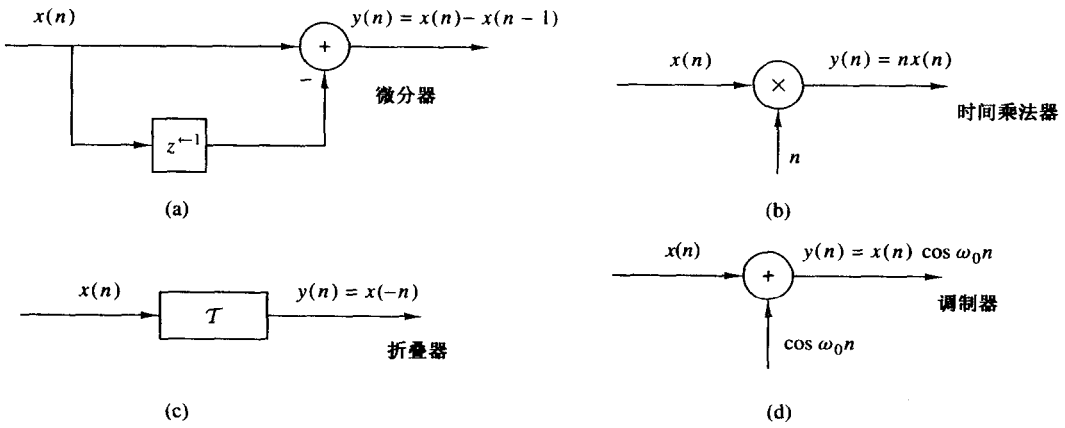


图 2.2.8 (a)时不变系统及(b)~(d)时变系统的实例

解:

(a) 这个系统的输入-输出方程为

$$y(n)=\mathcal{T}[x(n)]=x(n)-x(n-1) \tag{2.2.15}$$

现在,如果输入在时间上延迟了 k 个单位,并将它作用到系统,那么从结构图很明显可以看出该系统的输出为

$$y(n,k)=x(n-k)-x(n-k-1) \tag{2.2.16}$$

另一方面,从式(2.2.14)可以看出,如果将 $y(n)$在时间上延迟 k 个单位,那么就有

$$y(n-k)=x(n-k)-x(n-k-1) \tag{2.2.17}$$

因为式(2.2.16)和式(2.2.17)的右边是相同的，所以满足 $y(n,k)=y(n-k)$。因此，该系统是时不变的。

(b) 这个系统的输入-输出方程为

$$y(n)=\mathcal{T}[x(n)]=nx(n) \tag{2.2.18}$$

该系统对 $x(n-k)$的响应为

$$y(n,k)=nx(n-k) \tag{2.2.19}$$

现在，如果将式(2.2.18)中的 $y(n)$延迟 k 个单位，那么就得到

$$\begin{aligned} y(n-k)&=(n-k)x(n-k)\\ &=nx(n-k)-kx(n-k)\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

因为 $y(n,k)\neq y(n-k)$，所以该系统是时变的。

(c) 这个系统的输入-输出关系为

$$y(n)=\mathcal{T}[x(n)]=x(-n) \tag{2.2.21}$$

该系统对 $x(n-k)$的响应为

$$y(n,k)=\mathcal{T}[x(n-k)]=x(-n-k) \tag{2.2.22}$$

现在，如果将式(2.2.21)中的输出 $y(n)$延迟 k 个单位，那么得到的结果为

$$y(n-k)=x(-n+k) \tag{2.2.23}$$

因为 $y(n,k)\neq y(n-k)$，所以该系统是时变的。

(d) 这个系统的输入-输出方程为

$$y(n)=x(n)\cos\omega_0 n \tag{2.2.24}$$

该系统对 $x(n-k)$的响应为

$$y(n,k)=x(n-k)\cos\omega_0 n \tag{2.2.25}$$

如果式(2.2.24)中的表达式延迟 k 个单位，那么与式(2.2.25)相比，很明显该系统是时变的。

线性系统与非线性系统。一般的系统类别还可再分为线性系统和非线性系统。满足叠加性的系统就是线性系统。简单说明一下，叠加性要求系统对信号加权和的响应等于系统对每个独立输入信号对应的响应(输出)的加权和。因此，得到以下的线性定义。

定义。一个系统是线性的，当且仅当对任意输入序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$，以及任意常数 a_1 和 a_2，图 2.2.9 给出了叠加性的图示说明。

$$\mathcal{T}[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1\mathcal{T}[x_1(n)]+a_2\mathcal{T}[x_2(n)] \tag{2.2.26}$$

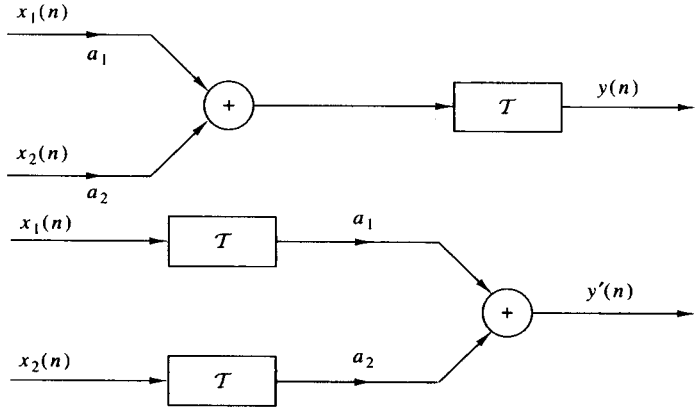


图 2.2.9　叠加性的图形表示，当且仅当 $y(n)=y'(n)$时$\mathcal{T}$为线性

关系式(2.2.26)表现的叠加性可以分成两部分。第一,假设 $a_2=0$,那么式(2.2.26)简化为

$$\mathcal{T}[a_1x_1(n)]=a_1\mathcal{T}[x_1(n)]=a_1y_1(n) \tag{2.2.27}$$

其中,

$$y_1(n)=\mathcal{T}[x_1(n)]$$

关系式(2.2.27)展示了线性系统的乘法或者缩放特性。即,如果系统对输入 $x_1(n)$的响应为 $y_1(n)$,那么系统对 $a_1x_1(n)$的响应就仅仅是 $a_1y_1(n)$。因此,对输入的任意缩放会导致相应输出的等同缩放。

第二,假设在式(2.2.26)中有 $a_1=a_2=1$,那么

$$\begin{aligned}\mathcal{T}[x_1(n)+x_2(n)]&=\mathcal{T}[x_1(n)]+\mathcal{T}[x_1(n)]\\&=y_1(n)+y_2(n)\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

这个关系式展示了线性系统的可加性。可加性和乘法性组成了适用于线性系统的叠加性。

式(2.2.26)所包含的线性条件,通过归纳,可以扩展到信号的任意加权组合。通常,可以得到

$$x(n)=\sum_{k=1}^{M-1}a_kx_k(n)\xrightarrow{\mathcal{T}}y(n)=\sum_{k=1}^{M-1}a_ky_k(n) \tag{2.2.29}$$

其中,

$$y_k(n)=\mathcal{T}[x_k(n)],\qquad k=1,2,\cdots,M-1 \tag{2.2.30}$$

从式(2.2.27)可以看到,如果 $a_1=0$,那么 $y(n)=0$。换言之,一个弛豫线性系统,零输入产生零输出。如果零输入产生非零输出,那么该系统可能是非弛豫的或者是非线性的。如果一个弛豫系统不满足定义所给出的叠加性,那么它就称为非线性的。

例 2.2.5 判断以下输入-输出方程所描述的系统是线性的还是非线性的。

(a) $y(n)=nx(n)$

(b) $y(n)=x(n^2)$

(c) $y(n)=x^2(n)$

(d) $y(n)=Ax(n)+B$

(e) $y(n)=e^{x(n)}$

解:(a) 对两个输入序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$,对应的输出为

$$\begin{aligned}y_1(n)&=nx_1(n)\\y_2(n)&=nx_2(n)\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

两个输入序列的线性组合产生的输出为

$$\begin{aligned}y_3(n)&=\mathcal{T}[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=n[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]\\&=a_1nx_1(n)+a_2nx_2(n)\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

另一方面,式(2.2.31)中的两个输出的线性组合产生的输出为

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=a_1nx_1(n)+a_2nx_2(n) \tag{2.2.33}$$

因为式(2.2.32)和式(2.2.33)的右边是相同的,所以该系统是线性的。

(b) 和(a)部分一样,计算出系统对两个独立的输入信号 $x_1(n)$和 $x_2(n)$响应,结果为

$$\begin{aligned}y_1(n)&=x_1(n^2)\\y_2(n)&=x_2(n^2)\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

系统对 $x_1(n)$和 $x_2(n)$线性组合的输出为

$$y_3(n)=\mathcal{T}[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1x_1(n^2)+a_2x_2(n^2) \tag{2.2.35}$$

最后，式(2.2.34)中两个输出的线性组合得到

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=a_1x_1(n^2)+a_2x_2(n^2) \tag{2.2.36}$$

通过比较式(2.2.35)和式(2.2.36)，得出结论：该系统是线性的。

(c) 系统的输出是输入的平方(具有这样输入-输出特性的电子设备称为平方律设备)。根据我们先前的讨论，很明显这样的系统是无记忆的。现在我们证明该系统是非线性的。

系统对两个独立的输入信号的响应为

$$\begin{aligned}y_1(n)&=x_1^2(n)\\ y_2(n)&=x_2^2(n)\end{aligned} \tag{2.2.37}$$

系统对这两个输入信号线性组合的响应为

$$\begin{aligned}y_3(n)&=\mathcal{T}[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]\\ &=[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]^2\\ &=a_1^2x_1^2(n)+2a_1a_2x_1(n)x_2(n)+a_2^2x_2^2(n)\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

另一方面，如果系统是线性的，那么它将产生式(2.2.37)中两个输出的线性组合，即

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=a_1x_1^2(n)+a_2x_2^2(n) \tag{2.2.39}$$

因为式(2.2.38)所给出的系统的实际输出不等于式(2.2.39)，所以该系统是非线性的。

(d) 假设这个系统分别被 $x_1(n)$和 $x_2(n)$激励，那么就会得到相应的输出为

$$\begin{aligned}y_1(n)&=Ax_1(n)+B\\ y_2(n)&=Ax_2(n)+B\end{aligned} \tag{2.2.40}$$

$x_1(n)$和 $x_2(n)$的线性组合产生的输出为

$$\begin{aligned}y_3(n)&=\mathcal{T}[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]\\ &=A[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]+B\\ &=Aa_1x_1(n)+a_2Ax_2(n)+B\end{aligned} \tag{2.2.41}$$

另一方面，如果系统是线性的，那么它对 $x_1(n)$和 $x_2(n)$线性组合的输出应该是 $y_1(n)$和 $y_2(n)$的线性组合，即

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=a_1Ax_1(n)+a_1B+a_2Ax_2(n)+a_2B \tag{2.2.42}$$

很明显，式(2.2.41)和式(2.2.42)是不同的，因此，该系统不满足线性测试。

该系统不满足线性测试的原因不是系统是非线性的(实际上，该系统是由线性方程描述的)，而是存在常数 B。所以，输出不但依赖于输入激励，而且还依赖于参数 $B\neq0$。因此，对于 $B\neq0$，系统不是弛豫的。如果令 $B=0$，那么系统现在就是弛豫的并且满足线性测试。

(e) 注意，由输入-输出方程

$$y(n)=e^{x(n)} \tag{2.2.43}$$

所描述的系统是弛豫的。如果 $x(n)=0$，那么可以看出 $y(n)=1$。这表明了系统是非线性的。实际上，应用线性测试也能得到相同的结论。

因果系统与非因果系统。我们先从因果离散时间系统的定义开始。

定义。如果一个系统在任意时刻 n 的输出[即 $y(n)$]仅依赖于当前和过去的输入[即 $x(n)$，$x(n-1)$，$x(n-2)$，…]，而与将来的输入[即 $x(n+1)$，$x(n+2)$，…]无关，那么这个系统就称为是因果的。以数学的形式，因果系统的输出应该满足如下形式的方程：

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \cdots] \tag{2.2.44}$$

其中,$F[\cdot]$是某个任意函数。

如果一个系统不满足这个定义,那么它就称为是非因果的。这样系统的输出不但依赖于当前和过去的输入,而且还依赖于将来的输入。

很明显,在实时信号处理应用中,我们无法观察到信号的将来值,因此,非因果系统是物理上不可实现的(即,不可能被执行)。另一方面,如果信号已被记录以便可以脱机处理,那么就有可能实现非因果系统,这是因为信号的所有值在处理过程中都是可用的,这在地球物理信号和图像处理中是常有的情况。

例 2.2.6 判断由下列输入-输出方程描述的系统是因果的还是非因果的。

(a) $y(n) = x(n) - x(n-1)$

(b) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n}$

(c) $y(n) = ax(n)$

(d) $y(n) = x(n) + 3x(n+4)$

(e) $y(n) = x(n^2)$

(f) $y(n) = x(2n)$

(g) $y(n) = x(-n)$

解:(a),(b)和(c)部分所描述的系统很明显是因果的,因为它们的输出只依赖于当前和过去的输入。另一方面,(d),(e)和(f)部分的系统很明显是非因果的,因为它们的输出依赖于输入的将来值。(g)部分的系统也是非因果的,我们注意到,例如,当选择 $n = -1$ 时,得到的输出为 $y(-1) = x(1)$。因此,在 $n = -1$ 时的输出依赖于 $n = 1$ 时的输入,在时间上这是将来两个单位后的值。

稳定系统与不稳定系统。稳定是系统的一个重要属性,在实际应用中必须要考虑。不稳定的系统常常显示出不规律的、极端的特性,并且在实际执行时会产生溢出。这里,我们从数学上定义稳定系统。在后面的 2.3.6 节中,我们将把这个定义的含义应用到线性时不变系统中。

定义。一个任意的弛豫系统称为有界输入-有界输出(BIBO)稳定,当且仅当每个有界输入产生有界的输出。

输入序列 $x(n)$和输出序列 $y(n)$有界的条件转换到数学上,就是意味着存在某些有限数,比如说 M_x 和 M_y,并且对所有的 n,使得,

$$|x(n)| \leqslant M_x < \infty, \qquad |y(n)| \leqslant M_y < \infty \tag{2.2.45}$$

如果对某些有界输入序列 $x(n)$,输出是无界(无限)的,那么该系统归为不稳定系统。

例 2.2.7 已知一个非线性系统,它的输入-输出方程为

$$y(n) = y^2(n-1) + x(n)$$

选择有界信号

$$x(n) = C\delta(n)$$

作为输入序列,其中 C 是常数。同时假设 $y(-1) = 0$。于是输出序列为

$$y(0) = C, \quad y(1) = C^2, \quad y(2) = C^4, \quad \cdots, \quad y(n) = C^{2n}$$

很明显,当 $1 < |C| < \infty$ 时,输出是无界的。因此,系统是 BIBO 不稳定的,这是因为有界的输入得出无界的输出。

2.2.4 离散时间系统的互连

离散时间系统可以相互连接以构建更大的系统。系统有两种基本的互连方法:级联(串联)或者并联。这些互连如图 2.2.10 所示。注意,这两个互连的系统是不同的。

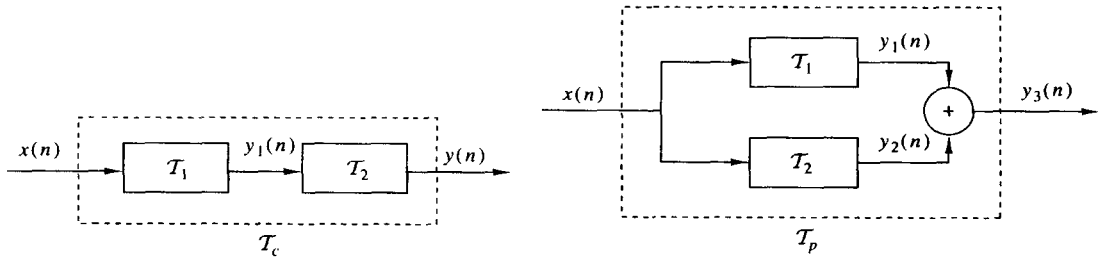


图 2.2.10　系统的(a)级联和(b)并联

在级联中,第一个系统的输出为

$$y_1(n) = \mathcal{T}_1[x(n)] \tag{2.2.46}$$

第二个系统的输出为

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{T}_2[y_1(n)] \\ &= \mathcal{T}_2\{\mathcal{T}_1[x(n)]\} \end{aligned} \tag{2.2.47}$$

我们看到系统$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$可以结合或合并成一个单一的总系统

$$\mathcal{T}_c \equiv \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 \tag{2.2.48}$$

因此,可以将合并后的系统的输出表示为

$$y(n) = \mathcal{T}_c[x(n)]$$

通常,要进行的运算$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$的次序是非常重要的,即对任意的系统,

$$\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$$

然而,如果系统$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$是线性时不变的,那么(a)$\mathcal{T}_c$是时不变的,(b)并且$\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$,即系统处理信号的次序并不重要,$\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$产生相同的输出序列。

下面证明结论(a),结论(b)的证明将在 2.3.4 节中给出。为了证明时不变性,假设$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$是时不变的,那么

$$x(n-k) \xrightarrow{\mathcal{T}_1} y_1(n-k)$$

并且

$$y_1(n-k) \xrightarrow{\mathcal{T}_2} y(n-k)$$

因此,

$$x(n-k) \xrightarrow{\mathcal{T}_c=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1} y(n-k)$$

从而$\mathcal{T}_c$是时不变的。

在并联中,系统$\mathcal{T}_1$的输出是$y_1(n)$,系统$\mathcal{T}_2$的输出是$y_2(n)$。因此,整个并联的输出为

$$\begin{aligned} y_3(n) &= y_1(n) + y_2(n) \\ &= \mathcal{T}_1[x(n)] + \mathcal{T}_2[x(n)] \\ &= (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)[x(n)] \\ &= \mathcal{T}_p[x(n)] \end{aligned}$$

其中,$\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$。

通常,我们可以利用系统的并联和级联来构建更大、更复杂的系统。反过来,为了系统的分析和实现,我们可以把一个大的系统分成若干较小的子系统。在后面,我们将利用这些思想来设计和实现各种数字滤波器。

2.3 离散时间线性时不变系统的分析

在2.2节中,我们依据许多特性或者范畴对系统进行了分类,即线性、因果、稳定和时不变。有了这样的分类,现在我们就可集中分析一类重要的线性时不变(LTI)系统。特别地,我们将会说明这样系统的时域特征是通过它们对单位采样序列的响应来进行描述的。我们还会说明,任意输入信号都可以分解并表示为单位采样序列的加权和。因此,由于系统的线性时不变性,系统对任意输入信号的响应可以表示为单位采样响应的形式。将系统的单位采样响应、任意的输入信号与输出信号关联起来的一般表达形式,称为卷积和或者卷积公式,我们也将推导这个公式。因此,我们就可以计算线性时不变系统对任意输入信号的输出。

2.3.1 线性系统的分析方法

有两种分析线性系统对给定输入信号反应或者响应的方法。一种是基于系统输入-输出方程的直接求解方法,通常,输入-输出方程的形式为

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \cdots, y(n-N), x(n), x(n-1), \cdots, x(n-M)]$$

其中,$F[\cdot]$在方括号内表示各个量的某些函数。特别地,对LTI系统,在后面我们将看到,它的输入-输出关系的一般形式为

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{2.3.1}$$

其中,$\{a_k\}$和$\{b_k\}$是确定系统的常数参数,与$x(n)$和$y(n)$无关。输入-输出关系式(2.3.1)称为差分方程,这表明差分方程是描述离散时间LTI系统特性的一种方法。在2.4节中,我们将对式(2.3.1)进行求解。

第二种分析线性系统对给定输入信号响应的方法是,首先将输入信号分解成基本信号的和。基本信号的选择,要使得系统对每个信号分量的响应易于求解。然后,利用系统的线性特性,将系统对基本信号的响应相加就得到了系统对给定输入信号的总响应。第二种方法即是本节将讲述的方法。

为了详细说明,假设输入信号$x(n)$分解为基本信号分量$\{x_k(n)\}$的加权和,使得

$$x(n) = \sum_k c_k x_k(n) \tag{2.3.2}$$

其中,$\{c_k\}$是信号$x(n)$分解后的一组幅度(权系数)。现在,假设系统对基本信号分量$x_k(n)$的响应为$y_k(n)$,从而

$$y_k(n) \equiv \mathcal{T}[x_k(n)] \tag{2.3.3}$$

假设系统是弛豫的,由于线性系统的缩放特性,于是系统对$c_k x_k(n)$的响应为$c_k y_k(n)$。

最后,系统对输入$x(n)$的总响应为

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{T}[x(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_k c_k x_k(n)\right] \\ &= \sum_k c_k \mathcal{T}[x_k(n)] \end{aligned}$$

$$= \sum_k c_k y_k(n) \tag{2.3.4}$$

在式(2.3.4)中,我们利用了线性系统的可加性。

虽然在很大程度上,基本信号的选择似乎是任意的,但是我们的选择主要依靠的是对想要求解的输入信号的分类。如果对输入信号的特性不做限制,那么将输入信号分解为单位采样(冲激)序列的加权和可以证明是运算方便且十分普遍的。另一方面,如果我们的讨论限制在输入信号的一个子集上,那么或许存在其他的基本信号集,使得求解输出的运算更加方便。例如,如果输入信号 $x(n)$是周期为 N 的周期信号,在 1.3.3 节我们已经看到,运算方便的基本信号集是指数信号

$$x_k(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k n}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{2.3.5}$$

其中,频率$\{\omega_k\}$是谐波相关的,即

$$\omega_k = \left(\frac{2\pi}{N}\right)k, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{2.3.6}$$

频率 $2\pi/N$ 称为基本频率,所有高频分量都是基频分量的倍数。这一子集的输入信号在后面将进行更详细的讨论。

为了将输入信号分解成单位采样序列的加权和,我们必须首先求解系统对单位采样序列的响应,然后利用线性系统的缩放和乘法特性来求解对于给定的任意输入信号的输出公式。下面将详细讲述这种方法。

2.3.2　离散时间信号分解为冲激信号

假设对于任意的输入信号 $x(n)$,我们希望将它分解成单位采样序列的和。为了能够利用前一节建立的符号,选择基本信号 $x_k(n)$为

$$x_k(n) = \delta(n-k) \tag{2.3.7}$$

其中,k 表示单位采样序列的延迟。为了处理具有无限长非零值的任意信号 $x(n)$,该组的单位冲激也必须是无限的,以构成无限数量的延迟。

现在假设将两个序列 $x(n)$和 $\delta(n-k)$相乘,因为 $\delta(n-k)$除了在 $n=k$ 处的值为单位 1 外,其他处的值为零,所以乘法的结果是另外一个序列,它除了在 $n=k$ 处的值为 $x(k)$外,其他处的值为零,正如图 2.3.1 所示。因此,

$$x(n)\delta(n-k) = x(k)\delta(n-k) \tag{2.3.8}$$

是一个序列,它除了在 $n=k$ 处的值为$x(k)$外,其他处的值为零。如果重复计算 $x(n)$和 $\delta(n-m)$的乘积,其中 m 是另一个延迟量($m \neq k$),那么这个结果也是一个序列,它除了在 $n=m$ 处的值为 $x(m)$外,其他处的值为零。因此,

$$x(n)\delta(n-m) = x(m)\delta(n-m) \tag{2.3.9}$$

换言之,信号 $x(n)$和单位冲激在某个延迟 k[即 $\delta(n-k)$]处的每个乘积,其实就是取信号 $x(n)$在单位冲激的非零处的延迟值 $x(k)$。因此,如果要重复计算所有可能延迟 k 的乘积,$-\infty < k < \infty$,并将所有序列相加,那么结果也是一个等于 $x(n)$的序列,即

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{2.3.10}$$

需要强调的是,式(2.3.10)的右边是许多缩放了的单位采样序列的和,其中单位采样序列 $\delta(n-k)$的幅度值为 $x(k)$。因此,式(2.3.10)的右边给出了任意信号 $x(n)$分解成单位采样序列的加权(缩放)和的形式。

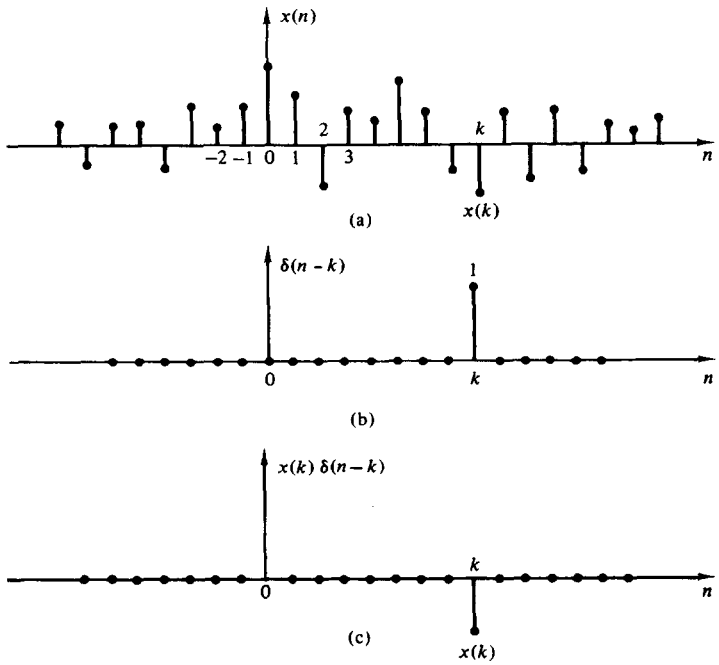


图 2.3.1 信号 $x(n)$和移位的单位采样序列的乘积

例 2.3.1 已知一个有限长序列的特殊情况为

$$x(n)=\{2,\underset{\uparrow}{4},0,3\}$$

将序列 $x(n)$分解成加权冲激序列的和。

解:因为 $x(n)$在 $n=-1,0,2$ 时刻的值为非零,所以需要三个延迟在 $k=-1,0,2$ 处的冲激。由式(2.3.10)得到

$$x(n)=2\delta(n+1)+4\delta(n)+3\delta(n-2)$$

2.3.3 LTI 系统对任意输入的响应:卷积和

将任意的输入信号 $x(n)$分解成冲激的加权和后,就可以计算任何弛豫系统对任意输入信号的响应。首先,用特殊的符号 $h(n,k)$表示系统对输入单位采样序列在 $n=k$ 处的响应 $y(n,k)$,$-\infty<k<\infty$,即

$$y(n,k)\equiv h(n,k)=\mathcal{T}[\delta(n-k)] \tag{2.3.11}$$

在式(2.3.11)中,我们注意到,n 是时间变量,k 是显示了输入冲激位置的参数。如果在输入端的冲激缩放了一个量 $c_k\equiv x(k)$,那么系统的响应也是相应缩放了的输出,即

$$c_k h(n,k)=x(k)h(n,k) \tag{2.3.12}$$

最后,如果输入是表示成加权冲激和的任意信号 $x(n)$,即

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k) \tag{2.3.13}$$

那么系统对 $x(n)$的响应也是相应加权输出的和,即

$$y(n)=\mathcal{T}[x(n)]=\mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)\right]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\mathcal{T}[\delta(n-k)] \tag{2.3.14}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n,k)$$

很明显，式(2.3.14)是由线性系统的叠加性得出的，也就是我们熟知的叠加求和。

我们注意到，式(2.3.14)是线性系统对任意输入序列 $x(n)$ 的响应表达式，这个表达式既是 $x(n)$ 的函数，也是系统对单位冲激 $\delta(n-k)$ 的响应 $h(n,k)$ 的函数，$-\infty<k<\infty$。在推导式(2.3.14)时，我们利用了系统的线性特性而不是它的时不变特性。因此，表达式(2.3.14)可以应用到任何弛豫线性(时变)系统。

另外，如果系统是时不变的，那么式(2.3.14)就可以大大简化。实际上，如果 LTI 系统对单位采样序列 $\delta(n)$ 的响应表示为 $h(n)$，即

$$h(n)\equiv\mathcal{T}[\delta(n)] \tag{2.3.15}$$

那么根据时不变特性，系统对延迟的单位采样序列 $\delta(n-k)$ 的响应为

$$h(n-k)=\mathcal{T}[\delta(n-k)] \tag{2.3.16}$$

因此，式(2.3.14)简化为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k) \tag{2.3.17}$$

现在我们看到，弛豫 LTI 系统的特性完全可以由单一函数 $h(n)$[即它对单位采样序列 $\delta(n)$ 的响应]进行描述。相反，时变线性系统的一般输出特性需要无限数量的单位采样响应函数 $h(n,k)$ 进行描述，其中的一些可能会延迟。

式(2.3.17)以输入信号 $x(n)$ 和单位采样(冲激)响应 $h(n)$ 函数的形式给出了 LTI 系统的响应 $y(n)$，这称为卷积和。我们说，输入 $x(n)$ 与冲激响应 $h(n)$ 的卷积产生输出 $y(n)$。现在，我们用数学和图形方法来解释给定输入 $x(n)$ 和系统冲激响应 $h(n)$ 计算响应 $y(n)$ 的过程。

假设我们想计算系统在某时刻的输出值，比如说 $n=n_0$。根据式(2.3.17)，在 $n=n_0$ 时刻的响应为

$$y(n_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n_0-k) \tag{2.3.18}$$

我们首先看到，求和变量为 k，所以输入信号 $x(k)$ 和冲激响应 $h(n_0-k)$ 都是 k 的函数。其次我们看到，序列 $x(k)$ 和 $h(n_0-k)$ 乘在一起构成乘积序列。输出 $y(n_0)$ 仅仅是乘积序列所有值的和。序列 $h(n_0-k)$ 是由 $h(k)$ 得到的，首先将 $h(k)$ 关于 $k=0$(时间原点)进行反转，得到序列 $h(-k)$；然后将反转序列移位 n_0 得到 $h(n_0-k)$。总之，计算 $x(k)$ 和 $h(k)$ 卷积的过程包括下列四个步骤：

1. **反转**。将 $h(k)$ 关于 $k=0$ 反转得到 $h(-k)$。
2. **移位**。如果 n_0 是正数(负数)，那么将 $h(-k)$ 右(左)移 n_0，得到 $h(n_0-k)$。

3. **乘积**。将 $x(k)$乘以 $h(n_0-k)$得到乘积序列 $v_{n_0}(k)\equiv x(k)h(n_0-k)$。

4. **求和**。将乘积序列 $v_{n_0}(k)$的所有值加在一起就得到在 $n=n_0$ 时刻的输出值。

我们注意到,这个步骤得到的只是在某个单一时刻(比如说 $n=n_0$)的系统响应。通常,我们感兴趣的是计算系统响应在所有时刻的值,$-\infty<n<\infty$。因此,在求和时,对所有可能的时间移位 $-\infty<n<\infty$,都要重复步骤2到步骤4。

为了更好地理解计算卷积和的步骤,我们将用图形方法演示计算过程。图形有助于我们解释计算卷积和时的四个步骤。

例 2.3.2 一个线性时不变系统的冲激响应为

$$h(n)=\{1,\underset{\uparrow}{2},1,-1\} \tag{2.3.19}$$

计算系统对输入信号

$$x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,1\} \tag{2.3.20}$$

的响应。

解:我们将根据式(2.3.17)计算卷积,但是在计算过程中,我们用序列的图形作为辅助。图 2.3.2(a)画出了输入信号序列 $x(k)$以及系统的冲激响应 $h(k)$,为了与式(2.3.17)一致,用 k 作为时间变量。

计算卷积和的第一步是反转 $h(k)$。反转序列 $h(-k)$如图 2.3.2(b)所示。根据式(2.3.17),现在可以计算在 $n=0$ 时的输出,即

$$y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(-k) \tag{2.3.21}$$

因为位移量 $n=0$,所以我们直接利用 $h(-k)$而无须移位。乘积序列

$$v_0(k)\equiv x(k)h(-k) \tag{2.3.22}$$

也如图 2.3.2(b)所示。最后,乘积序列的所有项相加得到

$$y(0)=\sum h=-\infty v_0(k)=4$$

继续计算系统在 $n=1$ 时的响应,根据式(2.3.17)有

$$y(1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(1-k) \tag{2.3.23}$$

序列 $h(1-k)$仅仅是反转序列 $h(-k)$在时间上右移一个单位,该序列如图 2.3.2(c)所示。乘积序列

$$v_1(k)=x(k)h(1-k) \tag{2.3.24}$$

也如图 2.3.2(c)所示。最后,乘积序列的所有值相加得到

$$y(1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}v_1(k)=8$$

以类似的方式,通过将 $h(-k)$右移两个单位,并形成乘积序列 $v_2(k)=x(k)h(2-k)$,然后将乘积序列的所有项相加就得出 $y(2)=8$。通过将 $h(-k)$再右移一位,乘以相应的序列,并将乘积序列的所有值相加,就得到 $y(3)=3,y(4)=-2,y(5)=-1$。对于 $n>5$,我们发现 $y(n)=0$,这是因为乘积序列包含的值全为零。因此,我们就已经得出了 $n>0$ 的响应 $y(n)$。

下一步,我们希望计算 $n<0$ 时的 $y(n)$值。我们从 $n=-1$ 开始。于是,

$$y(-1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(-1-k) \tag{2.3.25}$$

现在，序列 $h(-1-k)$仅仅是反转序列 $h(-k)$在时间上向左移位一个单位，移位后的序列如图 2.3.2(d)所示，对应的乘积序列也如图 2.3.2(d)所示。最后，将乘积序列的所有值相加，就得到

$$y(-1)=1$$

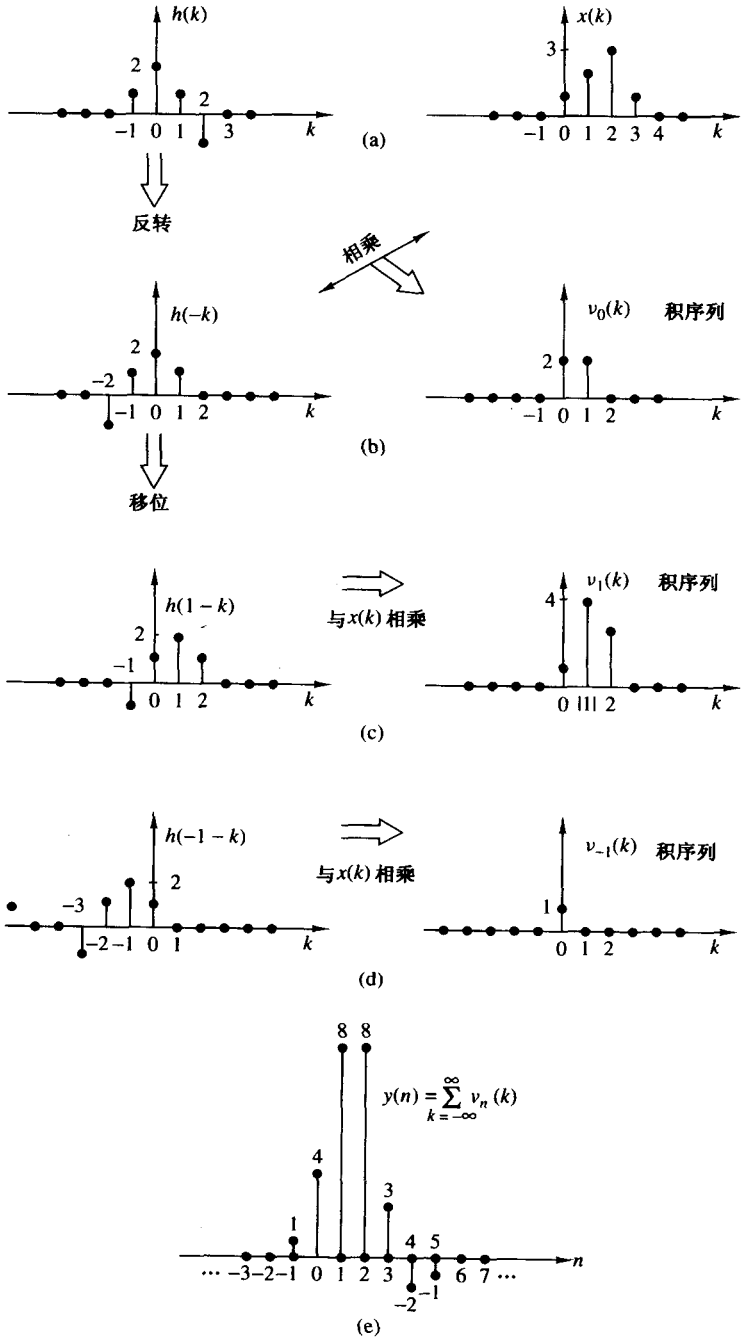


图 2.3.2　卷积的图形化计算

从图 2.3.2 中的各图可以看出，很明显，$h(-1-k)$的任意进一步左移会导致乘积序列为全零，因此，

$$y(n)=0 \qquad n \leqslant -2$$

现在我们就有了系统在 $-\infty < n < \infty$ 上的所有响应,总结如下:

$$y(n) = \{\cdots, 0, 0, 1, \underset{\uparrow}{4}, 8, 8, 3, -2, -1, 0, 0, \cdots\} \tag{2.3.26}$$

在例 2.3.2 中,我们说明了卷积和的计算,并利用了序列的图形,以便帮助我们想象计算过程中的步骤。

在计算另一个例题之前,我们希望证明卷积运算是可交换的,可以理解为卷积结果与两个序列中的哪个序列进行反转和移位是无关的。的确,如果从式(2.3.17)开始,并且通过定义一个新的变量 $m = n - k$ 将求和变量从 k 变为 m,那么 $k = n - m$,同时式(2.3.17)变为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) \tag{2.3.27}$$

因为 m 是虚拟变量,所以可以简单地将 m 换为 k,使得

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \tag{2.3.28}$$

式(2.3.28)使得冲激响应 $h(k)$可以不改变,而输入序列被反转和移位。虽然式(2.3.28)中的输出 $y(n)$和式(2.3.17)中的输出相同,但卷积公式的两种形式中的乘积序列是不同的。实际上,如果将两个乘积序列定义为

$$v_n(k) = x(k)h(n-k)$$

$$w_n(k) = x(n-k)h(k)$$

那么就可以很容易证明

$$v_n(k) = w_n(n-k)$$

所以

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_n(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_n(n-k)$$

这是因为这两个排列不同的序列包含的样本值是相同的。这里鼓励读者用式(2.3.28)的卷积和公式重新计算例 2.3.2。

例 2.3.3 一个弛豫线性时不变系统的冲激响应为

$$h(n) = a^n u(n), \quad |a|<1$$

当输入是单位阶跃序列时,即

$$x(n) = u(n)$$

求系统的输出 $y(n)$。

解:在这种情况下,$h(n)$和 $x(n)$都是无限长序列。利用式(2.3.28)给出的卷积公式的形式,将 $x(n)$进行反转,序列 $h(k)$,$x(k)$和 $x(-k)$如图 2.3.3 所示。乘积序列 $v_0(k)$,$v_1(k)$和 $v_2(k)$对应于 $x(-k)h(k)$,$x(1-k)h(k)$和 $x(2-k)h(k)$,分别如图 2.3.3(c),(d)和(e)所示。因此,得到的输出为

$$y(0) = 1$$

$$y(1) = 1 + a$$

$$y(2) = 1 + a + a^2$$

很明显,当 $n > 0$ 时,输出为

$$y(n) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

$$= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \tag{2.3.29}$$

另一方面，当 $n < 0$ 时，乘积序列全为零。因此，

$$y(n) = 0, \qquad n < 0$$

对于 $0 < a < 1$ 的情况，图 2.3.3(f)画出了输出 $y(n)$的图形。注意，输出作为 n 的函数，是指数上升的。因为 $|a| < 1$，所以当 n 趋于无限时，输出的最后值为

$$y(\infty) = \lim_{n \to \infty} y(n) = \frac{1}{1 - a} \tag{2.3.30}$$

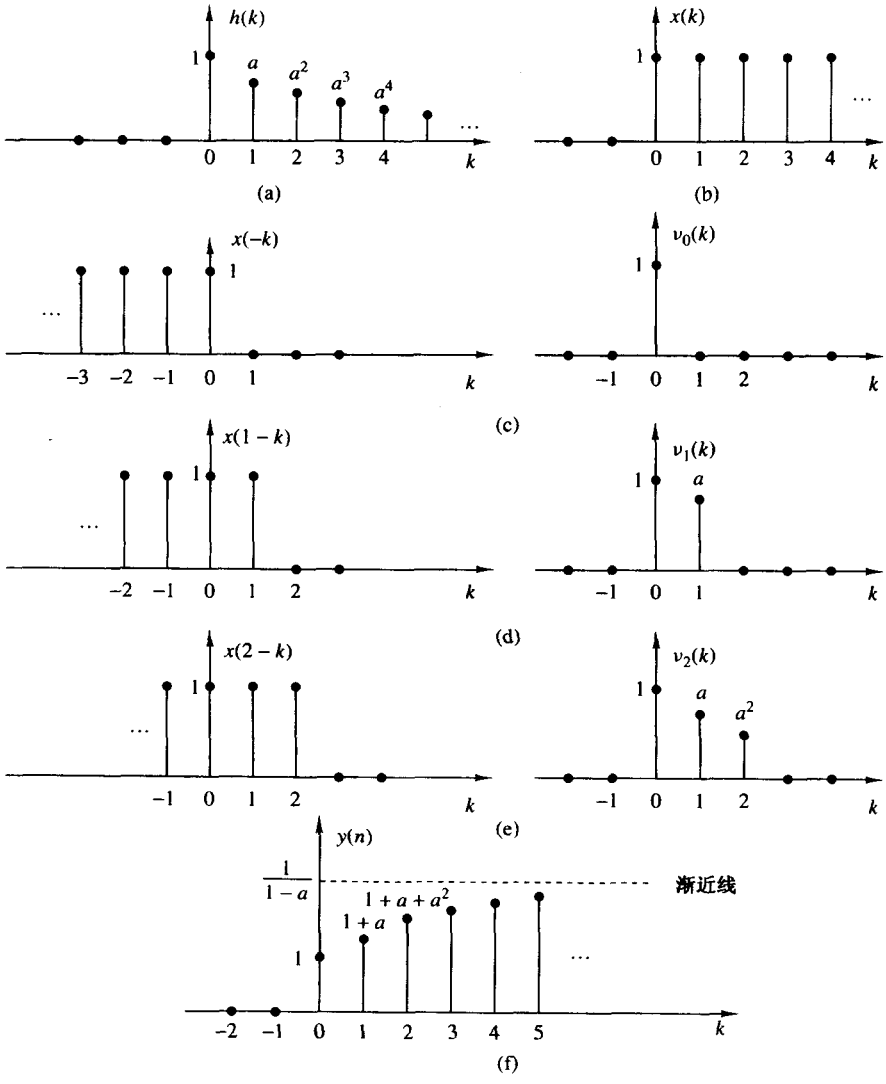


图 2.3.3　例 2.3.3 中卷积的图形方式计算

总之，卷积公式为我们提供了一种计算弛豫线性时不变系统对任意输入信号 $x(n)$的响应的方法。我们可以采用两种等价形式中的一种，即式(2.3.17)或者式(2.3.28)，其中，$x(n)$是系统的输入信号，$h(n)$是系统的冲激响应，$y(n)$是响应输入信号 $x(n)$的系统输出。卷积公式的计算包

含四个操作,即反转冲激响应,由式(2.3.17)确定,或者反转输入序列,由式(2.3.28)所确定,这样就分别产生 $h(-k)$或者 $x(-k)$;在时间上移位反转序列 n 个单位产生 $h(n-k)$或者 $x(n-k)$;将这两个序列相乘产生乘积序列 $x(k)h(n-k)$或者 $x(n-k)h(k)$;最后将乘积的所有值相加产生系统在 n 时刻的输出 $y(n)$。反转操作仅仅执行一次,但对于所有可能的位移 $-\infty < n < \infty$,其他三个操作要重复执行以获得 $y(n)$,$-\infty < n < \infty$。

2.3.4 卷积的性质以及 LTI 系统的互连

在这一节中,我们来研究卷积的一些重要性质,并以 LTI 系统互连的方式来解释这些性质。需要强调的是,这些性质对所有输入信号都成立。

利用星号来表示卷积运算,就可以很方便地简化符号。因此,

$$y(n) = x(n) * h(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{2.3.31}$$

在这种表示方法中,星号后面的序列[即冲激响应 $h(n)$]被反转和移位,系统的输入为 $x(n)$。另一方面,我们也可以写出

$$y(n) = h(n) * x(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{2.3.32}$$

在这种形式的卷积公式中,输入信号被反转了。或者,我们可以把这种形式的卷积公式解释为交换 $x(n)$和 $h(n)$的角色的结果。换言之,我们可以把 $x(n)$视为系统的冲激响应,把 $h(n)$视为激励或输入信号。图 2.3.4 画出了这个解释。

恒等性和位移性。我们还注意到,单位采样序列 $\delta(n)$对卷积来说是同元的,即

$$y(n) = x(n) * \delta(n) = x(n)$$

如果将 $\delta(n)$移位 k,那么卷积序列也移位 k,即

$$x(n) * \delta(n-k) = y(n-k) = x(n-k)$$

我们可以把卷积抽象地视为两个信号序列的数学运算,比如说,$x(n)$和 $h(n)$,这就满足了许多性质。式(2.3.31)和式(2.3.32)体现的性质称为交换律。

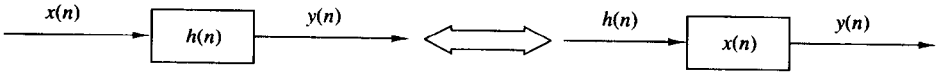


图 2.3.4 卷积的交换性质的图解

交换律

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \tag{2.3.33}$$

从数学上看,卷积运算也满足结合律,陈述如下。

结合律

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \tag{2.3.34}$$

从物理观点来看,$x(n)$可以解释为冲激响应为 $h_1(n)$的线性时不变系统的输入信号,这个系统的输出表示为 $y_1(n)$,它成为冲激响应为 $h_2(n)$的第二个线性时不变系统的输入。于是,其输出为

$$\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) * h_2(n) \\ &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \end{aligned}$$

这正好是式(2.3.34)的左边。因此,式(2.3.34)的左边对应于具有两个级联的线性时不变系统。现在,式(2.3.34)的右边显示出输入 $x(n)$作用到一个等价系统,它的冲激响应[如 $h(n)$]等于两个冲激响应的卷积。即

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

并且

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

此外,因为卷积操作满足交换性质,所以可以改变响应为 $h_1(n)$和 $h_2(n)$的两个系统的次序,而不会改变整个输入-输出关系。图 2.3.5 以图形方式解释了结合性质。

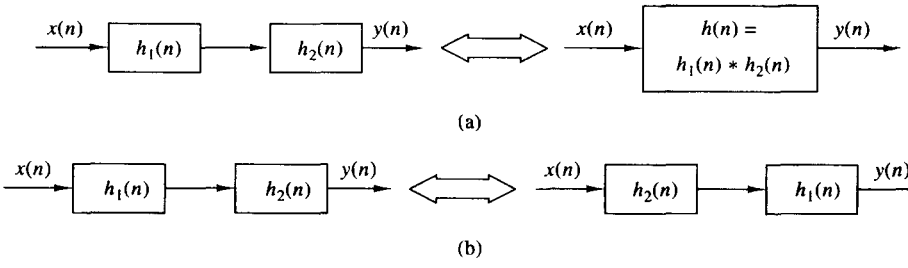


图 2.3.5　卷积的(a)结合性质和(b)交换性质的含义

例 2.3.4　已知两个线性时不变系统的冲激响分别为

$$h_1(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

和

$$h_2(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$$

求这两个系统级联后的冲激响应。

解:为了计算这两个系统级联后的总冲激响应,我们只要将 $h_1(n)$和 $h_2(n)$进行卷积即可。因此,

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(n-k)$$

其中,$h_2(n)$被反转和移位。定义乘积序列

$$v_n(k) = h_1(k)h_2(n-k)$$

$$= (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{4})^{n-k}$$

当 $k \geqslant 0$ 并且 $n-k \geqslant 0$ 或 $n \geqslant k \geqslant 0$ 时,上式的值非零。另一方面,$n < 0$ 时,对于所有的 k,$v_n(k) = 0$。因此,

$$h(n) = 0, n < 0$$

对于 $n \geqslant k \geqslant 0$,每个 k 的乘积序列 $v_n(k)$的所有值相加就得出

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{4})^{n-k}$$

$$= (\frac{1}{4})^n \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

$$= (\frac{1}{4})^n (2^{n+1} - 1)$$

$$=(\frac{1}{2})^n[2-(\frac{1}{2})^n],\quad n\geqslant 0$$

从上面的讨论,很容易归纳出多于两个系统级联时的结合律。因此,如果有 L 个冲激响应为 $h_1(n),h_2(n),\cdots,h_L(n)$的线性时不变系统级联在一起,那么就有一个等价的线性时不变系统,它的冲激响应等于这些冲激响应的 $L-1$ 重卷积,即

$$h(n)=h_1(n)*h_2(n)*\cdots*h_L(n) \tag{2.3.35}$$

交换律意味着执行卷积的次序是无关紧要的。反过来,任何 LTI 系统都可以分解为级联的子系统,实现分解的方法将在后面进行介绍。

卷积运算满足的另一个性质是分配律,陈述如下。

分配律

$$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n) \tag{2.3.36}$$

从物理上解释,这个定律意味着,如果有两个冲激响应分别为 $h_1(n)$和 $h_2(n)$的线性时不变系统受到相同输入信号 $x(n)$的激励,那么两个响应的和就等于总系统的响应,这个总系统的冲激响应为

$$h(n)=h_1(n)+h_2(n)$$

因此,该总系统可视为两个线性时不变系统的并联组合,如图 2.3.6 所示。

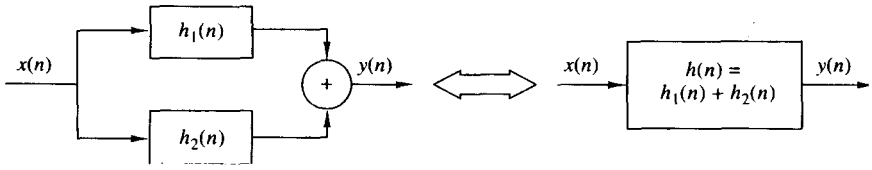


图 2.3.6 卷积分配性质的图解:两个并联在一起的 LTI 系统可以替换为一个单系统 $h(n)=h_1(n)+h_2(n)$

通过数学归纳,很容易将式(2.3.36)推广到多于两个线性时不变系统的并联情形。因此,L 个冲激响应为 $h_1(n),h_2(n),\cdots,h_L(n)$且受相同输入 $x(n)$激励的 LTI 系统的并联,等价于一个冲激响应为

$$h(n)=\sum_{j=1}^{L}h_j(n) \tag{2.3.37}$$

的总系统。

反过来,任何 LTI 系统都可以分解为并联的子系统。

2.3.5 因果 LTI 系统

在 2.2.3 节,我们把因果系统定义为这样的一个系统,它在 n 时刻的输出仅依赖于当前和过去的输入,而不依赖于将来的输入。换言之,在某一时刻 n,比如说 $n=n_0$,这样系统的输出仅依赖于 $n\leqslant n_0$ 时的 $x(n)$值。

在线性时不变系统的情况下,因果性可以解释为冲激响应的条件。为了确定这种关系,我们考虑这样一个线性时不变系统,它在 $n=n_0$ 时刻的输出由如下卷积公式给出:

$$y(n_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n_0-k)$$

假设将这个求和分成两组，一组包括当前和过去的输入值[即 $n\leqslant n_0$ 时的 $x(n)$]，另一组包括将来的输入值[即 $n>n_0$ 时的 $x(n)$]。因此，得出

$$\begin{aligned}y(n_0)&=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n_0-k)+\sum_{k=-\infty}^{-1}h(k)x(n_0-k)\\&=[h(0)x(n_0)+h(1)x(n_0-1)+h(2)x(n_0-2)+\cdots]\\&\quad+[h(-1)x(n_0+1)+h(-2)x(n_0+2)+\cdots]\end{aligned}$$

我们看到，第一个求和项包括 $x(n_0),x(n_0-1),\cdots$，也就是输入信号的当前和过去值。另一方面，第二个求和项包括输入信号量 $x(n_0+1),x(n_0+2),\cdots$。现在，如果在 $n=n_0$ 时刻的输出仅依赖于当前和过去的输入，那么很明显，系统的冲激响必须满足条件

$$h(n)=0,\qquad n<0 \tag{2.3.38}$$

因为 $h(n)$是弛豫线性时不变系统对作用于 $n=0$ 时刻的单位冲激的响应，所以得出因果性的充分必要条件是：当 $n<0$ 时 $h(n)=0$。因此，一个 LTI 系统是因果的，当且仅当它的冲激响应在 n 为负值时为零。

因为对于因果系统，当 $n<0$ 时 $h(n)=0$，所以可以修改卷积公式的求和界限以反映这个约束。因此，得到两个等价的形式

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n-k) \tag{2.3.39}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)h(n-k) \tag{2.3.40}$$

正如先前所指出的，因为在任意的特定时刻 n，我们无法获取输入信号的将来值，所以在实时信号处理中因果性是必需的。在计算当前输出时，只有当前和过去的输入信号值是可用的。

有时，我们很方便地称 $n<0$ 时的值为零的序列为因果序列；$n<0$ 和 $n>0$ 时的值不等于零的序列为非因果序列。这些术语意味着，这样的序列可能分别是因果或者非因果系统的单位采样响应。

如果一个因果线性时不变系统的输入是因果序列[即如果 $n<0$ 时 $x(n)=0$]，那么卷积公式的界限还可以进一步被约束。在这种情况下，卷积公式的两个等价形式变为

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}h(k)x(n-k) \tag{2.3.41}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}x(k)h(n-k) \tag{2.3.42}$$

我们看到，在这种情况下，两个可选形式的求和的界限是一样的，并且上限是随着时间增长的。很明显，因为当 $n<0$ 时 $y(n)=0$，所以因果系统对因果输入序列的响应也是因果的。

例 2.3.5　计算冲激响应为

$$h(n)=a^nu(n),\qquad |a|<1$$

的线性时不变系统的单位阶跃响应。

解:因为输入是单位阶跃信号,是一个因果信号,并且系统也是因果的,所以我们可以用卷积公式中的一种特殊形式,即式(2.3.41)或者式(2.3.42)。由于当 $n\geqslant 0$ 时 $x(n)=1$,所以用式(2.3.41)会更简单一些。因为这个问题比较简单,所以我们可以跳过画出反转和移位序列的步骤,而改为使用式(2.3.41)中的信号序列的直接替换,得到

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}a^k$$

$$=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

并且当 $n<0$ 时 $y(n)=0$。我们注意到,这个结果和例 2.3.3 中得到的结果相同。然而,在这种简单情况下,我们从代数上计算卷积,而不是借助于先前概括的详细步骤。

2.3.6 线性时不变系统的稳定性

正如先前指出的,稳定性是一个非常重要的性质,在任何实际的系统实现中必须考虑。我们定义任意的弛豫系统为 BIBO 稳定,当且仅当对任何有界输入 $x(n)$,它的输出序列 $y(n)$是有界的。

对于所有的 n,如果 $x(n)$是有界的,那么存在一个常数 M_x 使得

$$|x(n)|\leqslant M_x<\infty$$

类似地,如果输出是有界的,那么存在一个常数 M_y 使得

$$|y(n)|<M_y<\infty$$

现在,给出线性时不变系统的有界输入序列 $x(n)$,让我们来研究描述系统特性的稳定性定义的含义。为了得到结果,我们再一次运用卷积公式

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)$$

如果对等式两边取绝对值,那么得出

$$|y(n)|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)\right|$$

因为各项和的绝对值常常小于等于各项绝对值的和,因此有

$$|y(n)|\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)||x(n-k)|$$

如果输入是有界的,那么存在一个有限数 M_x,使得$|x(n)|\leqslant M_x$。将上面等式中的 $x(n)$用上界替换,得出

$$|y(n)|\leqslant M_x\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|$$

从这个表达式可以看出,如果系统的冲激响应满足条件

$$S_h\equiv\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|<\infty \tag{2.3.43}$$

那么输出是有界的。即如果一个线性时不变系统的冲激响应是绝对可加的,那么它是稳定的,这

是保证系统稳定的充分必要条件。当然，我们还将证明，如果 $S_h = \infty$，那么就存在有界的输入，使得它的输出是无界的。选择有界输入为

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{h^*(-n)}{|h(-n)|}, & h(n) \neq 0 \\ 0, & h(n) = 0 \end{cases}$$

其中，$h^*(n)$是 $h(n)$的复共轭。这就足够证明存在一个 n 值，使得 $y(n)$无界。对于 $n=0$，得出

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = S_h$$

因此，如果 $S_h = \infty$，那么有界的输入产生了无界的输出，这是因为 $y(0) = \infty$。

式(2.3.43)中的条件意味着，当 n 趋于无限时，冲激响应 $h(n)$接近于零。因此，如果在远离 $n > n_0$ 时输入置为零，那么当 n 趋于无限时，系统的输出趋于零。为了证明这一点，假设当 $n < n_0$ 时 $|x(n)| < M_x$，并且当 $n \geqslant n_0$ 时 $x(n) = 0$。于是，在 $n = n_0 + N$ 时刻，系统的输出为

$$y(n_0 + N) = \sum_{k=-\infty}^{N-1} h(k)x(n_0 + N - k) + \sum_{k=N}^{\infty} h(k)x(n_0 + N - k)$$

但是，第一个求和等于零，这是因为当 $n \geqslant n_0$ 时 $x(n) = 0$。对于剩下的部分，取输出的绝对值，即

$$|y(n_0 + N)| = \left| \sum_{k=N}^{\infty} h(k)x(n_0 + N - k) \right| \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} |h(k)||x(n_0 + N - k)|$$

$$\leqslant M_x \sum_{k=N}^{\infty} |h(k)|$$

现在，当 N 趋于无限时，

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=N}^{\infty} |h(n)| = 0$$

并且

$$\lim_{N \to \infty} |y(n_0 + N)| = 0$$

这个结果意味着，当系统稳定时，系统输入端的任何有限长激励，产生的输出实际上是“瞬时的”，即幅度随着时间衰减并最终消失。

例 2.3.6　一个线性时不变系统的冲激响应为

$$h(n) = a^n u(n)$$

求解参数 a 的值域，使得该系统稳定。

解：首先，我们注意到该系统是因果的，所以式(2.3.43)中求和的下标从 $k=0$ 开始。因此，

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1 + |a| + |a|^2 + \cdots$$

很明显，如果假设 $|a| < 1$，那么这个几何级数收敛于

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1 - |a|}$$

否则，它发散。因此，如果 $|a| < 1$，那么该系统是稳定的；否则，它是不稳定的。实际上，为了系统稳定，当 n 趋于无限时，$h(n)$必须按指数衰减到零。

例 2.3.7 一个线性时不变系统的冲激响应为

$$h(n)=\begin{cases}a^n, & n\geqslant 0\\ b^n, & n<0\end{cases}$$

求解 a 和 b 的值域,使得该系统稳定。

解:这个系统是非因果的。由式(2.3.43)给出的稳定条件,得出

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}|a|^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}|b|^n$$

在例 2.3.6 中,我们已经计算出 $|a|<1$ 时的第一个求和的极限。第二个求和可以如下处理:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}|b|^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|b|^n}=\frac{1}{|b|}\left(1+\frac{1}{|b|}+\frac{1}{|b|^2}+\cdots\right)$$

$$=\beta(1+\beta+\beta^2+\cdots)=\frac{\beta}{1-\beta}$$

其中,$\beta=1/|b|$ 必须小于 1 以使得几何级数收敛。因此,当 $|a|<1$ 并且 $|b|>1$ 时,该系统是稳定的。

2.3.7 有限长和无限长冲激响应的系统

迄今为止,我们已经就冲激响应 $h(n)$ 描述了线性时不变系统的特性。然而,我们还可以很方便地将这一类线性时不变系统再分为两种类型:具有有限长冲激响应(FIR)的系统和具有无限长冲激响应(IIR)的系统。因此,一个 FIR 系统的冲激响应在某些有限时间区间外的值为零。不失一般性,我们只集中于因果 FIR 系统,使得

$$h(n)=0,\qquad n<0\ \text{ 和 }\ n\geqslant M$$

这样,系统的卷积公式就简化为

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M-1}h(k)x(n-k)$$

我们看到,在任意时刻 n 的输出仅仅是输入信号样本 $x(n),x(n-1),\cdots,x(n-M+1)$ 的线性组合,这有助于我们理解这个表达式。换言之,系统仅仅通过冲激响应 $h(k)$ 对最近的 M 个信号样本进行了加权,$k=0,1,\cdots,M-1$,并将 M 个乘积相加。实际上,系统正如窗口一样,只能看到最近 M 个输入信号样本,以产生输出。系统忽略或者"忘记"了所有先前的样本[即 $x(n-M)$,$x(n-M-1),\cdots$]。因此,我们说 FIR 系统具有长为 M 个样本的有限存储空间。

相反,IIR 线性时不变系统具有无限长冲激响应,基于卷积公式,它的输出为

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n-k)$$

这里假设系统是因果的,但该假设不是必需的。现在,系统的输出是输入信号样本 $x(n)$,$x(n-1),x(n-2),\cdots$[通过冲激响应 $h(k)$]的加权线性组合。因为这个加权和包括当前和所有过去的输入样本,所以我们说系统具有无限存储。

在下面的章节中,我们将详细研究 FIR 和 IIR 系统的特性。

2.4 由差分方程描述的离散时间系统

迄今为止,我们已经通过单位采样响应 $h(n)$ 描述了线性时不变系统的特性。反过来,$h(n)$ 使我们可以利用卷积和

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k) \tag{2.4.1}$$

来计算系统对任何给定的输入序列 $x(n)$的输出 $y(n)$。另外，我们已经说明了线性时不变系统的特性通常是由式(2.4.1)给出的输入-输出关系来描述的。此外，卷积和式(2.4.1)提出了系统实现的一种方法。在 FIR 系统的情况下，这样的实现包括加法器、乘法器以及有限数量的存储空间。因此，正如卷积和所表示的那样，FIR 系统很容易直接实现。

然而，如果系统是 IIR，那么由卷积表示的实际实现很明显是不可能的，这是因为它需要无限数量的存储空间、乘法器以及加法器。于是，自然就会产生一个问题：不用卷积和所给出的形式，是否有可能实现 IIR 系统？幸运的是，答案是肯定的，已经有实际的、计算有效的方法来实现 IIR 这类系统，本节我们将对此进行介绍。在 IIR 这类一般系统中，差分方程更便于描述这一类离散时间系统。IIR 系统这一类或者子类在许多实际应用中是非常有用的，包括数字滤波器的实现、物理现象和物理系统的建模。

2.4.1　递归和非递归的离散时间系统

正如上面指出的，卷积和公式仅以输入信号的形式就清楚地表达了线性时不变系统的输出。然而，我们在这里将会说明，这种情况不是必需的。许多系统不但需要以当前和过去输入值的形式来表示系统的输出，而且还需要以已经可用的过去输出值的形式来表示系统的输出。下面的问题说明了这一点。

假如我们想计算信号 $x(n)$在区间 $0\leqslant k\leqslant n$ 内的累积平均，定义为

$$y(n)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x(k),\qquad n=0,1,\cdots \tag{2.4.2}$$

正如式(2.4.2)所指出的，计算 $y(n)$需要存储所有输入样本 $x(k),0\leqslant k\leqslant n$。因为 n 是递增的，所以需要的存储器也是随着时间线性增加的。

然而，直觉告诉我们，利用先前的输出值 $y(n-1)$可以更有效地计算 $y(n)$。的确，对式(2.4.2)进行简单的代数重新整理，得出

$$\begin{aligned}(n+1)y(n)&=\sum_{k=0}^{n-1}x(k)+x(n)\\&=ny(n-1)+x(n)\end{aligned}$$

因此，

$$y(n)=\frac{n}{n+1}y(n-1)+\frac{1}{n+1}x(n) \tag{2.4.3}$$

现在，通过将先前输出值 $y(n-1)$乘以 $n/(n+1)$，当前输入 $x(n)$乘以 $1/(n+1)$，并将两个乘积相加，就可以递归地计算累积平均 $y(n)$。因此，利用式(2.4.3)计算 $y(n)$需要两个乘法器、一个加法器以及一个存储空间，如图 2.4.1 所示，这是递归系统的一个实例。通常，在 n 时刻的输出 $y(n)$依赖于一定数量的过去输出值 $y(n-1),y(n-2),\cdots$的系统称为递归系统。

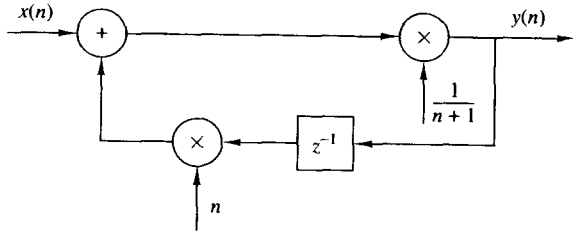


图 2.4.1　累积平均系统的递归实现

为了更加详细地确定式(2.4.3)中递归系统的计算,假设计算过程从 $n=0$ 开始,并按时间进行下去。因此,根据式(2.4.3),得出

$$y(0)=x(0)$$

$$y(1)=\frac{1}{2}y(0)+\frac{1}{2}x(1)$$

$$y(2)=\frac{2}{3}y(1)+\frac{1}{3}x(2)$$

以此类推。如果某人对这个计算越来越疲惫,希望在某时刻将该问题转给其他人,比如说 $n=n_0$,那么他需要向后继者提供的唯一信息就是过去值 $y(n_0-1)$和新的输入样本 $x(n),x(n+1),\cdots$。因此,该后继者从

$$y(n_0)=\frac{n_0}{n_0+1}y(n_0-1)+\frac{1}{n_0+1}x(n_0)$$

开始,并按时间继续下去直到某时刻,比如说 $n=n_1$,他或她变得疲惫时,再将该计算任务交给另外的其他人,同时提供 $y(n_1-1)$值的信息,以此类推。

我们想要讨论的一点是,如果有人想计算式(2.4.3)中系统对作用于 $n=n_0$ 时的输入信号 $x(n)$的响应(在这种情况下,是累积平均),那么就需要 $y(n_0-1)$值及 $n\geqslant n_0$ 时的输入样本 $x(n)$。$y(n_0-1)$项称为式(2.4.3)中系统的初始条件,它包含了计算 $n\geqslant n_0$ 时系统对输入信号 $x(n)$响应的所有需要信息,而与过去已经出现的其他值无关。

下面的例子说明了利用(非线性)递归系统计算一个数的平方根。

例 2.4.1 平方根算法

许多计算机或者计算器都是利用迭代算法

$$s_n=\frac{1}{2}\left(s_{n-1}+\frac{A}{s_{n-1}}\right),\qquad n=0,1,\cdots$$

来计算正数 A 的平方根。其中,s_{n-1}是$\sqrt{A}$的初始猜测(估计)。当迭代收敛时,得出 $s_n\approx s_{n-1}$,于是很容易得到 $s_n\approx\sqrt{A}$。

现在考虑递归系统

$$y(n)=\frac{1}{2}\left[y(n-1)+\frac{x(n)}{y(n-1)}\right]\tag{2.4.4}$$

它的实现如图 2.4.2 所示。如果用幅度为 A 的阶跃信号[即 $x(n)=Au(n)$]来激励该系统,并利用初始条件 $y(-1)$来估计$\sqrt{A}$,那么随着 n 的增加,系统的响应 $y(n)$将趋于$\sqrt{A}$。注意,与式(2.4.3)中的系统不同,我们并不需要准确指定初始条件,粗略的估计就足够得到良好的系统性能。例如,如果令 $A=2$,$y(-1)=1$,那么可得出 $y(0)=\frac{3}{2}$,$y(1)=1.416\,666\,7$,$y(2)=1.414\,215\,7$。类似地,对于 $y(-1)=1.5$,得出 $y(0)=1.416\,666\,7$,$y(1)=1.414\,215\,7$。将这些值与近似为 1.414 213 6 的$\sqrt{2}$值进行比较,就会发现初始条件对最终计算结果影响不大。

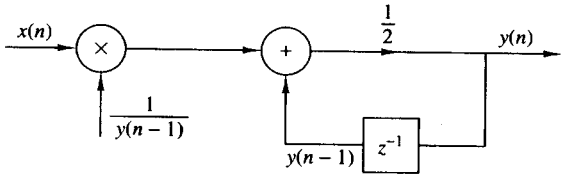


图 2.4.2 平方根系统的实现形式

现在，我们已经介绍了两个简单的递归系统，它们的输出值 $y(n)$依赖于先前输出值 $y(n-1)$和当前输入 $x(n)$，这两个系统都是因果的。通常，我们可以用公式表示出更加复杂的因果递归系统，它的输出 $y(n)$是多个过去输出值以及当前和过去输入的函数。这样，系统应该具有有限数量的延迟，或者等价地，需要有限数量的存储空间，以实际实现该系统。因此，一个因果的、实际可实现的递归系统的输出通常可以表示为

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \cdots, y(n-N), x(n), x(n-1), \cdots, x(n-M)] \tag{2.4.5}$$

其中，$F[\cdot]$表示自变量的某些函数，这是一个递归方程，用来确定以先前输出值以及当前和过去输入的形式计算系统输出的步骤。

相反，如果 $y(n)$仅仅依赖于当前和过去的输入，那么

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \cdots, x(n-M)] \tag{2.4.6}$$

这样的系统称为非递归的。需要赶紧说明的是，在 2.3.7 节由卷积和公式的形式描述的 FIR 系统也具有式(2.4.6)的形式。的确，因果 FIR 系统的卷积和为

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k) \\ &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(M)x(n-M) \\ &= F[x(n), x(n-1), \cdots, x(n-M)] \end{aligned}$$

其中，$F[\cdot]$仅仅是当前和过去输入的线性加权和，并且冲激响应值 $h(n)$构成了权系数，$0 \leqslant n \leqslant M$。因此，在 2.3.7 节由卷积公式描述的因果线性时不变 FIR 系统是非递归的。非递归和递归系统之间的基本差异如图 2.4.3 所示。简单观察这个图就会发现，这两个系统之间的基本差异就在于递归系统中的反馈回路，它将系统的输出反馈到输入，这个反馈回路包含一个延迟元件。该延迟的存在对于系统的实现是至关重要的，这是因为缺少这个延迟将会使系统以 $y(n)$的形式计算 $y(n)$，对于离散时间系统，这是不可能的。

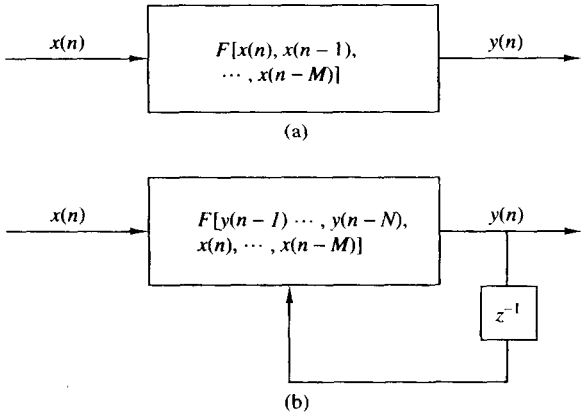


图 2.4.3　因果可实现的(a)非递归和(b)递归系统的基本结构

反馈回路的存在，或者等价地，式(2.4.5)的递归特性引出了递归和非递归系统之间另一个重要的差异。例如，假设我们想计算一个系统的输出 $y(n_0)$，它在 $n=0$ 时刻受到一个输入的激励。如果系统是递归的，为了计算 $y(n_0)$，首先需要计算所有先前值 $y(0), y(1), \cdots, y(n_0-1)$。相反，如果是非递归的，那么我们可以直接计算输出 $y(n_0)$，而不需要计算 $y(n_0-1), y(n_0-2), \cdots$。综

合上述,递归系统的输出应该按顺序计算[即 $y(0),y(1),y(2),\cdots$],然而,对非递归系统,其输出可以按任意顺序计算[即 $y(200),y(15),y(3),y(300)$等]。这个特点在某些实际应用中是有用的。

2.4.2 由常系数差分方程描述的线性时不变系统的特性

在2.3节,我们介绍了线性时不变系统,并就冲激响应描述了它们的特性。在这一小节,我们集中于线性时不变系统这一族,并用称为常系数差分方程的输入-输出关系来描述它们。由常系数线性差分方程描述的系统是前面部分介绍的递归和非递归系统的一个子类。为了揭示这个重要思想,我们从介绍一个简单的、由一阶差分方程描述的递归系统开始。

假设一个递归系统的输入-输出方程为

$$y(n)=ay(n-1)+x(n) \tag{2.4.7}$$

其中,a 是常数。图2.4.4画出了实现这个系统的结构图。将由输入-输出方程(2.4.3)描述的累积平均系统与这个系统比较,我们看到,式(2.4.7)中的系统具有常系数(与时间无关),而式(2.4.3)描述的系统具有时变的系数。我们将会说明,式(2.4.7)是线性时不变系统的输入-输出方程,而式(2.4.3)描述的是线性时变系统。

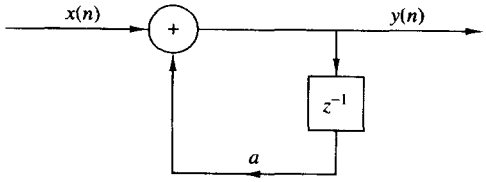


图2.4.4 简单递归系统的实现结构图

现在,假设 $n\geqslant 0$ 时,将输入信号 $x(n)$作用到该系统。对于 $n<0$ 时的输入信号,我们不进行假定,但我们假设存在初始条件 $y(-1)$。因为式(2.4.7)间接地描述了系统输出,所以必须求解这个方程以获得系统输出的直接表达式。假设我们从 $y(0)$开始,计算 $n\geqslant 0$ 时的 $y(n)$的连续值。因此,

$$\begin{aligned}
y(0)&=ay(-1)+x(0)\\
y(1)&=ay(0)+x(1)=a^2y(-1)+ax(0)+x(1)\\
y(2)&=ay(1)+x(2)=a^3y(-1)+a^2x(0)+ax(1)+x(2)\\
&\vdots\quad\vdots\\
y(n)&=ay(n-1)+x(n)\\
&=a^{n+1}y(-1)+a^nx(0)+a^{n-1}x(1)+\cdots+ax(n-1)+x(n)
\end{aligned}$$

或更简洁地,

$$y(n)=a^{n+1}y(-1)+\sum_{k=0}^{n}a^kx(n-k),\qquad n\geqslant 0 \tag{2.4.8}$$

式(2.4.8)右边给出的系统响应 $y(n)$包含两部分。包含 $y(-1)$项的第一部分是系统初始条件$y(-1)$的结果。第二部分是系统对输入信号 $x(n)$的响应。

如果系统在时刻 $n=0$ 初始是弛豫的,那么它的记忆为零(即延迟的输出),所以 $y(-1)=0$。因此,如果一个系统从零初始条件开始,那么它就是弛豫的。因为系统的记忆在某种意义上描述了它的状态,所以我们说,该系统是在零状态,它的对应输出称为零状态响应,表示为 $y_{zs}(n)$。很明显,式(2.4.7)中系统的零状态响应为

$$y_{zs}(n)=\sum_{k=0}^{n}a^{k}x(n-k),\qquad n\geqslant 0 \tag{2.4.9}$$

注意式(2.4.9)是一个卷积和,包括输入信号与冲激响应

$$h(n)=a^{n}u(n) \tag{2.4.10}$$

的卷积。我们还看到,由一阶差分方程(2.4.7)所描述的系统是因果的,所以式(2.4.9)中卷积和的下限为 $k=0$。此外,条件 $y(-1)=0$ 意味着输入信号可以假设为因果的,所以式(2.4.9)中的卷积和的上限为 n,这是因为 $k>n$ 时,$x(n-k)=0$。实际上,我们已经得出结论,由一阶差分方程(2.4.7)所描述的弛豫递归系统是线性时不变 IIR 系统,它的冲激响应由式(2.4.10)给出。

现在,假设式(2.4.7)所描述的系统初始时是非弛豫的[即 $y(-1)\neq 0$],并且对所有 n,输入 $x(n)=0$。那么,零输入系统的输出称为零输入响应或者自然响应,表示为 $y_{zi}(n)$。从式(2.4.7),以及 $x(n)=0,-\infty<n<\infty$,得出

$$y_{zi}(n)=a^{n+1}y(-1),\qquad n\geqslant 0 \tag{2.4.11}$$

我们看到,非零初始条件的递归系统是非弛豫的,这可理解为即使没有被激励,它也能产生输出。注意,零输入响应是由于系统的记忆。

总之,通过设置输入信号为零,使系统与输入无关,就得到了零输入响应,这仅仅依赖于系统的特性以及初始条件。因此,零输入响应是系统本身的一个特性,即我们所知的系统的自然或者自由响应。另一方面,零状态响应依赖于系统的特性以及输入信号。因为零状态输出是输入信号强加后产生的响应,所以它常常称为系统的强迫响应。通常,系统的总响应可以表示为 $y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$。

由一阶差分方程(2.4.7)所描述的系统可能是一般类型的递归系统中最简单的递归系统,这类递归系统由线性常系统差分方程描述,其一般形式为

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_{k}y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_{k}x(n-k) \tag{2.4.12}$$

或等价地,

$$\sum_{k=0}^{N}a_{k}y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}b_{k}x(n-k),\qquad a_{0}\equiv 1 \tag{2.4.13}$$

整数 N 称为差分方程的阶或者系统的阶。式(2.4.12)右边的负号是为了方便起见而引出的,它可使我们在表示差分方程(2.4.13)时不出现任何负号。

等式(2.4.12)将系统在时刻 n 的输出直接表示为过去输出 $y(n-1),y(n-2),\cdots,y(n-N)$,以及过去和当前输入信号样本的加权和。我们看到,为了求解 $n\geqslant 0$ 时的 $y(n)$,我们需要所有 $n\geqslant 0$ 时的输入 $x(n)$,以及初始条件 $y(-1),y(-2),\cdots,y(-N)$。换言之,初始条件总结了所有我们需要知道的系统响应的过去历史记录,以计算当前和将来的输出。N 阶常系数差分方程的一般解将在下面的小节中介绍。

迄今为止,我们就线性常系数差分方程所描述的递归系统重新说明了线性、时不变、稳定的性质。正如我们已经看到的那样,递归系统可能是弛豫的或者非弛豫的,这依赖于初始条件。因此,这些性质的定义必须考虑初始条件的存在。

我们从线性的定义开始。如果一个系统满足下面三个条件:

1. 总响应等于零输入响应和零状态响应之和[即 $y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$]。

2. 零状态响应(零状态线性)满足叠加法则。

3. 零输入响应(零输入线性)满足叠加法则。

那么它就是线性的。不满足所有三个独立条件的系统定义为非线性。很明显,对于弛豫系统,$y_{zi}(n)=0$,因此,条件2,也就是2.2.4节给出的线性定义,是充分的。

我们通过一个简单的例子来说明这些要求的应用。

例 2.4.2 判断由差分方程

$$y(n)=ay(n-1)+x(n)$$

定义的递归系统是否是线性的。

解:将式(2.4.9)和式(2.4.11)组合在一起,就得到式(2.4.8),它可以表示为

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$$

从而线性的第一个条件是满足的。

为了检查第二个条件,假设 $x(n)=c_1x_1(n)+c_2x_2(n)$,那么由式(2.4.9)得出

$$\begin{aligned}y_{zs}(n)&=\sum_{k=0}^{n}a^k[c_1x_1(n-k)+c_2x_2(n-k)]\\&=c_1\sum_{k=0}^{n}a^kx_1(n-k)+c_2\sum_{k=0}^{n}a^kx_2(n-k)\\&=c_1y_{zs}^{(1)}(n)+c_2y_{zs}^{(2)}(n)\end{aligned}$$

因此,$y_{zs}(n)$满足叠加法则,从而系统是零状态线性。

现在,假设 $y(-1)=c_1y_1(-1)+c_2y_2(-1)$,由式(2.4.11)得出

$$\begin{aligned}y_{zi}(n)&=a^{n+1}[c_1y_1(-1)+c_2y_2(-1)]\\&=c_1a^{n+1}y_1(-1)+c_2a^{n+1}y_2(-1)\\&=c_1y_{zi}^{(1)}(n)+c_2y_{zi}^{(2)}(n)\end{aligned}$$

因此,系统是零输入线性。

因为该系统满足所有三个线性条件,所以它是线性的。

在例2.4.2中,展示了由一阶差分方程描述的系统的线性特性,虽然这个步骤有点令人厌烦,但是它可以直接运用到由式(2.4.13)给出的常系数差分方程所描述的一般递归系统上。因此,由线性差分方程(2.4.13)所描述的系统也满足线性定义的所有三个条件,所以它是线性的。

现在产生的下一个问题是,线性常系数差分方程(2.4.13)描述的因果线性系统是否是时不变的。当处理由明确的输入-输出数学关系描述的系统时,这是相当容易的。很明显,因为系数 a_k 和 b_k 是常数,所以式(2.4.13)所描述的系统是时不变的。另一方面,如果这些系数中的一个或者多个跟时间有关,那么该系统就是时变的,这是因为它的特性是按时间的函数进行变化的。从而得出结论:由线性常系数差分方程所描述的递归系统是线性时不变的。

最后的话题是由线性常系数差分方程(2.4.13)所描述的系统的稳定性问题。在2.3.6节,我们介绍了弛豫系统的有界输入-有界输出(BIBO)稳定性的概念。对于可能是非线性的非弛豫系统,它的BIBO稳定性需要细心观察。然而,在由线性常系数差分方程(2.4.13)所描述的线性时不变递归系统的情况下,可以充分说明,这样的系统是BIBO稳定,当且仅当对每个有界输入和每个有界初始条件,系统的总响应是有界的。

例 2.4.3　判断由式(2.4.7)给出的差分方程所描述的线性时不变递归系统是否是稳定的。

解：假设输入信号 $x(n)$的幅度是有界的，即对于所有 $n\geqslant 0$，$|x(n)|\leqslant M_x<\infty$。由式(2.4.8)得出

$$|y(n)|\leqslant |a^{n+1}y(-1)|+\left|\sum_{k=0}^{n}a^k x(n-k)\right|, \qquad n\geqslant 0$$

$$\leqslant |a|^{n+1}|y(-1)|+M_x\sum_{k=0}^{n}|a|^k, \qquad n\geqslant 0$$

$$\leqslant |a|^{n+1}|y(-1)|+M_x\frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|}=M_y, \quad n\geqslant 0$$

如果 n 是有限的，那么界限 M_y 也是有限的，并且输出是有界的，与 a 值无关。然而，当 $n\to\infty$ 时，只有 $|a|<1$，界限 M_y 才能保持有限，这是因为当 $n\to\infty$ 时，$|a|^n\to 0$。于是，$M_y=M_x/(1-|a|)$。

因此，只有当 $|a|<1$ 时，该系统才是稳定的。

对于例 2.4.3 中的简单一阶系统，我们能够将 BIBO 稳定的条件以系统参数 a 的形式进行表示，即 $|a|<1$。然而，需要强调的是，对于高阶系统，这个任务将变得非常困难。幸运的是，在下面的章节中我们将看到其他用来研究递归系统稳定性的简单且有效的方法。

2.4.3　线性常系数差分方程的解

与输入-输出关系一样，给定一个线性常系数方程描述线性时不变系统，我们在这一节的目标是求解输出 $y(n)$的确切表达式。这种研究方法称为直接方法。另一种可选择的基于 z 变换的方法将在第 3 章进行讲解。因为解的结果到最后才会变得明确，所以 z 变换方法称为间接方法。

基本上，我们的目的是求解给定明确输入 $x(n)$，$n\geqslant 0$ 和一组初始条件的系统的输出 $y(n)$，$n\geqslant 0$。直接求解方法假设总的解是两部分之和：

$$y(n)=y_h(n)+y_p(n)$$

$y_h(n)$部分就是我们所知的齐次解或补充解，而 $y_p(n)$称为特殊解。

差分方程的齐次解。对于式(2.4.13)给出的线性常系数差分方程的求解问题，我们首先从求解齐次差分方程

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=0 \tag{2.4.14}$$

开始。

直接求解线性常系数差分方程的步骤和求解线性常系数微分方程的步骤十分类似。基本上，假设解是指数形式，即

$$y_h(n)=\lambda^n \tag{2.4.15}$$

其中，$y_h(n)$中的下标 h 用来表示齐次差分方程的解。如果将这个假设解代入式(2.4.14)，那么得到多项式方程

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\lambda^{n-k}=0$$

或者

$$\lambda^{n-N}(\lambda^N+a_1\lambda^{N-1}+a_2\lambda^{N-2}+\cdots+a_{N-1}\lambda+a_N)=0 \tag{2.4.16}$$

圆括号内的多项式称为系统的特征多项式。通常,它有 N 个根,表示为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$。这些根可以是实数或者复数值。在实际中,系数 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 通常是实数。复值根是以复共轭对的形式出现。N 个根中某些可能相等,这种情况下就有多重根。

暂时假设这些根是不同的,即没有多重根。那么齐次差分方程(2.4.14)的最一般的解为

$$y_h(n)=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n+\cdots+C_N\lambda_N^n \tag{2.4.17}$$

其中,$C_1,C_2,\cdots,C_N$ 是权系数。

这些系数是由系统指定的初始条件决定的。因为输入 $x(n)=0$,所以式(2.4.17)可以用来获得系统的零输入响应。下面的例子说明了这个步骤。

例 2.4.4 求解由一阶差分方程

$$y(n)+a_1y(n-1)=x(n) \tag{2.4.18}$$

所描述的系统的齐次解。

解:通过令 $x(n)=0$,得到的假设解为

$$y_h(n)=\lambda^n$$

把这个解代入式(2.4.18),得出[其中 $x(n)=0$]

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}=0$$

$$\lambda^{n-1}(\lambda+a_1)=0$$

$$\lambda=-a_1$$

因此,齐次差分方程的解为

$$y_h(n)=C\lambda^n=C(-a_1)^n \tag{2.4.19}$$

系统的零输入响应可以由式(2.4.18)和式(2.4.19)进行求解。由于 $x(n)=0$,由式(2.4.18)得出

$$y(0)=-a_1y(-1)$$

另一方面,由式(2.4.19)得出

$$y_h(0)=C$$

从而系统的零输入响应为

$$y_{zi}(n)=(-a_1)^{n+1}y(-1),\qquad n\geqslant 0 \tag{2.4.20}$$

其中,$a=-a_1$。这个一阶系统的解和式(2.4.11)是一致的,式(2.4.11)是先前通过差分方程的迭代获得的。

例 2.4.5 求解由齐次二阶差分方程

$$y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=0 \tag{2.4.21}$$

所描述的系统的零输入响应。

解:首先,计算齐次方程的解。假设解是指数

$$y_h(n)=\lambda^n$$

将这个解代入式(2.4.21),得出特征方程

$$\lambda^n-3\lambda^{n-1}-4\lambda^{n-2}=0$$

$$\lambda^{n-2}(\lambda^2-3\lambda-4)=0$$

因此,根为 $\lambda=-1$ 和 4,并且齐次方程解的一般形式为

$$\begin{aligned} y_h(n) &= C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \\ &= C_1(-1)^n + C_2(4)^n \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

系统的零输入响应可以从齐次解获得，这要根据给定的初始条件 $y(-1)$ 和 $y(-2)$ 来计算式(2.4.22)中的常数。由式(2.4.21)的差分方程，得出

$$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2)$$

$$\begin{aligned} y(1) &= 3y(0) + 4y(-1) \\ &= 3[3y(-1) + 4y(-2)] + 4y(-1) \\ &= 13y(-1) + 12y(-2) \end{aligned}$$

另一方面，由式(2.4.22)得出

$$y(0) = C_1 + C_2$$

$$y(1) = -C_1 + 4C_2$$

由于这两组关系式相等，故得出

$$C_1 + C_2 = 3y(-1) + 4y(-2)$$

$$-C_1 + 4C_2 = 13y(-1) + 12y(-2)$$

这两个方程的解为

$$C_1 = -\frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2)$$

$$C_2 = \frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2)$$

因此，系统的零输入响应为

$$\begin{aligned} y_{zi}(n) &= [-\frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2)](-1)^n \\ &\quad + [\frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2)](4)^n, \qquad n \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

例如，如果 $y(-2) = 0$ 且 $y(-1) = 5$，那么 $C_1 = -1$，$C_2 = 16$，所以

$$y_{zi}(n) = (-1)^{n+1} + (4)^{n+2}, \qquad n \geqslant 0$$

这些例子说明了当特征方程包含不同的根时，求解系统的齐次解和零输入响应的方法。另一方面，如果特征方程包含多重根，那么式(2.4.17)所给出的解的形式必须要进行修改。例如，如果 λ_1 是 m 重根，那么式(2.4.17)变为

$$\begin{aligned} y_h(n) &= C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3 n^2\lambda_1^n + \cdots + C_m n^{m-1}\lambda_1^n \\ &\quad + C_{m+1}\lambda_{m+1}^n + \cdots + C_N\lambda_N^n \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

差分方程的特殊解。对于指定的输入信号 $x(n)$，$n \geqslant 0$，特殊解 $y_p(n)$ 要满足差分方程(2.4.13)。换言之，$y_p(n)$ 是满足

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_p(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \qquad a_0 = 1 \tag{2.4.25}$$

的任意解。为了求解式(2.4.25)，假设 $y_p(n)$ 的形式取决于输入信号 $x(n)$ 的形式。下面的例子说明了该步骤。

例 2.4.6 计算一阶差分方程

$$y(n)+a_1y(n-1)=x(n), \qquad |a_1|<1 \tag{2.4.26}$$

的特殊解,其中输入信号 $x(n)$是单位阶跃序列,即

$$x(n)=u(n)$$

解:因为当 $n\geqslant 0$ 时,输入序列 $x(n)$是常数,所以假设解的形式也是常数。因此,差分方程对强迫函数 $x(n)$的假设解为

$$y_p(n)=Ku(n)$$

它称为差分方程的特殊解。其中,K 是缩放因子,使得该解满足式(2.4.26)。将这个假设的解代入上式(2.4.26),得出

$$Ku(n)+a_1Ku(n-1)=u(n)$$

为了求解 K,必须计算任何 $n\geqslant 1$ 时的方程值,此时任何一项都不会变成零。因而

$$K+a_1K=1$$

$$K=\frac{1}{1+a_1}$$

因此,该差分方程的特殊解为

$$y_p(n)=\frac{1}{1+a_1}u(n) \tag{2.4.27}$$

在这个例子中,当 $n\geqslant 0$ 时,输入 $x(n)$是常数,假设的特殊解的形式也是常数。如果 $x(n)$是指数,那么就要假设特殊解也是指数。如果 $x(n)$是正弦信号,那么 $y_p(n)$也将是正弦信号。因此,特殊解的假设形式取决于信号 $x(n)$的基本形式。表 2.1 给出了对于各种激励,特殊解的一般形式。

表 2.1 各种输入信号的特殊解的一般形式

输入信号 $x(n)$	特殊解 $y_p(n)$
A(常数)	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_0n^M+K_1n^{M-1}+\cdots+K_M$
A^nn^M	$A^n(K_0n^M+K_1n^{M-1}+\cdots+K_M)$
$\left\{\begin{matrix}A\cos\omega_0n\\A\sin\omega_0n\end{matrix}\right\}$	$K_1\cos\omega_0n+K_2\sin\omega_0n$

例 2.4.7 计算差分方程

$$y(n)=\frac{5}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)+x(n)$$

的特殊解。其中,强迫函数 $x(n)=2^n$,$n\geqslant 0$,在其他处值为零。

解:特殊解的形式为

$$y_p(n)=K2^n, \qquad n\geqslant 0$$

将 $y_p(n)$代入到上面的差分方程,得出

$$K2^nu(n)=\frac{5}{6}K2^{n-1}u(n-1)-\frac{1}{6}K2^{n-2}u(n-2)+2^nu(n)$$

为了求解 K 值,可以计算任何 $n\geqslant 2$ 时的方程值,此时任何一项都不会变成零。因此有

$$4K = \frac{5}{6}(2K) - \frac{1}{6}K + 4$$

所以 $K = \frac{8}{5}$。因此，特殊解为

$$y_p(n) = \frac{8}{5}2^n, \qquad n \geqslant 0$$

现在，我们已经示范了如何求解常系数差分方程解的两个分量，这两个分量是齐次解和特殊解。由这两个分量，就能构成全解形式，从而还可以获得零状态响应。

差分方程的全解。线性常系数差分方程的线性特性使我们可以将齐次解和特殊解相加以获得全解。因此，

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

和的结果 $y(n)$中包含了齐次解分量 $y_h(n)$中的常参数$\{C_i\}$，这些常数可以由初始条件决定。下面的例子说明了该步骤。

例 2.4.8　计算差分方程

$$y(n) + a_1 y(n-1) = x(n) \tag{2.4.28}$$

的全解 $y(n)$，$n \geqslant 0$。其中，$x(n)$是单位阶跃序列[即 $x(n) = u(n)$]，$y(-1)$是初始条件。

解：由例 2.4.4 中的式(2.4.19)，得出齐次解为

$$y_h(n) = C(-a_1)^n$$

同时，由例 2.4.6 中的式(2.4.26)，得出特殊解为

$$y_p(n) = \frac{1}{1+a_1}u(n)$$

因此，全解为

$$y(n) = C(-a_1)^n + \frac{1}{1+a_1}, \qquad n \geqslant 0 \tag{2.4.29}$$

其中，常数 C 由初始条件 $y(-1)$决定。

特别地，假设我们想获得由一阶差分方程(2.4.28)所描述的系统的零状态响应，那么就令 $y(-1) = 0$。为了求解 C，计算式(2.4.28)在 $n = 0$ 时刻的值，得出

$$y(0) + a_1 y(-1) = 1$$

因此，

$$y(0) = 1 - a_1 y(-1)$$

另一方面，计算式(2.4.29)在 $n = 0$ 时刻的值，得出

$$y(0) = C + \frac{1}{1+a_1}$$

由于这两个关系相等，故得出

$$C + \frac{1}{1+a_1} = -a_1 y(-1) + 1$$

$$C = -a_1 y(-1) + \frac{a_1}{1+a_1}$$

最后，如果将 C 的值代入式(2.4.29)，那么得出

$$\begin{aligned} y(n) &= (-a_1)^{n+1} y(-1) + \frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1}, \qquad n \geqslant 0 \\ &= y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \end{aligned} \tag{2.4.30}$$

我们看到,式(2.4.30)给出的系统响应和式(2.4.8)给出的一阶系统(其中 $a=-a_1$)的响应 $y(n)$相等,$y(n)$是通过迭代求解差分方程获得的。此外,我们还注意到,常数 C 的值不但依赖于初始条件 $y(-1)$,而且还依赖于激励函数。因此,C 的值不但影响零输入响应,而且还影响零状态响应。

我们还进一步看到,差分方程的特殊解可以从系统的零状态响应获得。实际上,如果 $|a_1|<1$,正如 2.4.4 节将会指出的,它是系统稳定的条件,那么当 n 趋于无限时,$y_{zs}(n)$的极限值就是特殊解,即

$$y_p(n)=\lim_{n\to\infty}y_{zs}(n)=\frac{1}{1+a_1}$$

因为当 n 趋于无限时,系统响应的这个分量并不为零,所以它通常称为系统的稳态响应。只要输入持续,这个输出就持续。当 n 趋于无限时会消失的分量称为系统的瞬时响应。

下面的例子说明了二阶递归系统全解的计算过程。

例 2.4.9 计算由二阶差分方程

$$y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n)+2x(n-1) \tag{2.4.31}$$

所描述的系统的响应 $y(n)$,$n\geqslant 0$。其中,输入序列为

$$x(n)=4^nu(n)$$

解:在例 2.4.5 中,我们已经计算了该系统的齐次差分方程的解。由式(2.4.22)得出

$$y_h(n)=C_1(-1)^n+C_2(4)^n \tag{2.4.32}$$

假设式(2.4.31)的特殊解是和 $x(n)$一样形式的指数序列,通常,我们可以假设解的形式为

$$y_p(n)=K(4)^nu(n)$$

然而,我们看到,$y_p(n)$已经包含在齐次解中,这样该特解就是冗余的。因而,我们要选择一个特殊解,它与包含在齐次解中的项线性无关。实际上,我们以处理特征方程多重根的相同方式,来处理这个情形。因此,假设

$$y_p(n)=Kn(4)^nu(n) \tag{2.4.33}$$

将式(2.4.33)代入式(2.4.31),得出

$$Kn(4)^nu(n)-3K(n-1)(4)^{n-1}u(n-1)-4K(n-2)(4)^{n-2}u(n-2)=(4)^nu(n)+2(4)^{n-1}u(n-1)$$

为了求解 K 值,要计算任何 $n\geqslant 2$ 时的方程值,此时单位阶跃的任何一项都不会变成零。为了简化算术运算,选择 $n=2$,由此得出 $K=6/5$。因此,

$$y_p(n)=\frac{6}{5}n(4)^nu(n) \tag{2.4.34}$$

将式(2.4.32)加到式(2.4.34)就得到差分方程的全解。从而

$$y(n)=C_1(-1)^n+C_2(4)^n+\frac{6}{5}n(4)^n,\qquad n\geqslant 0 \tag{2.4.35}$$

其中,常数 C_1 和 C_2 是由初始条件决定的。为了完成 C_1 和 C_2 的计算,回到式(2.4.31),得出

$$y(0)=3y(-1)+4y(-2)+1$$

$$y(1)=3y(0)+4y(-1)+6$$

$$=13y(-1)+12y(-2)+9$$

另一方面,计算式(2.4.35)在 $n=0$ 和 $n=1$ 时刻的值,得出

$$y(0) = C_1 + C_2$$

$$y(1) = -C_1 + 4C_2 + \frac{24}{5}$$

现在我们可以计算这两组方程以获得 C_1 和 C_2。这样做后，我们就得到了由于初始条件 $y(-1)$和 $y(-2)$产生的响应(零输入响应)以及零状态响应。

因为在例 2.4.5 中，我们已经求解了零输入响应，所以我们可以通过令 $y(-1) = y(-2) = 0$ 来简化上面的计算，于是得出

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$-C_1 + 4C_2 + \frac{24}{5} = 9$$

因此，$C_1 = -\frac{1}{25}$，$C_2 = \frac{26}{25}$。最后，得出系统对强迫函数 $x(n) = (4)^n u(n)$的零状态响应，其形式为

$$y_{zs}(n) = -\frac{1}{25}(-1)^n + \frac{26}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n, \qquad n \geqslant 0 \tag{2.4.36}$$

系统的全响应就是式(2.4.23)与式(2.4.36)的和，它包括了对任意初始条件的响应。

2.4.4　线性时不变递归系统的冲激响应

线性时不变系统的冲激响应先前定义为系统对单位采样激励的响应[即 $x(n) = \delta(n)$]。在递归系统的情况下，当输入 $x(n) = \delta(n)$并且系统初始弛豫时，$h(n)$仅等于系统的零状态响应。

例如，在式(2.4.7)给出的简单的一阶递归系统中，式(2.4.8)给出的零状态响应为

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \tag{2.4.37}$$

将 $x(n) = \delta(n)$代入式(2.4.37)，得出

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k \delta(n-k)$$

$$= a^n, \qquad n \geqslant 0$$

因此，正如 2.4.2 节所指出的，由式(2.4.7)所描述的一阶递归系统的冲激响应为

$$h(n) = a^n u(n) \tag{2.4.38}$$

在任意线性时不变递归系统的一般情况下，以卷积和形式表示的零状态响应为

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k), \qquad n \geqslant 0 \tag{2.4.39}$$

当输入是冲激时[即 $x(n) = \delta(n)$]，式(2.4.39)简化为

$$y_{zs}(n) = h(n) \tag{2.4.40}$$

现在，我们来考虑给定线性常系数差分方程所描述的系统的冲激响应的求解问题。根据我们在前面小节中所讨论的，我们已经确立了这样一个事实，即系统对任何激励函数的全响应由差分方程的两个解的和组成：齐次方程的解加上对激励函数的特殊解。对于激励是冲激的情况，特殊解是零，这是因为当 $n > 0$ 时 $x(n) = 0$，即

$$y_p(n) = 0$$

因此，系统对冲激的响应仅仅包括齐次方程的解，其参数值 $\{C_k\}$ 满足初始条件，受到冲激的控制。下面的例子说明了获得给定差分方程系统的 $h(n)$的步骤。

例 2.4.10 计算由二阶差分方程

$$y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n)+2x(n-1) \tag{2.4.41}$$

所描述的系统的冲激响应 $h(n)$。

解:在例 2.4.5 中,我们已经计算了该系统的齐次差分方程的解为

$$y_h(n)=C_1(-1)^n+C_2(4)^n, \qquad n\geqslant 0 \tag{2.4.42}$$

因为当 $x(n)=\delta(n)$时,特殊解为零,所以该系统的冲激响应就仅仅由式(2.4.42)所给出,其中 C_1 和 C_2 必须根据式(2.4.41)进行计算。

对于 $n=0$ 和 $n=1$,由式(2.4.41)得出

$$y(0)=1$$

$$y(1)=3y(0)+2=5$$

这里我们已经令条件 $y(-1)=y(-2)=0$,这是因为系统必须是弛豫的。另一方面,计算式(2.4.42)在 $n=0$ 和 $n=1$ 时刻的值,得出

$$y(0)=C_1+C_2$$

$$y(1)=-C_1+4C_2$$

通过解这两组关于 C_1 和 C_2 的方程,得出

$$C_1=-\frac{1}{5}, \qquad C_2=\frac{6}{5}$$

因此,系统的冲激响应为

$$h(n)=\left[-\frac{1}{5}(-1)^n+\frac{6}{5}(4)^n\right]u(n)$$

对于由式(2.4.13)给出的 N 阶线性差分方程描述的系统,当特征多项式的根 $\{\lambda_k\}$ 不同时,齐次方程的解为

$$y_h(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k\lambda^n k$$

因此,系统的冲激响应在形式上是相同的,即

$$h(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k\lambda_k^n \tag{2.4.43}$$

其中,参数 $\{C_k\}$ 是通过设置初始条件 $y(-1)=\cdots=y(-N)=0$ 进行计算的。

对于由 N 阶差分方程描述系统,$h(n)$的这种形式使我们很容易将系统的稳定性与特征多项式根的值联系起来。实际上,因为 BIBO 稳定要求冲激响应绝对可加,所以,对于一个因果系统,得出

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{N}C_k\lambda^n k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{N}|C_k|\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_k|^n$$

现在,如果对于所有 k,$|\lambda_k|<1$,那么

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_k|^n<\infty$$

从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

另一方面，如果一个或者多个 $|\lambda_k|\geqslant 1$，那么 $h(n)$ 不再是绝对可加，所以系统就是不稳定的。因此，对于一个由线性常系数差分方程描述的因果 IIR 系统，它稳定的充分必要条件是特征多项式的所有根在幅度上小于单位 1。读者可以验证这个条件可以运用到具有 m 重根的系统的情况。

最后，我们注意到，由线性常系数差分方程描述的任何递归系统都是 IIR 系统。然而，反之则不成立，即并不是每个线性时不变 IIR 系统都可以由线性常系数差分方程来描述。换言之，由线性常系数差分方程描述的递归系统是线性时不变 IIR 系统的一个子类。

2.5　离散时间系统的实现

对于离散时间系统的研究，我们主要集中于线性时不变系统的时域特性和分析，线性时不变系统是由常系数线性差分方程进行描述。在下面的两章中，我们将介绍其他的分析方法，从频域描述和分析 LTI 系统的特性。在后面，我们将要讨论的另外两个重要话题是这些系统的设计与实现。

在实际中，系统设计和实现常常是同时而不是分开考虑的。通常，系统设计受到实现方法和实现约束的引导，比如成本、硬件限制、尺寸限制以及功率需求。迄今为止，我们还未介绍解决这些复杂问题所必需的分析和设计工具。然而，对于由线性常系数差分方程描述的 LTI 系统，我们已经介绍了足够的背景知识来考虑它们的某些基本实现方法。

2.5.1　线性时不变系统的实现结构

在这一小节中，我们会介绍由线性常系数方程所描述的系统的实现结构。这些系统的其他结构在将在第 9 章介绍。

首先，考虑一阶系统

$$y(n)=-a_1y(n-1)+b_0x(n)+b_1x(n-1) \tag{2.5.1}$$

它的实现结构如图 2.5.1(a)所示。这种实现方法对输入和输出信号样本采用单独的延迟元件(存储器)，我们称之为直接 I 型结构。注意，这两个系统可以视为两个线性时不变系统的级联。第一个是非递归系统，描述的方程为

$$v(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1) \tag{2.5.2}$$

而第二个是递归系统，描述的方程为

$$y(n)=-a_1y(n-1)+v(n) \tag{2.5.3}$$

然而，正如我们在 2.3.4 节所看到的，如果交换级联的线性时不变系统的次序，那么整个系统的响应保持不变。因此，如果交换该递归和非递归系统的次序，那么就得出式(2.5.1)所描述的系统的另一种实现结构，这个系统如图 2.5.1(b)所示。由这幅图，得到两个差分方程

$$w(n)=-a_1w(n-1)+x(n) \tag{2.5.4}$$

$$y(n)=b_0w(n)+b_1w(n-1) \tag{2.5.5}$$

这提供了计算由单差分方程(2.5.1)所描述的系统输出的另一种算法。换言之，两个差分方程(2.5.4)和(2.5.5)等价于单差分方程(2.5.1)。

进一步观察图 2.5.1，我们发现两个延迟元件包含相同的输入 $w(n)$，从而输出 $w(n-1)$ 也相同。因此，这两个元件可以合并成一个延迟器，如图 2.5.1(c)所示。与直接 I 型结构不同，对于中

间量 $w(n)$,新的实现方式只需要一个延迟器,因此,就存储需求而言,它更加高效。这种实现方法称为直接 II 型结构,在实际中广泛应用。

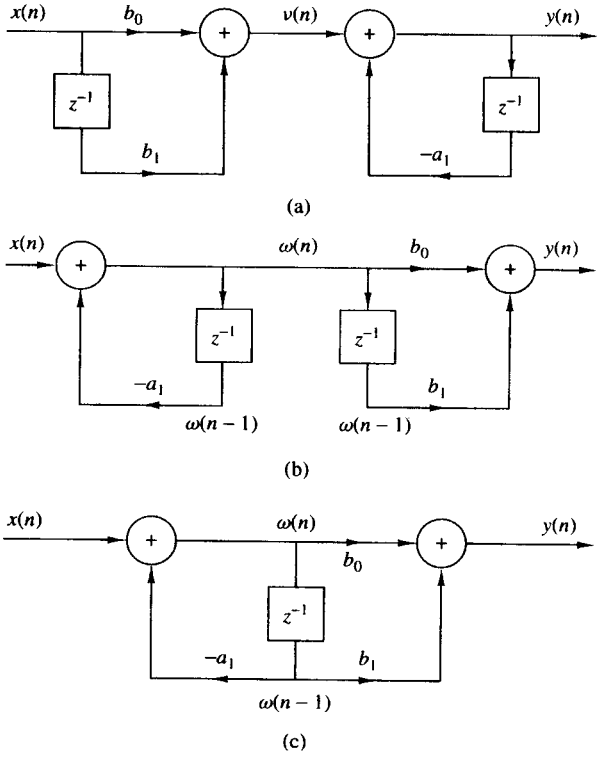


图 2.5.1 从(a)直接实现形式 I 转换到(c)直接实现形式 II 的步骤

这些结构很容易推广到一般的线性时不变递归系统,描述的方程为

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{2.5.6}$$

图 2.5.2 画出了该系统的直接 I 型结构,这个结构需要 $M+N$ 个延迟器和 $N+M+1$ 个乘法器,它可以视为非递归系统

$$v(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{2.5.7}$$

和递归系统

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + v(n) \tag{2.5.8}$$

的级联。

同先前对一阶系统所做的操作一样,颠倒这两个系统的次序,就得到了直接 II 型结构,如图 2.5.3 所示,其中 $N > M$。这个结构是递归系统

$$w(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k w(n-k) + x(n) \tag{2.5.9}$$

及其后的非递归系统

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k w(n-k) \tag{2.5.10}$$

的级联。

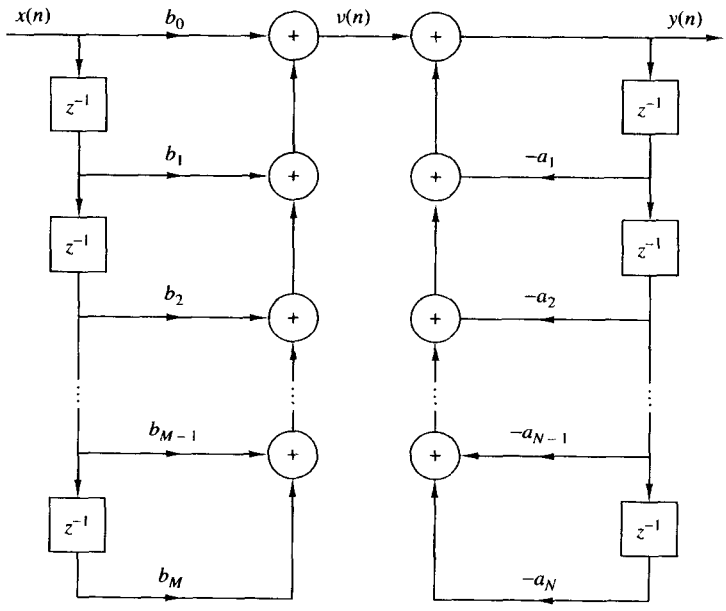


图 2.5.2　式(2.5.6)描述的系统的直接 I 型结构

我们看到，如果 $N\geqslant M$，那么该结构需要的延迟器的数量等于系统的阶 N。然而，如果 $M>N$，那么需要的存储器由 M 指定。图 2.5.3 可以很容易修改以解决这种情况。因此，直接 II 型结构需要 $M+N-1$ 个乘法器和 $\max\{M,N\}$（M，N 的最大值）个延迟器。因为要实现式(2.5.6)描述的系统需要最少数量的延迟器，所以该结构有时也称为规范形式。

如果令系统参数 $a_k=0,k=1,\cdots,N$，就会出现式(2.5.6)的特殊情况，那么系统的输入-输出关系就简化为

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k) \tag{2.5.11}$$

这是一个非递归线性时不变系统，该系统可以视为只将最近的 $M+1$ 个输入信号样本通过$\{b_k\}$集中的适当的系数 b_k 加权后再相加。换言之，系统的输出基本上是输入信号的加权滑动平均。因此，该系统有时也称为滑动平均(MA)系统。这样的系统是冲激响应 $h(k)$等于系数 b_k 的 FIR 系统，即

$$h(k)=\begin{cases}b_k, & 0\leqslant k\leqslant M\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{2.5.12}$$

如果再回到式(2.5.6)并令 $M=0$，那么一般线性时不变系统就简化为完全递归系统，它的差分方程为

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+b_0 x(n) \tag{2.5.13}$$

在这种情况下，系统的输出是 N 个过去输出和当前输入的加权线性组合。

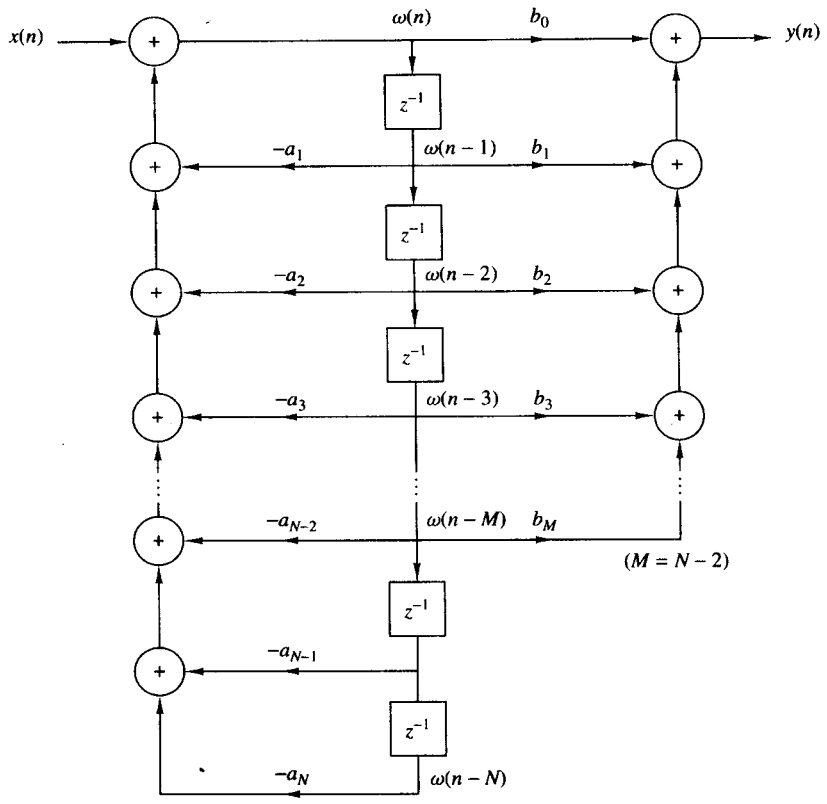


图 2.5.3 式(2.5.6)描述的系统的直接 II 型结构

由二阶差分方程描述的线性时不变系统是由式(2.5.6)、式(2.5.10)或者式(2.5.13)描述的更具一般系统的一个重要子类。在后面讨论量化效果时,我们会解释这些系统重要性的原因。可以肯定地说,迄今为止,二阶系统通常是用来实现高阶系统的基本运算单元。

描述最一般二阶系统的差分方程为

$$\begin{aligned} y(n) = &- a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) \\ &+ b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

这是由式(2.5.6)通过令 $N=2$ 以及 $M=2$ 得到的。实现这种系统的直接 II 型结构如图 2.5.4(a)所示。如果令 $a_1 = a_2 = 0$,那么式(2.5.14)就简化为

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) \tag{2.5.15}$$

这是式(2.5.11)描述的 FIR 系统的一个特殊情况。实现该系统的结构如图 2.5.4(b)所示。最后,如果令式(2.5.14)中的 $b_1 = b_2 = 0$,那么就得到完全二阶递归系统,描述的差分方程为

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) \tag{2.5.16}$$

这是式(2.5.13)的一种特殊情况。实现该系统的结构如图 2.5.4(c)所示。

2.5.2 FIR 系统的递归和非递归实现

基于系统的冲激响应 $h(n)$是有限长的还是无限长的,我们已经能够区分 FIR 和 IIR 系统。我们还能够区分递归和非递归系统。基本上,因果递归系统是由形式为

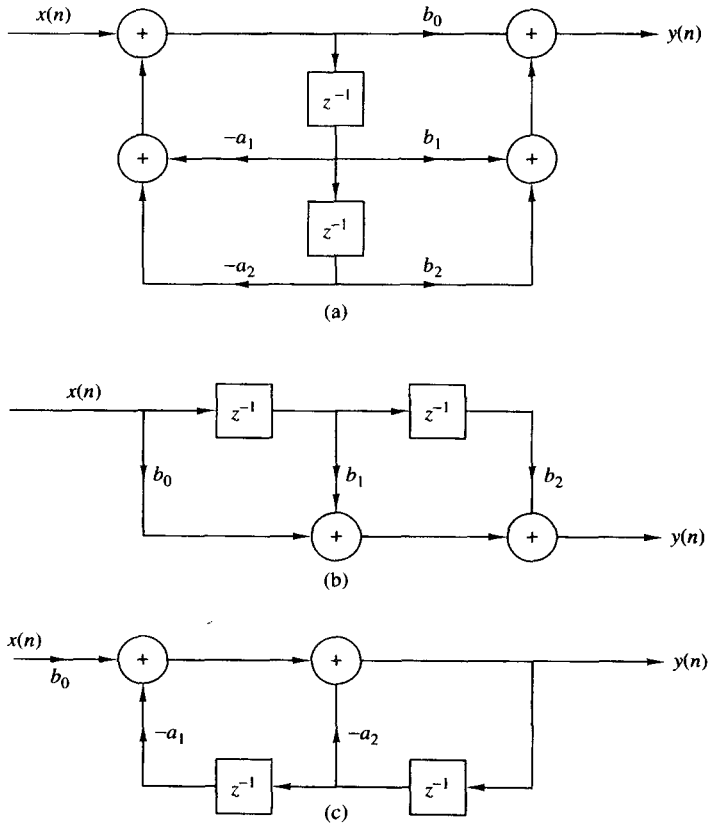


图 2.5.4　二阶系统的实现结构：(a) 一般二阶系统；(b) FIR 系统；(c) 完全递归系统

$$y(n) = F[y(n-1), \cdots, y(n-N), x(n), \cdots, x(n-M)] \tag{2.5.17}$$

的输入-输出方程来描述；而特殊的线性时不变系统是由差分方程

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{2.5.18}$$

来描述。另一方面，因果非递归系统并不依赖于输出的过去值，所以它是由形式为

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \cdots, x(n-M)] \tag{2.5.19}$$

的输入-输出方程来描述的；而对于特殊的线性时不变系统，它是由式(2.5.18)中的差分方程来描述的，其中 $a_k = 0, k = 1, 2, \cdots, N$。

在 FIR 系统的情况下，我们已经看到，通常可以非递归地实现这些系统。实际上，令式(2.5.18)中的 $a_k = 0, k = 1, 2, \cdots, N$，就得到这样的一个非递归 FIR 系统，它的输入-输出方程为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{2.5.20}$$

正如式(2.5.12)所指出的，该系统的冲激响应只等于系数 $\{b_k\}$。因此，每个 FIR 系统可以非递归实现。另一方面，任何 FIR 系统也可以递归地实现。虽然我们在后面会给出这个陈述的一般证明，但现在我们将会以一个简单的例子来说明这一点。

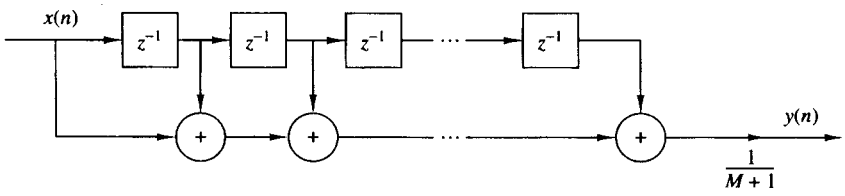


图 2.5.5 FIR 滑动平均系统的非递归实现

假设有一个形式为

$$y(n)=\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M}x(n-k) \tag{2.5.21}$$

的 FIR 系统,现在要计算输入信号 $x(n)$的滑动平均。很明显,该系统是一个冲激响应为

$$h(n)=\frac{1}{M+1},\qquad 0\leqslant n\leqslant M$$

的 FIR 系统。图 2.5.5 画出了该系统的非递归实现结构。现在,假设将式(2.5.21)表示为

$$\begin{aligned}y(n)&=\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M}x(n-1-k)\\&\quad+\frac{1}{M+1}[x(n)-x(n-1-M)]\\&=y(n-1)+\frac{1}{M+1}[x(n)-x(n-1-M)]\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

此时,式(2.5.22)表示了该 FIR 系统的递归实现。这个滑动平均系统的递归实现结构如图 2.5.6 所示。

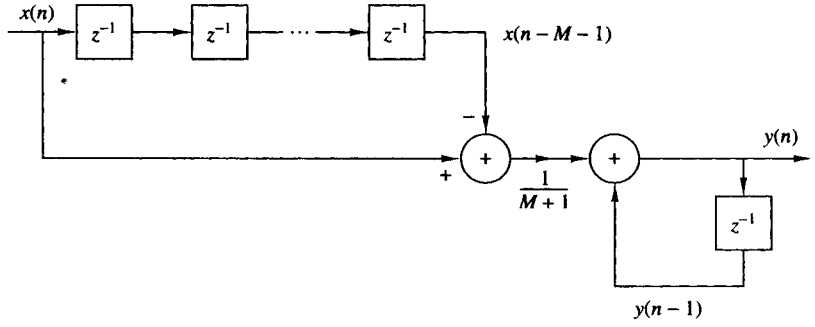


图 2.5.6 FIR 滑动平均系统的递归实现

总之,我们可以把术语 FIR 和 IIR 视为区别线性时不变系统类型的一般特征,而把术语递归和非递归视为系统实现或者执行结构的描述。

2.6 离散时间信号的相关性

同卷积非常相似的一种数学运算是相关性。正如卷积那样,相关运算也是对两个信号序列的操作。然而,与卷积不同的是,计算两个信号相关的目的是衡量两个信号的相似程度,并由此提取在很大程度上应用得到的某些信息。我们经常能在雷达、声纳、数字通信、地质学以及其他科学和工程领域中遇到信号的相关性。

为具体说明，假设 $x(n)$和 $y(n)$是两个要比较的信号序列。在雷达和主动声纳应用上，$x(n)$可以表示传输信号的样本序列，而 $y(n)$可以表示在 A/D 转换器输出端的接收信号样本序列。如果雷达或者声纳在空中搜索到了存在的目标，那么接收信号 $y(n)$中就包含有传输信号的延迟样本，它是从目标反射回来的，并混叠有加性噪声。图 2.6.1 描述了雷达信号接收问题。

我们可以将接收信号序列表示为

$$y(n) = \alpha x(n - D) + w(n) \tag{2.6.1}$$

其中，α 是衰减因子，表示信号 $x(n)$在双程传输中的损失，D 是双程延迟，假设它为采样间隔的整数倍，$w(n)$表示加性噪声，它是由天线拾取的，以及接收器前端的电子设备和放大器产生的任何噪声。另一方面，如果雷达和声纳搜索的空间中没有目标，那么接收信号 $y(n)$就只包含噪声了。

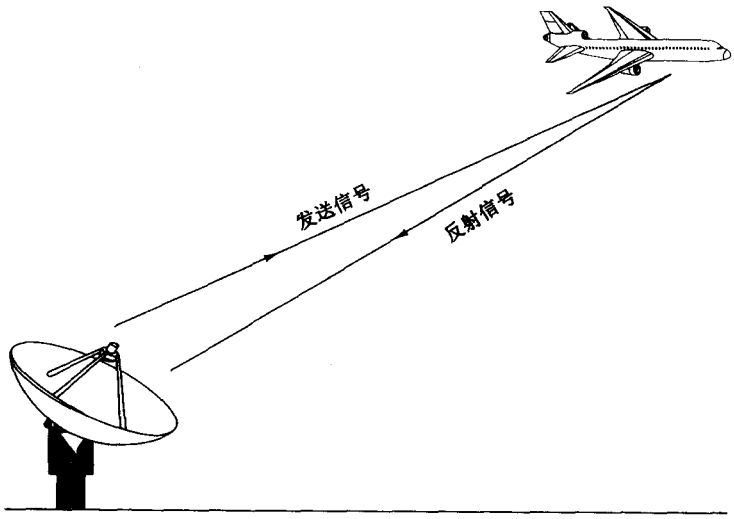


图 2.6.1　雷达目标检测

有了这两个信号序列，即被称为参考信号或者传输信号的 $x(n)$和接收信号 $y(n)$，雷达和声纳检测问题就是比较 $y(n)$和 $x(n)$来确定是否出现目标，如果存在，那么就要求解时间延迟 D 并计算目标距离。实际上，信号 $x(n - D)$会被加性噪声严重污染，以至于视觉上测信号 $y(n)$并不能反映从目标反射的期望信号与否存在。相关性给我们提供了从 $y(n)$中提取重要信息的方法。

数字通信是相关性经常应用的另外一个领域。在数字通信中，从一端传输到另一端的信息通常要转换成二进制形式，即 0,1 序列，然后被发送到目标接收器。为了传送 0，我们可以传送信号序列 $x_0(n)$，$0 \leqslant n \leqslant L-1$，为了传送 1，我们可以传送信号序列 $x_1(n)$，$0 \leqslant n \leqslant L-1$，其中 L 是代表两个序列中每个序列的样本长度的某些整数。通常，$x_1(n)$被选为 $x_0(n)$的负值。目标接收器接收到的信号可以表示成

$$y(n) = x_i(n) + w(n), \qquad i = 0, 1, \qquad 0 \leqslant n \leqslant L-1 \tag{2.6.2}$$

其中，$x_0(n)$或者 $x_1(n)$是否为 $y(n)$的信号分量，目前是不确定的，$w(n)$表示加性噪声以及任何通信系统都存在的其他固有干扰。再次说明，这个噪声源于接收器前端的电子设备。任何情况下，接收器都知道可能的传输序列 $x_0(n)$和 $x_1(n)$，并且面临将接收信号 $y(n)$跟 $x_0(n)$和 $x_1(n)$比较的任务，以确定这两个信号中哪个能与 $y(n)$更好匹配。这个比较过程就是利用以下小节中将要介绍的相关运算来完成的。

2.6.1 互相关和自相关序列

假设有两个实信号序列 $x(n)$和 $y(n)$,每个序列都是有限能量的。$x(n)$和 $y(n)$的互相关是一个序列 $r_{xy}(l)$,它定义为

$$r_{xy}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n-l),\qquad l=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{2.6.3}$$

或等价为

$$r_{xy}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+l)y(n),\qquad l=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{2.6.4}$$

变量 l 是(时间)移位(或延迟)参数,互相关序列 $r_{xy}(l)$的下标 xy 表明了关联的序列。下标顺序,x 在 y 之前,表示一个序列相对于另一个序列的移位方向。为详细说明这一点,在式(2.6.3)中,序列 $x(n)$未移动,而 $y(n)$在时间上移动 l 个单元,向右移动则 l 为正,向左移动则 l 为负。同样,在式(2.6.4)中,$y(n)$未移动,而 $x(n)$在时间上移动 l 个单元,向左移动则 l 为正,向右移动则 l 为负。但是由于 $x(n)$相对于 $y(n)$向左移动 l 个单元等价于 $y(n)$相对于 $x(n)$向右移动 l 个单元,因此,计算式(2.6.3)和式(2.6.4)得到相同的互相关序列。

如果将式(2.6.3)和式(2.6.4)中的 $x(n)$和 $y(n)$调换一下,那么就要相应地调换变量 xy,得到的互相关序列为

$$r_{yx}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)x(n-l) \tag{2.6.5}$$

或等价为

$$r_{yx}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n+l)x(n) \tag{2.6.6}$$

通过比较式(2.6.3)和式(2.6.6)或者式(2.6.4)和式(2.6.5),得出结论

$$r_{xy}(l)=r_{yx}(-l) \tag{2.6.7}$$

所以,$r_{yx}(l)$正是 $r_{xy}(l)$的偶对称序列,它们关于 $l=0$ 对称。因此,关于 $x(n)$和 $y(n)$的相似性,$r_{yx}(l)$提供跟 $r_{xy}(l)$完全一样的信息。

例 2.6.1 计算序列 $x(n)$和 $y(n)$的互相关序列 $r_{xy}(l)$:

$$x(n)=\{\cdots,0,0,2,-1,3,7,\underset{\uparrow}{1},2,-3,0,0,\cdots\}$$

$$y(n)=\{\cdots,0,0,1,-1,2,-2,\underset{\uparrow}{4},1,-2,5,0,0,\cdots\}$$

解:用式(2.6.3)给出的定义式计算 $r_{xy}(l)$。对于 $l=0$,有

$$r_{xy}(0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)$$

乘积序列 $v_0(n)=x(n)y(n)$为

$$v_0(n)=\{\cdots,0,0,2,1,6,-14,\underset{\uparrow}{4},2,6,0,0,\cdots\}$$

因此将所有的值相加得到

$$r_{xy}(0)=7$$

对于 $l>0$，只要将 $y(n)$相对于 $x(n)$向右移动 l 个单元，计算乘积序列 $v_l(n)=x(n)y(n-l)$，最后将乘积序列的所有值相加，这样就得到

$$r_{xy}(1)=13,\quad r_{xy}(2)=-18,\quad r_{xy}(3)=16,\quad r_{xy}(4)=-7$$
$$r_{xy}(5)=5,\quad r_{xy}(6)=-3,\quad r_{xy}(l)=0,\quad l\geqslant 7$$

对于 $l<0$，将 $y(n)$相对于 $x(n)$向左移动 l 个单元，计算乘积序列 $v_l(n)=x(n)y(n-l)$，然后将乘积序列的所有值相加，这样我们就得到各个互相关序列的值：

$$r_{xy}(-1)=0,\quad r_{xy}(-2)=33,\quad r_{xy}(-3)=-14,\quad r_{xy}(-4)=36$$
$$r_{xy}(-5)=19,\quad r_{xy}(-6)=-9,\quad r_{xy}(-7)=10,\quad r_{xy}(l)=0,\ l\leqslant -8$$

所以，$x(n)$和 $y(n)$的互相关序列为

$$r_{xy}(l)=\{10,-9,19,36,-14,33,0,\underset{\uparrow}{7},13,-18,16,-7,5,-3\}$$

计算两个序列的互相关性和计算它们的卷积之间的相似性是显而易见的。在卷积计算中，其中一个序列被反转，再平移，然后乘以另一个序列得到乘积序列，最后，将乘积序列的所有值相加。除了反转操作以外，计算互相关序列包含相同的操作：平移一个序列，将两个序列相乘，再将乘积序列的所有值相加。所以，如果我们有一段执行卷积运算的程序，那么通过将序列 $x(n)$和反转序列 $y(-n)$作为程序的输入，就可以用它来执行互相关运算。于是，$x(n)$和 $y(-n)$卷积就是互相关序列 $r_{xy}(l)$，即

$$r_{xy}(l)=x(l)*y(-l) \tag{2.6.8}$$

我们注意到，缺少反转操作就会使得互相关成为不可交换的运算。在 $y(n)=x(n)$的特特殊情况下，得到 $x(n)$的自相关，定义为

$$r_{xx}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n-l) \tag{2.6.9}$$

或等价为

$$r_{xx}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+l)x(n) \tag{2.6.10}$$

在处理有限长序列时，习惯上将自相关和互相关表示成有限和形式。特别地，如果 $x(n)$和 $y(n)$是长为 N 的因果序列[即 $n<0$ 和 $n\geqslant N$ 时，$x(n)=y(n)=0$]，那么互相关序列和自相关序列就可以表示成

$$r_{xy}(l)=\sum_{n=l}^{N-|k|-1}x(n)y(n-l) \tag{2.6.11}$$

和

$$r_{xx}(l)=\sum_{n=i}^{N-|k|-1}x(n)x(n-l) \tag{2.6.12}$$

其中，$l\geqslant 0$ 时 $i=l,k=0$，并且 $l<0$ 时 $i=0,k=l$。

2.6.2　自相关和互相关序列的性质

现在，我们来讲解自相关和互相关序列的许多重要性质。为了得出这些性质，假设有两个能量有限序列 $x(n)$和 $y(n)$，用它们构成线性组合

$$ax(n)+by(n-l)$$

其中,a 和 b 是任意常数,l 是一定的时间平移。这个信号的能量为

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[ax(n)+by(n-l)]^2 &= a^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^2(n)+b^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}y^2(n-l)\\ &\quad +2ab\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n-l)\\ &= a^2r_{xx}(0)+b^2r_{yy}(0)+2abr_{xy}(l)\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

首先,我们注意到 $r_{xx}(0)=E_x$ 且 $r_{yy}(0)=E_y$,它们分别是 $x(n)$和 $y(n)$的能量。很明显,

$$a^2r_{xx}(0)+b^2r_{yy}(0)+2abr_{xy}(l)\geqslant 0 \tag{2.6.14}$$

现在,假设 $b\neq 0$,将式(2.6.14)除以 b^2 得到

$$r_{xx}(0)\left(\frac{a}{b}\right)2+2r_{xy}(l)\left(\frac{a}{b}\right)+r_{yy}(0)\geqslant 0$$

我们把这个方程视为系数为 $r_{xx}(0)$,$2r_{xy}(l)$和 $r_{yy}(0)$的二次方程式。因为这个二次方程是非负的,所以这个方程的判别式一定是非正的,即

$$4[r_{xy}^2(l)-r_{xx}(0)r_{yy}(0)]\leqslant 0$$

因此,互相关序列满足条件

$$|r_{xy}(l)|\leqslant\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}=\sqrt{E_xE_y} \tag{2.6.15}$$

在 $y(n)=x(n)$的特殊情况下,式(2.6.15)简化为

$$|r_{xx}(l)|\leqslant r_{xx}(0)=E_x \tag{2.6.16}$$

这就意味着信号的自相关序列在零延迟处得到它的最大值。这个结果跟一个信号在零移位时与它自身很好地匹配的概念是完全一致的。在互相关序列情况下,式(2.6.15)给出了它的上界值。

注意,互相关运算中的任意一个或两个信号缩放后,互相关序列的形状并不发生改变,仅仅是互相关序列的幅度被相应的改变。既然缩放不重要,那么在实际中,通常需要将自相关和互相关序列归一化到 -1 至 1 的范围。在自相关序列情况下,只要除以 $r_{xx}(0)$就可以了。因此,这个归一化的自相关序列定义为

$$\rho_{xx}(l)=\frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)} \tag{2.6.17}$$

类似地,归一化的互相关序列定义为

$$\rho_{xy}(l)=\frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}} \tag{2.6.18}$$

现在,$|\rho_{xx}(l)|\leqslant 1$ 且 $|\rho_{xy}(l)|\leqslant 1$,因此,这些序列跟信号的缩放无关。

最后,正如我们已经说明的,互相关序列满足性质

$$r_{xy}(l)=r_{yx}(-l)$$

令 $y(n)=x(n)$,这个关系式可以导出自相关序列的如下重要性质:

$$r_{xx}(l)=r_{xx}(-l) \tag{2.6.19}$$

所以自相关函数是偶函数,因此,计算 $l\geqslant 0$ 的 $r_{xx}(l)$就足够了。

例 2.6.2　计算信号 $x(n)=a^n u(n),0<a<1$ 的自相关序列。

解：因为 $x(n)$是无限长信号，它的自相关序列也是无限长的。我们要区别两种情况：

如果 $l\geqslant 0$，从图 2.6.2 可以看出

$$r_{xx}(l)=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)x(n-l)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n a^{n-l}=a^{-l}\sum_{n=1}^{\infty}(a^2)^n$$

因为 $a<1$，所以无限级数是收敛的，从而得出

$$r_{xx}(l)=\frac{1}{1-a^2}a^{|l|},\qquad l\geqslant 0$$

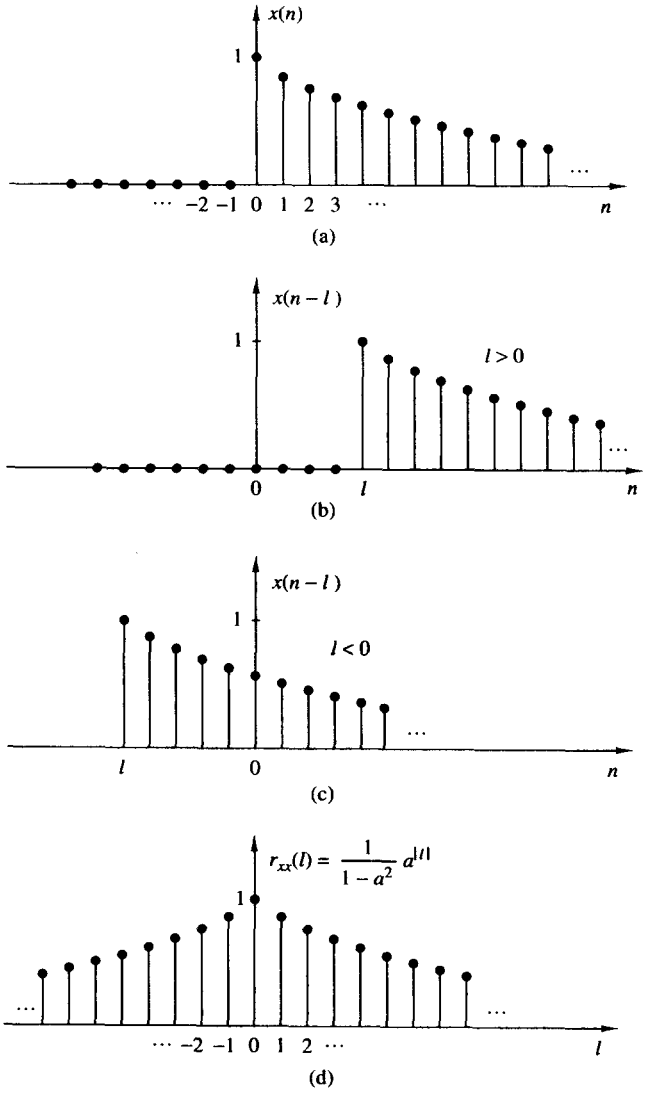


图 2.6.2　信号 $x(n)=a^n$ 的自相关计算，$0<a<1$

对于 $l<0$，有

$$r_{xx}(l)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)x(n-l)=a^{-l}\sum_{n=0}^{\infty}(a^2)^n=\frac{1}{1-a^2}a^{-l},\qquad l<0$$

但当 l 为负时，$a^{-l}=a^{|l|}$，这时 $r_{xx}(l)$ 的两个关系式可以组合成下面的表达式：

$$r_{xx}(l)=\frac{1}{1-a^2}a^{|l|},\qquad -\infty<l<\infty \tag{2.6.20}$$

序列 $r_{xx}(l)$ 如图 2.6.2(d)所示。可以看出

$$r_{xx}(-l)=r_{xx}(l)$$

并且

$$r_{xx}(0)=\frac{1}{1-a^2}$$

因此，归一化后的自相关序列为

$$\rho_{xx}(l)=\frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)}=a^{|l|},\qquad -\infty<l<\infty \tag{2.6.21}$$

2.6.3 周期序列的相关性

在 2.6.1 节，我们定义了能量信号的自相关和互相关序列，这一节我们来考虑功率信号，特别是周期信号的自相关序列。

设 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是两个功率信号，它们的互相关序列定义为

$$r_{xy}(l)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}x(n)y(n-l) \tag{2.6.22}$$

如果 $x(n)=y(n)$，那么就得到功率信号的自相关序列定义

$$r_{xx}(l)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}x(n)x(n-l) \tag{2.6.23}$$

特别地，如果 $x(n)$ 和 $y(n)$ 都是两个周期为 N 的周期信号，那么式(2.6.22)和式(2.6.23)中的无限区间平均完全等同于单个周期的平均，这样式(2.6.22)和式(2.6.23)就简化为

$$r_{xy}(l)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y(n-l) \tag{2.6.24}$$

和

$$r_{xx}(l)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x(n-l) \tag{2.6.25}$$

显然 $r_{xy}(l)$ 和 $r_{xx}(l)$ 都是周期为 N 的周期性相关序列，因子 $1/N$ 可以视为归一化比例因子。

在一些实际应用中，相关性被用于鉴别观测的物理信号的周期，这个物理信号可能已被随机噪声干扰污染过。例如，假设一个信号序列 $y(n)$ 为

$$y(n)=x(n)+w(n) \tag{2.6.26}$$

其中，$x(n)$ 是周期性序列，其周期 N 未知，$w(n)$ 表示加性随机干扰噪声。假设观测 $y(n)$ 的 M 个样本，即 $0\leqslant n\leqslant M-1$，其中 $M\gg N$。为了达到实用的目的，我们可以假设在 $n<0$ 和 $n\geqslant M$ 时，$y(n)=0$。现在，使用归一化因子 $1/M$，$y(n)$ 的自相关序列为

$$r_{yy}(l)=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}y(n)y(n-l) \tag{2.6.27}$$

若把式(2.6.26)中的 $y(n)$ 代入式(2.6.27)，得到

$$
\begin{aligned}
r_{yy}(l) &= \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}[x(n)+w(n)][x(n-l)+w(n-l)] \\
&= \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}x(n)x(n-l) \\
&\quad + \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}[x(n)w(n-l)+w(n)x(n-l)] \\
&\quad + \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}w(n)w(n-l) \\
&= r_{xx}(l)+r_{xw}(l)+r_{wx}(l)+r_{ww}(l)
\end{aligned}
\tag{2.6.28}
$$

式(2.6.28)右边第一个因式是 $x(n)$的自相关序列。因为 $x(n)$是周期性的,所以它的自相关序列具有相同的周期。因此,它在 $l=0,N,2N$ 等处,含有相对较大的峰值。然而,当平移 l 趋于M时,峰值在幅度上会减小,这是由于实际只有有限 M 个数据样本,以至于许多 $x(n)x(n-l)$的乘积都为零,因此,我们应该避免计算较大延迟时的 $r_{yy}(l)$,比如说 $l>M/2$。

信号 $x(n)$和加性随机噪声干扰 $w(n)$的互相关 $r_{xw}(l)$和 $r_{wx}(l)$可以认为相对很小,因为 $x(n)$和 $w(n)$完全无关。最后,式(2.6.28)右边最后一项是随机序列 $w(n)$的自相关序列。这个相关性序列在 $l=0$ 处必定有个峰值,但是由于它的随机特性,$r_{ww}(l)$将快速衰减到零。因此,$r_{xx}(l)$只有在 $l>0$ 时才有较大的峰值,这种特性使我们能够检测出淹没在干扰 $w(n)$中的周期信号 $x(n)$的存在,并确定它的周期。

图 2.6.3 给出了利用自相关从观测的物理信号中检测隐藏周期的实例。这幅图画出了在 1770 年至 1869 年这 100 年内,乌夫太阳黑子数目的自相关序列。其中 $0\leqslant l\leqslant 20$,l 的任何值都对应于一年。这个图形存在明显的周期性,其周期为 10 到 11 年。

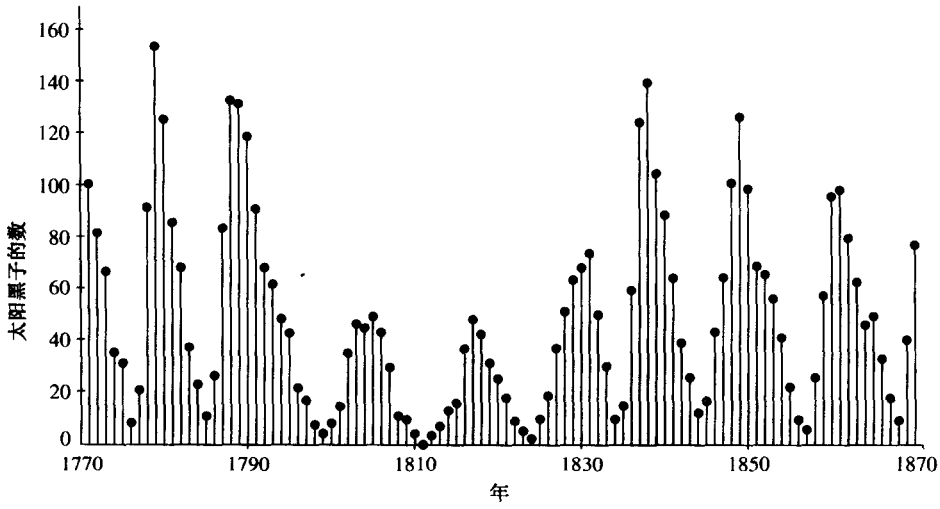
例 2.6.3　如果信号序列 $x(n)=\sin(\pi/5)n, 0\leqslant n\leqslant 99$,受到加性噪声序列 $w(n)$的污染,其中加性噪声样本值之间是相互独立的,且在区间$(-\Delta/2,\Delta/2)$内服从均匀分布,其中 Δ 是分布参数。观测的序列为 $y(n)=x(n)+w(n)$。试计算自相关序列 $r_{yy}(l)$,并确定信号 $x(n)$的周期。

解:假定信号 $x(n)$具有某个未知的周期,我们试图从受噪声污染的观测值$\{y(n)\}$中计算出这个周期。虽然 $x(n)$的周期为 10,但是我们只有长为 $M=100$ 的有限长序列[即 $x(n)$的 10 个周期]。序列 $w(n)$中的噪声功率级别 P_w 由参数 Δ 确定。我们仅说明 $P_w=\Delta^2/12$,信号功率级别 $P_x=\frac{1}{2}$。因此,信噪比(SNR)定义为

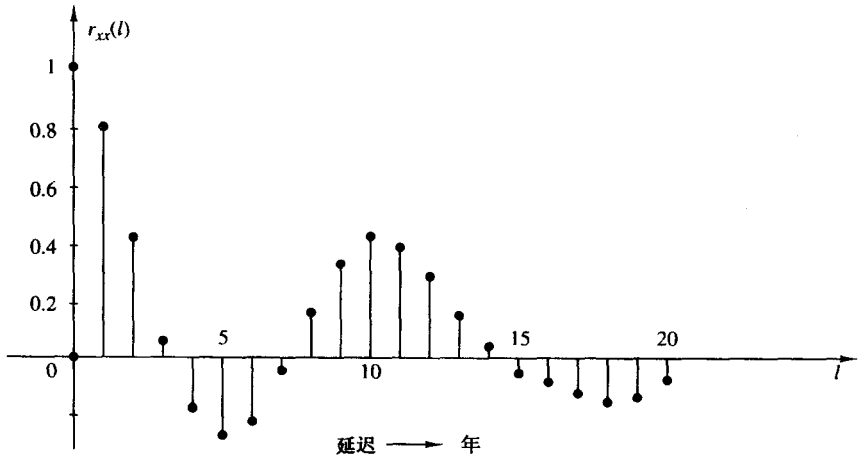
$$
\frac{P_x}{P_w}=\frac{\frac{1}{2}}{\Delta^2/12}=\frac{6}{\Delta^2}
$$

通常,将 SNR 表示成形如 $10\lg(P_x/P_w)$的比例对数的形式,单位为分贝(dB)。

图 2.6.4 画出了噪声序列样本 $w(n)$以及当 SNR = 1 dB 时的观测序列 $y(n)=x(n)+w(n)$。自相关序列 $r_{yy}(l)$如图 2.6.4(c)所示。我们注意到,隐藏于 $y(n)$中的周期信号 $x(n)$,使得周期自相关函数 $r_{xx}(l)$的周期 $N=10$。加性噪声的影响是,增加了在 $l=0$ 处的峰值,而对于 $l\neq 0$ 时,相关序列 $r_{ww}(l)\approx 0$,这是由于 $w(n)$值的产生是相互独立的。这样的噪声通常称为白噪声,这个噪声的存在说明了在 $l=0$ 时有大的峰值的原因。由于 $x(n)$的周期特性,在 $l=\pm 10,\pm 20,\cdots$处存在幅度稍小但几乎相等的峰值。



(a)



(b)

图 2.6.3 乌夫黑子数目的周期识别:(a)每年的乌夫黑子数目;(b)归一化后的自相关序列

2.6.4 输入-输出相关序列

在这一节,我们将推导 LTI 系统在"相关域"中的两个输入-输出关系式。假设一个自相关为 $r_{xx}(l)$的信号 $x(n)$作用到冲激响应为 $h(n)$的 LTI 系统,产生输出信号

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

输出和输入信号之间的互相关为

$$r_{yx}(l) = y(l) * x(-l) = h(l) * [x(l) * x(-l)]$$

或者

$$r_{yx}(l) = h(l) * r_{xx}(l) \tag{2.6.29}$$

这里利用了式(2.6.8)和卷积性质。因此，系统输入和输出之间的互相关就是冲激响应与输入序列自相关之间的卷积。或者说，$r_{yx}(l)$可以视为当输入序列为 $r_{xx}(l)$时 LTI 系统的输出，如图 2.6.5 所示。如果用 $-l$ 代替式(2.6.29)中的 l，那么就得出

$$r_{xy}(l) = h(-l) * r_{xx}(l)$$

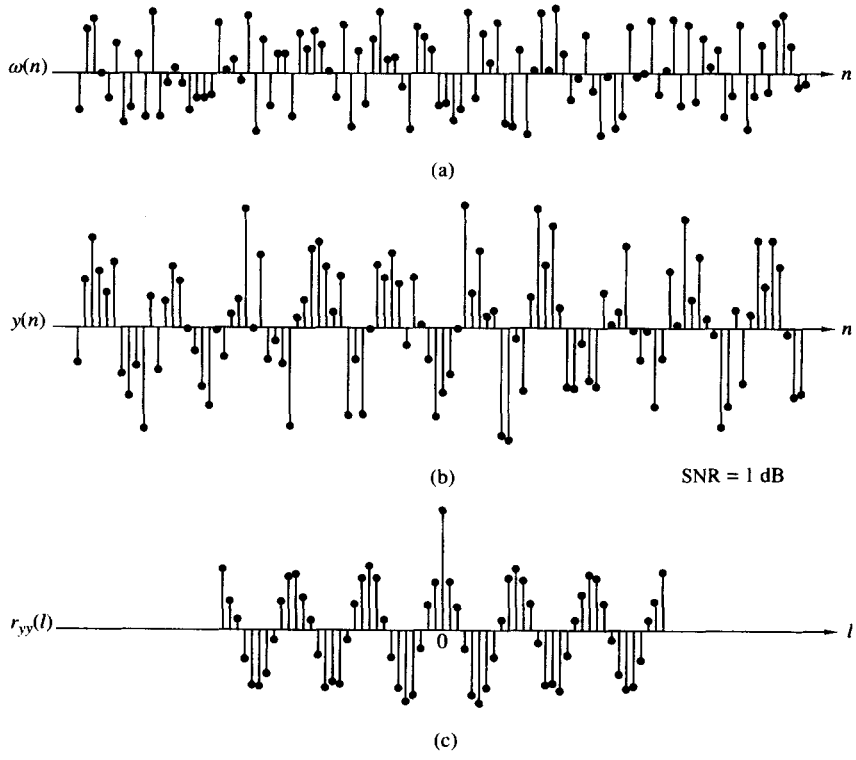


图 2.6.4　利用自相关来检测受到噪声污染的周期信号的存在

令 $x(n) = y(n)$，并利用式(2.6.8)和卷积性质，就可以得到输出信号的自相关，因此有

$$\begin{aligned} r_{yy}(l) &= y(l) * y(-l) \\ &= [h(l) * x(l)] * [h(-l) * x(-l)] \\ &= [h(l) * h(-l)] * [x(l) * x(-l)] \\ &= r_{hh}(l) * r_{xx}(l) \end{aligned} \tag{2.6.30}$$

如果系统是稳定的，那么冲激响应 $h(n)$的自相关 $r_{hh}(l)$就存在。此外，稳定性保证了系统不改变输入信号的类型(能量或者功率)。通过计算式(2.6.30)有 $l=0$ 处的值就得到

$$r_{yy}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{hh}(k) r_{xx}(k) \tag{2.6.31}$$

这就给出了以自相关形式表示的输出信号的能量(或者功率)。这些关系式对于能量和功率信号都成立。能量和功率信号的这些关系式的直接推导以及对于复指数信号的扩展，将留给读者作为练习。

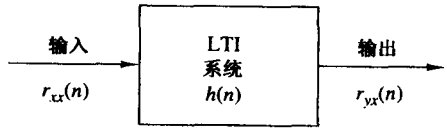


图 2.6.5　互相关 $r_{yx}(n)$的输入-输出关系

2.7 小结与参考文献

本章的主要内容是描述离散时间信号和系统的时域特性。尤其重要的是在设计和实现数字信号处理系统中广泛应用的一类线性时不变系统(LTI)。我们通过单位冲激响应 $h(n)$描述了 LTI 系统的特性,并推导出了卷积和,它是用来计算以 $h(n)$为特征的系统对任何给定输入序列 $x(n)$的响应 $y(n)$的公式。

迄今为止,由线性常系数差分方程描述的这一类 LTI 系统在理论上和数字信号处理应用中是最为重要的 LTI 系统。本章推导了常系数线性差分方程的通解,它们包括两部分:齐次方程的解——它表示输入为零时的系统自由响应;特殊解——它表示系统对输入信号的响应。我们还展示了如何从差分方程中求解 LTI 系统的单位采样响应。

根据 $h(n)$是有限长还是无限长,线性时不变系统一般分别再分为 FIR(有限长冲激响应)和 IIR(无限长冲激响应),我们对这些系统的实现也做了简要的介绍。此外,在 FIR 系统实现上,介绍了递归和非递归实现的区别。另一方面,我们注意到 IIR 系统只能递归实现。

关于离散时间信号和系统有许多参考书目,包括 McGillem 和 Cooper(1984),Oppenheim 和 Willsky(1983),以及 Siebert(1986)编写的书籍。对于线性常系数差分方程,Hildebrand(1952)、Levy 和 Lessman(1961)的书籍进行了深入的研究。

本章的最后一个话题是离散时间信号的相关性,这在数字信号处理尤其是数字通信、雷达检测与估计、声纳、地理物理学的应用中扮演着非常重要的角色。在处理相关性序列时,我们避免使用统计学的观点。相关性仅仅定义为在两个序列之间产生另外一个序列的一种数学运算,当这两个序列不同时,产生的序列称为互相关序列,相同时称为自相关序列。

在相关性的实际应用中,序列中的一个(或者两个)被噪声以及其他可能形式的干扰所污染,在这种情况下,噪声序列称为随机序列,并以统计学术语描述,相应的相关序列就成为噪声和任何其他干扰的统计特性的函数。

序列的统计特性和它们的相关性将在第 12 章介绍。与相关性有关的概率和统计学的补充材料,可以参考 Davenport(1970),Helstrom(1990),Peebles(1987)以及 Stark 和 Woods(1994)编写的书籍。

习题

2.1 一个离散时间信号 $x(n)$定义为

$$x(n)=\begin{cases}1+\frac{n}{3}, & -3\leqslant n\leqslant -1\\ 1, & 0\leqslant n\leqslant 3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(a) 计算信号 $x(n)$的值并画出它的图形。

(b) 若有以下情况,画出其图形:

1. 先将 $x(n)$反转再延迟 4 个样本单位。
2. 先将 $x(n)$延迟 4 个样本单位再反转。

(c) 画出信号 $x(-n+4)$的图形。

(d) 比较(b)和(c)部分的结果并推导由 $x(n)$得到 $x(-n+k)$的规律。

(e) 你能用信号 $\delta(n)$和 $u(n)$来表示信号 $x(n)$吗?

2.2 一个离散时间信号 $x(n)$如图 P2.2 所示,试画出并仔细标出下面的每个信号。

(a) $x(n-2)$

(b) $x(4-n)$

(c) $x(n+2)$

(d) $x(n)u(2-n)$

(e) $x(n-1)\delta(n-3)$

(f) $x(n^2)$

(g) $x(n)$的偶数部分

(h) $x(n)$的奇数部分

2.3 证明

(a) $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

(b) $u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$

2.4 证明任何信号都可以分解成奇数和偶数分量。这个分解是唯一的吗？用下面这个信号说明你的观点：

$$x(n) = \{2, 3, \underset{\uparrow}{4}, 5, 6\}$$

2.5 证明实数能量(功率)信号的能量(功率)等于其偶数和奇数分量的能量(功率)之和。

2.6 考虑系统

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = x(n^2)$$

(a) 确定系统是否为时不变的。

(b) 若用信号

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

作用于该系统，阐述(a)部分的结论。

(1) 画出信号 $x(n)$的图形。

(2) 计算并画出信号 $y(n) = \mathcal{T}[x(n)]$。

(3) 画出信号 $y_2'(n) = y(n-2)$。

(4) 计算并画出信号 $x_2(n) = x(n-2)$。

(5) 计算并画出信号 $y_2(n) = \mathcal{T}[x_2(n)]$。

(6) 比较信号 $y_2(n)$和 $y(n-2)$，你可以得出什么结论？

(c) 对于系统

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

重复(b)部分；你能用这个结果，对该系统的时不变性给出一些结论吗？为什么？

(d) 对于系统

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = nx(n)$$

重复(b)和(c)部分。

2.7 一个离散时间系统可以是

(1) 静态或者动态的，

(2) 线性或者非线性的，

(3) 时不变或者时变的，

(4) 因果或者非因果的，

(5) 稳定或者不稳定的。

判断下列系统满足上述的哪一条性质。

(a) $y(n) = \cos[x(n)]$

(b) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)$

(c) $y(n)=x(n)\cos(\omega_0 n)$

(d) $y(n)=x(-n+2)$

(e) $y(n)=\mathrm{Trun}[x(n)]$,其中 $\mathrm{Trun}[x(n)]$表示通过截取得到的 $x(n)$的整数部分

(f) $y(n)=\mathrm{Round}[x(n)]$,其中 $\mathrm{Round}[x(n)]$表示通过四舍五入得到的 $x(n)$的整数部分

注意:(e)和(f)中的系统分别是由截取和四舍五入实现的量化器。

(g) $y(n)=|x(n)|$

(h) $y(n)=x(n)u(n)$

(i) $y(n)=x(n)+nx(n+1)$

(j) $y(n)=x(2n)$

(k) $y(n)=\begin{cases}x(n) & \text{若 } x(n)\geqslant 0\\ 0 & \text{若 } x(n)<0\end{cases}$

(l) $y(n)=x(-n)$

(m) $y(n)=\mathrm{sign}[x(n)]$

(n) 输入为 $x_a(t)$且输出为 $x(n)=x_a(nT)$的理想采样系统,$-\infty<n<\infty$

2.8 两个离散时间系统$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$级联形成一个新的系统$\mathcal{T}$,如图 P2.8 所示,证明或者反驳下面的观点。

(a) 若$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$是线性的,那么$\mathcal{T}$也是线性的(即两个线性系统的级联也是线性的)。

(b) 若$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$是时不变的,那么$\mathcal{T}$也是时不变的。

(c) 若$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$是因果的,那么$\mathcal{T}$也是因果的。

(d) 若$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$是线性时不变的,那么$\mathcal{T}$也具有同样的特征。

(e) 若$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$是线性时不变的,那么改变$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$的次序并不改变系统$\mathcal{T}$。

(f) (e)中$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$除了时变外,其他条件不变(提示:举例说明)。

(g) 若$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$是非线性的,那么$\mathcal{T}$也是非线性的。

(h) 若$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$是稳定的,那么$\mathcal{T}$也是稳定的。

(i) 通过例子说明,对于(c)和(h)的性质,一般反之不成立。

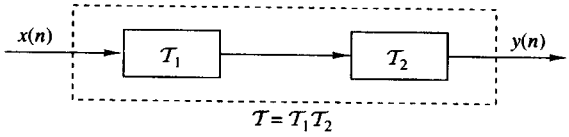


图 P2.8

2.9 假设$\mathcal{T}$是 BIBO 稳定的 LTI 弛豫系统,它的输入为 $x(n)$,输出为 $y(n)$的。证明:

(a) 若 $x(n)$是周期为 N 的周期信号[即对于所有 $n\geqslant 0, x(n)=x(n+N)$],那么输出 $y(n)$将是趋于同样周期的周期性信号。

(b) 若 $x(n)$有界且趋于某个常数,那么输出也趋于一个常数。

(c) 若 $x(n)$是能量信号,那么输出 $y(n)$也将是个能量信号。

2.10 在时不变系统运算中,观测到了如下输入-输出对:

$$x_1(n)=\{\underset{\uparrow}{1},0,2\}\xleftrightarrow{\mathcal{T}} y_1(n)=\{\underset{\uparrow}{0},1,2\}$$

$$x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{0},0,3\}\xleftrightarrow{\mathcal{T}} y_2(n)=\{\underset{\uparrow}{0},1,0,2\}$$

$$x_3(n)=\{\underset{\uparrow}{0},0,0,1\}\xleftrightarrow{\mathcal{T}} y_3(n)=\{1,\underset{\uparrow}{2},1\}$$

你能总结出关于该系统的线性结论吗?系统的冲激响应是什么?

2.11 在时不变系统的线性运算中，观测到了如下输入-输出对：

$$x_1(n)=\{-1,\underset{\uparrow}{2},1\}\xrightarrow{\mathcal{T}}y_1(n)=\{1,\underset{\uparrow}{2},-1,0,1\}$$

$$x_2(n)=\{1,\underset{\uparrow}{-1},-1\}\xrightarrow{\mathcal{T}}y_2(n)=\{-1,\underset{\uparrow}{1},0,2\}$$

$$x_3(n)=\{0,\underset{\uparrow}{1},1\}\xrightarrow{\mathcal{T}}y_3(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,1\}$$

你能总结出关于该系统的时不变性的结论吗？

2.12 对于一个系统，唯一可用的信息就是 N 个输入-输出对，即信号 $y_i(n)=\mathcal{T}[x_i(n)],i=1,2,\cdots,N$。

(a) 若已知系统是线性的，那么用以上信息，哪一类的输入信号能够求解出输出？

(b) 若系统是时不变的，其他条件同上，那么结果又怎样？

2.13 证明弛豫 LTI 系统 BOBI 稳定性的充分必要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|\leqslant M_h<\infty$$

其中 M_h 为常数。

2.14 证明：

(a) 弛豫线性系统是因果的当且仅当对于任何输入 $x(n)$满足

$$x(n)=0\qquad n<n_0\Rightarrow y(n)=0\qquad n<n_0$$

(b) 弛豫 LTI 系统是因果的当且仅当

$$h(n)=0\qquad n<0$$

2.15 (a) 证明对于任何实数或复常数 a，以及任何有限整数 M 和 N，有

$$\sum^{N}n=Ma^n=\begin{cases}\dfrac{a^M-a^{N+1}}{1-a},&\text{若 }a\neq1\\N-M+1,&\text{若 }a=1\end{cases}$$

(b) 证明若 $|a|<1$，那么

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\frac{1}{1-a}$$

2.16 (a) 如果 $y(n)=x(n)*h(n)$，证明 $\sum_y=\sum_x\sum_h$，其中 $\sum_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)$。

(b) 计算下列信号的卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$，并用(a)中的结果验证其结果的正确性。

(1) $x(n)=\{1,2,4\},h(n)=\{1,1,1,1,1\}$

(2) $x(n)=\{1,2,-1\},h(n)=x(n)$

(3) $x(n)=\{0,1,-2,3,-4\},h(n)=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\}$

(4) $x(n)=\{1,2,3,4,5\},h(n)=\{1\}$

(5) $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},-2,3\},h(n)=\{\underset{\uparrow}{0},0,1,1,1,1\}$

(6) $x(n)=\{\underset{\uparrow}{0},0,1,1,1,1\},h(n)=\{1,\underset{\uparrow}{-2},3\}$

(7) $x(n)=\{\underset{\uparrow}{0},1,4,-3\},h(n)=\{\underset{\uparrow}{1},0,-1,-1\}$

(8) $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},1,2\},h(n)=u(n)$

(9) $x(n)=\{1,1,\underset{\uparrow}{0},1,1\}, h(n)=\{1,-2,-3,\underset{\uparrow}{4}\}$

(10) $x(n)=\{1,2,\underset{\uparrow}{0},2,1\} h(n)=x(n)$

(11) $x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n), h(n)=(\frac{1}{4})^n u(n)$

2.17 计算并画出图 P2.17 中几对信号的卷积 $x(n)*h(n)$和 $h(n)*x(n)$。

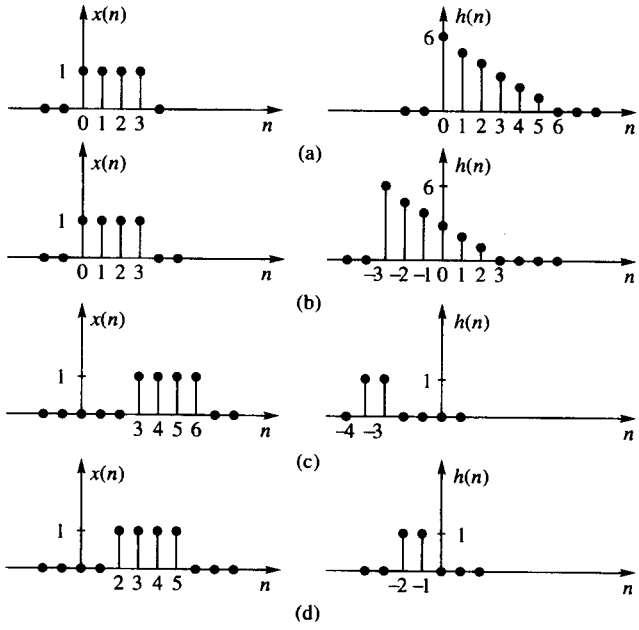


图 P2.17

2.18 计算并画出如下信号的卷积 $y(n)$:

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{3}n, & 0\leqslant n\leqslant 6\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}1, & -2\leqslant n\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(a) 用图形方法计算;(b) 用解析方法计算。

2.19 计算如下信号的卷积 $y(n)$:

$$x(n)=\begin{cases}\alpha^n, & -3\leqslant n\leqslant 5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2.20 思考下面三种运算。

(a) 将两个整数相乘:131 和 122。

(b) 计算信号的卷积:$\{1,3,1\}*\{1,2,2\}$。

(c) 将多项式相乘:$1+3z+z^2$ 和 $1+2z+2z^2$。

(d) 用数字 1.31 和 12.2 重复(a)部分。

(e) 说明你的结论。

2.21 计算下面几对信号的卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$。

(a) $x(n)=a^nu(n)$, $h(n)=b^nu(n)$ 当 $a\neq b$ 且 $a=b$

(b) $x(n)=\begin{cases}1, & n=-2,0,1\\2, & n=-1\\0, & \text{其他}\end{cases}$　　$h(n)=\delta(n)-\delta(n-1)+\delta(n-4)+\delta(n-5)$

(c) $x(n)=u(n+1)-u(n-4)-\delta(n-5)$; $h(n)=[u(n+2)-u(n-3)]\cdot(3-|n|)$

(d) $x(n)=u(n)-u(n-5)$; $h(n)=u(n-2)-u(n-8)+u(n-11)-u(n-17)$

2.22 设 $x(n)$是冲激响应为 $h_i(n)$的离散时间滤波器的输入信号，$y_i(n)$是相应的输出。

(a) 计算并以相同的尺度画出以下情况的 $x(n)$和 $y_i(n)$：

$$x(n)=\{1,4,2,3,5,3,3,4,5,7,6,9\}$$

$$h_1(n)=\{1,1\}$$

$$h_2(n)=\{1,2,1\}$$

$$h_3(n)=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$$

$$h_4(n)=\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\}$$

$$h_5(n)=\{\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\}$$

在一幅图中画出 $x(n)$, $y_1(n)$, $y_2(n)$，在另一幅图中画出 $x(n)$, $y_3(n)$, $y_4(n)$, $y_5(n)$。

(b) $y_1(n)$和 $y_2(n)$, $y_3(n)$和 $y_4(n)$之间有什么区别？

(c) 解说 $y_2(n)$和 $y_4(n)$的平滑度，影响其平滑的主要因素是什么？

(d) 比较 $y_4(n)$和 $y_5(n)$，它们有什么区别？你能解释吗？

(e) 若 $h_6(n)=\{1/2,-1/2\}$，计算 $y_6(n)$；在同一幅图中画出 $x(n)$, $y_2(n)$, $y_6(n)$，并解释这个结果。

2.23 将一个冲激响应为 $h(n)$的线性时不变系统的输出 $y(n)$以阶跃响应 $s(n)=h(n)*u(n)$和输入 $x(n)$的形式进行表示。

2.24 离散时间系统

$$y(n)=ny(n-1)+x(n),\qquad n\geqslant 0$$

处于静止状态[即 $y(-1)=0$]，验证这个系统是否为线性时不变及 BOBI 稳定。

2.25 考虑信号 $\gamma(n)=a^nu(n)$, $0<a<1$。

(a) 证明任何序列 $x(n)$可以分解为

$$x(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_k\gamma(n-k)$$

并用 $x(n)$表示出 c_k。

(b) 利用线性和时不变性的性质，将输出 $y(n)=\mathcal{T}[x(n)]$表示成输入 $x(n)$及信号 $g(n)=\mathcal{T}[\gamma(n)]$的形式，其中$\mathcal{T}[\cdot]$表示 LTI 系统。

(c) 将冲激响应 $h(n)=\mathcal{T}[\delta(n)]$表示成 $g(n)$的形式。

2.26 计算由如下二阶差分方程描述的系统的零输入响应：

$$x(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=0$$

2.27 计算当强迫函数为 $x(n)=2^n u(n)$ 时,如下差分方程的特殊解:

$$y(n)=\frac{5}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)+x(n)$$

2.28 在例 2.4.8 中,等式(2.4.30)将输出序列 $y(n)$ 分解成瞬时响应和稳态响应,画出 $a_1=-0.9$ 时这两个响应的图形。

2.29 计算两个线性时不变系统的级联冲激响应,这两个系统的冲激响应为

$$h_1(n)=a^n[u(n)-u(n-N)] \text{ 和 } h_2(n)=[u(n)-u(n-M)]$$

2.30 计算由如下二阶差分方程描述的系统响应 $y(n), n\geqslant 0$,其输入为 $x(n)=4^n u(n)$。

$$y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n)+2x(n-1)$$

2.31 计算如下因果系统的冲激响应:

$$y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n)+2x(n-1)$$

2.32 设 $x(n), N_1\leqslant n\leqslant N_2$ 和 $h(n), M_1\leqslant n\leqslant M_2$ 是两个有限长信号。

(a) 计算它们的卷积的长度范围 $L_1\leqslant n\leqslant L_2$,用 N_1, N_2 M_1, M_2 进行表示。

(b) 计算左边部分重叠、全部重叠以及右边部分重叠情况下的极限值,为了方便起见,假设 $h(n)$ 长度比 $x(n)$ 短。

(c) 通过计算以下信号的卷积来说明你的结果的正确性。

$$x(n)=\begin{cases}1, & -2\leqslant n\leqslant 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}2, & -1\leqslant n\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2.33 计算由如下差分方程所描述的系统的冲激响应和单位阶跃响应。

(a) $y(n)=0.6y(n-1)-0.08y(n-2)+x(n)$

(b) $y(n)=0.7y(n-1)-0.1y(n-2)+2x(n)-x(n-2)$

2.34 若一个系统的冲激响应为

$$h(n)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^n, & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

确定输入 $x(n), 0\leqslant n\leqslant 8$,使其产生输出序列为

$$y(n)=\{\underset{\uparrow}{1}, 2, 2.5, 3, 3, 3, 2, 1, 0, \cdots\}$$

2.35 考虑如图 P2.35 所示的 LTI 系统的互联。

(a) 用 $h_1(n), h_2(n), h_3(n)$ 和 $h_4(n)$ 表示出整个系统的冲激响应。

(b) 当

$$h_1(n)=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$$

$$h_2(n)=h_3(n)=(n+1)u(n)$$

$$h_4(n)=\delta(n-2)$$

时,计算 $h(n)$。

(c) 如果

$$x(n)=\delta(n+2)+3\delta(n-1)-4\delta(n-3)$$

请计算(b)中的系统响应。

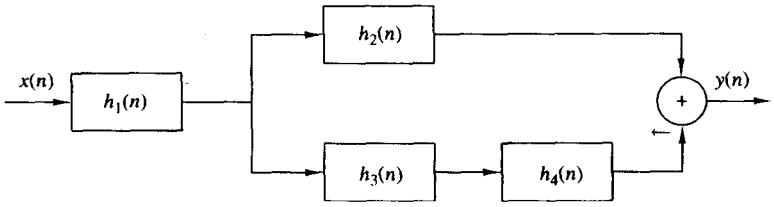


图 P2.35

2.36 若系统如图 P2.36 所示，其 $h(n)=a^n u(n)$，$-1<a<1$，计算激励为

$$x(n)=u(n+5)-u(n-10)$$

时的系统响应 $y(n)$。

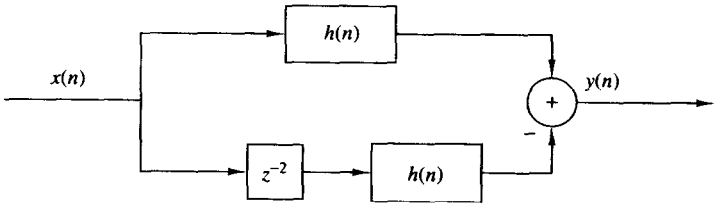


图 P2.36

2.37 计算并画出如下系统的阶跃响应：

$$y(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}x(n-k)$$

2.38 已知冲激响应为

$$h(n)=\begin{cases}a^n, & n\geqslant 0, n \text{ 偶数}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的线性时不变系统稳定，确定参数 a 的值域。

2.39 一个冲激响应为

$$h(n)=a^n u(n)$$

的系统的输入信号为

$$x(n)=u(n)-u(n-10)$$

计算该系的统响应。（提示：利用例 2.3.5 中的线性和时不变性质的结论可以简单快速地得出答案。）

2.40 一个（弛豫）系统的冲激响应为

$$h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$$

计算该系统对输入信号

$$x(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n<10\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的响应。

2.41 一个（弛豫）系统的冲激响应为

$$h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$$

计算该系统对以下输入信号的响应:

(a) $x(n)=2^n u(n)$

(b) $x(n)=u(-n)$

2.42 冲激响应分别为 $h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-1), h_2(n)=h(n), h_3(n)=u(n)$的三个系统级联在一起。

(a) 整个系统的冲激响应 $h_c(n)$是什么?

(b) 连接的次序对整个系统有影响吗?

2.43 (a) 证明并画图解释关系式

$$x(n)\delta(n-n_0)=x(n_0)\delta(n-n_0) \quad \text{和} \quad x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$$

之间的区别。

(b) 证明由卷积和描述的离散时间系统是 LTI 和弛豫的。

(c) 由 $y(n)=x(n-n_0)$描述的系统的冲激响应是什么?

2.44 两个信号 $s(n)$和 $v(n)$之间的关系由如下差分方程描述:

$$s(n)+a_1 s(n-1)+\cdots+a_N s(n-N)=b_0 v(n)$$

设计如下情形下的系统实现结构图:

(a) 激励为 $v(n)$时产生 $s(n)$的系统。

(b) 激励为 $s(n)$时产生 $v(n)$的系统。

(c) (a)和(b)中的系统级联后的冲激响应是什么?

2.45 由差分方程

$$y(n)+\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+2x(n-2)$$

描述的系统的输入为

$$x(n)=\{1,2,\underset{\uparrow}{3},4,2,1\}$$

通过递归地求解差分方程,计算该系统的零状态响应。

2.46 确定下面每个 LTI 系统的直接实现形式 II:

(a) $2y(n)+y(n-1)-4y(n-3)=x(n)+3x(n-5)$

(b) $y(n)=x(n)-x(x-1)+2x(n-2)-3x(n-4)$

2.47 一个离散时间系统如图 P2.47 所示。

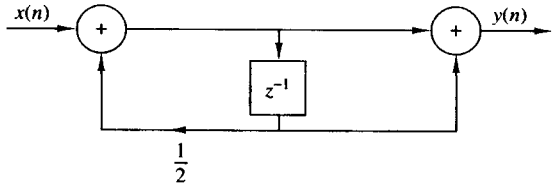


图 P2.47

(a) 计算冲激响应的前 10 个样本。

(b) 找出输入-输出关系。

(c) 用输入 $x(n)=\{1,1,1,\cdots\}$作用该系统,计算其输出的前 10 个样本。

(d) 以(c)部分给出的 $x(n)$作为输入,利用卷积计算输出的前 10 个样本。

(e) 这个系统是因果的吗? 是稳定的吗?

2.48 一个由如下差分方程所描述的系统:

$$y(n)=ay(n-1)+bx(n)$$

(a) 用 a 表示 b,使得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = 1$$

(b) 计算系统的零状态阶跃响应 $s(n)$,并选择 b 使得 $s(\infty) = 1$。

(c) 比较(a)和(b)中得到的 b 值,你发现了什么?

2.49 考虑如图 P2.49 所示结构实现的离散时间系统。

(a) 计算其冲激响应。

(b) 求解它的逆系统的实现,即当 $y(n)$作为输入时,该系统产生的输出为 $x(n)$。

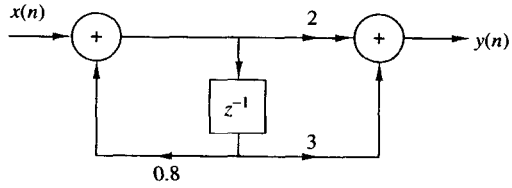


图 P2.49

2.50 考虑如图 P2.50 所示的离散时间系统。

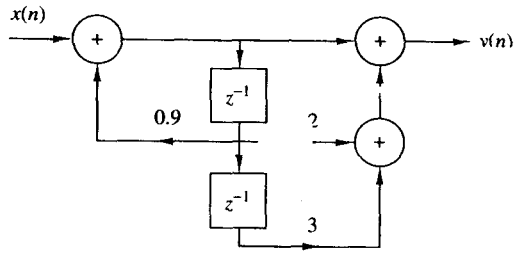


图 P2.50

(a) 计算系统冲激响应的前 6 个值。

(b) 计算系统零状态阶跃响应的前 6 个值。

(c) 确定并分析系统的冲激响应表达式。

2.51 对于 $n = 0,1,\cdots,9$,计算并画出下列系统的冲激响应:

(a) 图 P2.51(a)。

(b) 图 P2.51(b)。

(c) 图 P2.51(c)。

(d) 将以上系统分为 FIR 或者 IIR。

(e) 求解(c)中系统冲激响应的具体表达式。

2.52 考虑如图 P2.52 所示的系统。

(a) 计算并画出它们的冲激响应 $h_1(n)$,$h_2(n)$和 $h_3(n)$。

(b) 能否确定这些系统的系数,使得

$$h_1(n) = h_2(n) = h_3(n)$$

2.53 考虑如图 P2.53 所示的系统。

(a) 计算冲激响应 $h(n)$。

(b) 证明 $h(n)$等于下列信号的卷积:

$$h_1(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$$

$$h_2(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

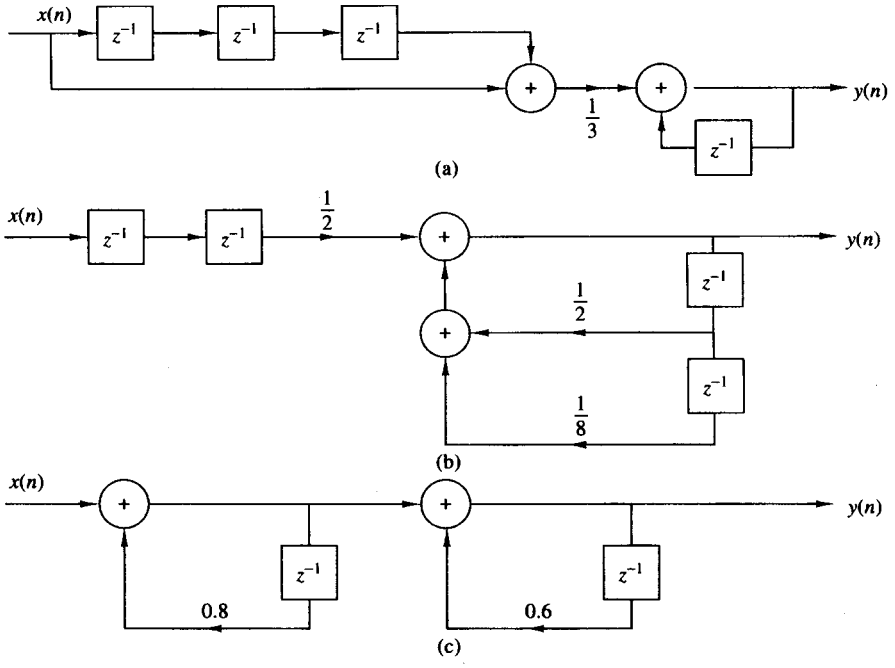


图 P2.51

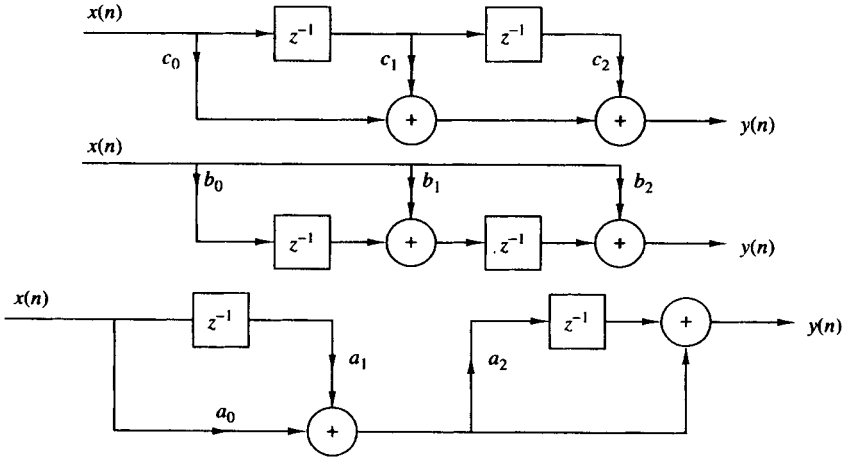


图 P2.52

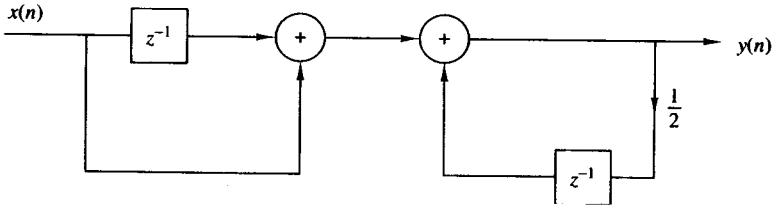


图 P2.53

2.54 计算并画出以下几对信号的卷积 $y_i(n)$以及相关序列 $r_i(n)$，说明你得到的结论。

(a) $x_1(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,4\}$　　$h_1(n)=\{\underset{\uparrow}{1},1,1,1,1\}$

(b) $x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{0},1,-2,3,-4\}$　　$h_2(n)=\{\frac{1}{2},1,\underset{\uparrow}{2},1,\frac{1}{2}\}$

(c) $x_3(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$　　$h_3(n)=\{\underset{\uparrow}{4},3,2,1\}$

(d) $x_4(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$　　$h_4(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$

2.55 一个因果 LTI 系统对输入 $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},3,3,1\}$的零状态响应为 $y(n)=\{\underset{\uparrow}{1},4,6,4,1\}$，计算其冲激响应。

2.56 证明：将描述直接 II 型结构的式(2.5.9)代入式(2.5.10)，可得到描述直接 I 型结构的式(2.5.6)。

2.57 计算由二阶差分方程

$$y(n)-4y(n-1)+4y(n-2)=x(n)-x(n-1)$$

描述的系统的响应 $y(n)$，$n\geqslant 0$，其输入为

$$x(n)=(-1)^n u(n)$$

初始条件为 $y(-1)=y(-2)=0$。

2.58 计算由如下二阶差分方程描述的系统的冲激响应：

$$y(n)-4y(n-1)+4y(n-2)=x(n)-x(n-1)$$

2.59 证明任何离散时间信号均可表示为

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[x(k)-x(k-1)]u(n-k)$$

其中，$u(n-k)$是在时间上延迟 k 个单位的单位阶跃信号，即

$$u(n-k)=\begin{cases}1, & n\geqslant k\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2.60 证明 LTI 系统的输出可以用它的单位阶跃响应 $s(n)$表示成下面的形式：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[s(k)-s(k-1)]x(n-k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[x(k)-x(k-1)]s(n-k)$$

2.61 计算如下信号序列的相关序列 $r_{xx}(l)$和 $r_{xy}(l)$：

$$x(n)=\begin{cases}1, & n_0-N\leqslant n\leqslant n_0+N\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$y(n)=\begin{cases}1, & -N\leqslant n\leqslant N\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2.62 计算下列信号的自相关序列：

(a) $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,1,1\}$

(b) $y(n)=\{\underset{\uparrow}{1},1,2,1\}$

你可以得出什么结论？

2.63 由下式给出的信号 $x(n)$的归一化自相关序列是什么?

$$x(n)=\begin{cases}1, & -N\leqslant n\leqslant N\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2.64 一台扩音器产生的声音信号 $s(t)$经过反射系数为 r_1 和 r_2 的两个不同墙壁的反射,信号 $x(t)$是由靠近扩音器的麦克风记录的,采样以后的值为

$$x(n)=s(n)+r_1s(n-k_1)+r_2s(n-k_2)$$

其中,k_1 和 k_2 是两个回波的延迟。

(a) 计算信号 $x(n)$的自相关序列 $r_{xx}(l)$。

(b) 我们可以通过观测 $r_{xx}(l)$确定 r_1,r_2,k_1 和 k_2 吗?

(c) 如果 $r_2=0$,那么情况会是怎样?

2.65 雷达时间延迟估计。若 $x_a(t)$是发送信号,$y_a(t)$是雷达系统的接收信号,其中

$$y_a(t)=ax_a(t-t_d)+v_a(t)$$

而 $v_a(t)$是加性随机噪声。根据采样定理,信号 $x_a(t)$和 $y_a(t)$在接收端被采样,然后经过数字化处理,从而用来确定时间延迟和目标距离。离散时间信号处理结果为

$$\begin{aligned}x(n)&=x_a(nT)\\ y(n)&=y_a(nT)=ax_a(nT-DT)+v_a(nT)\\ &\triangleq ax(n-D)+v(n)\end{aligned}$$

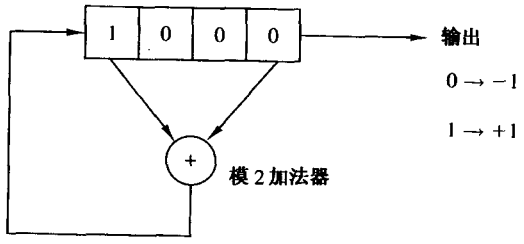


图 P2.65 线性反馈移位寄存器

(a) 说明如何通过计算互相关序列 $r_{xy}(l)$来测量延迟 D。

(b) 设 $x(n)$是 13 个点的巴克序列

$$x(n)=\{+1,+1,+1,+1,+1,-1,-1,+1,+1,-1,+1,-1,+1\}$$

$v(n)$是零均值、方差 $\sigma^2=0.01$ 的高斯随机序列。编写一段程序产生序列 $y(n)$,$0\leqslant n\leqslant 199$,其中 $a=0.9$,$D=20$。并画出信号 $x(n)$,$y(n)$的图形,$0\leqslant n\leqslant 199$。

(c) 计算并画出互相关序列 $r_{xy}(l)$,$0\leqslant l\leqslant 59$,根据该图估计延迟 D 的值。

(d) 对 $\sigma^2=0.1$ 和 $\sigma^2=1$ 重复(b)和(c)部分。

(e) 如图 P2.65 所示的四步反馈移位寄存器得到信号序列为

$$x(n)=\{-1,-1,-1,+1,+1,+1,+1,-1,+1,-1,+1,+1,-1,-1,+1\}$$

重复(b)和(c)部分。注意,$x(n)$仅仅是从反馈移位寄存器得到的周期性序列的一个周期。

(f) 用从七步反馈移位寄存器得到的周期为 $N=2^7-1$ 的序列重复(b)和(c)部分;表 2.2 给出了与模 2 加法器关联的状态,模 2 加法器用于产生长为 $N=2^m-1$ 的(最大长度)移位寄存序列。

表 2.2　产生最大长度序列的移位寄存器

m	与模 2 加法器关联的状态
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 4
5	1, 4
6	1, 6
7	1, 7
8	1, 5, 6, 7
9	1, 6
10	1, 8
11	1, 10
12	1, 7, 9, 12
13	1, 10, 11, 13
14	1, 5, 9, 14
15	1, 15
16	1, 5, 14, 16
17	1, 15

2.66 LTI 系统的实现。考虑由差分方程

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

描述的递归离散时间系统，其中 $a_1 = -0.8, a_2 = -0.64, b_0 = 0.866$。

(a) 编写一段程序来计算该系统的冲激响应 $h(n), 0 \leqslant n \leqslant 49$，并画图。

(b)编写一段程序来计算该系统的零状态响应 $s(n), 0 \leqslant n \leqslant 100$，并画图。

(c) 定义一个 FIR 系统，其冲激响应 $h_{\text{FIR}}(n)$为：

$$h_{\text{FIR}}(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leqslant n \leqslant 19 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中，$h(n)$是(a)部分计算得到的冲激响应。编写一段程序来计算它的阶跃响应，并画图。

(d) 比较(b)和(c)得出的结果，并说明它们的异同点。

2.67 编写一段计算机程序来计算图 P2.67 中的系统的总冲激响应 $h(n), 0 \leqslant n \leqslant 99$。系统$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ 和 $\mathcal{T}_4$ 指定为

$$\mathcal{T}_1 : h_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}\}$$

$$\mathcal{T}_2 : h_2(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 1\}$$

$$\mathcal{T}_3 : y_3(n) = \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2)$$

$$\mathcal{T}_4 : y(n) = 0.9y(n-1) - 0.81y(n-2) + v(n) + v(n-1)$$

画出 $0 \leqslant n \leqslant 99$ 时的 $h(n)$图形。

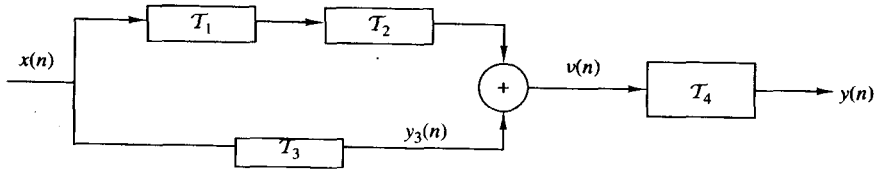


图 P2.67

第3章　z 变换及其在线性时不变系统分析中的应用

变换技术是信号和线性时不变(LTI)系统分析中的重要工具。本章我们将介绍 z 变换,推导它的性质,并证明它在线性时不变系统分析和特性描述中的重要性。

z 变换在离散时间信号与 LTI 系统分析中扮演的作用,正如拉普拉斯变换在连续时间信号与 LTI 系统分析中扮演的作用一样。例如,我们将看到,在 z 域(复 z 平面)上两个时域信号的卷积等于它们相应的 z 变换的乘积。这一性质大大简化了 LTI 系统对不同信号的响应分析。另外,通过零极点位置,z 变换给我们提供了一种描述 LTI 系统特性及其对不同信号的响应的方法。

本章中我们先给出 z 变换的定义。z 变换重要的性质将在 3.2 节介绍。3.3 节将介绍使用零极点模式将 z 变换用于信号的特性描述。3.4 节将描述信号的 z 逆变换,以便获得信号的时域表达。3.5 节将介绍 z 变换在 LTI 系统分析中的应用。最后,在 3.6 节,我们将学习单边 z 变换,并将它用于求解具有非零初始条件的线性差分方程。

3.1　z 变换

本节我们介绍离散时间信号的 z 变换,研究它的收敛性质并简单讨论 z 逆变换。

3.1.1　z 正变换

离散时间信号 $x(n)$的 z 变换定义为幂级数

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{3.1.1}$$

其中 z 是复变量。关系式(3.1.1)有时也被称为 z 正变换,因为它将时域信号 $x(n)$变换到它的复平面表达式 $X(z)$。其反过程,即从 $X(z)$获得 $x(n)$的过程,被称为 z 逆变换,将在 3.1.2 节简述,并在 3.4 节详述。

出于方便,信号 $x(n)$的 z 变换记为

$$X(z) \equiv Z\{x(n)\} \tag{3.1.2}$$

而 $x(n)$和 $X(z)$之间的关系记为

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) \tag{3.1.3}$$

既然 z 变换是无限幂级数,那么仅当 z 的值使级数收敛时,它才存在。$X(z)$的收敛域是使 $X(z)$的值为有限的所有 z 值的集合。因此每当我们引用 z 变换时应指明它的收敛域。

下面我们用一些简单的例子说明这些概念。

例 3.1.1　求以下有限长信号的 z 变换:

(a) $x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 5, 7, 0, 1\}$

(b) $x_2(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\}$

(c) $x_3(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1\}$

(d) $x_4(n) = \{2, 4, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\}$

(e) $x_5(n) = \delta(n)$

(f) $x_6(n) = \delta(n-k), k > 0$

(g) $x_7(n) = \delta(n+k), k > 0$

解:由定义式(3.1.1)得

(a) $X_1(z)=1+2z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+z^{-5}$,收敛域为除 $z=0$ 以外的整个 z 平面。

(b) $X_2(z)=z^2+2z+5+7z^{-1}+z^{-3}$,收敛域为除 $z=0$ 和 $z=\infty$ 以外的整个 z 平面。

(c) $X_3(z)=z^{-2}+2z^{-3}+5z^{-4}+7z^{-5}+z^{-7}$,收敛域为除 $z=0$ 以外的整个 z 平面。

(d) $X_4(z)=2z^2+4z+5+7z^{-1}+z^{-3}$,收敛域为除 $z=0$ 和 $z=\infty$ 以外的整个 z 平面。

(e) $X_5(z)=1$ [即$\delta(n) \xleftrightarrow{z} 1$],收敛域为整个 z 平面。

(f) $X_6(z)=z^{-k}$ [即$\delta(n-k) \xleftrightarrow{z} z^{-k}$],$k>0$ 收敛域为除 $z=0$ 以外的整个 z 平面。

(g) $X_7(z)=z^{k}$ [即$\delta(n+k) \xleftrightarrow{z} z^{k}$],$k>0$,收敛域为除 $z=\infty$ 以外的整个 z 平面。

从这些例子可知,有限长信号的收敛域是整个 z 平面,但是点 $z=0$ 和/或 $z=\infty$ 也许除外。这些点被排除,因为当 $z=\infty$ 时,$z^k(k>0)$将无界,而当 $z=0$ 时,$z^{-k}(k>0)$将无界。

从数学角度来看,z 变换只是信号的一种替代表示,例 3.1.1 很好地说明了这一点。在例 3.1.1 中我们看到,对于一个给定的变换,z^{-n}的系数是信号在时间 n 的值。换言之,z 的指数包含了我们需要用来确认信号样本的时间信息。

许多情形下,我们都能以一种闭合形式将 z 变换表示为有限或无限序列的和。此时,z 变换是信号的一种紧凑表示。

例 3.1.2　求以下信号的 z 变换:

$$x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$$

解:信号 $x(n)$是由无限个非零值组成的,

$$x(n)=\{1,(\frac{1}{2}),(\frac{1}{2})^2,(\frac{1}{2})^3,\cdots,(\frac{1}{2})^n,\cdots\}$$

信号 $x(n)$的 z 变换是以下无限幂级数:

$$X(z)=1+\frac{1}{2}z^{-1}+(\frac{1}{2})^2z^{-2}+(\frac{1}{2})^nz^{-n}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^nz^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}z^{-1})^n$$

这是一个无限几何级数。回忆可知

$$1+A+A^2+A^3+\cdots=\frac{1}{1-A},\qquad |A|<1$$

因此,对于$|\frac{1}{2}z^{-1}|<1$或者等价的$|z|>\frac{1}{2}$,$X(z)$收敛于

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\quad \text{收敛域:}|z|>\frac{1}{2}$$

此时我们看到,z 变换提供了信号 $x(n)$的一个替代的紧凑表示。

我们将复变量 z 表示为以下极坐标的形式:

$$z=re^{j\theta} \tag{3.1.4}$$

其中 $r=|z|$并且 $\theta=\measuredangle z$。那么 $X(z)$可表示为

$$X(z)|_{z=re^{j\theta}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{-n}e^{-j\theta n}$$

在 $X(z)$的收敛域内,$|X(z)|<\infty$。但是,

$$|X(z)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\theta n}\right| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}e^{-j\theta n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \tag{3.1.5}$$

因此,如果序列 $x(n)r^{-n}$绝对可和,那么$|X(z)|$是有限的。

求解 $X(z)$的收敛域的问题等同于求使序列 $x(n)r^{-n}$绝对可和的 r 值的范围。为了详细阐述,让我们将式(3.1.5)表示为

$$|X(z)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x(n)}{r^n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)r^{n}| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x(n)}{r^n}\right| \tag{3.1.6}$$

如果 $X(z)$在复平面的某个区域上收敛,那么式(3.1.6)中的两个求和必定在这个区域上有界。如果式(3.1.6)中的第一个求和收敛,那么一定存在足够小的 r 值,以至于乘积序列 $x(-n)r^n$,$1 \leqslant n < \infty$是绝对可和的。因此,第一个求和的收敛域由位于半径为 r_1 的圆内的所有点组成,其中 $r_1 < \infty$,如图 3.1.1(a)所示。另一方面,如果式(3.1.6)中的第二个求和收敛,则一定存在足够大的 r 值,以至于乘积序列 $x(n)/r^n$,$0 \leqslant n < \infty$是绝对可和的。因此,第二个求和的收敛域由位于半径 $r > r_2$ 的圆外的所有点组成,如图 3.1.1(b)所示。

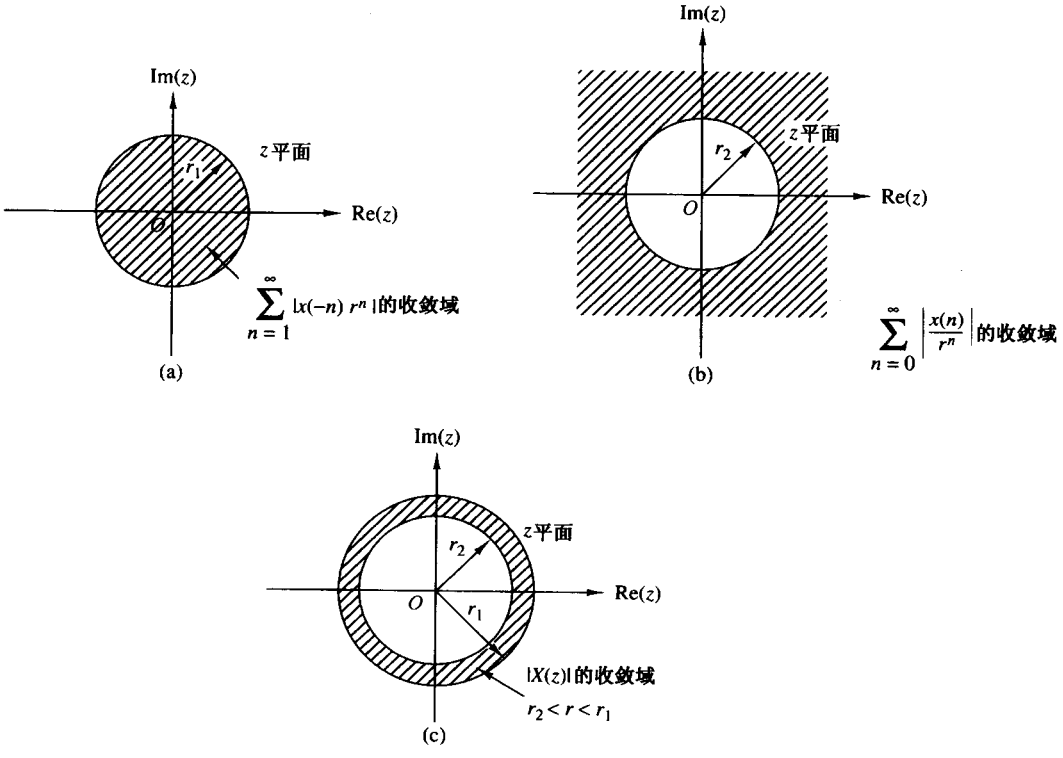


图 3.1.1 $X(z)$的收敛域及其相应的因果和非因果部分

因为 $X(z)$收敛要求式(3.1.6)中的两个求和都有界，所以 $X(z)$的收敛域通常是 z 平面上的一个环状区域 $r_2 < r < r_1$，这个环状区域是两个求和都有界的共同区域。该区域如图 3.1.1(c)所示。另一方面，如果 $r_2 > r_1$，那么两个求和没有共同的收敛域，因此 $X(z)$也不存在。

以下的例子说明了这些重要的概念。

例 3.1.3　求以下信号的 z 变换：

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} \alpha^n, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

解：由式(3.1.1)的定义我们得到

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

如果 $|\alpha z^{-1}| < 1$ 或者等价的 $|z| > |\alpha|$，那么这个幂级数收敛于 $1/(1-\alpha z^{-1})$。从而我们得到 z 变换对

$$x(n) = \alpha^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \quad \text{收敛域: } |z| > |\alpha| \tag{3.1.7}$$

收敛域是半径为 $|\alpha|$ 的圆的外部。信号 $x(n)$及其相应的收敛域如图 3.1.2 所示。注意，一般来说，α 不一定是实数。

如果在式(3.1.7)中设 $\alpha = 1$，那么我们可以得到单位阶跃信号的 z 变换

$$x(n) = u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \text{收敛域: } |z| > 1 \tag{3.1.8}$$

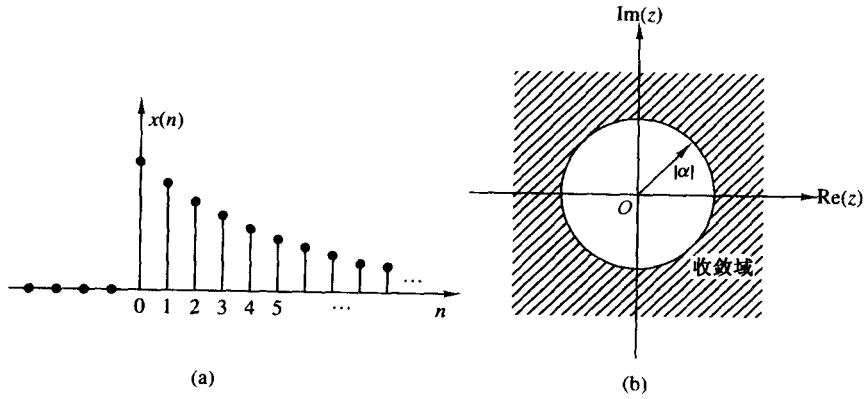


图 3.1.2　(a)指数信号 $x(n) = \alpha^n u(n)$；(b) 其 z 变换的收敛域

例 3.1.4　求以下信号的 z 变换：

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \geqslant 0 \\ -\alpha^n, & n \leqslant -1 \end{cases}$$

解：由式(3.1.1)的定义我们得到

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-\alpha^n) z^{-n} = -\sum_{l=1}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^l$$

其中 $l = -n$。使用公式

$$A + A^2 + A^3 + \cdots = A(1 + A + A^2 + \cdots) = \frac{A}{1-A}$$

当 $|A| < 1$ 时，有

$$X(z)=-\frac{\alpha^{-1}z}{1-\alpha^{-1}z}=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

假设$|\alpha^{-1}z|<1$或者等价的$|z|<|\alpha|$。因此,

$$x(n)=-\alpha^n u(-n-1)\xleftrightarrow{z}X(z)=-\frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\quad \text{收敛域: } |z|<|\alpha| \tag{3.1.9}$$

收敛域现在是半径为$|\alpha|$的圆的内部,如图 3.1.3 所示。

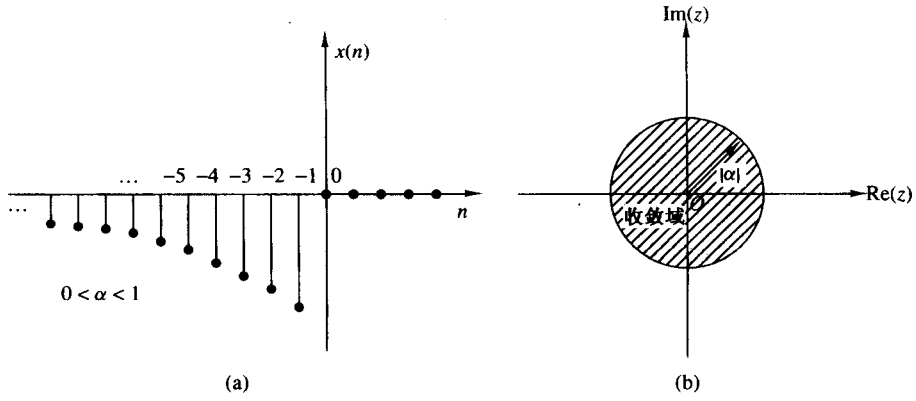


图 3.1.3 (a)非因果信号 $x(n)=-\alpha^n u(-n-1)$和(b)它的 z 变换的收敛域

例 3.1.3 和例 3.1.4 说明了两个非常重要的问题。第一个问题涉及 z 变换的唯一性。由式(3.1.7)和式(3.1.9),我们看到,因果信号 $\alpha^n u(n)$和非因果信号 $-\alpha^n u(-n-1)$具有相同的 z 变换的闭合形式表达式,即

$$Z\{\alpha^n u(n)\}=Z\{-\alpha n u(-n-1)\}=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

这意味着 z 变换的闭合形式的表达式不能唯一地表示时域信号。解决该模糊性的唯一方法是在给出闭合形式的表达式后,定义收敛域。总之,一个离散时间信号 $x(n)$由它的 z 变换 $X(z)$及 $X(z)$的收敛域共同唯一决定。本文中"z 变换"一词指闭合形式的表达式及其相应的收敛域。例 3.1.3 也说明了这一点,即一个因果信号的收敛域是某个半径为 r_2 的圆的外部,而一个非因果信号的收敛域是某个半径为 r_1 的圆的内部。下面的例子考虑当 $-\infty<n<\infty$时皆有非零值的序列。

例 3.1.5 求以下信号的 z 变换:

$$x(n)=\alpha^n u(n)+b^n u(-n-1)$$

解:由式(3.1.1)的定义我们得到

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}b^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z^{-1})^n+\sum_{l=1}^{\infty}(b^{-1}z)^l$$

如果$|\alpha z^{-1}|<1$或者等价的$|z|>|\alpha|$,那么第一个幂级数收敛。如果$|b^{-1}z|<1$或者等价的$|z|<|b|$,那么第二个幂级数收敛。

在确定 $X(z)$的收敛性时,我们考虑两种不同的情况。

情况 1 $|b|<|\alpha|$:如图 3.1.4(a)所示,这种情况下两个收敛域没有重叠部分,因此我们不能找到使两个幂级数同时收敛的 z 值。显然,这种情况下 $X(z)$不存在。

情况 2 $|b|>|\alpha|$:如图 3.1.4(b)所示,这种情况下 z 平面上有一个环状区域,此区域中两个幂级数同时收敛。因此我们得到

$$X(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}-\frac{1}{1-bz^{-1}}=\frac{b-\alpha}{\alpha+b-z-\alpha bz^{-1}} \tag{3.1.10}$$

$X(z)$的收敛域是$|\alpha|<|z|<|b|$。

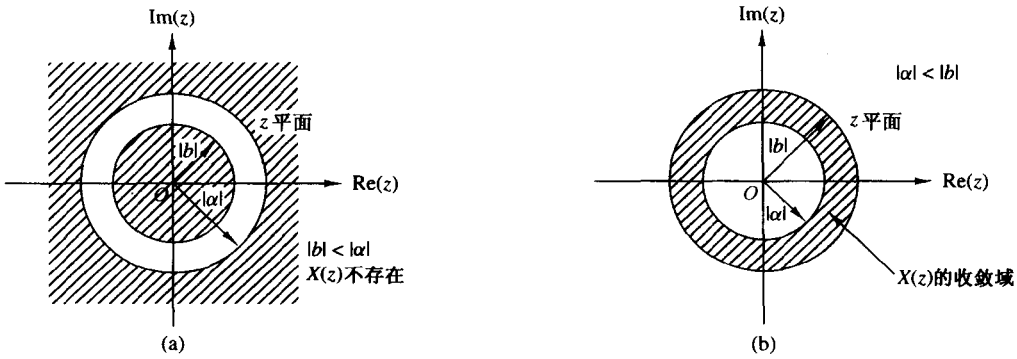


图 3.1.4　例 3.1.5 中 z 变换的收敛域

这个例子表明，如果一个无限长双边信号具有收敛域，则该收敛域是 z 平面上的环状区域。由例 3.1.1、例 3.1.3、例 3.1.4 和例 3.1.5，我们看到信号的收敛域取决于信号的长度（有限或无限）和它是否是因果、非因果或双边信号。这些事实总结于表 3.1。

对于双边信号，一种特殊情况是该信号在右边无限长而在左边为零[即对于 $n<n_0<0$，有 $x(n)=0$]。第二种特殊情况是该信号在左边无限长而在右边为零[即对于 $n>n_1>0$，有 $x(n)=0$]。第三种特殊情况是该信号在左边和右边都是有限长的[即对于 $n<n_0<0$ 和 $n>n_1>0$，有 $x(n)=0$]。这些类型的信号有时候分别被称为右边信号、左边信号和有限长双边信号。求这三种类型信号的收敛域留给读者作为练习（见习题 3.5）。

最后要注意的是，式(3.1.1)定义的 z 变换有时指双边或者左右对称 z 变换，以区别于以下给出的单边或者非左右对称 z 变换：

$$X^{+}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{3.1.11}$$

单边 z 变换将在 3.6 节讲述。本文中的 z 变换，仅指由式(3.1.1)定义的双边 z 变换。“双边”一词将仅在澄清模糊性的情况下使用。显然，如果 $x(n)$是因果的[即对于 $n<0$，有$x(n)=0$]，单边和双边 z 变换是一样的。而在其他任何情况下，它们是不同的。

3.1.2　z 逆变换

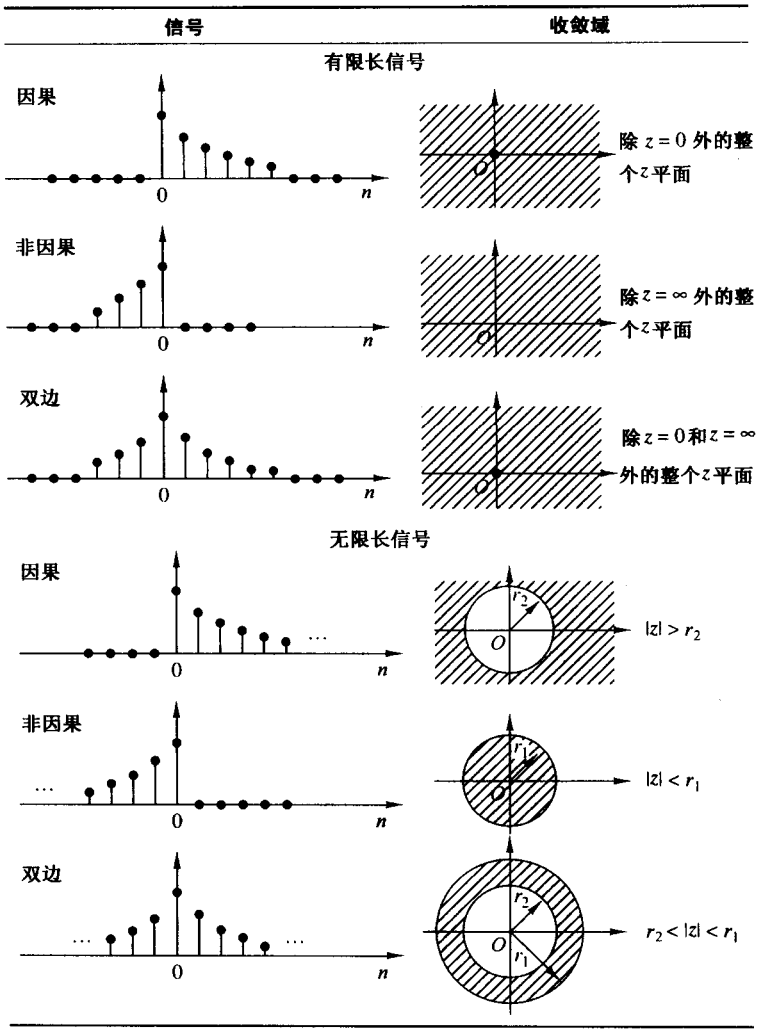
通常，当我们获得一个信号的 z 变换 $X(z)$后，必须确定该信号序列。从 z 域到时域的变换过程称为 z 逆变换。利用柯西(Cauchy)积分定理可推导从 $X(z)$获得 $x(n)$的一个逆公式，而柯西积分定理是复变量理论中的一个重要理论。

首先，我们将由式(3.1.1)定义的 z 变换写成如下形式：

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-k} \tag{3.1.12}$$

我们在式(3.1.12)的两边同时乘上 z^{n-1}，并对式子两边进行围线积分，该围线是位于 $X(z)$的收敛域内环绕原点的闭合曲线，如图 3.1.5 所示。因此我们得到

表 3.1 信号及其相应的收敛域特性



$$\oint_C X(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{n-1-k}\,\mathrm{d}z \qquad (3.1.13)$$

其中，C 表示 $X(z)$的收敛域内逆时针方向的围线。因为级数在围线上收敛，所以我们可以将式(3.1.12)右边积分与求和的顺序调换，这样式(3.1.13)就可改写如下：

$$\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\oint_C z^{n-1-k}\mathrm{d}z \qquad (3.1.14)$$

现在我们应用柯西积分定理，得到

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C z^{n-1-k}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \qquad (3.1.15)$$

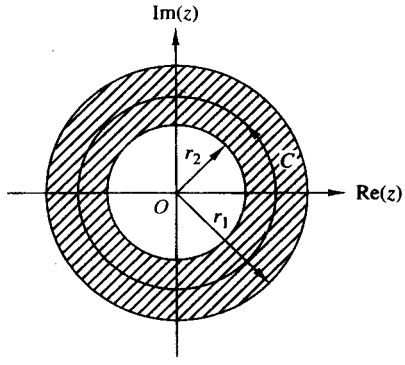


图 3.1.5 式(3.1.13)中积分的围线 C

其中，C 是环绕原点的围线。应用式(3.1.15)，式(3.1.14)的右边等于 $2\pi \mathrm{j}x(n)$，因此得到期待的逆变换公式如下：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z \tag{3.1.16}$$

虽然式(3.1.16)的围线积分提供了由 z 变换求序列 $x(n)$ 的期待的逆公式，但是我们将不会直接使用式(3.1.16)来求 z 逆变换。我们只处理在 z 域上具有有理 z 变换的信号和系统，而有理 z 变换是指由两个多项式之比组成的 z 变换。我们为这种 z 变换发展了一种来自式(3.1.16)的比较简单的求逆方法，并且采用了查找表。

3.2　z 变换的性质

z 变换是学习离散时间信号和系统的非常有力的工具。其有力是因为该变换具有一些非常重要的性质。本节我们将研究其中的一些性质。

在下面的处理中我们不要忘记，当将若干个 z 变换一起考虑时，整体变换的收敛域至少是各个单个变换的交集。这一点在下文我们讨论具体例子时会变得更明显。

线性。如果

$$x_1(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X_1(z)$$

并且

$$x_2(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X_2(z)$$

那么对于任何常数 a_1 和 a_2，有

$$x(n)=a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X(z)=a_1X_1(z)+a_2X_2(z) \tag{3.2.1}$$

该性质的证明可由线性的定义直接得出，具体证明留给读者作为练习。

该线性性质容易向任意多个信号推广。基本上，这意味着信号的线性组合的 z 变换与 z 变换的线性组合是相同的。因此，线性性质有助于用各个已知 z 变换的信号之和来表达一个信号的 z 变换。

例 3.2.1　求以下信号的 z 变换及其收敛域：

$$x(n)=[3(2^n)-4(3^n)]u(n)$$

解：如果我们定义信号

$$x_1(n)=2^nu(n)$$

和

$$x_2(n)=3^nu(n)$$

那么 $x(n)$ 可写成

$$x(n)=3x_1(n)-4x_2(n)$$

根据式(3.2.1)，它的 z 变换是

$$X(z)=3X_1(z)-4X_2(z)$$

由式(3.1.7)，我们想起

$$\alpha^nu(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\quad \text{收敛域：}|z|>|\alpha| \tag{3.2.2}$$

通过在式(3.2.2)中设 $\alpha=2$ 和 $\alpha=3$，我们得到

$$x_1(n)=2^nu(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X_1(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}},\quad \text{收敛域：}|z|>2$$

$$x_2(n)=3^nu(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X_2(z)=\frac{1}{1-3z^{-1}},\quad \text{收敛域：}|z|>3$$

$X_1(z)$和 $X_2(z)$的收敛域的交集是$|z|>3$。因此整体的变换 $X(z)$是

$$X(z)=\frac{3}{1-2z^{-1}}-\frac{4}{1-3z^{-1}},\quad \text{收敛域: } |z|>3$$

例 3.2.2 求以下信号的 z 变换:(a) $x(n)=(\cos\omega_0 n)u(n)$;(b) $x(n)=(\sin\omega_0 n)u(n)$。

解:

(a) 使用欧拉恒等式,信号 $x(n)$可表示为

$$x(n)=(\cos\omega_0 n)u(n)=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u(n)+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u(n)$$

从而式(3.2.1)意味着

$$X(z)=\frac{1}{2}Z\{e^{j\omega_0 n}u(n)\}+\frac{1}{2}Z\{e^{-j\omega_0 n}u(n)\}$$

如果在式(3.2.2)中我们设 $\alpha=e^{\pm j\omega_0}$ ($|\alpha|=|e^{\pm j\omega_0}|=1$),那么可得

$$e^{j\omega_0 n}u(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}},\quad \text{收敛域: } |z|>1$$

并且

$$e^{-j\omega_0 n}u(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}},\quad \text{收敛域: } |z|>1$$

从而

$$X(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}},\quad \text{收敛域: } |z|>1$$

经过一些简单的代数运算,我们得到期待的结果,即

$$(\cos\omega_0 n)u(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}},\quad \text{收敛域: } |z|>1 \tag{3.2.3}$$

(b) 根据欧拉恒等式,有$x(n)=(\sin\omega_0 n)u(n)=\frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 n}u(n)-e^{-j\omega_0 n}u(n)]$

从而

$$X(z)=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right),\quad \text{收敛域: } |z|>1$$

最后有

$$(\sin\omega_0 n)u(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}},\quad \text{收敛域: } |z|>1 \tag{3.2.4}$$

时移。如果

$$x(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X(z)$$

那么

$$x(n-k)\overset{z}{\longleftrightarrow}z^{-k}X(z) \tag{3.2.5}$$

$z^{-k}X(z)$的收敛域与 $X(z)$的收敛域是一样的,但 $k>0$ 时 $z=0$ 和 $k<0$ 时 $z=\infty$ 这两种情况除外。该性质的证明直接来自由式(3.1.1)给出的 z 变换的定义。

线性和时移性质是使 z 变换在离散时间 LTI 系统的分析中特别有用的关键特征。

例 3.2.3 应用时移性质,由例 3.1.1 中 $x_1(n)$的 z 变换求信号 $x_2(n)$和 $x_3(n)$的 z 变换。

解:容易看出 $x_2(n)=x_1(n+2)$

并且

$$x_3(n) = x_1(n-2)$$

从而由式(3.2.5)我们可得

$$X_2(z) = z^2 X_1(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

并且

$$X_3(z) = z^{-2} X_1(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

注意，因为乘上 z^2，所以 $X_2(z)$的收敛域不包括点 $z=\infty$，尽管它包含在 $X_1(z)$的收敛域中。

例 3.2.3 提供了理解时移性质的额外知识。实际上，如果我们记得，z^{-n}的系数是在时间 n 上的采样值，就可以直接看到，信号延时 $k(k>0)$个采样[即 $x(n)\rightarrow x(n-k)$]对应于 z 变换的所有项乘以 z^{-k}。z^{-n}的系数成为 $z^{-(n+k)}$的系数。

例 3.2.4　求以下信号的 z 变换：

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{3.2.6}$$

解：使用定义式(3.1.1)，我们可得该信号的 z 变换。实际上，

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot z^{-n} = 1 + z^{-1} + \cdots + z^{-(N-1)} = \begin{cases} N, & z = 1 \\ \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}, & z \neq 1 \end{cases} \tag{3.2.7}$$

因为 $x(n)$是有限长序列，它的收敛域是整个 z 平面，但 $z=0$ 除外。

应用线性和时移性质，我们也可以导出上述变换。注意，$x(n)$可以用以下两个阶跃信号来表示：

$$x(n) = u(n) - u(n-N)$$

使用式(3.2.1)和式(3.2.5)，我们得到

$$X(z) = Z\{u(n)\} - Z\{u(n-N)\} = (1-z^{-N}) Z\{u(n)\} \tag{3.2.8}$$

然而，由式(3.1.8)我们得到

$$Z\{u(n)\} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \text{收敛域: } |z| > 1$$

其中，当和式(3.2.8)联合时，可得到式(3.2.7)。

例 3.2.4 有助于澄清关于若干个 z 变换的组合的收敛域这一非常重要的问题。如果若干个信号的线性组合具有有限时长，那么其 z 变换的收敛域是由信号的有限长本质唯一决定的，而不是由各个变换的收敛域决定的。

z 域尺度变换。如果

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z), \quad \text{收敛域: } r_1 < |z| < r_2$$

那么对于任意常数 a，无论是实数或复数，都有

$$a^n x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(a^{-1}z), \quad \text{收敛域: } |a|r_1 < |z| < |a|r_2 \tag{3.2.9}$$

证明　由定义式(3.1.1)有

$$Z\{a^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n}$$

$$= X(a^{-1}z)$$

因为 $X(z)$的收敛域是 $r_1 < |z| < r_2$,所以 $X(a^{-1}z)$的收敛域是

$$r_1 < |a^{-1}z| < r_2$$

或者

$$|a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

为了更好地理解尺度变换的意义和含意,我们将 a 和 z 表示成极坐标的形式 $a = r_0 e^{j\omega_0}$, $z = re^{j\omega}$,并且引入一个新的复变量 $w = a^{-1}z$。从而,$Z\{x(n)\} = X(z)$和 $Z\{a^n x(n)\} = X(w)$。容易看到

$$w = a^{-1}z = \left(\frac{1}{r_0}r\right) e^{j(\omega-\omega_0)}$$

变量的这一变化导致 z 平面的收缩(当 $r_0 > 1$ 时)或扩展(当 $r_0 < 1$ 时),同时伴随 z 平面的旋转(当 $\omega_0 \neq 2k\pi$ 时,见图 3.2.1)。这就解释了为什么当 $|a| < 1$ 时,新变换的收敛域有变化。$|a| = 1$ 的情况,即 $a = e^{j\omega_0}$,是令人特别感兴趣的,因为它只与 z 平面的旋转对应。

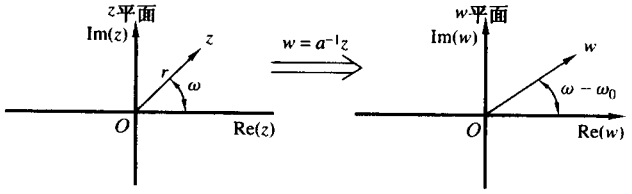


图 3.2.1 通过变换 $w = a^{-1}z$, $a = r_0 e^{j\omega_0}$,将 z 平面映射到 w 平面

例 3.2.5 求以下信号的 z 变换:

(a) $x(n) = a^n(\cos \omega_0 n)u(n)$

(b) $x(n) = a^n(\sin \omega_0 n)u(n)$

解:

(a) 由式(3.2.3)和式(3.2.9),容易得到

$$a^n(\cos\omega_0 n)u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1 - az^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}}, \quad |z| > |a| \tag{3.2.10}$$

(b) 相似地,由式(3.2.4)和式(3.2.9)可得

$$a^n(\sin\omega_0 n)u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}}, \quad |z| > |a| \tag{3.2.11}$$

时间翻转。如果

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z), \quad \text{收敛域: } r_1 < |z| < r_2$$

那么

$$x(-n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z^{-1}), \quad \text{收敛域: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1} \tag{3.2.12}$$

证明 由定义式(3.1.1)得

$$Z\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)(z^{-1})^{-l} = X(z^{-1})$$

其中,变量的变化是 $l=-n$。$X(z^{-1})$的收敛域是

$$r_1<|z^{-1}|<r_2 \qquad \text{或等同于} \qquad \frac{1}{r_2}<|z|<\frac{1}{r_1}$$

注意,$x(n)$的收敛域是 $x(-n)$的收敛域的倒数。这意味着,如果 z_0 位于 $x(n)$的收敛域内,则$1/z_0$ 位于 $x(-n)$的收敛域内。

以下是式(3.2.12)的一个直观的证明。当我们对折一个信号时,z^{-n}的系数就成为了 z^n 的系数。因此,对折一个信号等同于在 z 变换公式中用z^{-1}替换 z。换言之,时域上的翻转对应于 z 域上的倒数。

例 3.2.6　求以下信号的 z 变换:

$$x(n)=u(-n)$$

解:由式(3.1.8)可知

$$u(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-z^{-1}},\quad \text{收敛域:}\ |z|>1$$

使用式(3.2.12),我们容易得到

$$u(-n)\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-z},\quad \text{收敛域:}\ |z|<1 \tag{3.2.13}$$

z 域求导数。如果

$$x(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X(z)$$

那么

$$nx(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} \tag{3.2.14}$$

证明　式(3.1.1)两边求导数,可得

$$\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(-n)z^{-n-1}=-z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[nx(n)]z^{-n}$$

$$=-z^{-1}Z\{nx(n)\}$$

注意,两边的变换具有相同的收敛域。

例 3.2.7　求以下信号的 z 变换:

$$x(n)=na^nu(n)$$

解:信号 $x(n)$可表示为 $nx_1(n)$,其中 $x_1(n)=a^nu(n)$。由式(3.2.2)可得

$$x_1(n)=a^nu(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X_1(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad \text{收敛域:}\ |z|>|a|$$

从而,使用式(3.2.14)可得

$$na^nu(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X(z)=-z\frac{\mathrm{d}X_1(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2},\quad \text{收敛域:}\ |z|>|a| \tag{3.2.15}$$

如果在式(3.2.15)中设 $a=1$,那么可得到单位斜坡信号的 z 变换:

$$nu(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2},\quad \text{收敛域:}\ |z|>1 \tag{3.2.16}$$

例 3.2.8 求 z 变换为以下形式的信号的 z 逆变换:

$$X(z)=\lg(1+az^{-1}),\qquad |z|>|a|$$

解:求 $X(z)$的一阶导数可得

$$\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}$$

从而,

$$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}=az^{-1}\left[\frac{1}{1-(-a)z^{-1}}\right],\qquad |z|>|a|$$

括号内的项的 z 逆变换是$(-a)^n$。乘上 z^{-1}意味着一个采样的时延(时移性质),因而结果是$(-a)^{n-1}u(n-1)$。最后,根据求导性质可得

$$nx(n)=a(-a)^{n-1}u(n-1)$$

或

$$x(n)=(-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}u(n-1)$$

两序列卷积。如果

$$x_1(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X_1(z)$$

$$x_2(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X_2(z)$$

那么

$$x(n)=x_1(n)*x_2(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X(z)=X_1(z)X_2(z)\tag{3.2.17}$$

$X(z)$的收敛域至少是 $X_1(z)$的收敛域和 $X_2(z)$的收敛域的交集。

证明 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的卷积定义如下:

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)x_2(n-k)$$

$x(n)$的 z 变换是

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)x_2(n-k)\right]z^{-n}$$

调换求和的顺序并应用时移性质,可得

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n-k)z^{-n}\right]$$

$$=X_2(z)\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)z^{-k}=X_2(z)X_1(z)$$

例 3.2.9 计算以下信号的卷积:

$$x_1(n)=\{1,-2,1\}$$

$$x_2(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 5\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

解：由式(3.1.1)可得

$$X_1(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}$$

根据式(3.2.17)，我们计算 $X_1(z)$和 $X_2(z)$的乘积。从而

$$X(z) = X_1(z)X_2(z) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$

因此，

$$x(n) = \{1, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1\}$$
$$\uparrow$$

相同的结果也可以由以下的计算方法得到：

$$X_1(z) = (1 - z^{-1})^2$$

$$X_2(z) = \frac{1 - z^{-6}}{1 - z^{-1}}$$

那么

$$X(z) = (1 - z^{-1})(1 - z^{-6}) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$

鼓励读者直接使用卷积求和公式(时域方式)去求相同的结果。

卷积性质是 z 变换最有力的性质之一，因为它将时域上两个信号的卷积转变成它们变换的乘积。使用 z 变换计算两个信号的卷积的步骤如下：

1. 计算相关信号的 z 变换。

$$X_1(z) = Z\{x_1(n)\}$$
$$X_2(z) = Z\{x_2(n)\}$$
(时域 $\longrightarrow$ z域)

2. 将两个 z 变换相乘。

$$X(z) = X_1(z)X_2(z), \qquad (z\text{域})$$

3. 求 $X(z)$的 z 逆变换：

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}, \qquad (z\text{域} \longrightarrow \text{时域})$$

很多情况下，这些步骤比直接求卷积的和在计算上更容易。

两序列相关。如果

$$x_1(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)$$

$$x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$$

那么

$$r_{x_1x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n-l) \overset{z}{\longleftrightarrow} R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1}) \tag{3.2.18}$$

证明　我们记得

$$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$$

应用卷积和时间翻转性质，容易得到

$$R_{x_1x_2}(z) = Z\{x_1(l)\}Z\{x_2(-l)\} = X_1(z)X_2(z^{-1})$$

$R_{x_1x_2}(z)$的收敛域至少是 $X_1(z)$的收敛域和 $X_2(z)$的收敛域的交集。

正如卷积的情况,根据式(3.2.18)求多项式的乘积,然后求结果的逆变换,可更容易求得两个信号的互相关。

例 3.2.10 求以下信号的自相关序列:

$$x(n) = a^n u(n), \qquad -1 < a < 1$$

解:因为一个信号的自相关序列是它与自身的相关,所以由式(3.2.18)可得

$$R_{xx}(z) = Z\{r_{xx}(l)\} = X(z)X(z^{-1})$$

由式(3.2.2)可得

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad \text{收敛域: } |z| > |a| \quad \text{(因果信号)}$$

使用式(3.2.15)可得

$$X(z^{-1}) = \frac{1}{1-az}, \quad \text{收敛域: } |z| < \frac{1}{|a|} \quad \text{(非因果信号)}$$

从而

$$R_{xx}(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-az} = \frac{1}{1-a(z+z^{-1})+a^2}, \quad \text{收敛域: } |a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

因为 $R_{xx}(z)$的收敛域是一个环,所以 $r_{xx}(l)$是一个双边信号,即使 $x(n)$是因果的。

为了求 $r_{xx}(l)$,我们留意例 3.1.5 中的序列,当 $b = 1/a$ 时它的 z 变换是$(1-a^2)R_{xx}(z)$。因此直接得到

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2}a^{|l|}, \qquad -\infty < l < \infty$$

鼓励读者将本节中的方法和 2.6 节中求同一问题的时域方法进行比较。

两序列相乘。如果

$$x_1(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)$$

$$x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$$

那么

$$x(n) = x_1(n)x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\,\mathrm{d}v \tag{3.2.19}$$

其中,C 是围绕原点的闭合曲线,位于 $X_1(v)$和 $X_2(1/v)$共同的收敛域内。

证明 $x_3(n)$的 z 变换是

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n)z^{-n}$$

让我们将逆变换

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X_1(v)v^{n-1}\mathrm{d}v$$

替换 $X(z)$中的 $x_1(n)$,并调换求和与积分的顺序,可得

$$X(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X_1(v)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n}\right]v^{-1}\,\mathrm{d}v$$

括号中的求和只是变换 $X_2(z)$在 z/v 上的求值。因此，

$$X(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\,\mathrm{d}v$$

这是我们想要的结果。

为了获得 $X(z)$的收敛域，我们注意到，如果当 $r_{1l}<|v|<r_{1u}$时，$X_1(v)$收敛，而当 $r_{2l}<|z|<r_{2u}$时，$X_2(z)$收敛，那么 $X_2(z/v)$的收敛域是

$$r_{2l}<\left|\frac{z}{v}\right|<r_{2u}$$

因此 $X(z)$的收敛域至少是

$$r_{1l}r_{2l}<|z|<r_{1u}r_{2u} \tag{3.2.20}$$

尽管这一性质将不会被直接使用，但是随后将证明它是有用的，特别是在我们处理基于窗口技术的滤波器设计方面，其中我们给 IIR 系统的脉冲响应乘上一个有限时长窗口，而该窗口被用来截断 IIR 系统的脉冲响应。

对于复值序列 $x_1(n)$和 $x_2^*(n)$，我们可以定义它们的乘积序列为 $x(n)=x_1(n)x_2^*(n)$。则相应的复卷积积分成为

$$x(n)=x_1(n)x_2^*(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X_1(v)X_2^*\left(\frac{z^*}{v^*}\right)v^{-1}\,\mathrm{d}v \tag{3.2.21}$$

式(3.2.21)的证明留给读者作为练习。

帕斯瓦尔关系式。如果 $x_1(n)$和 $x_2(n)$都是复值序列，那么

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)x_2^*(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X_1(v)X_2^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}\,\mathrm{d}v \tag{3.2.22}$$

假如 $r_{1l}r_{2l}<1<r_{1u}r_{2u}$，其中 $r_{1l}<|z|<r_{1u}$和 $r_{2l}<|z|<r_{2u}$都是 $X_1(z)$和 $X_2(z)$的收敛域。计算在 $z=1$ 处式(3.2.21)中 $X(z)$的值，可直接证明式(3.2.22)。

初值定理。如果 $x(n)$是因果的，即当 $n<0$ 时，$x(n)=0$，那么

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z) \tag{3.2.23}$$

证明　因为 $x(n)$是因果的，式(3.1.1)给出

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

显然，当 $z\to\infty$ 时，因为 $n>0$，所以 $z^{-n}\to 0$，则可得式(3.2.23)。

为了方便查阅，本节中讲述的 z 变换的性质总结于表 3.2 中。这些性质罗列的顺序与本节介绍它们的顺序是一样的。共轭性质和帕斯瓦尔关系式的证明留给读者作为练习。

我们已经推导出了许多在实际应用中遇到的 z 变换。为了方便查阅，这些 z 变换对总结于表 3.3 中。查看这个表格可知，这些 z 变换都是有理函数(即 z^{-1}的多项式的比值)。有理 z 变换不但会在各种重要信号的 z 变换中遇到，而且会在由常系数差分方程表征的离散时间线性时不变系统的特征描述中遇到，这一点将变得很明显。

表 3.2 z 变换的性质

性质	时域	z 域	收敛域
记号	$x(n)$	$X(z)$	收敛域: $r_2 < \|z\| < r_1$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	收敛域$_1$
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	收敛域$_2$
线性	$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	至少是收敛域$_1$和收敛域$_2$的交集
时移	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	同$X(z)$, $k>0$时$z=0$和$k<0$时$z=\infty$这两种情况除外
z域尺度变换	$a^nx(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|r_2 < \|z\| < \|a\|r_1$
时间翻转	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \|z\| < \frac{1}{r_2}$
共轭	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	收敛域
实部	$\mathrm{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	包括收敛域
虚部	$\mathrm{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}\mathrm{j}[X(z)-X^*(z^*)]$	包括收敛域
z域求导	$nx(n)$	$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$	$r_2 < \|z\| < r_1$
卷积	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	至少是收敛域$_1$和收敛域$_2$的交集
相关	$r_{x_1x_2}(l)=x_1(l)*x_2(-l)$	$R_{x_1x_2}(z)=X_1(z)X_2(z^{-1})$	至少是$X_1(z)$和$X_2(z^{-1})$收敛域的交集
初值定理	若$x(n)$是因果的	$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$	
相乘	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\,\mathrm{d}v$	至少为$r_{1l}r_{2l} < \|z\| < r_{1u}r_{2u}$
帕斯瓦尔关系式	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)x_2^*(n)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C X_1(v)X_2^*(1/v^*)v^{-1}\mathrm{d}v$		

表 3.3 一些常用的 z 变换对

	信号$x(n)$	z变换$X(z)$	收敛域
1	$\delta(n)$	1	所有z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
3	$a^nu(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
4	$na^nu(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
5	$-a^nu(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$
6	$-na^nu(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|<\|a\|$
7	$(\cos\omega_0n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
8	$(\sin\omega_0n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
9	$(a^n\cos\omega_0n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|a\|$
10	$(a^n\sin\omega_0n)u(n)$	$\frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|a\|$

3.3　有理 z 变换

在 3.2 节我们提到，z 变换中一个重要的家族是其变换表达式 $X(z)$ 是有理函数的 z 变换，即 z^{-1}（或 z）的多项式的比值。本节我们讨论关于这一类有理 z 变换的非常重要的问题。

3.3.1　极点和零点

z 变换 $X(z)$ 的零点是指使 $X(z)$ 的值为零的 z 值。z 变换 $X(z)$ 的极点是指使 $X(z)$ 的值为 ∞ 的 z 值。如果 $X(z)$ 是有理分式，那么

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}} \tag{3.3.1}$$

如果 $a_0\neq0$ 并且 $b_0\neq0$，我们为了避免 z 的负幂指数，可以按以下方式进行因式分解以去掉 b_0z^{-M} 项和 a_0z^{-N} 项：

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0z^{-M}}{a_0z^{-N}}\frac{z^M+(b_1/b_0)z^{M-1}+\cdots+b_M/b_0}{z^N+(a_1/a_0)z^{N-1}+\cdots+a_N/a_0}$$

因为 $B(z)$ 和 $A(z)$ 是 z 的多项式，所以它们可以表示为以下形式的分式：

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0}{a_0}z^{-M+N}\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

$$X(z)=Gz^{N-M}\frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)} \tag{3.3.2}$$

其中，$G\equiv b_0/a_0$。因此 $X(z)$ 在 $z=z_1,z_2,\cdots,z_M$（分子多项式的根）处具有 M 个有限零点，在 $z=p_1,p_2,\cdots,p_N$（分母多项式的根）处具有 N 个有限极点，并且在原点 $z=0$ 处有 $|N-M|$ 个零点（如果 $N>M$）或极点（如果 $N<M$）。极点或零点也许会在 $z=\infty$ 处。如果 $X(\infty)=0$，那么在 $z=\infty$ 处存在一个零点；如果 $X(\infty)=\infty$，那么在 $z=\infty$ 处存在一个极点。如果我们统计位于零和无穷大处的极点和零点，就会发现 $X(z)$ 正好具有相同数目的极点和零点。

我们可以用极零点图（或模式）将 $X(z)$ 在复平面上画出来，图中用交叉（×）记号表示极点位置，用圆圈（○）记号表示零点位置。多阶零极点的阶数由位于记号旁的数字表示。显然，由定义可知一个 z 变换的收敛域不能包含任何极点。

例 3.3.1　画出以下信号的零极点图：

$$x(n)=a^nu(n),\qquad a>0$$

解：由表 3.3 我们可得

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a},\qquad \text{收敛域：}|z|>a$$

从而 $X(z)$ 在 $z_1=0$ 处具有一个零点，在 $p_1=a$ 处具有一个极点。零极点图如图 3.3.1 所示。注意，极点 $p_1=a$ 未包含在收敛域中，因为 z 变换不会在极点处收敛。

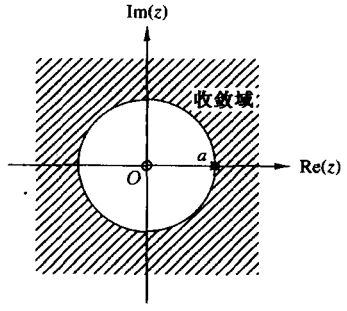


图 3.3.1　因果指数信号 $x(n)=a^nu(n)$ 的零极点图

例 3.3.2 画出以下信号的零极点图:

$$x(n)=\begin{cases}a^n, & 0\leqslant n\leqslant M-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $a>0$。

解:由定义式(3.1.1),我们可得

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-1}(az^{-1})^n=\frac{1-(az^{-1})^M}{1-az^{-1}}=\frac{z^M-a^M}{z^{M-1}(z-a)}$$

因为 $a>0$,等式 $z^M=a^M$ 具有如下 M 个根:

$$z_k=a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/M}\qquad k=0,1,\cdots,M-1$$

零点 $z_0=a$ 抵消了在 $z=a$ 处的极点。因此,

$$X(z)=\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{M-1})}{z^{M-1}}$$

上式具有 $M-1$ 个零点和 $M-1$ 个极点,其位置如图 3.3.2 所示,其中 $M=8$。注意,收敛域是除 $z=0$ 以外的整个 z 平面,因为 $M-1$ 个极点位于原点处。

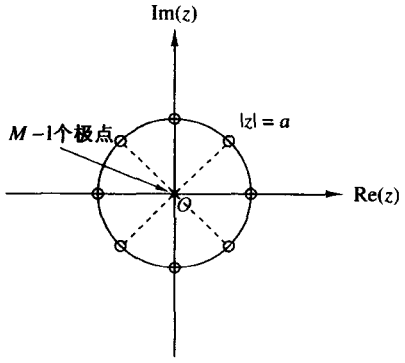


图 3.3.2 当 $M=8, 0\leqslant n\leqslant M-1(a>0)$时,有限长信号 $x(n)=a^n$ 的零极点模式

显然,如果给出零极点图,就可以使用式(3.3.2)求得带尺度因子 G 的 $X(z)$。下面的例子将说明这一点。

例 3.3.3 求对应于零极点图 3.3.3 的 z 变换及其信号。

解:在 $z_1=0, z_2=r\cos\omega_0$ 处共有两个零点($M=2$),在 $p_1=re^{j\omega_0}, p_2=re^{-j\omega_0}$ 处共有两个极点($N=2$)。将这些关系代入式(3.3.2),可得

$$X(z)=G\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-p_1)(z-p_2)}=G\frac{z(z-r\cos\omega_0)}{(z-r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})(z-r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0})},\qquad \text{收敛域: } |z|>r$$

经过简单的代数运算,可得

$$X(z)=G\frac{1-rz^{-1}\cos\omega_0}{1-2rz^{-1}\cos\omega_0+r^2z^{-2}},\qquad \text{收敛域: } |z|>r$$

查表 3.3 可得

$$x(n)=G(r^n\cos\omega_0 n)u(n)$$

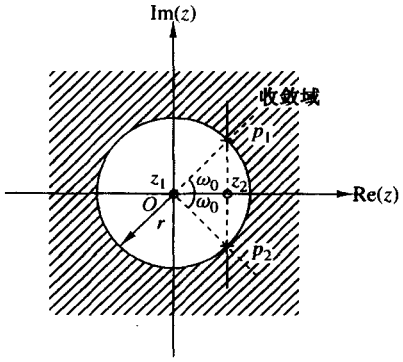


图 3.3.3 例 3.3.3 的零极点模式

由例 3.3.3 可知,当 p_1 和 p_2 共轭时,乘积 $(z-p_1)(z-p_2)$ 的结果是具有实系数的多项式。一般来说,如果一个多项式具有实系数,那么它的根或者是实数,或者是共轭复数对。

可见,z 变换 $X(z)$ 是复变量 $z=\Re(z)+\mathrm{j}\Im(z)$ 的复函数。显然,$X(z)$ 的幅度 $|X(z)|$ 是 z 的实正函数。因为 z 表示了复平面上的一个点,所有 $|X(z)|$ 是二维函数,描述的是"平面"。如图 3.3.4 所示的 z 变换说明了这一点:

$$X(z)=\frac{z^{-1}-z^{-2}}{1-1.2732z^{-1}+0.81z^{-2}}\tag{3.3.3}$$

它在 $z_1=1$ 处有一个零点,在 $p_1, p_2=0.9\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\pi/4}$ 处有两个极点。注意,高峰接近奇点(极点),而低谷接近零。

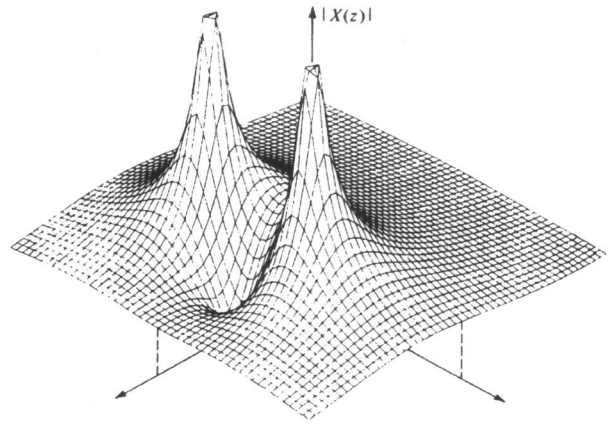


图 3.3.4　例 3.3.3 的 z 变换的 $|X(z)|$ 的图形

3.3.2　因果信号的极点位置和时域行为

本节我们讨论一对极点在 z 平面的位置和时域上相应信号的形式(形状)的关系。本讨论是以表 3.3 给出的 z 变换对集合和前面的章节中学习到的内容为基础的。我们只考虑实因果信号。特别地,我们认为因果信号的行为特性取决于它的变换的极点是位于 $|z|<1$ 的区域或者 $|z|>1$ 的区域,还是位于 $|z|=1$ 的圆上。因为 $|z|=1$ 是半径为 1 的圆,它被称为单位圆。

如果一个实信号的 z 变换具有一个极点,则该极点是实数。这样的信号只有一个,就是实指数信号

$$x(n)=a^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}, \quad \text{收敛域: } |z|>|a|$$

该信号在实轴上的 $z_1=0$ 处有一个零点,在 $p_1=a$ 处有一个极点。图 3.3.5 说明了关于与单位圆相关的极点位置的信号行为特性。如果极点位于单位圆内,则信号是衰减的;如果极点位于单位圆上,则信号是恒定的;如果极点位于单位圆外,则信号是增长的。另外,负极点会导致信号的符号交替。显然,极点位于单位圆外的因果信号是无界的,会导致数字系统的上溢,一般来说应该避免。

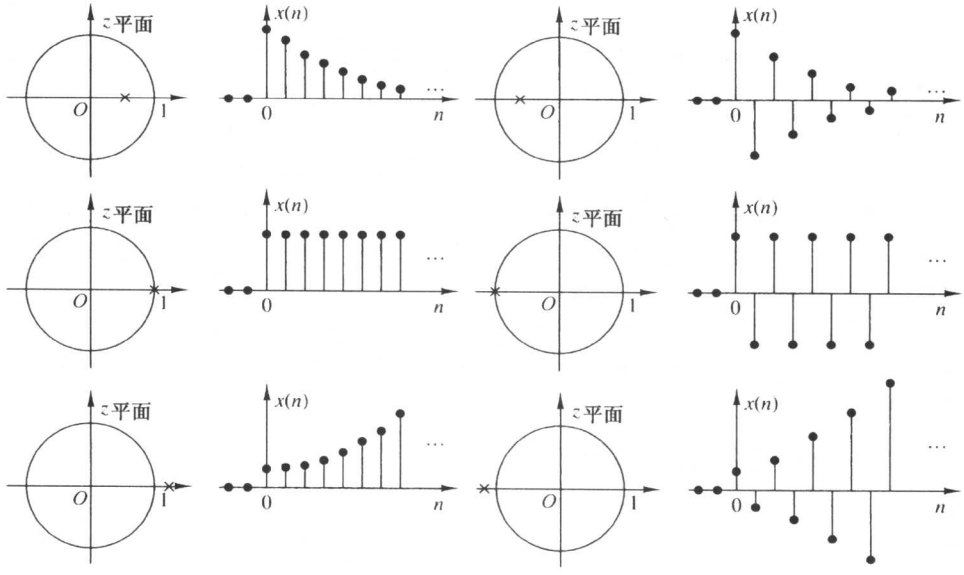


图 3.3.5　作为关于单位圆的极点位置的函数的单实极点因果信号的时域行为

一个具有双重实极点的因果实信号具有形式

$$x(n) = na^n u(n)$$

(见表 3.3)且其行为特性如图 3.3.6 所示。注意,与单极点信号形成对照,位于单位圆上的实的双重极点其结果是无界的信号。

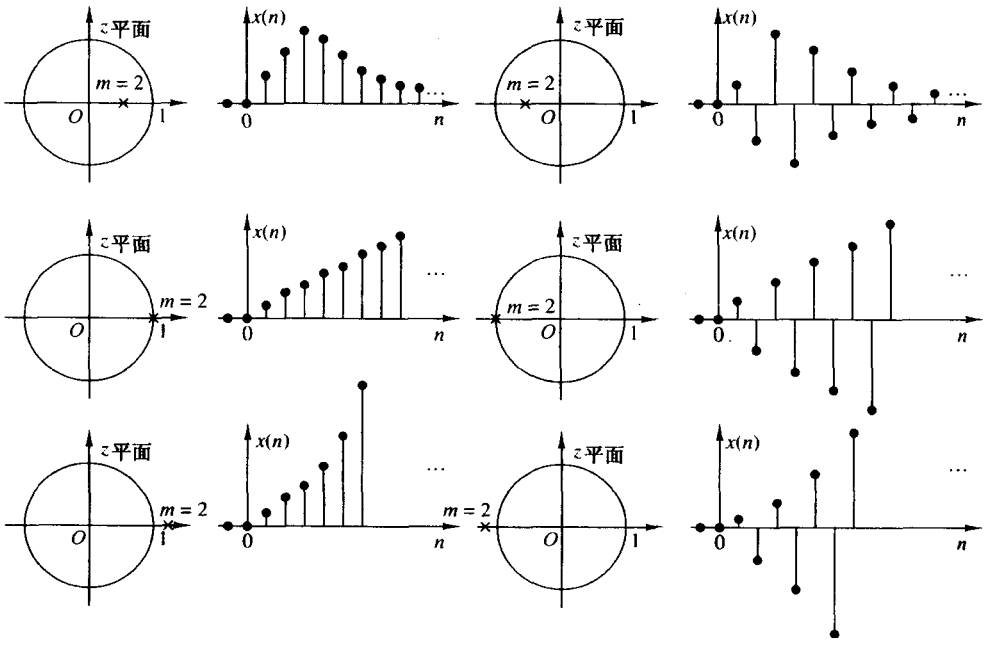


图 3.3.6 作为极点位置的函数的相应于双重实极点($m = 2$)因果信号的时域行为

图 3.3.7 说明了具有复共轭对的因果信号的情况。根据表 3.3,这类极点布局的结果是具有指数权重的正弦信号。极点离原点的距离 r 决定了正弦信号的包络,而极点与正实轴的夹角则决定了相对频率。注意,如果 $r > 1$,那么信号的幅度增长;如果 $r = 1$,那么信号的幅度恒定;如果 $r < 1$,那么信号的幅度衰减。

最后,图 3.3.8 说明了在单位圆上具有双重极点对的因果信号的行为。这补充了图 3.3.6 中相应的结果,并且说明需要非常小心地处理位于单位圆上的多重极点。

总之,具有实极点或复共轭极点,并且这些极点位于单位圆内或单位圆上的实因果信号的幅度总是有界的。而且,具有一个离原点越近的极点(或一对复共轭极点)的信号,比具有一个位于单位圆内且接近单位圆的极点的信号衰减更快。因此信号的时域行为主要取决于它的极点相对于单位圆的位置。零点也影响信号的行为,但是没有极点那么强烈。以正弦信号为例,零点的存在以及位置仅仅影响相角。

由此需要强调的是,前面提及的所有关于因果信号的内容也可以应用于因果 LTI 系统,因为它们的脉冲响应是因果信号。因此,如果系统的一个极点位于单位圆外,那么系统的脉冲响应就成为无界的,因而系统是不稳定的。

3.3.3 线性时不变系统的系统函数

在第 2 章中我们指出,(松弛)线性时不变系统的一个输入序列 $x(n)$ 的输出可以通过计算 $x(n)$ 和系统的单位采样响应的卷积获得。由 3.2 节导出的卷积性质允许我们将 z 域上的这个关系表示为

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{3.3.4}$$

其中 $Y(z)$是输出序列 $y(n)$的 z 变换，$X(z)$是输入序列 $x(n)$的 z 变换，而 $H(z)$是单位采样响应 $h(n)$的 z 变换。

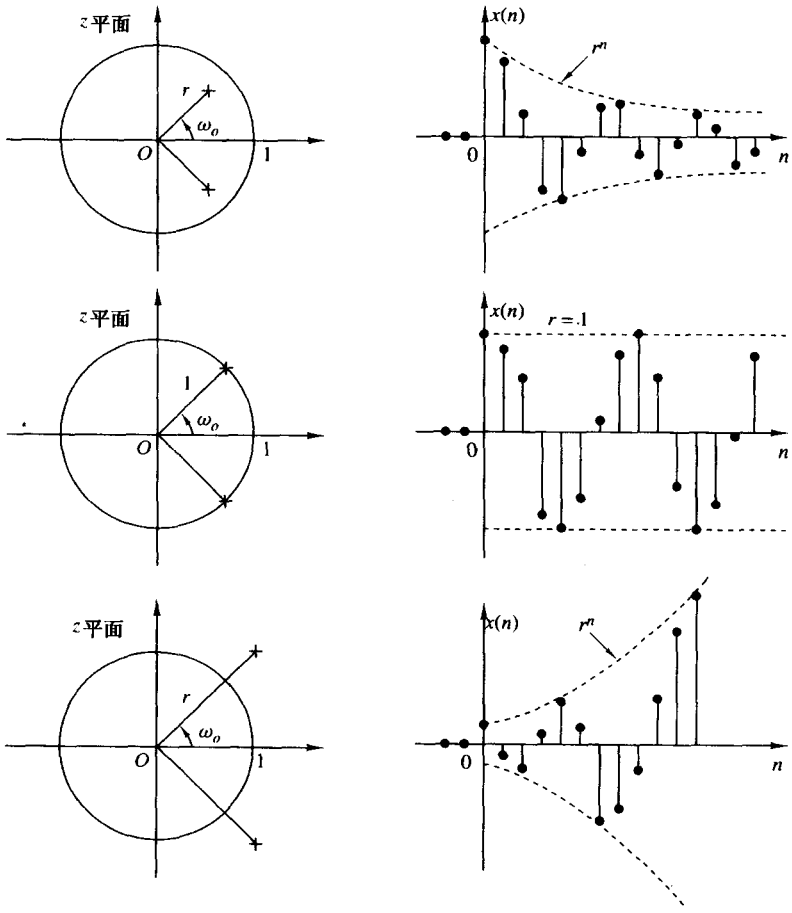


图 3.3.7　复共轭极点对及其相应的具有振荡行为的因果信号

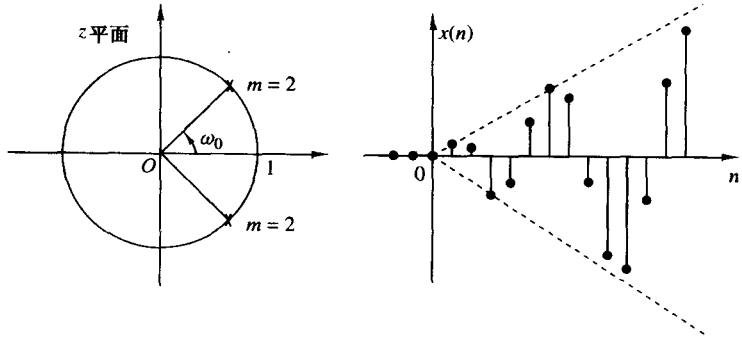


图 3.3.8　单位圆上有双重极点对的因果信号

如果 $h(n)$和 $x(n)$已知，那么我们可以求它们对应的 z 变换 $H(z)$和 $X(z)$，然后将结果相乘可得 $Y(z)$，最后通过求 $Y(z)$的 z 逆变换得到 $y(n)$。另外，如果已知 $x(n)$并观察到系统的输出

$y(n)$,那么我们可以先通过以下的关系式求得 $H(z)$:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \tag{3.3.5}$$

然后求 $H(z)$的 z 逆变换得到单位采样响应。

因为

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n} \tag{3.3.6}$$

显然,$H(z)$表示了一个系统的 z 域特征,而 $h(n)$是该系统相应的时域特征。换言之,$H(z)$和 $h(n)$是一个系统在两个域上对等的描述。变换 $H(z)$被称为系统函数。

当系统由以下形式的线性常系数差分方程描述时,式(3.3.5)中的关系在求 $H(z)$时特别有用:

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k) \tag{3.3.7}$$

这种情况下,通过计算式(3.3.7)两边的 z 变换,可由式(3.3.7)直接求系统函数。从而,应用时移性质,我们可得

$$\begin{aligned}
&Y(z)=-\sum_{k=1}^{N}a_k Y(z)z^{-k}+\sum_{k=0}^{M}b_k X(z)z^{-k}\\
&Y(z)\left(1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}\right)=X(z)\left(\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}\right)\\
&\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

因此,由常系数差分方程描述的线性时不变系统具有有理系统函数。

这是由线性常系数差分方程描述的系统的系统函数的一般形式。由这个一般形式,我们可得到两种重要的特殊形式。首先,当 $1\leqslant k\leqslant N$ 时,如果 $a_k=0$,那么式(3.3.8)简化为

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}=\frac{1}{z^M}\sum_{k=0}^{M}b_k z^{M-k} \tag{3.3.9}$$

这种情况下,$H(z)$包含 M 个零点和位于原点 $z=0$ 处的一个 M 阶极点,而这些零点的值由系统的参数$\{b_k\}$决定。因为系统仅包含为零的极点(在 $z=0$ 处)和 M 个非零值的零点,所以被称为全零点系统。显然,这样的系统具有有限长的脉冲响应(FIR),因而被称为 FIR 系统或滑动平均(MA)系统。

另一方面,当 $1\leqslant k\leqslant M$ 时,如果 $b_k=0$,那么系统函数简化为

$$H(z)=\frac{b_0}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=\frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{N-k}},\qquad a_0\equiv 1 \tag{3.3.10}$$

这种情况下,$H(z)$包含 N 个极点和位于原点 $z=0$ 处的一个 N 阶零点,这些极点的值由系统的参数$\{a_k\}$决定。我们通常不考虑这些为零值的零点。因此,式(3.3.10)的系统函数仅包含非零值的极点,而其相应的系统被称为全极点系统。由于这些极点的存在,这样的系统的脉冲响应是无限长的,因此它是 IIR 系统。

由式(3.3.8)给出的系统函数的一般形式同时包含极点和零点，因此其相应的系统称为零极点系统，具有 N 个极点和 M 个零点。位于 $z=0$ 和 $z=\infty$ 处的极点和/或零点是隐含的，但通常不考虑。由于极点的存在，一个零极点系统是 IIR 系统。

下面的例子说明了求系统函数和来自差分方程的单位采样响应的步骤。

例 3.3.4　求由以下差分方程描述的系统的系统函数及其单位采样响应：

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+2x(n)$$

解：计算该差分方程的 z 变换，可得

$$Y(z)=\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)+2X(z)$$

因此系统函数是

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

该系统在 $z=\frac{1}{2}$ 处有一个极点，在原点处有一个零点。使用表 3.3 我们可得逆变换

$$h(n)=2(\frac{1}{2})^n u(n)$$

这是该系统的单位采样响应。

现在我们已经说明，在一般使用的系统中和在线性时不变系统的特征描述中遇见的是有理 z 变换。在 3.4 节我们将介绍有理函数 z 逆变换的几种求解方法。

3.4　z 逆变换

正如我们在 3.1.2 节看到的，z 逆变换的形式如下：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z \tag{3.4.1}$$

其中的积分是位于 $X(z)$ 的收敛域内、环绕原点的闭合曲线 C 上的围线积分。为了简化，C 可取 z 平面上 $X(z)$ 的收敛域内的圆。

实际中有三种求 z 逆变换的常用方法。

1. 直接求式(3.4.1)的围线积分。
2. 展开成变量 z 和 z^{-1} 的级数。
3. 部分分式展开并查表。

3.4.1　围线积分法求 z 逆变换

本节我们使用柯西积分定理从围线积分直接求 z 逆变换。

柯西积分定理。设 $f(z)$ 是复变量 z 的函数，C 是 z 平面上的闭合曲线。如果导数 $\mathrm{d}f(z)/\mathrm{d}z$ 存在并位于围线 C 内，且 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处没有极点，那么

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=\begin{cases} f(z_0), & z_0\text{在}C\text{内部} \\ 0, & z_0\text{在}C\text{外部} \end{cases} \tag{3.4.2}$$

更为广义地，如果 $f(z)$ 的 $(k+1)$ 阶导数存在而且 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处没有极点，那么

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}\,dz=\begin{cases}\left.\dfrac{1}{(k-1)!}\dfrac{d^{k-1}f(z)}{dz^{k-1}}\right|_{z=z_0}, & z_0在C内部\\ 0, & z_0在C外部\end{cases} \tag{3.4.3}$$

式(3.4.2)和式(3.4.3)右边的值称为在 $z=z_0$ 处的极点的留数。式(3.4.2)和式(3.4.3)的留数是柯西积分定理的两种形式。

我们可以应用式(3.4.2)和式(3.4.3)来求得更为广义的围线积分的值。具体来说,假设围线积分的被积函数是一个本征函数 $f(z)/g(z)$,其中 $f(z)$在围线 C 内没有极点,而 $g(z)$是围线 C 内具有独特(单)根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的多项式。因而

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{g(z)}\,dz&=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z-z_i}\right]dz\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{A_i}{z-z_i}\,dz\\&=\sum_{i=1}^{n}A_i\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

其中,

$$A_i=(z-z_i)\left.\frac{f(z)}{g(z)}\right|_{z=z_i} \tag{3.4.5}$$

$\{A_i\}$的值是相应的极点的留数,这些极点位于 $z=z_i$, $i=1,2,\cdots,n$。因此围线积分的值等同于围线 C 内所有极点的留数之和。

我们观察到,式(3.4.4)是由部分分式展开并应用式(3.4.2)得到的。当 $g(z)$在围线内具有多重根且是单根时,加以适当的修改,该部分分式展开式和式(3.4.3)可以用来计算相应极点处的留数。

对于 z 逆变换的情况,我们有

$$\begin{aligned}x(n)&=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\,dz\\&=\sum_{C内的所有极点\{z_i\}}[X(z)z^{n-1}在z=z_i处的留数]\\&=\sum_i(z-z_i)X(z)z^{n-1}|_{z=z_i}\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

这里假设极点$\{z_i\}$是单极点。如果 $X(z)z^{n-1}$在围线 C 内的一个或多个 n 值上没有极点,那么对于这些值,$x(n)=0$。

以下的例子说明如何用柯西积分定理求 z 逆变换。

例 3.4.1 使用复反积分计算

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\qquad |z|>|a|$$

的 z 逆变换。

解:我们有

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}\,dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{z^n\,dz}{z-a}$$

其中 C 是半径大于 $|a|$ 的圆。我们使用式(3.4.2)计算此积分，其中 $f(z)=z^n$。我们区分两种情况。

1. 如果 $n\geqslant 0$，那么 $f(z)$ 只有零点，因此 C 内没有极点。C 内唯一的极点是 $z=a$。因此，

$$x(n)=f(z_0)=a^n,\qquad n\geqslant 0$$

2. 如果 $n<0$，那么 $f(z)=z^n$ 在 $z=0$ 处有一个 n 阶极点，而极点位于 C 内。因此来自两处的极点都是有贡献的。对于 $n=-1$，我们有

$$x(-1)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{z(z-a)}\,dz=\left.\frac{1}{z-a}\right|_{z=0}+\left.\frac{1}{z}\right|_{z=a}=0$$

如果 $n=-2$，我们有

$$x(-2)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{z^2(z-a)}\,dz=\left.\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-a}\right)\right|_{z=0}+\left.\frac{1}{z^2}\right|_{z=a}=0$$

不断以上述方法求值，我们可以证明，当 $n<0$ 时，$x(n)=0$。因此，

$$x(n)=a^n u(n)$$

3.4.2　幂级数展开法求 z 逆变换

本方法的基本思想是，给出 z 变换 $X(z)$ 及其对应的收敛域，我们可以将 $X(z)$ 展开成如下形式的幂级数：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} \tag{3.4.7}$$

它收敛于给定的收敛域。然后，根据 z 变换的唯一性，对于所有的 n，可得 $x(n)=c_n$。当 $X(z)$ 是有理式时，展开可以通过长除法求得。

为了说明本技术，我们将求某些具有和 $X(z)$ 相同的表达式但收敛域不同的 z 逆变换。这将有助于再次强调收敛域在处理 z 变换时的重要性。

例 3.4.2　计算下面的 z 逆变换：

$$X(z)=\frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

当

(a) 收敛域：$|z|>1$

(b) 收敛域：$|z|<0.5$

解：

(a) 因为收敛域是圆的外围，所以 $x(n)$ 是因果信号。因此我们将其展开成 z 的负幂级数。将 $X(z)$ 的分子除以分母，我们可得幂级数

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{7}{4}z^{-2}+\frac{15}{8}z^{-3}+\frac{31}{16}z^{-4}+\cdots$$

将此关系式与式(3.1.1)比较，可得如下结论：

$$x(n)=\{1,\underset{\uparrow}{\frac{3}{2}},\frac{7}{4},\frac{15}{8},\frac{31}{16},\cdots\}$$

注意，在长除过程的每一步中，z^{-1} 的最低阶项被忽略不计。

(b) 本例中收敛域是圆的内部。因而信号 $x(n)$ 是非因果信号。为了获得 z 的正幂级数展开式，我们用长除法计算如下：

$$\begin{array}{r} 2z^2+6z^3+14z^4+30z^5+62z^6+\cdots \\ \frac{1}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-1}+1\ \overline{)\,1} \\ \underline{1-3z+2z^2} \\ 3z-2z^2 \\ \underline{3z-9z^2+6z^3} \\ 7z^2-6z^3 \\ \underline{7z^2-21z^3+14z^4} \\ 15z^3-14z^4 \\ \underline{15z^3-45z^4+30z^5} \\ 31z^4-30z^5 \end{array}$$

从而，

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=2z^2+6z^3+14z^4+30z^5+62z^6+\cdots$$

这种情况下，对于 $n\geqslant 0, x(n)=0$。将此关系式与式(3.1.1)进行比较，我们可得如下结论：

$$x(n)=\{\cdots 62, 30, 14, 6, 2, 0, \underset{\uparrow}{0}\}$$

注意，在长除过程中的每一步，z 的最低阶项被忽略不计。此处要强调的是，对于非因果信号的情况，我们只是简单地将长除法得到的两个多项式按降阶写出(即从左边负值最大的项最开始)。

由这个例子，我们注意到，当 n 很大时，长除法通常得不到答案 $x(n)$，因为长除法变得非常冗长。尽管长除法为 $x(n)$的求解提供了直接的计算，但是无法得到一个闭合形式的解，除非结果的形式足够简单，以至于可以推断出 $x(n)$的通常形式。因此，该方法只适用于求取信号开始的几个采样值。

例 3.4.3 计算下式的 z 逆变换：

$$X(z)=\lg(1+az^{-1}), \qquad |z|>|a|$$

解：$|x|<1$，对 $\lg(1+x)$使用幂级数展开法，可得

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^n z^{-n}}{n}$$

从而

$$x(n)=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{n}, & n\geqslant 1\\ 0, & n\leqslant 0\end{cases}$$

将无理函数展开成幂级数可由查表得到。

3.4.3 部分分式展开法求 z 逆变换

采用查表的方法，我们尝试将函数 $X(z)$表示成如下的线性组合：

$$X(z)=\alpha_1 X_1(z)+\alpha_2 X_2(z)+\cdots+\alpha_K X_K(z) \tag{3.4.8}$$

其中，$X_1(z),\cdots,X_K(z)$可以用逆变换 $x_1(n),\cdots,x_K(n)$来表示，而这些逆变换可以从 z 变换对表中查到。如果这样的分解是可能的，那么 $X(z)$的 z 逆变换 $x(n)$就可以使用如下的线性性质很容易地得到：

$$x(n)=\alpha_1 x_1(n)+\alpha_2 x_2(n)+\cdots+\alpha_K x_K(n) \tag{3.4.9}$$

如果 $X(z)$是形式如式(3.3.1)的有理函数，那么这种方法特别有用。不失一般性，我们假设 $a_0=1$，因此式(3.3.1)可表示为

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}} \tag{3.4.10}$$

注意，如果 $a_0\neq1$，我们可通过将式(3.3.1)的分子和分母同时除以 a_0 来获得式(3.4.10)。

如果 $a_N\neq0$，而且 $M<N$，那么形如式(3.4.10)的有理函数被称为是本征的。由式(3.3.2)得出这等于说无限零点的个数少于无限极点的个数。

一个非本征有理函数($M\geqslant N$)总可以写成一个多项式和一个本征有理函数之和。这个步骤可由以下例子说明。

例 3.4.4　用一个多项式和一个本征函数来表示以下非本征有理变换：

$$X(z)=\frac{1+3z^{-1}+\frac{11}{6}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

解：首先，我们必须化简分子，以去掉 z^{-2} 和 z^{-3} 项。因此我们使用长除法按降阶的方法写下两个多项式。当余数的阶数是 z^{-1} 时，就停止除法。从而可得

$$X(z)=1+2z^{-1}+\frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

一般而言，一个非本征有理函数($M\geqslant N$)可表示为

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=c_0+c_1z^{-1}+\cdots+c_{M-N}z^{-(M-N)}+\frac{B_1(z)}{A(z)} \tag{3.4.11}$$

该多项式的 z 逆变换可藉由观察简单求得。既然任何一个非本征有理函数总可以使用式(3.4.11)变换成一个本征有理函数，那么我们集中关注合适的有理变换的逆。我们用两个步骤实现。首先，求本征有理函数的部分分式展开式，然后求各项的逆。

设 $X(z)$ 是一个本征有理函数，即

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}} \tag{3.4.12}$$

其中，

$$a_N\neq0\qquad\text{和}\qquad M<N$$

为简化讨论，我们将式(3.4.12)的分子和分母同时乘以 z^N，从而去掉 z 的负幂次项。因此得到

$$X(z)=\frac{b_0z^N+b_1z^{N-1}+\cdots+b_Mz^{N-M}}{z^N+a_1z^{N-1}+\cdots+a_N} \tag{3.4.13}$$

该式只包含 z 的正幂次项。因为 $N>M$，所以以下函数也总是本征的：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{b_0z^{N-1}+b_1z^{N-2}+\cdots+b_Mz^{N-M-1}}{z^N+a_1z^{N-1}+\cdots+a_N} \tag{3.4.14}$$

采用部分分式展开的目的是为了将式(3.4.12)或者等价式(3.4.14)表示成简单函数之和。为此目的，我们首先将式(3.4.14)中的分母多项式分解成包含 $X(z)$ 的极点 $p_1,p_2,\cdots,p_N$ 的因式。我们区分两种情况。

相异极点。设极点 $p_1,p_2,\cdots,p_N$ 全部不同。因而我们求以下形式的表达式：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_1}{z-p_1}+\frac{A_2}{z-p_2}+\cdots+\frac{A_N}{z-p_N} \tag{3.4.15}$$

问题在于求系数 $A_1,A_2,\cdots,A_N$。求解这个问题有两种方法，这将在下面的例子中说明。

例 3.4.5 求以下的本征有理函数的部分分式展开式:

$$X(z)=\frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}} \tag{3.4.16}$$

解:首先,分子和分母同时乘以 z^2 以去掉负幂次项。从而

$$X(z)=\frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$$

$X(z)$的极点是 $p_1=1$ 和 $p_2=0.5$。因此,式(3.4.15)的展开式为

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(z-1)(z-0.5)}=\frac{A_1}{z-1}+\frac{A_2}{z-0.5} \tag{3.4.17}$$

求 A_1 和 A_2 的最简方法是用分母项$(z-1)(z-0.5)$乘以等式。因此可得

$$z=(z-0.5)A_1+(z-1)A_2 \tag{3.4.18}$$

现在如果我们在式(3.4.18)中设 $z=p_1=1$,那么将涉及 A_2 的项去掉。因此,

$$1=(1-0.5)A_1$$

这样我们得到结果 $A_1=2$。然后我们回到式(3.4.18),并且设 $z=p_2=0.5$,从而将涉及 A_1 的项去掉,所以我们得到

$$0.5=(0.5-1)A_2$$

因而 $A_2=-1$。因此,部分分式展开的结果是

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z-0.5} \tag{3.4.19}$$

上述例子表明,我们可以通过在式(3.4.15)两边乘上$(z-p_k)$,$k=1,2,\cdots,N$ 并计算相应的极点位置$(p_1,p_2,\cdots,p_N)$上所得到的表达式,来求得系数 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ 的值。从而,大体上我们得到

$$\frac{(z-p_k)X(z)}{z}=\frac{(z-p_k)A_1}{z-p_1}+\cdots+A_k+\cdots+\frac{(z-p_k)A_N}{z-p_N} \tag{3.4.20}$$

因此,当 $z=p_k$ 时,式(3.4.20)得出如下 k 阶系数:

$$A_k=\left.\frac{(z-p_k)X(z)}{z}\right|_{z=p_k},\qquad k=1,2,\cdots,N \tag{3.4.21}$$

例 3.4.6 求下式的部分分式展开式:

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} \tag{3.4.22}$$

解:为了去掉式(3.4.22)中 z 的负幂次项,分子和分母同时乘以 z^2。因此有

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z+1}{z^2-z+0.5}$$

$X(z)$的极点是复共轭极点

$$p_1=\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{2}$$

和

$$p_2=\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{2}$$

因为 $p_1\neq p_2$,所以我们寻求形如式(3.4.15)的一个展开式。从而

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)}=\frac{A_1}{z-p_1}+\frac{A_2}{z-p_2}$$

为了获得 A_1 和 A_2，我们使用公式(3.4.21)。从而得到

$$A_1=\left.\frac{(z-p_1)X(z)}{z}\right|_{z=p_1}=\left.\frac{z+1}{z-p_2}\right|_{z=p_1}=\frac{\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{3}{2}$$

$$A_2=\left.\frac{(z-p_2)X(z)}{z}\right|_{z=p_2}=\left.\frac{z+1}{z-p_1}\right|_{z=p_2}=\frac{\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{3}{2}$$

展开式(3.4.15)和式(3.4.21)对实数极点和复极点都成立。唯一的限制是所有极点都必须是不同的。我们还要注意的是 $A_2=A_1^*$。容易看出，这是事实 $p_2=p_1^*$ 的结果。换言之，复共轭极点导致部分分式展开式中存在复共轭系数。随后的讨论中我们将看到，这个结果是非常有用的。

多重极点。如果 $X(z)$ 具有一个 l 重极点，即在式子的分母中包含因式 $(z-p_k)^l$，那么展开式(3.4.15)不再是正确的。这种情况需要一个不同的展开式。首先，我们探讨双重极点(即 $l=2$)的情况。

例 3.4.7　求下式的部分分式展开式：

$$X(z)=\frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2} \tag{3.4.23}$$

解：首先，我们将式(3.4.23)展开成以下形式的 z 的正幂次项：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$$

$X(z)$ 在 $p_1=-1$ 处有一个单极点，在 $p_2=p_3=1$ 处有双重极点。这种情况下合适的部分分式展开式是

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}=\frac{A_1}{z+1}+\frac{A_2}{z-1}+\frac{A_3}{(z-1)^2} \tag{3.4.24}$$

剩下的是求解系数 A_1，A_2 和 A_3。

我们按照具有相异极点的情况来进行求解。为了求 A_1，我们在式(3.4.24)两边乘上 $(z+1)$，计算当 $z=-1$ 时的结果。从而，式(3.4.24)成为

$$\frac{(z+1)X(z)}{z}=A_1+\frac{z+1}{z-1}A_2+\frac{z+1}{(z-1)^2}A_3$$

当 $z=-1$ 时，可得

$$A_1=\left.\frac{(z+1)X(z)}{z}\right|_{z=-1}=\frac{1}{4}$$

然后，在式(3.4.24)两边乘上 $(z-1)^2$，得到

$$\frac{(z-1)^2X(z)}{z}=\frac{(z-1)^2}{z+1}A_1+(z-1)A_2+A_3 \tag{3.4.25}$$

现在，如果我们计算当 $z=1$ 时式(3.4.25)的值，我们得到 A_3。从而

$$A_3=\left.\frac{(z-1)2X(z)}{z}\right|_{z=1}=\frac{1}{2}$$

剩下的系数 A_2 可通过式(3.4.25)两边对 z 求微分，然后计算 $z=1$ 时的值来求得。注意，对式(3.4.25)右边的微分不必非得按照形式进行，因为当 z 的值设为 1 时，除 A_2 外的所有项都是零。从而

$$A_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{(z-1)^2X(z)}{z}\right]_{z=1} = \frac{3}{4} \tag{3.4.26}$$

将上述例子的步骤推广到 m 重极点$(z-p_k)^m$ 的情况是很直观的。该部分分式展开式必须包含以下项:

$$\frac{A_{1k}}{z-p_k} + \frac{A_{2k}}{(z-p_k)^2} + \cdots + \frac{A_{mk}}{(z-p_k)^m}$$

系数$\{A_{ik}\}$可通过微分运算得到,如例 3.4.7 中 $m=2$ 的求解。

现在已经求得部分分式展开式了,我们可以采取最后的步骤来求 $X(z)$的逆变换。首先,考虑 $X(z)$具有相异极点的情况。从部分分式展开式(3.4.15)容易得到

$$X(z) = A_1\frac{1}{1-p_1z^{-1}} + A_2\frac{1}{1-p_2z^{-1}} + \cdots + A_N\frac{1}{1-p_Nz^{-1}} \tag{3.4.27}$$

逆 z 变换$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$可通过求式(3.4.27)中各项的逆变换并取其相应的线性组合得到。由表 3.3,这些项可用以下的公式转换得到:

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_kz^{-1}}\right\} = \begin{cases} (p_k)^nu(n), & \text{收敛域: } |z| > |p_k| \\ & \text{(因果信号)} \\ -(p_k)^nu(-n-1), & \text{收敛域: } |z| < |p_k| \\ & \text{(非因果信号)} \end{cases} \tag{3.4.28}$$

如果信号 $x(n)$是因果信号,它的收敛域是$|z| > p_{\max}$,其中 $p_{\max} = \max\{|p_1|, |p_2|, \cdots, |p_N|\}$。这种情况下,式(3.4.27)中所有项在时域上的结果是因果信号成分,并且信号 $x(n)$可由以下形式给出:

$$x(n) = (A_1p_1^n + A_2p_2^n + \cdots + A_Np_N^n)u(n) \tag{3.4.29}$$

如果所有极点是实数,那么式(3.4.29)是信号 $x(n)$期望的表达式。因此,如果一个因果信号的 z 变换包含不同的实极点,则它是实指数信号的线性组合。

假设所有的极点是相异的,但是有一些复极点。这种情况下,式(3.4.27)中的某些项在时域上的结果是复指数成分。然而,如果信号 $x(n)$是实信号,我们可以将这些项简化为实成分。如果 $x(n)$是实信号,出现在 $X(z)$中的多项式就具有实系数。这种情况下,就如我们在 3.3 节看到的,如果 p_j 是一个极点,那么它的复共轭 p_j^* 也是一个极点。如例 3.4.6 所示,部分分式展开式中相应的系数也是复共轭系数。因此,两个复共轭极点的贡献是如下形式:

$$x_k(n) = [A_k(p_k)^n + A_k^*(p_k^*)^n]u(n) \tag{3.4.30}$$

这两项可结合起来得到实信号成分的形式。首先,我们将 A_j 和 p_j 写成极坐标的形式(即幅度和相角):

$$A_k = |A_k|e^{j\alpha_k} \tag{3.4.31}$$

$$p_k = r_ke^{j\beta_k} \tag{3.4.32}$$

其中,α_k 和 β_k 是 A_k 和 p_k 的相角成分。将上述关系式代入式(3.4.30),得出

$$x_k(n) = |A_k|r_k^n[e^{j(\beta_kn+\alpha_k)} + e^{-j(\beta_kn+\alpha_k)}]u(n)$$

或其等价式

$$x_k(n) = 2|A_k|r_k^n\cos(\beta_kn + \alpha_k)u(n) \tag{3.4.33}$$

从而,我们有以下总结:

$$Z^{-1}\left(\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}+\frac{A_k^*}{1-p_k^* z^{-1}}\right)=2|A_k|r_k^n\cos(\beta_k n+\alpha_k)u(n) \tag{3.4.34}$$

如果收敛域是 $|z|>|p_k|=r_k$。

由式(3.4.34)我们看到，z 域上的每一对复共轭极点在时域上的结果是具有指数包络的因果正弦信号成分。极点离原点的距离 r_k 决定了指数的加权(当 $r_k>1$ 时增长，当 $r_k<1$ 时衰减，当 $r_k=1$ 时保持不变)。极点相对于正实轴的角度确定了正弦信号的频率。零点，或其等价的有理变换的分子，通过 A_k 仅直接影响 $x_k(n)$的幅度和相角。

对于多重极点的情况，无论是实极点还是复极点，形如 $A/(z-p_k)^n$ 的项的逆变换是需要的。对于双重极点，形式如下的变换对(见表 3.3)是非常有用的：

$$Z^{-1}\left\{\frac{pz^{-1}}{(1-pz^{-1})^2}\right\}=np^n u(n) \tag{3.4.35}$$

假如其收敛域是 $|z|>|p|$。对于广义的多重极点情况，可通过多重微分求得。

例 3.4.8　求下式的 z 逆变换：

$$X(z)=\frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

如果

(a) 收敛域：$|z|>1$。

(b) 收敛域：$|z|<0.5$。

(c) 收敛域：$|z|<1$。

解：这与我们在例 3.4.2 中遇到的问题相同。$X(z)$的部分分式展开式在例 3.4.5 中已求得。$X(z)$的部分分式展开式的结果是

$$X(z)=\frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0.5z^{-1}} \tag{3.4.36}$$

为了求得 $X(z)$的逆变换，我们对 $p_1=1$ 和 $p_2=0.5$ 应用式(3.4.28)。然而，这需要指定相应的收敛域。

(a) 当收敛域是 $|z|>1$ 的情况时，信号 $x(n)$是因果信号，式(3.4.36)中的两项都是因果项。根据式(3.4.28)，可得

$$x(n)=2(1)^n u(n)-(0.5)^n u(n)=(2-0.5^n)u(n) \tag{3.4.37}$$

这与例 3.4.2(a)中的结果是一致的。

(b) 当收敛域是 $|z|<0.5$ 的情况时，信号 $x(n)$是非因果信号。因此式(3.4.36)中的两项都是非因果项。由式(3.4.28)可得

$$x(n)=[-2+(0.5)^n]u(-n-1) \tag{3.4.38}$$

(c) 当收敛域是环 $0.5<|z|<1$ 的情况时，意味着信号 $x(n)$是双边信号。因此，式(3.4.36)的其中一项对应因果信号，而另一项对应非因果信号。显然，所给出的收敛域是 $|z|>0.5$ 和 $|z|<1$ 的交集。因此，极点 $p_2=0.5$ 规定了因果部分，而极点 $p_1=1$ 规定了非因果部分。从而

$$x(n)=-2(1)^n u(-n-1)-(0.5)^n u(n) \tag{3.4.39}$$

例 3.4.9　求 z 变换为如下形式的因果信号 $x(n)$：

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

解：在例 3.4.6 中我们已经得到如下的部分分式展开：

$$X(z)=\frac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-p_2z^{-1}}$$

其中,

$$A_1=A_2^*=\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{3}{2}$$

并且

$$p_1=p_2^*=\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{2}$$

因为有一对复共轭极点,我们可以采用式(3.4.34)。A_1 和 p_1 的极坐标形式是

$$A_1=\frac{\sqrt{10}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}71.565}$$

$$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}$$

因此,

$$x(n)=\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\left(\frac{\pi n}{4}-71.565^\circ\right)u(n)$$

例 3.4.10 求 z 变换为如下形式的因果信号 $x(n)$:

$$X(z)=\frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

解:由例 3.4.7 有

$$X(z)=\frac{1}{4}\frac{1}{1+z^{-1}}+\frac{3}{4}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})2}$$

应用式(3.4.28)和式(3.4.35)可得

$$x(n)=\frac{1}{4}(-1)^nu(n)+\frac{3}{4}u(n)+\frac{1}{2}nu(n)=\left[\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{3}{4}+\frac{n}{2}\right]u(n)$$

3.4.4 有理 z 变换的分解

现在讨论有关有理 z 变换分解的一些额外问题,有理 z 变换分解在离散时间系统的实现中非常有用。

假设我们把有理 z 变换 $X(z)$表示成

$$X(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_kz^{-k}}=b_0\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-z_kz^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_kz^{-1})} \tag{3.4.40}$$

其中,出于简化,我们设 $a_0\equiv1$。如果 $M\geqslant N$[即 $X(z)$是非本征的],我们可将 $X(z)$转化成一个多项式和一个本征函数之和:

$$X(z)=\sum_{k=0}^{M-N}c_kz^{-k}+X_{\mathrm{pr}}(z) \tag{3.4.41}$$

如果 $X_{\mathrm{pr}}(z)$的极点是相异的,该式可表示为部分分式

$$X_{\mathrm{pr}}(z)=A_1\frac{1}{1-p_1z^{-1}}+A_2\frac{1}{1-p_2z^{-1}}+\cdots+A_N\frac{1}{1-p_Nz^{-1}} \tag{3.4.42}$$

正如我们已经看到的那样，式(3.4.42)中也许有一些复共轭极点对。因为我们通常处理的是实信号，所以需要在分解中避免复系数。这可以通过对包含复共轭极点的项进行组合的方法解决，形式如下：

$$\begin{aligned}\frac{A}{1-pz^{-1}}+\frac{A^*}{1-p^*z^{-1}}&=\frac{A-Ap^*z^{-1}+A^*-A^*pz^{-1}}{1-pz^{-1}-p^*z^{-1}+pp^*z^{-2}}\\&=\frac{b_0+b_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}\end{aligned} \tag{3.4.43}$$

其中以下是期待的系数：

$$\begin{aligned}b_0&=2\,\mathrm{Re}(A),\qquad a_1=-2\,\mathrm{Re}(p)\\b_1&=2\,\mathrm{Re}(Ap*),\qquad a_2=|p|^2\end{aligned} \tag{3.4.44}$$

显然，任何具有形如式(3.4.43)、系数由式(3.4.44)给出的有理变换，其中当 $a_1^2-4a_2<0$ 时，都可以使用式(3.4.34)进行转换。结合式(3.4.41)、式(3.4.42)和式(3.4.43)，我们可得到具有相异极点、包含实系数的 z 变换的一个部分分式展开。一般的结果是

$$X(z)=\sum_{k=0}^{M-N}c_kz^{-k}+\sum_{k=1}^{K_1}\frac{b_k}{1+a_kz^{-1}}+\sum_{k=1}^{K_2}\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}} \tag{3.4.45}$$

其中 $K_1+2K_2=N$。显然，如果 $M=N$，第一项是一个常数，而当 $M<N$ 时，该项为零。当还有多重极点时，式(3.4.45)中还需要包含其他高阶项。

另一个可供选择的形式是将 $X(z)$ 表示成如式(3.4.40)中简单项的乘积。然而，应该将复共轭极点和零点结合起来，以避免在分解式中出现复系数。这种结合产生形式如下的第二阶有理项：

$$\frac{(1-z_kz^{-1})(1-z_k^*z^{-1})}{(1-p_kz^{-1})(1-p_k^*z^{-1})}=\frac{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}} \tag{3.4.46}$$

其中，

$$\begin{aligned}b_{1k}&=-2\,\mathrm{Re}(z_k),\qquad a_{1k}=-2\,\mathrm{Re}(p_k)\\b_{2k}&=|z_k|^2,\qquad a_{2k}=|p_k|^2\end{aligned} \tag{3.4.47}$$

出于简化，设 $M=N$，可将 $X(z)$ 分解成以下形式：

$$X(z)=b_0\prod_{k=1}^{K_1}\frac{1+b_kz^{-1}}{1+a_kz^{-1}}\prod_{k=1}^{K_2}\frac{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}} \tag{3.4.48}$$

其中 $N=K_1+2K_2$。我们将在第 9 章和第 10 章中继续讨论这些重要的形式。

3.5　z 域线性时不变系统的分析

在 3.3.3 节中，我们引入了线性时不变系统的系统函数，并将其与单位采样响应和系统的差分方程描述联系起来。本节描述使用系统函数求解系统对某些激励信号的响应。在 3.6.3 节，我们会将这种分析方法推广到非松弛系统。我们的注意力将集中于一类重要的零-极点系统，该类系统用具有任意初始条件的线性常系数差分方程表示。

我们也将考虑线性时不变系统的稳定性问题,并描述一种基于系统函数分母多项式的求系统稳定性的方法。最后,我们将详细分析二阶系统,因为二阶系统是实现高阶系统的基础模块。

3.5.1 有理系统函数的系统响应

让我们考虑由式(3.3.7)描述的广义线性常系数差分方程的零-极点系统及其相应的由式(3.3.8)述的系统函数。我们将 $H(z)$表示成两个多项式之比 $B(z)/A(z)$,其中 $B(z)$是包含 $H(z)$的零点的分子多项式,而 $A(z)$是包含 $H(z)$的极点的分母多项式。更进一步,让我们设输入信号 $x(n)$具有如下形式的有理 z 变换 $X(z)$:

$$X(z)=\frac{N(z)}{Q(z)} \tag{3.5.1}$$

这个假设并没有被过高限制,因为正如前面指出的,大部分有实用价值的信号都具有有理 z 变换。

如果系统初始时是松弛的,即不同方程的初始条件都是零,$y(-1)=y(-2)=\cdots=y(-N)=0$,那么系统输出的 z 变换具有如下形式:

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{B(z)N(z)}{A(z)Q(z)} \tag{3.5.2}$$

现假设系统具有相异极点 $p_1,p_2,\cdots,p_N$,并且输入信号的 z 变换包含极点 $q_1,q_2,\cdots,q^N$,其中对于所有 $k=1,2,\cdots,N$ 和 $m=1,2,\cdots,L$,有 $p_k\neq q_m$。此外,我们假设分子多项式 $B(z)$和 $N(z)$的零点不会和极点$\{p_k\}$和$\{q_k\}$相同,这样就不会产生零极点的相互抵消。则 $Y(z)$的部分分式展开式的结果是

$$Y(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_kz^{-1}}+\sum_{k=1}^{L}\frac{Q_k}{1-q_kz^{-1}} \tag{3.5.3}$$

$Y(z)$的逆变换产生的系统输出信号具有如下形式:

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}A_k(p_k)^nu(n)+\sum_{k=1}^{L}Q_k(q_k)^nu(n) \tag{3.5.4}$$

我们看到,输出序列 $y(n)$可以被分成两个部分。第一部分是系统极点$\{p_k\}$的函数,被称为系统的自然响应。输入信号对该部分响应的影响来自尺度因子$\{A_k\}$。响应的第二部分是输入信号的极点$\{q_k\}$的函数,被称为系统的强迫响应。系统对该部分响应的影响来自尺度因子$\{Q_k\}$。

我们需要强调,尺度因子$\{A_k\}$和$\{Q_k\}$都是极点$\{p_k\}$和$\{q_k\}$的函数。例如,如果 $X(z)=0$,因而输入是零,则 $Y(z)=0$,因而输出是零。显然,系统的自然响应是零。这意味着系统的自然响应是不同于零输入响应的。

当 $X(z)$和 $H(z)$具有通常的一个或多个极点,或者当 $X(z)$和/或 $H(z)$包含多重极点时,$Y(z)$将包含特定形式的因子 $1/(1-p_lz^{-1})^k$,$k=1,2,\cdots,m$,其中 m 是极点的阶。如 3.4.3 节所述,这些因式的逆变换将是系统的输出 $y(n)$中形如 $n^{k-1}p_l^n$ 的项。

3.5.2 暂态响应和稳态响应

正如我们先前的讨论那样,对于给定的输入,系统的零状态响应可被分成两部分,即自然响应和强迫响应。因果信号的自然响应具有如下形式:

$$y_{nr}(n)=\sum_{k=1}^{N}A_k(p_k)^nu(n) \tag{3.5.5}$$

其中$\{p_k\}$，$k=1,2,\cdots,N$ 是系统的极点，而$\{A_k\}$是取决于初始条件和输入序列的特性的尺度因子。

如果对于所有 k，有$|p_k|<1$，那么随着 n 趋于无穷大，$y_{nr}(n)$将衰减到零。在这种情况下，我们将系统的自然响应称为暂态响应。$y_{nr}(n)$趋于零的衰减率取决于极点位置的幅度。如果所有极点都具有小幅度，那么衰减是非常快的。另一方面，如果一个或多个极点位于单位圆附近，那么$y_{nr}(n)$中的响应项将会缓慢趋于零，暂态响应将会维持一段相当长的时间。

系统的强迫响应具有如下形式：

$$y_{fr}(n)=\sum_{k=1}^{L}Q_k(q_k)^n u(n) \tag{3.5.6}$$

其中$\{q_k\}$，$k=1,2,\cdots,L$ 是强迫函数的极点，而$\{Q_k\}$取决于输入序列和系统特性的尺度因子。如果所有输入信号的极点都落在单位圆内，则正如自然响应的例子那样，随着 n 趋于无穷大，$y_{fr}(n)$将衰减到零。这不奇怪，因为输入信号也是暂态信号。另一方面，当因果输入信号是正弦信号时，极点落在单位圆上，因此强迫响应也是正弦信号，该正弦信号对于所有 $n\geqslant 0$ 都有值。

以下例子说明稳态响应存在。

例 3.5.1　当输入信号是 $x(n)=10\cos(\pi n/4)u(n)$时，求由以下差分方程描述的系统的暂态响应和稳态响应：

$$y(n)=0.5y(n-1)+x(n)$$

系统初始时是静止(松弛)的。

解：系统函数是

$$H(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

因此系统在 $z=0.5$ 处具有一个极点。输入信号的 z 变换是(根据表 3.3)

$$X(z)=\frac{10(1-(1/\sqrt{2})z^{-1})}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

因此，

$$\begin{aligned}Y(z)&=H(z)X(z)\\&=\frac{10(1-(1/\sqrt{2})z^{-1})}{(1-0.5z^{-1})(1-e^{j\pi/4}z^{-1})(1-e^{-j\pi/4}z^{-1})}\\&=\frac{6.3}{1-0.5z^{-1}}+\frac{6.78e^{-j28.7^\circ}}{1-e^{j\pi/4}z^{-1}}+\frac{6.78e^{j28.7}}{1-e^{-j\pi/4}z^{-1}}\end{aligned}$$

自然或暂态响应是

$$y_{nr}(n)=6.3(0.5)^n u(n)$$

而强迫或稳态响应是

$$\begin{aligned}y_{fr}(n)&=[6.78e^{-j28.7}(e^{j\pi n/4})+6.78e^{j28.7}e^{-j\pi n/4}]u(n)\\&=13.56\cos\left(\frac{\pi}{4}n-28.7^\circ\right)u(n)\end{aligned}$$

从而我们看到，对所有的 $n\geqslant 0$ 稳态响应都有值，正如对所有的 $n\geqslant 0$ 输入信号都有值那样。

3.5.3　因果性和稳定性

正如先前定义的那样，一个因果线性时不变系统是一个单位采样响应 $h(n)$满足以下条件的

系统:

$$h(n)=0, \qquad n<0$$

我们也已经讲过,一个因果序列的 z 变换的收敛域是圆的外部。因此,当且仅当系统函数的收敛域是半径为 $r<\infty$ 的圆的外部(包括点 $z=\infty$)时,一个线性时不变系统是因果的。

线性时不变系统的稳定性也可以用系统函数的特征项来表示。让我们回想先前的讨论,对于BIBO稳定的线性时不变系统,一个必要且充分的条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

反之,这个条件意味着 $H(z)$必须在其收敛域内包含单位圆。

实际上,因为

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

由此可知

$$|H(z)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)z^{-n}|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)||z^{-n}|$$

当在单位圆上计算时(即$|z|=1$),可得

$$|H(z)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|$$

因此,如果系统是BIBO稳定的,那么单位圆包含于 $H(z)$的收敛域内。其相反的结论也正确。因此,一个线性时不变系统是BIBO稳定的,当且仅当系统函数的收敛域包含单位圆。

然而,我们需要强调,因果性和稳定性的条件是不同的,而且具有一个性质并不暗示着也具有另外一个性质。例如,一个因果系统也许是稳定的,也许是不稳定的,正如一个非因果系统也许是稳定的、也许是不稳定的那样。类似地,一个不稳定的系统或者是因果的,或者是非因果的,正如一个稳定系统也许是因果的、也许是非因果的那样。

然而,对于一个因果系统,稳定的条件可以做某种程度的限制。实际上,一个因果系统是由具有某个半径为 r 的圆的外部的收敛域的系统函数 $H(z)$所描述的。对于稳定的系统,收敛域必须包含单位圆。因此,一个因果而又稳定的系统,其系统函数收敛于$|z|>r<1$。因为收敛域不能包含任何 $H(z)$的极点,由此可知,一个因果线性时不变系统是BIBO稳定的,当且仅当 $H(z)$的所有极点都位于单位圆内。

例 3.5.2 一个线性时不变系统由以下系统函数描述:

$$\begin{aligned}H(z)&=\frac{3-4z^{-1}}{1-3.5z^{-1}+1.5z^{-2}}\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{2}{1-3z^{-1}}\end{aligned}$$

指明 $H(z)$的收敛域并求以下条件的 $h(n)$:

(a) 系统是稳定的。

(b) 系统是因果的。

(c) 系统是非因果的。

解：系统在 $z=\frac{1}{2}$ 和 $z=3$ 处有极点。

(a) 因为系统是稳定的，它的收敛域必须包含单位圆，则 $\frac{1}{2}<|z|<3$。因此，$h(n)$ 是非因果的，给出如下：

$$h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)-2(3)^n u(-n-1)$$

(b) 因为系统是因果的，它的收敛域是 $|z|>3$。因此，

$$h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)+2(3)^n u(n)$$

这种情况下系统是不稳定的。

(c) 如果系统是非因果的，它的收敛域是 $|z|<0.5$。因此，

$$h(n)=-[(\frac{1}{2})^n+2(3)^n]u(-n-1)$$

这种情况下系统是不稳定的。

3.5.4　零极点抵消

当一个 z 变换具有一个位置与一个零点一样的极点时，该极点就被该零点抵消，因此，包含该极点的项在逆变换中为零。这种零极点抵消在零极点系统分析中非常重要。

零极点抵消会发生在系统函数本身内，或者发生在输入信号的 z 变换与系统函数的乘积中。第一种情况，我们说系统的阶减 1。后面这种情况，我们说系统的极点被输入信号的零点抑制，反之亦然。因此，通过适当地选择输入信号零点的位置，就有可能在系统响应中抑制输入信号的一个或多个系统模式(极点因式)。类似地，通过适当地选择系统函数的零点，有可能将输入信号的一个或多个模式从系统响应中抑制掉。

当零点的位置离极点非常近，但不是正好在相同的位置上时，响应中的该项具有很小的幅度。例如，用于表示系统系数的数字精度不足，会导致不精确的零极点抵消在实际中发生。因此，我们不要在输入信号的极点位置中设置零点以尝试使一个固有的不稳定系统成为稳定系统。

例 3.5.3　求由以下差分方程描述的系统的单位采样响应：

$$y(n)=2.5y(n-1)-y(n-2)+x(n)-5x(n-1)+6x(n-2)$$

解：系统函数是

$$H(z)=\frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}}$$

$$=\frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

该系统具有极点 $p_1=2$ 和 $p_2=1/2$。因此，乍看之下该单位采样响应似乎是

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

$$=z\left(\frac{A}{z-\frac{1}{2}}+\frac{B}{z-2}\right)$$

计算 $z=\frac{1}{2}$ 和 $z=2$ 时的常数，我们得到

$$A=\frac{5}{2},\qquad B=0$$

$B=0$ 的事实说明，存在 $z=2$ 处的零点，它被 $z=2$ 处的极点抵消。事实上，零点出现在 $z=2$ 和 $z=3$。因此，$H(z)$ 化简为

$$H(z)=\frac{1-3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z-3}{z-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{2.5z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

并且因此

$$h(n)=\delta(n)-2.5(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)$$

经由通常的零极点抵消可获得降阶的系统,该系统可由以下差分方程描述:

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)-3x(n-1)$$

尽管由于零极点抵消的缘故,原始系统也是 BIBO 稳定的,但是在这种二阶系统中,我们会由于不彻底的零极点抵消而导致不稳定。

例 3.5.4 求系统

$$y(n)=\frac{5}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)+x(n)$$

对输入信号 $x(n)=\delta(n)-\frac{1}{3}\delta(n-1)$的系统响应。

解:系统函数是

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

该系统具有两个极点,一个在 $z=\frac{1}{2}$,另一个在 $z=\frac{1}{3}$。输入信号的 z 变换是

$$X(z)=1-\frac{1}{3}z^{-1}$$

这种情况下,输入信号包含一个位于 $z=\frac{1}{3}$处的零点,刚好抵消位于 $z=\frac{1}{3}$处的极点,因此,

$$Y(z)=H(z)X(z)$$

$$Y(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

而系统响应是

$$y(n)=(\frac{1}{2})^{n}u(n)$$

显然,作为零极点抵消的结果,模式$(\frac{1}{3})^{n}$ 在输出中被抑制了。

3.5.5 多阶极点和稳定性

正如我们已经看到的那样,一个因果线性时不变系统是 BIBO 稳定的,其充分必要条件是所有极点都位于单位圆内。如果输入信号的 z 变换包含极点$\{q_k\}$,$k=1,2,\cdots,L$,并且对于所有的 k 都有条件$|q_k|\leqslant 1$ 成立,那么输入信号是有界的。我们注意到,由式(3.5.6)给出的系统强迫响应也是有界的,即使当输入信号在单位圆上包含一个或多个不同的极点。

鉴于一个有界的输入信号也许在单位圆上有极点的事实,似乎一个稳定系统也会有位于单位圆上的极点。然而情况并非如此,因为当这样的系统被在单位圆上有一个位置相同的极点的输入信号所激励时,将产生无界的响应。以下的例子说明了这一点。

例 3.5.5　求由以下差分方程描述的因果系统的阶跃响应：

$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

解：这个系统的系统函数是

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

我们注意到系统在单位圆 $z = 1$ 上包含一个极点。输入信号 $x(n) = u(n)$ 的 z 变换是

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

这个信号也包含 $z = 1$ 处的一个极点。因而输出信号具有如下变换：

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= \frac{1}{(1 - z^{-1})^2} \end{aligned}$$

这个信号在点 $z = 1$ 处包含了一个二阶极点。

$Y(z)$ 的 z 逆变换是

$$y(n) = (n + 1)u(n)$$

这个信号是一个斜坡序列。从而 $y(n)$ 是无界的，即使输入的信号是有界信号。因此，系统是不稳定的。

例 3.5.5 清楚地说明了 BIBO 稳定性要求系统极点严格位于单位圆内。如果系统的极点全都位于单位圆内，且激励序列 $x(n)$ 包含一个或多个极点，刚好和系统的极点一致，则输出 $Y(z)$ 将包含多阶极点。正如以前所述，这种多阶极点会导致一个包含以下项的输出序列：

$$A_k n^b (p_k)^n u(n)$$

其中 $0 \leqslant b \leqslant m - 1$，并且 m 是极点的阶数。如果 $|p_k| < 1$，当 n 接近无穷大时，那么这些项会衰减到零，因为指数因式 $(p_k)^n$ 控制了项 n^b。因此，如果系统的极点全都位于单位圆内，那么有界的输入信号不会产生一个无界的输出信号。

最后，我们应该声明，单位圆上包含极点的唯一有用的系统是数字振荡器，这将在第 5 章介绍。我们称这种系统是边缘稳定的。

3.5.6　二阶系统的稳定性

本节中我们详细分析具有两个极点的系统。正如我们将在第 9 章中看到的那样，双极点系统是实现高阶系统的基本构成模块。

让我们考虑由以下二阶差分方程描述的因果双极点系统：

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) \tag{3.5.7}$$

系统函数是

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-1}} \\ &= \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

这个系统在原点具有两个零点和以下极点：

$$p_1, p_2 = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}} \tag{3.5.9}$$

如果极点都位于单位圆内,即$|p_1|<1$且$|p_2|<1$,那么这个系统是BIBO稳定的。这些条件能够与系数a_1和a_2的值相关。特别地,一个二次方程的根满足以下关系式:

$$a_1=-(p_1+p_2) \tag{3.5.10}$$

$$a_2=p_1p_2 \tag{3.5.11}$$

由式(3.5.10)和式(3.5.11),我们容易获得a_1和a_2必须满足稳定性的条件。首先,a_2必须满足以下条件:

$$|a_2|=|p_1p_2|=|p_1||p_2|<1 \tag{3.5.12}$$

a_1的条件可表示为

$$|a_1|<1+a_2 \tag{3.5.13}$$

因此,一个双极点系统是稳定的,当且仅当系数a_1和a_2满足式(3.5.12)和式(3.5.13)中的条件。

式(3.5.12)和式(3.5.13)中给出的稳定条件定义了系数平面(a_1,a_2)上的一个区域,而且这个区域具有如图3.5.1所示的三角形状。当且仅当点(a_1,a_2)位于三角形内时,系统是稳定的,我们称此三角形为稳定性三角形。

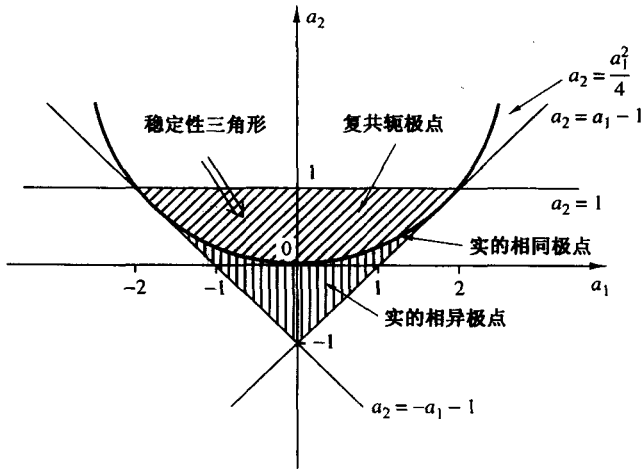


图3.5.1 一个双极点系统位于(a_1,a_2)系数平面内的稳定性区域(稳定性三角形)

双极点系统的特性取决于极点的位置,或者等价于稳定性三角形内点(a_1,a_2)的位置。系统的极点或者是实数或者是共轭复数,具体取决于判别式$\Delta=a_1^2-4a_2$的值。抛物线$a_2=a_1^2/4$将稳定性三角形分成两个区域,如图3.5.1所示。位于抛物线以下的区域$(a_1^2>4a_2)$对应于实的相异极点;位于抛物线以上$(a_1^2=4a_2)$的点对应于实的双重极点。最后,位于抛物线以上的区域对应于复共轭极点。

对系统行为额外的洞察可由这三种情况的单位采样响应获得。

实的相异极点$(a_1^2>4a_2)$。既然p_1和p_2是实数,而且$p_1\neq p_2$,那么系统函数可表示为

$$H(z)=\frac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-p_2z^{-1}} \tag{3.5.14}$$

其中,

$$A_1 = \frac{b_0 p_1}{p_1 - p_2}, \qquad A_2 = \frac{-b_0 p_2}{p_1 - p_2} \tag{3.5.15}$$

从而单位采样响应是

$$h(n) = \frac{b_0}{p_1 - p_2}(p_1^{n+1} - p_2^{n+1})u(n) \tag{3.5.16}$$

因此,其单位采样响应是两个衰落型指数序列的差。图 3.5.2 显示了当极点相异时 $h(n)$的典型图。

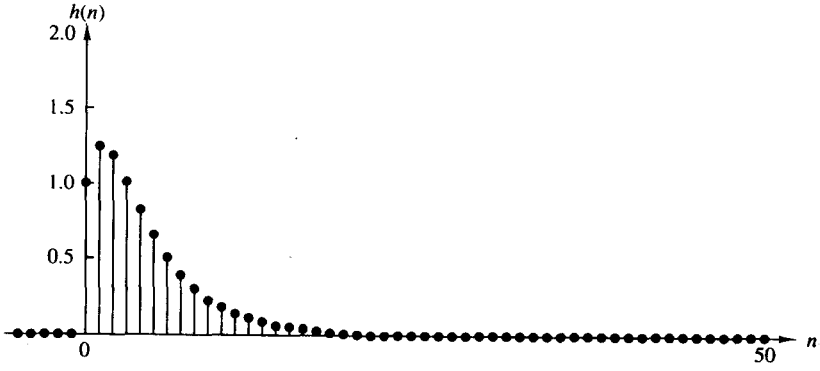


图 3.5.2　当 $p_1 = 0.5$ 和 $p_2 = 0.75$ 时,式(3.5.16)的 $h(n)$图;$h(n) = [1/(p_1 - p_2)](p_1^{n+1} - p_2^{n+1})u(n)$

实的双重极点($a_1^2 = 4a_2$)。这种情况下,$p_1 = p_2 = p = -a_1/2$。系统函数是

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - pz^{-1})^2} \tag{3.5.17}$$

因而系统的单位采样响应是

$$h(n) = b_0(n+1)p^n u(n) \tag{3.5.18}$$

我们看到,$h(n)$是一个斜坡序列和一个实衰落指数序列的乘积。$h(n)$如图 3.5.3 所示。

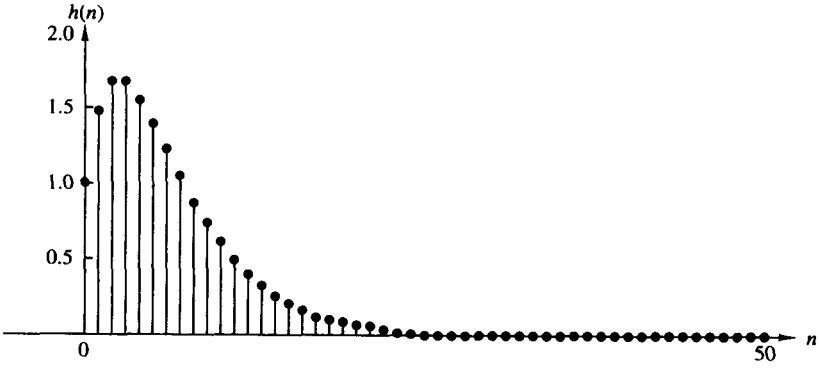


图 3.5.3　当 $p = \frac{3}{4}$时,式(3.5.18)的 $h(n)$图;$h(n) = (n+1)p^n u(n)$

复共轭极点($a_1^2 < 4a_2$)。既然极点是复共轭的,那么系统函数可进行因式分解并表示为

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{A}{1 - pz^{-1}} + \frac{A^*}{1 - p^* z^{-1}} \\ &= \frac{A}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}} \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

其中 $p = re^{j\omega}$ 且 $0 < \omega_0 < \pi$。注意,当极点是复共轭极点时,根据下式,参数 a_1 和 a_2 与 r 和 ω_0 相关:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2r\cos\omega_0 \\ a_2 &= r^2 \end{aligned} \tag{3.5.20}$$

$H(z)$的部分分式展开式中的常数 A 可容易看出是

$$\begin{aligned} A &= \frac{b_0 p}{p - p^*} = \frac{b_0 r e^{j\omega_0}}{r(e^{j\omega_0} - e^{-j\omega_0})} \\ &= \frac{b_0 e^{j\omega_0}}{j2\sin\omega_0} \end{aligned} \tag{3.5.21}$$

因而,具有复共轭极点的系统的单位采样响应是

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{b_0 r^n}{\sin\omega_0}\frac{e^{j(n+1)\omega_0} - e^{-j(n+1)\omega_0}}{2j}u(n) \\ &= \frac{b_0 r^n}{\sin\omega_0}\sin(n+1)\omega_0 u(n) \end{aligned} \tag{3.5.22}$$

这种情况下,$h(n)$具有振荡行为,当 $r < 1$ 时具有指数衰减型的包络。极点的角度 ω_0 决定了振荡频率,而极点到原点的距离 r 决定了衰减的速度。当 r 接近单位 1 时衰减缓慢,而当 r 接近原点时衰减快速。$h(n)$的典型图如图 3.5.4 所示。

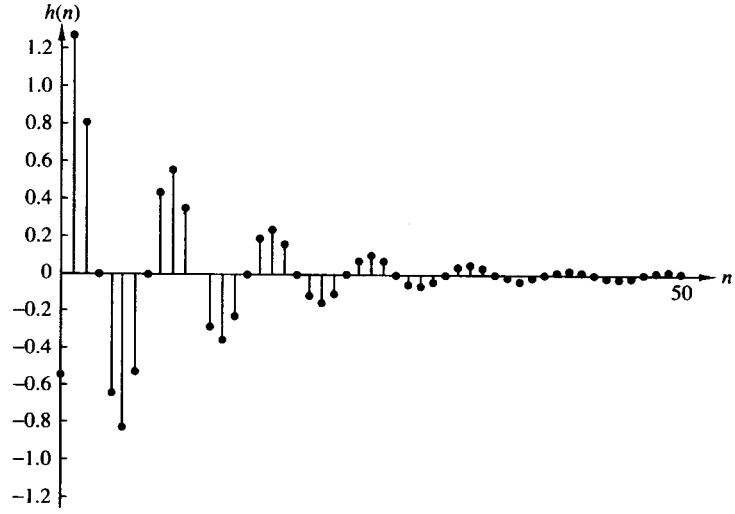


图 3.5.4 当 $b_0 = 1, \omega_0 = \pi/4$ 和 $r = 0.9$ 时,式(3.5.22)的 $h(n)$图;$h(n) = [b_0 r^n/(\sin\omega_0)]\sin[(n+1)\omega_0]u(n)$

3.6 单边 z 变换

双边 z 变换要求相应的信号在整个时域即 $-\infty < n < \infty$ 都有定义。这一要求阻碍了该变换在一类非常有用的实际问题中的应用,也即非松弛系统的输出求解。我们知道,这些系统是由具有非零初始条件的差分方程描述的。因为输入应用在某个有限时间,比如说 n_0,输入和输出信号在 $n \geqslant n_0$ 上都有定义,但在 $n < n_0$ 上绝对都是零。因而双边 z 变换不能使用。本节中我们研究可以用来求解具有初始条件的差分方程的单边 z 变换。

3.6.1　定义和性质

信号 $x(n)$的单边或单侧 z 变换定义如下：

$$X^+(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{3.6.1}$$

我们也使用记号 $Z^+\{x(n)\}$和

$$x(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$$

单边 z 变换不同于双边 z 变换的地方在于求和的下限——不管当 $n<0$(即因果)时信号 $x(n)$是否为零，该下限总是零。由于下限的这一选择，单边 z 变换具有如下特征：

1. 它不包含当时间为负值时信号 $x(n)$的信息(即当 $n<0$ 时)。
2. 它仅对因果信号是独特的，因为当 $n<0$ 时这类信号为零。
3. $x(n)$的单边 z 变换 $X^+(z)$和信号 $x(n)u(n)$的双边 z 变换相同。因为 $x(n)u(n)$是因果的，因而其变换的收敛域和 $X^+(z)$的收敛域总是一个圆的外围。这样，当我们处理单边 z 变换时，就不必非得要提到它们的收敛域。

例 3.6.1　求例 3.1.1 中的信号的单边 z 变换。

解：由定义式(3.6.1)可得

$$x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 5, 7, 0, 1\} \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_1^+(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

$$x_2(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\} \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_2^+(z) = 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$x_3(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1\} \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_3^+(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

$$x_4(n) = \{2, 4, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\} \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_4^+(z) = 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$x_5(n) = \delta(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_5^+(z) = 1$$

$$x_6(n) = \delta(n-k), \quad k>0 \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_6^+(z) = z^{-k}$$

$$x_7(n) = \delta(n+k), \quad k>0 \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_7^+(z) = 0$$

注意，对于一个非因果信号，其单边 z 变换不是唯一的。实际上，$X_2^+(z) = X_4^+(z)$，但是 $x_2(n) \neq x_4(n)$。对于反因果信号，$X^+(z)$总是为零。

我们所学过的几乎所有的双边 z 变换的性质都可以移植到单边 z 变换中来，但时移性质除外。

时移性质

情况 1：时延　如果

$$x(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$$

那么

$$x(n-k) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} z^{-k}\left[X^+(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n)z^n\right], \quad k>0 \tag{3.6.2}$$

当 $x(n)$是因果信号时，有

$$x(n-k) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} z^{-k}X^+(z) \tag{3.6.3}$$

证明 由定义式(3.6.1)可得

$$Z^+\{x(n-k)\} = z^{-k}\left[\sum_{l=-k}^{-1} x(l)z^{-l} + \sum_{l=0}^{\infty} x(l)z^{-l}\right]$$

$$= z^{-k}\left[\sum_{l=-1}^{-k} x(l)z^{-l} + X^+(z)\right]$$

通过将索引 l 改变为 $n=-l$,式(3.6.2)的结果可很容易地得到。

例 3.6.2 求下列信号的单边 z 变换:(a) $x(n)=a^n u(n)$;(b) $x_1(n)=x(n-2)$,其中 $x(n)=a^n$。

解:

(a) 由定义式(3.6.1)我们容易得到

$$X^+(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

(b) 当 $k=2$ 时,我们应用时移性质。实际上,我们可得

$$Z^+\{x(n-2)\} = z^{-2}[X^+(z) + x(-1)z + x(-2)z^2]$$

$$= z^{-2}X^+(z) + x(-1)z^{-1} + x(-2)$$

因为 $x(-1)=a^{-1}$,$x(-2)=a^{-2}$,所以我们可得

$$X_1^+(z) = \frac{z^{-2}}{1-az^{-1}} + a^{-1}z^{-1} + a^{-2}$$

时移性质的意义可通过将式(3.6.2)写成如下形式而直观地解释:

$$Z^+\{x(n-k)\} = [x(-k) + x(-k+1)z^{-1} + \cdots + x(-1)z^{-k+1}] + z^{-k}X^+(z), \qquad k>0 \tag{3.6.4}$$

为了从 $x(n)$求得 $x(n-k)$,$k>0$,我们将 $x(n)$向右移动 k 个采样。则 k 个"新"采样即 $x(-k)$,$x(-k+1)$,$\cdots$,$x(-1)$进入正时间轴,而 $x(-k)$位于时间零点。式(3.6.4)中的第一项表示这些采样的 z 变换。$x(n-k)$的"旧"采样与将 $x(n)$简单地向右移动了 k 个采样后得到的结果是相同的。它们的 z 变换显然是 $z^{-k}X^+(z)$,这其实是式(3.6.4)的第二项。

情况 2:时间超前 如果

$$x(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$$

那么

$$x(n+k) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} z^k\left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n}\right], \qquad k>0 \tag{3.6.5}$$

证明 由定义式(3.6.1)可得

$$Z^+\{x(n+k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+k)z^{-n} = z^k\sum_{l=k}^{\infty} x(l)z^{-l}$$

其中我们将求和的索引从 n 改变成 $l=n+k$。现在,由定义式(3.6.1)可得

$$X^+(z) = \sum_{l=0}^{\infty} x(l)z^{-l} = \sum_{l=0}^{k-1} x(l)z^{-l} + \sum_{l=k}^{\infty} x(l)z^{-l}$$

通过联合后面两项关系式,可很容易地得到式(3.6.5)。

例 3.6.3　根据例 3.6.2 给出的 $x(n)$，求下列信号的单边 z 变换：

$$x_2(n) = x(n+2)$$

解：我们将对 $k=2$ 应用时移定理。由式(3.6.5)，当 $k=2$ 时，我们可得

$$Z^+\{x(n+2)\} = z^2X^+(z) - x(0)z^2 - x(1)z$$

但是 $x(0)=1, x(1)=a$，并且 $X^+(z) = 1/(1-az^{-1})$。从而

$$Z^+\{x(n+2)\} = \frac{z^2}{1-az^{-1}} - z^2 - az$$

时间超前的情况可直观解释如下。为了求得 $x(n+k), k>0$，我们需要将 $x(n)$向左移动 k 个采样。结果，采样 $x(0), x(1), \cdots, x(k-1)$“离开”正时间轴。则我们首先将它们对 $X^+(z)$的贡献除去，然后将剩下的乘上 z^k 来补偿信号的 k 个采样移位。移位性质的重要性在于可用它来求解具有常系数和非零初始条件的差分方程。这使得单边 z 变换成为分析线性回归时不变离散时间系统非常有用的工具。

信号与系统分析中一个有用而重要的定理是终值定理。

终值定理。如果

$$x(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X^+(z) \tag{3.6.6}$$

当$(z-1)X^+(z)$的收敛域包含单位圆时，式(3.6.6)的极限才存在。

该定理的证明留给读者作为练习。

当我们对信号 $x(n)$的渐近特性有兴趣并且知道其 z 变换但不知道信号本身时，该定理非常有用。在这些情况下，特别是当求 $X^+(z)$的逆变换非常复杂时，我们可以使用终值定理来求当 n 趋于无穷大时 $x(n)$的极限。

例 3.6.4　一个松弛线性时不变系统的脉冲响应是 $h(n) = a^n u(n), |a|<1$。求当 $n\to\infty$ 时，系统阶跃响应的值。

解：系统的阶跃响应是

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

其中，

$$x(n) = u(n)$$

显然，如果我们用一个因果输入去激励一个因果系统，那么输出将是因果的。因为 $h(n), x(n)$和 $y(n)$都是因果信号，所以单边和双边 z 变换都是相同的。由式(3.2.17)的卷积性质，我们可知 $h(n)$和 $x(n)$的 z 变换必须相乘以产生输出的 z 变换。从而

$$Y(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^2}{(z-1)(z-\alpha)}, \quad \text{收敛域: } |z| > |\alpha|$$

现在

$$(z-1)Y(z) = \frac{z^2}{z-\alpha}, \quad \text{收敛域: } |z| < |\alpha|$$

因为$|\alpha|<1$，所以$(z-1)Y(z)$的收敛域包含单位圆。因而，我们可应用式(3.6.6)得到

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{z\to 1}\frac{z^2}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

3.6.2 差分方程的求解

单边 z 变换是求解具有非零初始条件的差分方程的非常有效的工具。它是通过将与两个时域信号相关的差分方程简化为与它们的单边 z 变换相关的等价的代数方程而实现的。这个方程可容易求解而得到所期待的信号的变换。时域上的信号是通过将所得到的 z 变换进行逆变换而得到的。我们将用两个例子说明这种方法。

例 3.6.5 著名的 Fibonacci 整数数列的每一项是由计算其前两项之和获得的。该数列的前几项是 1,1,2,3,5,8,…。求 Fibonacci 数列第 n 项的闭合表达式。

解:设 $y(n)$是 Fibonacci 数列的第 n 项。显然,$y(n)$满足以下差分方程:

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) \tag{3.6.7}$$

它具有初始条件

$$y(0) = y(-1) + y(-2) = 1 \tag{3.6.8a}$$

$$y(1) = y(0) + y(-1) = 1 \tag{3.6.8b}$$

由式(3.6.8b)我们可得 $y(-1) = 0$。然后由式(3.6.8a)得到 $y(-2) = 1$。从而我们需要求解满足式(3.6.7)、具有初始条件 $y(-1) = 0$ 和 $y(-2) = 1$ 且 $n \geqslant 0$ 时的 $y(n)$。

对式(3.6.7)进行单边 z 变换并应用式(3.6.2)的时移性质,可得

$$Y^+(z) = [z^{-1}Y^+(z) + y(-1)] + [z^{-2}Y^+(z) + y(-2) + y(-1)z^{-1}]$$

或者其等价式

$$Y^+(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^2} = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} \tag{3.6.9}$$

其中我们已经使用了值 $y(-1) = 0$ 和 $y(-2) = 1$。

通过部分分式展开式的方法,我们可求 $Y^+(z)$的逆变换。$Y^+(z)$的极点是

$$p_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad p_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

相应的系数为 $A_1 = p_1/\sqrt{5}$ 和 $A_2 = -p_2/\sqrt{5}$。因此,

$$y(n) = \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right]u(n)$$

或者其等价式

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left[\left(1 + \sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1 - \sqrt{5}\right)^{n+1}\right]u(n) \tag{3.6.10}$$

例 3.6.6 当初始条件是 $y(-1) = 1$ 时,求以下系统的阶跃响应:

$$y(n) = \alpha y(n-1) + x(n), \qquad -1 < \alpha < 1 \tag{3.6.11}$$

解:对式(3.6.11)两边进行单边 z 变换,可得

$$Y^+(z) = \alpha[z^{-1}Y^+(z) + y(-1)] + X^+(z)$$

将 $y(-1)$和 $X^+(z)$代入上式并求 $Y^+(z)$,得到结果

$$Y^+(z) = \frac{\alpha}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{1}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - z^{-1})} \tag{3.6.12}$$

通过部分分式展开并将结果进行逆变换，得到

$$\begin{aligned} y(n) &= \alpha^{n+1}u(n) + \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha^{n+2})u(n) \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

3.6.3　具有非零初始条件的零极点系统的响应

假设信号 $x(n)$应用于 $n=0$ 的零极点系统。那么信号 $x(n)$被认为是因果的。以前输入的所有信号的作用反映在初始条件 $y(-1), y(-2), \cdots, y(-N)$上。既然输入 $x(n)$是因果的，而且我们只对 $n \geqslant 0$ 时的输出 $y(n)$的求解感兴趣，所以可以应用单边 z 变换，这使得我们可以处理初始条件。式(3.3.7)的单边 z 变换成为

$$Y^+(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\left[Y^+(z) + \sum_{n=1}^{k} y(-n)z^n\right] + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X^+(z) \tag{3.6.14}$$

因为 $x(n)$是因果的，我们可以设 $X^+(z) = X(z)$。任何情况下，式(3.6.14)可以表示为

$$\begin{aligned} Y^+(z) &= \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n)z^n}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \\ &= H(z)X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)} \end{aligned} \tag{3.6.15}$$

其中，

$$N_0(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n)z^n \tag{3.6.16}$$

由式(3.6.15)可知，具有非零初始条件的系统的输出显然可以分成两部分。第一部分是系统的零状态响应，在 z 域中定义如下：

$$Y_{zs}(z) = H(z)X(z) \tag{3.6.17}$$

第二部分对应于来自非零初始条件的输出。这个输出是系统的零输入响应，在 z 域中定义如下：

$$Y_{zi}^+(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} \tag{3.6.18}$$

因而总的响应是这两个输出成分之和，可通过分别求 $Y_{zs}(z)$和 $Y_{zi}(z)$的 z 逆变换并将结果相加而得到时域上的表示。从而

$$y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n) \tag{3.6.19}$$

既然 $Y_{zi}^+(z)$的分母是 $A(z)$，它的极点是 $p_1, p_2, \cdots, p_N$。因而，零输入响应具有形式

$$y_{zi}(n) = \sum_{k=1}^{N} D_k (p_k)^n u(n) \tag{3.6.20}$$

这可以加入到式(3.6.4)中，而涉及极点$\{p_k\}$的项可以联合起来得到如下形式的总响应：

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k' (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n) \tag{3.6.21}$$

其中,根据定义有

$$A_k' = A_k + D_k \tag{3.6.22}$$

这一研究清楚地表明,初始条件的作用在于通过修改尺度因子$\{A_k\}$去改变系统的自然响应。非零初始条件并未引入新的极点。进一步来说,这对系统的强迫响应也没有作用。这些要点在以下的例子中可得到加强。

例 3.6.7 求由以下的差分方程描述的系统的单位阶跃响应:

$$y(n) = 0.9y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n)$$

其初始条件是 $y(-1) = y(-2) = 1$。

解:系统函数是

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

这个系统具有两个复共轭极点

$$p_1 = 0.9\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}, \qquad p_2 = 0.9\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}$$

单位阶跃序列的 z 变换是

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

因此,

$$\begin{aligned} Y_{zs}(z) &= \frac{1}{(1 - 0.9\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}z^{-1})(1 - 0.9\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}z^{-1})(1 - z^{-1})} \\ &= \frac{0.0496 - \mathrm{j}0.542}{1 - 0.9\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}z^{-1}} + \frac{0.0496 + \mathrm{j}0.542}{1 - 0.9\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}z^{-1}} + \frac{1.099}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

并且零状态响应是

$$y_{zs}(n) = \left[1.099 + 1.088(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n - 5.2^\circ\right)\right]u(n)$$

对于初始条件 $y(-1) = y(-2) = 1$,z 变换中额外的成分是

$$\begin{aligned} Y_{zi}(z) &= \frac{N_0(z)}{A(z)} = \frac{0.09 - 0.81z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} \\ &= \frac{0.045 + \mathrm{j}0.4936}{1 - 0.9\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}z^{-1}} + \frac{0.045 - \mathrm{j}0.4936}{1 - 0.9\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}z^{-1}} \end{aligned}$$

因而,零输入响应是

$$y_{zi}(n) = 0.988(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 87^\circ\right)u(n)$$

这种情况下,总的响应的 z 变换是

$$\begin{aligned} Y(z) &= Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) \\ &= \frac{1.099}{1 - z^{-1}} + \frac{0.568 + \mathrm{j}0.445}{1 - 0.9\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}z^{-1}} + \frac{0.568 - \mathrm{j}0.445}{1 - 0.9\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}z^{-1}} \end{aligned}$$

逆变换得到总响应的形式如下:

$$y(n) = 1.099u(n) + 1.44(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 38^\circ\right)u(n)$$

3.7 小结与参考文献

z 变换在离散时间信号与系统中扮演的作用,正如拉普拉斯变换在连续时间信号与系统中扮

演的作用。在本章中，我们推导了 z 变换的重要性质，这些性质在离散时间系统的分析中都是特别有用的。其中特别重要的是卷积性质，即两个序列的卷积可转换成它们的 z 变换的乘积。

在 LTI 系统中，卷积性质的结果是输入信号的 z 变换 $X(z)$和系统函数 $H(z)$的乘积，其中后者是系统的单位采样响应的 z 变换。这一关系允许我们通过先计算乘积 $Y(z)=H(z)X(z)$，然后求 $Y(z)$的 z 逆变换，来求得一个 LTI 系统对一个 z 变换为 $X(z)$的输入的输出响应系列 $y(n)$。

我们观察到，有实际价值的许多信号都具有有理 z 变换。而且，特征由常系数线性差分方程刻画的 LTI 系统也具有有理系统函数。因而，为了求得 z 逆变换，我们自然地强调有理逆变换。对于此类变换，部分分式展开式的方法相对容易应用，结合收敛域可求得相应的时域上的序列。

我们考虑了 z 变换域上 LTI 系统的特征。特别地，我们将一个系统的零极点位置与其时域特征相联，并根据极点位置重新陈述了对 LTI 系统的稳定性和因果性的要求。我们已经证明，一个因果系统具有系统函数 $H(z)$，收敛域为 $|z|>r_1$，其中 $0<r_1\leqslant\infty$。在一个稳定的因果系统中，$H(z)$的极点位于单位圆内。另一方面，如果系统是非因果的，稳定性条件要求单位圆包含在 $H(z)$的收敛域内。因此一个非因果稳定的 LTI 系统的系统函数，其极点同时位于单位圆内和圆外，具有包含单位圆的环状收敛域。最后，我们引入了单边 z 变换，来求解非零初始条件下由因果输入信号激励的因果系统的响应。

习题

3.1 求下列信号的 z 变换：

(a) $x(n)=\{3,0,0,0,0,\underset{\uparrow}{6},1,-4\}$

(b) $x(n)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^n, & n\geqslant 5\\ 0, & n\leqslant 4\end{cases}$

3.2 求下列信号的 z 变换并给出相应的零极点图：

(a) $x(n)=(1+n)u(n)$

(b) $x(n)=(a^n+a^{-n})u(n)$，a 为实数

(c) $x(n)=(-1)^n2^{-n}u(n)$

(d) $x(n)=(na^n\sin\omega_0 n)u(n)$

(e) $x(n)=(na^n\cos\omega_0 n)u(n)$

(f) $x(n)=Ar^n\cos(\omega_0 n+\phi)u(n),0<r<1$

(g) $x(n)=\frac{1}{2}(n^2+n)(\frac{1}{3})^{n-1}u(n-1)$

(h) $x(n)=(\frac{1}{2})^n[u(n)-u(n-10)]$

3.3 求下列信号的 z 变换并给出相应的零极点图：

(a) $x_1(n)=\begin{cases}(\frac{1}{3})^n, & n\geqslant 0\\ (\frac{1}{2})^{-n}, & n<0\end{cases}$

(b) $x_2(n)=\begin{cases}(\frac{1}{3})^n-2^n, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$

(c) $x_3(n)=x_1(n+4)$

(d) $x_4(n)=x_1(-n)$

3.4 求下列信号的 z 变换：

(a) $x(n)=n(-1)^n u(n)$

(b) $x(n)=n^2 u(n)$

(c) $x(n)=-na^n u(-n-1)$

(d) $x(n)=(-1)^n\left(\cos\frac{\pi}{3}n\right)u(n)$

(e) $x(n)=(-1)^n u(n)$

(f) $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},0,-1,0,1,-1,\cdots\}$

3.5 求右边、左边和有限长双边序列的收敛域。

3.6 用 $X(z)$表示下式的 z 变换:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$$

[提示:寻找差分 $y(n)-y(n-1)$。]

3.7 用 z 变换的方式计算下列信号的卷积:

$$x_1(n)=\begin{cases}(\frac{1}{3})^n, & n\geqslant 0\\(\frac{1}{2})^{-n}, & n<0\end{cases}$$

$$x_2(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$$

3.8 使用卷积性质,

(a) 用 $X(z)$表示下式的 z 变换:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$$

(b) 求 $x(n)=(n+1)u(n)$的 z 变换[提示:先让 $x(n)=u(n)*u(n)$。]

3.9 一个实信号 $x(n)$的 z 变换 $X(z)$包含一对复共轭零点和一对复共轭极点。如果我们用 $e^{j\omega_0 n}$乘以 $x(n)$,这些点对将如何?(提示:使用 z 域上的尺度定理。)

3.10 应用终值定理求以下信号的 $x(\infty)$:

$$x(n)=\begin{cases}1, & n\text{为偶数}\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

3.11 用长除法求以下信号的 z 逆变换:

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

如果(a) $x(n)$是因果的和(b) $x(n)$是非因果的。

3.12 求 z 变换为下式的因果信号 $x(n)$:

$$X(z)=\frac{1}{(1-2z^{-1})(1-z^{-1})2}$$

3.13 设 $x(n)$是具有 z 变换 $X(z)$的序列。用 $X(z)$表示以下信号的 z 变换:

(a) $x_1(n)=\begin{cases}x\left(\frac{n}{2}\right), & n\text{为偶数}\\0, & n\text{为奇数}\end{cases}$

(b) $x_2(n)=x(2n)$

3.14 求由下式给出的 z 变换 $X(z)$的因果信号 $x(n)$：

(a) $X(z)=\dfrac{1+3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$

(b) $X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$

(c) $X(z)=\dfrac{z^{-6}+z^{-7}}{1-z^{-1}}$

(d) $X(z)=\dfrac{1+2z^{-2}}{1+z^{-2}}$

(e) $X(z)=\dfrac{1}{4}\dfrac{1+6z^{-1}+z^{-2}}{(1-2z^{-1}+2z^{-2})(1-0.5z^{-1})}$

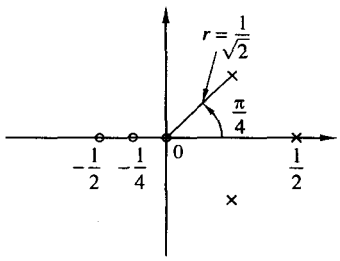
(f) $X(z)=\dfrac{2-1.5z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$

(g) $X(z)=\dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+4z^{-1}+4z^{-2}}$

(h) $X(z)$ 由图 P3.14 中的极零点图指定。常数$G=\frac{1}{4}$

(i) $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

(j) $X(z)=\dfrac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}$



图P3.14

3.15 求与下式的 z 变换相关的所有可能的因果信号 $x(n)$：

$$X(z)=\frac{5z^{-1}}{(1-2z^{-1})(3-z^{-1})}$$

3.16 用 z 变换的方法求以下信号对的卷积：

(a) $x_1(n)=(\frac{1}{4})^n u(n-1)$，　$x_2(n)=[1+(\frac{1}{2})^n]u(n)$

(b) $x_1(n)=u(n)$，　$x_2(n)=\delta(n)+(\frac{1}{2})^n u(n)$

(c) $x_1(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$，　$x_2(n)=\cos\pi n u(n)$

(d) $x_1(n)=nu(n)$，　$x_2(n)=2^n u(n-1)$

3.17 证明单边 z 变换的终值定理。

3.18 如果 $X(z)$是 $x(n)$的 z 变换，证明：

(a) $Z\{x^*(n)\}=X^*(z^*)$

(b) $Z\{\mathrm{Re}[x(n)]\}=\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$

(c) $Z\{\mathrm{Im}[x(n)]\}=\frac{1}{2}[X(z)-X^*(z^*)]$

(d) 若

$$x_k(n)=\begin{cases}x\left(\frac{n}{k}\right), & n/k\text{为整数}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则

$$X_k(z)=X(z^k)$$

(e) $Z\{e^{j\omega_0 n}x(n)\}=X(ze^{-j\omega_0})$

3.19 先求 $X(z)$的微分，然后使用 z 变换合适的性质，求以下变换的 $x(n)$：

(a) $X(z)=\lg(1-2z)$，　$|z|<\frac{1}{2}$

(b) $X(z)=\lg(1-z^{-1})$，　$|z|>\frac{1}{2}$

3.20 (a) 画出以下信号的零极点图：

$$x_1(n) = (r^n \sin \omega_0 n)u(n), \qquad 0 < r < 1$$

(b) 计算其相应的零极点图是(a)的 z 变换 $X_2(z)$。

(c) 比较 $X_1(z)$和 $X_2(z)$。它们相同吗? 如果不相同,指出一种方法以从零极点图中推导出 $X_1(z)$。

3.21 证明具有实系数的多项式的根是实数或者形成复共轭对,但通常反之则不然。

3.22 仅使用定义来证明 z 变换的卷积和相关性质。

3.23 求具有如下 z 变换的信号 $x(n)$:

$$X(z) = e^z + e^{1/z}, \qquad |z| \neq 0$$

3.24 求其闭合形式的 z 变换如下式的因果信号 $x(n)$:

(a) $X(z) = \dfrac{1}{1 + 1.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}$

(b) $X(z) = \dfrac{1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.6z^{-2}}$

通过另外的方法计算 $x(0), x(1), x(2)$和 $x(\infty)$来部分地检查结果。

3.25 求具有如下 z 变换的所有可能的信号:

(a) $X(z) = \dfrac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$

(b) $X(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$

3.26 如果 $X(z)$收敛于单位圆,求具有如下 z 变换的信号 $x(n)$:

$$X(z) = \frac{3}{1 - \frac{10}{3}z^{-1} + z^{-2}}$$

3.27 证明由式(3.2.22)给出的复卷积关系。

3.28 证明由表 3.2 给出的 z 变换的卷积性质和帕斯瓦尔关系式。

3.29 在例 3.4.1 中,我们通过对每个 n 值执行围线积分求解 $n < 0$ 时的 $x(n)$。通常,这个步骤证明是繁琐而冗长的。它可以通过将围线积分从 z 平面变换到 $w = 1/z$ 平面而避免。则 z 平面上半径为 R 的圆映射到 w 平面上半径为 $1/R$ 的圆。因此,z 平面上单位圆内的一个极点映射为 w 平面上单位圆外的一个极点。通过在围线积分中改变值 $w = 1/z$,求例 3.4.1 中 $n < 0$ 时的序列 $x(n)$。

3.30 设 $x(n), 0 \leqslant n \leqslant N-1$ 是一个有限长实值偶序列。证明多项式 $X(z)$的零点关于单位圆呈镜像对出现。也就是说,如果 $z = re^{j\theta}$ 是 $X(z)$的一个零点,那么 $z = (1/r)e^{j\theta}$ 也是一个零点。

3.31 证明 Fibonacci 序列可被认为是由差分方程 $y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n)$描述的系统的脉冲响应。使用 z 变换技术求 $h(n)$。

3.32 证明以下系统是等价的:

(a) $y(n) = 0.2y(n-1) + x(n) - 0.3x(n-1) + 0.02x(n-2)$

(b) $y(n) = x(n) - 0.1x(n-1)$

3.33 考虑序列 $x(n) = a^n u(n), -1 < a < 1$。求至少两个不等于 $x(n)$但具有相同的自相关的序列。

3.34 计算具有以下脉冲响应的系统的单位阶跃响应:

$$h(n) = \begin{cases} 3^n, & n < 0 \\ (\frac{2}{5})^n, & n \geqslant 0 \end{cases}$$

3.35 计算以下系统和输入信号对的零状态响应:

(a) $h(n)=(\frac{1}{3})^n u(n),\quad x(n)=(\frac{1}{2})^n(\cos\frac{\pi}{3}n)u(n)$

(b) $h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n),\quad x(n)=(\frac{1}{3})^n u(n)+(\frac{1}{2})^{-n}u(-n-1)$

(c) $y(n)=-0.1y(n-1)+0.2y(n-2)+x(n)+x(n-1)x(n)=(\frac{1}{3})^n u(n)$

(d) $y(n)=\frac{1}{2}x(n)-\frac{1}{2}x(n-1)x(n)=10(\cos\frac{\pi}{2}n)u(n)$

(e) $y(n)=-y(n-2)+10x(n)x(n)=10(\cos\frac{\pi}{2}n)u(n)$

(f) $h(n)=(\frac{2}{5})^n u(n),\quad x(n)=u(n)-u(n-7)$

(g) $h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n),\quad x(n)=(-1)^n,\quad -\infty<n<\infty$

(h) $h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n),\quad x(n)=(n+1)(\frac{1}{4})^n u(n)$

3.36 考虑系统

$$H(z)=\frac{1-2z^{-1}+2z^{-2}-z^{-3}}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})(1-0.2z^{-1})},\qquad \text{收敛域: } 0.5|z|>1$$

(a) 给出零极点图。这个系统是稳定的吗?

(b) 求系统的脉冲响应。

3.37 输入信号为 $x(n)=nu(n)$,计算以下系统的响应:

$$y(n)=0.7y(n-1)-0.12y(n-2)+x(n-1)+x(n-2)$$

这个系统是稳定的吗?

3.38 求以下因果系统的脉冲响应和阶跃响应。画出零极点图并指出哪个些系统是稳定的。

(a) $y(n)=\frac{3}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)+x(n)$

(b) $y(n)=y(n-1)-0.5y(n-2)+x(n)+x(n-1)$

(c) $H(z)=\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$

(d) $y(n)=0.6y(n-1)-0.08y(n-2)+x(n)$

(e) $y(n)=0.7y(n-1)-0.1y(n-2)+2x(n)-x(n-2)$

3.39 设 $x(n)$是一因果序列,其 z 变换 $X(z)$的零极点图如图 P3.39 所示。画出下列序列的零极点图和收敛域:

(a) $x_1(n)=x(-n+2)$

(b) $x_2(n)=e^{j(\pi/3)n}x(n)$

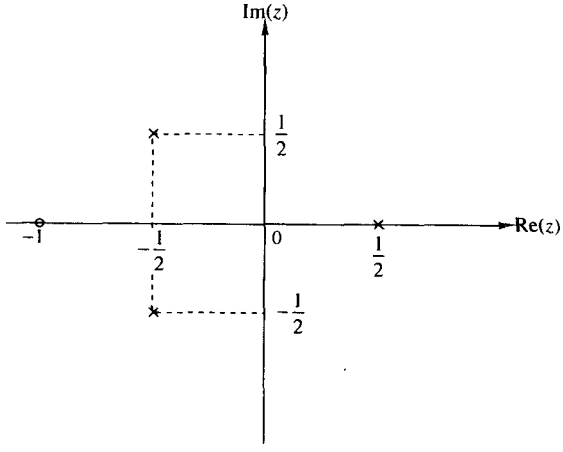


图 P3.39

3.40 我们想设计具有如下性质的因果离散时间 LTI 系统,当输入为

$$x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)-\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)$$

时,输出为

$$y(n)=(\frac{1}{3})^n u(n)$$

(a) 求满足上述条件的系统的脉冲响应 $h(n)$和系统函数 $H(z)$。

(b) 求可以刻画该系统特征的差分方程。

(c) 求系统的一个实现,要求用尽可能少的内存。

(d) 求系统是否稳定。

3.41 通过计算极点并将极点限制在单位圆内,求以下因果系统具有稳定性的区域:

$$H(z)=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

3.42 考虑系统

$$H(z)=\frac{z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{3}{5}z^{-1}+\frac{2}{25}z^{-2}}$$

求:

(a) 脉冲响应。

(b) 零状态阶跃响应。

(c) 当 $y(-1)=1$ 且 $y(-2)=2$ 时的阶跃响应。

3.43 求如图 P3.43 所示系统的系统函数、脉冲响应和零状态阶跃响应。

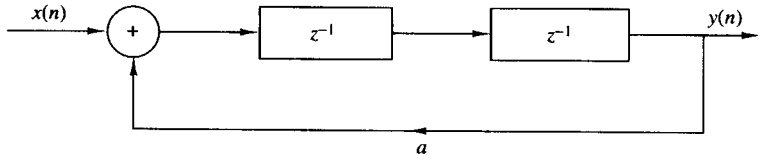


图 P3.43

3.44 考虑因果系统

$$y(n)=-a_1y(n-1)+b_0x(n)+b_1x(n-1)$$

求:

(a) 脉冲响应。

(b) 零状态阶跃响应。

(c) 当 $y(-1)=A\neq 0$ 时的阶跃响应。

(d) 输入为以下信号的响应

$$x(n)=\cos\omega_0 n,\qquad 0\leqslant n<\infty$$

3.45 求以下系统的零状态响应:

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+4x(n)+3x(n-1)$$

其中输入为

$$x(n)=e^{j\omega_0 n}u(n)$$

系统的稳态响应是什么?

3.46 考虑由图 P3.46 所示的零极点图定义的因果系统。

(a) 给出 $H(z)|_{z=1}=1$，求系统的系统函数和脉冲响应。

(b) 该系统稳定吗？

(c) 画出该系统的一个可能的实现，并求相应的差分方程。

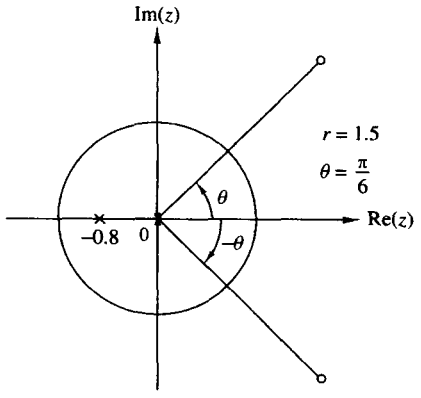


图 P3.46

3.47 使用单边 z 变换计算以下时域上的信号对的卷积：

(a) $x_1(n)=\{1,1,\underset{\uparrow}{1},1,1\}$，　$x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{1},1,1\}$

(b) $x_1(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$，　$x_2(n)=(\frac{1}{3})^n u(n)$

(c) $x_1(n)=\{1,\underset{\uparrow}{2},3,4\}$，　$x_2(n)=\{4,3,\underset{\uparrow}{2},1\}$

(d) $x_1(n)=\{\underset{\uparrow}{1},1,1,1,1\}$，　$x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{1},1,1\}$

3.48 求常信号 $x(n)=1,-\infty<n<\infty$ 的单边 z 变换。

3.49 使用单边 z 变换求解以下情况中的 $y(n),n\geqslant 0$：

(a) $y(n)+\frac{1}{2}y(n-1)-\frac{1}{4}y(n-2)=0;\quad y(-1)=y(-2)=1$

(b) $y(n)-1.5y(n-1)+0.5y(n-2)=0;\quad y(-1)=1,y(-2)=0$

(c) $y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)x(n)=(\frac{1}{3})^n u(n),\quad y(-1)=1$

(d) $y(n)=\frac{1}{4}y(n-2)+x(n)x(n)=u(n)y(-1)=0;\quad y(-2)=1$

3.50 一个 FIR LTI 系统具有脉冲响应 $h(n)$，且 $h(n)$是实值的偶序列，并具有有限时长 $2N+1$。证明：如果 $z_1=re^{j\omega_0}$ 是系统的一个零点，则 $z_1=(1/r)e^{j\omega_0}$ 也是一个零点。

3.51 考虑零极点图如图 P3.51 所示的 LTI 离散时间系统。

(a) 如果系统已知是稳定的，求系统函数 $H(z)$的收敛域。

(b) 所给出的零极点图有可能对应一个因果稳定系统吗？如果有可能，适当的收敛域是什么？

(c) 可能有多少个系统与这一零极点图相关？

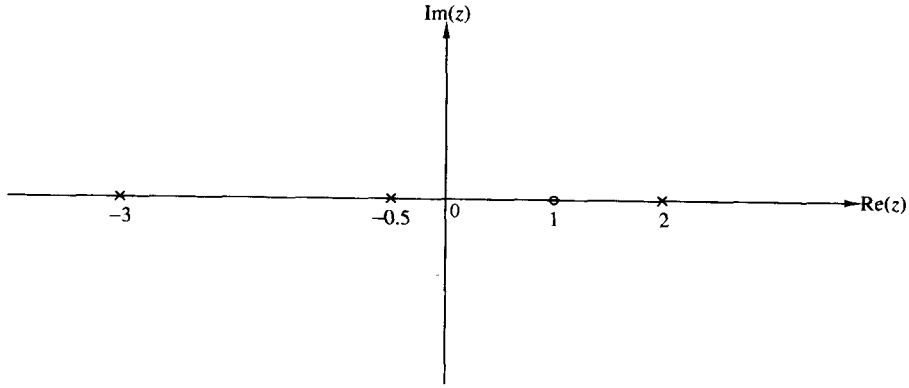


图 P3.51

3.52 设 $x(n)$是一因果序列。

(a) 从其 z 变换 $X(z)$在 $z=\infty$ 处的值你可以得出什么结论？

(b) 使用(a)的结果来检查以下的变换与因果序列不相关。

$$\text{(i)}X(z)=\frac{(z-\frac{1}{2})^4}{(z-\frac{1}{3})^3}\qquad \text{(ii)}X(z)=\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\qquad \text{(iii)}X(z)=\frac{(z-\frac{1}{3})^2}{(z-\frac{1}{2})^3}$$

3.53 如果极点均位于单位圆内,那么一个因果零极点系统是 BIBO 稳定的。现在考虑一个 BIBO 稳定且所有极点均位于单位圆内的零极点系统。这个系统总是因果的吗?[提示:考虑系统 $h_1(n)=a^nu(n)$和 $h_2(n)=a^nu(n+3)$,$|a|<1$。]

3.54 设 $x(n)$是一反因果信号[即当 $n>0$时,$x(n)=0$]。用公式表示并证明反因果信号的初值定理。

3.55 一个 LTI 系统的阶跃响应是

$$s(n)=(\frac{1}{3})^{n-2}u(n+2)$$

(a) 求系统函数 $H(z)$并画出零极点图。

(b) 求脉冲响应 $h(n)$。

(c) 检查系统是否是因果的并稳定的。

3.56 使用围线积分求 z 变换如下式的序列 $x(n)$:

(a) $X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $\quad |z|>\frac{1}{2}$

(b) $X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $\quad |z|<\frac{1}{2}$

(c) $X(z)=\frac{z-a}{1-az}$, $\quad |z|>|1/a|$

(d) $X(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}$, $\quad |z|>\frac{1}{2}$

3.57 设 $x(n)$是具有如下 z 变换的序列:

$$X(z)=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})},\qquad \text{收敛域: } a>|z|>1/a$$

其中 $0<a<1$。使用围线积分求 $x(n)$。

3.58 序列 $x(n)$的 z 变换是

$$X(z)=\frac{z^{20}}{(z-\frac{1}{2})(z-2)^5(z+\frac{5}{2})^2(z+3)}$$

并且已知 $X(z)$收敛于$|z|=1$。

(a) 求 $X(z)$的收敛域。

(b) 求当 $n=-18$时的 $x(n)$。(提示:使用围线积分。)

第4章　信号的频率分析

傅里叶变换是多种数学工具中的一种，用于 LTI 系统的分析和设计。另外的一个数学工具是傅里叶级数。这些信号表示基本上涉及到将信号分解成正弦曲线(或者复指数)成分。一个信号经过这样的分解，我们说这是信号在频域的表示。

正如我们将会证明的那样，大多数有实际意义的信号都可以被分解成正弦信号成分之和。对于周期信号，这样的分解称为傅里叶级数。对于有限能量信号，这样的分解称为傅里叶变换。在 LTI 系统的分析中，这样的分解特别重要，因为对于一个正弦信号的输入，LTI 系统的响应是一个频率相同但幅度和相位不同的正弦曲线。此外，LTI 系统的线性特性暗示着，正弦曲线成分的线性组合的输入会产生类似正弦曲线成分的线性组合的输出，仅仅是幅度和相位不同而已。LTI 系统的这种行为特性使信号的正弦曲线分解变得非常重要。尽管许多其他的信号分解都是可能的，但是只有这一类正弦曲线(或者复指数)信号在通过 LTI 系统时具有这种期待的特性。

学习信号的频率分析，我们先分别以傅里叶级数和傅里叶变换的方式学习连续时间周期信号和非周期信号。然后，我们来处理离散周期信号和非周期信号。本章将详细描述傅里叶变换的特性，并给出许多关于时频二重性的例子。

4.1　连续时间信号的频率分析

众所周知，一个棱镜可以将穿过它的白光(太阳光)分解成有色光[见图 4.1.1(a)]。1672 年，在向皇家学会提交的一篇论文中，以艾萨克·牛顿(Isaac Newton)使用术语频谱来描述由这种器具产生的连续波段的有色光。为了理解这种现象，牛顿将另外一个棱镜相对于第一个棱镜倒放，结果有色光重新合成了白光，如图 4.1.1(b)所示。通过在两个棱镜之间增加一个狭长切口来阻止一种或多种有色光照射到第二个棱镜上，结果重新合成的光不再是白光。因此，在没有其他任何变化的情况下，通过第一个棱镜的光被简单地分解成了它的有色成分。然而，只要重新合成所有这些有色成分，我们就能得到原来的白光。

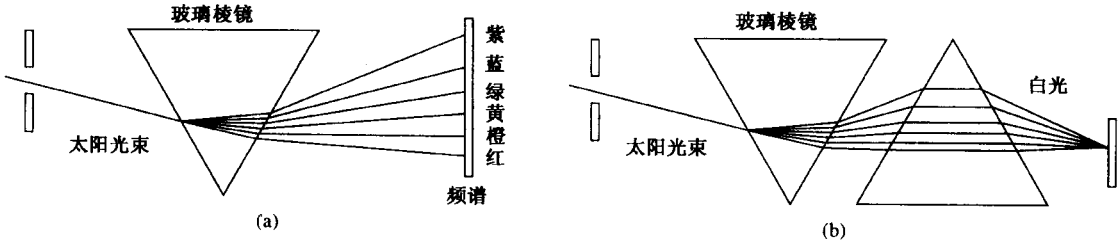


图 4.1.1　使用玻璃棱镜(a)分解和(b)合成白光(太阳光)

随后，Joseph Fraunhofer(1787－1826)在测量由太阳和恒星发出的光时，发现所观察的光的频谱是由不同的有色线组成的。几年后(19 世纪中期)，Gustav Kirchhoff 和 Robert Bunsen 发现，当加热到炽热时，每种化学元素辐射它自己独特的有色光。结果，每种化学元素可由它自己的线频谱来识别。

从物理学我们得知,每一种有色光对应可见频谱中具体的频率。因此,将光分解为有色光实际上是一种频率分析。

信号的频率分析涉及将信号分解为它的频率(正弦曲线的)成分。我们的信号波形基本上是时间的函数而不是光的函数。棱镜的角色会被我们将要展开的傅里叶分析工具——傅里叶级数和傅里叶变换——代替。重新合成正弦曲线成分来重建原始信号,基本上是傅里叶合成问题。对于信号波形的情况,其信号分析问题基本上和加热的化学成分所发的光的情况是一样的。正如化学成分的情况,不同的信号波形具有不同的频率范围。这样频谱就为信号提供了一种识别或者一个签名,因为从某种意义上来说,其他的信号没有相同的频谱。我们将会看到,这个属性与频域技术的数学处理相关。

如同棱镜将白光分离为不同的有色光那样,如果我们将一个波形分解为正弦曲线成分,那么这些正弦曲线成分之和的结果是原始的波形。另一方面,如果这些成分的任何一个丢失,那么结果是一个不同的信号。

在对频率分析的处理中,我们将推导合适的数学工具(棱镜),把信号(光)分解成正弦曲线频率成分(有色光)。此外,我们也将推导合成工具(倒棱镜),把频率成分合成为信号。

推导频率分析工具的基本动机,是为包含在任何给定信号中的频率成分提供一种数学和图示的表示。在物理学中,当提到信号的频率内容时,就使用术语频谱。使用本章描述的数学工具来获得一个给定信号的频谱的过程,被认为是频率或谱分析。相反地,在实际信号测量的基础上,决定一个实际信号的频谱的过程被称为频谱估计。这种区别是非常重要的。在实际问题中,待分析的信号是不适合用一个精确的数学公式来描述的。这些信号通常是一些信息携带信号,从中我们尝试提取相关的信息。如果我们想要提取的信息可以直接或间接地从信号的谱内容中获得,那么我们可以对信息携带信号执行频谱估计,从而获得信号频谱的一个估计。实际上,我们可以将谱估计视为在某类信号上执行的一种谱分析,而这类信号是从物理源(如语音、脑电图、心电图等)获得的。用于获得此类信号的谱估计的仪器或软件程序,被认为是频谱分析仪。

这里,我们将处理谱分析,但在第 14 章中我们将处理功率谱估计。

4.1.1 连续时间周期信号的傅里叶级数

本节我们讲述连续时间周期信号的频率分析。实际中遇到的周期信号的例子包括方波、矩形波和三角波,当然也包括正弦波和复指数信号。

周期信号的基本数学表示是傅里叶级数。傅里叶级数是调和相关的正弦信号或复指数信号的一种线性加权之和。法国数学家傅里叶(1768-1830)使用一类三角级数扩展来描述物体的热传导和温度分布的现象。尽管他的工作来源于热传导问题,但是他在 19 世纪初发展的数学技术,现在可以在许多问题上找到应用,这些问题涵盖了许多不同的领域,包括光学、机械系统中的振动、系统理论和电磁场。

我们回想在第 1 章中学习的、具有以下形式的调和相关的复指数信号的线性组合:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k F_0 t} \tag{4.1.1}$$

它是基本周期为 $T_p = 1/F_0$ 的周期信号。因此,我们可以把指数信号

$$\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k F_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

视为基本的"模块",通过选择合适的基频和系数$\{c_k\}$,我们可以用这些"模块"来构造各种类型的周期信号。F_0 决定了 $x(t)$的基本周期,而系数$\{c_k\}$确定了波形的形状。

假设信号 $x(t)$是具有周期 T_p 的周期信号。我们可以用式(4.1.1)的级数来表示这个周期信号,这可称为一个傅里叶级数,其中所选取的基频 F_0 是给定的周期 T_p 的倒数。为了确定系数 $\{c_k\}$的表达式,我们先在式(4.1.1)两边乘上复指数

$$e^{-j2\pi F_0 lt}$$

其中 l 是一个整数,然后对得到的等式两边在单个周期上求积分,比如从 0 到 T_p,或者更广义地,从 t_0 到 $t_0 + T_p$,其中 t_0 是一个任意的但又是数学收敛的开始值。这样,我们就能得到

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)e^{-j2\pi lF_0 t}\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j2\pi lF_0 t}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{+j2\pi kF_0 t}\right)dt \tag{4.1.2}$$

为了求得式(4.1.2)右边的积分,我们交换求和与积分的顺序,并联合两个指数。从而有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi F_0(k-l)t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left[\frac{e^{j2\pi F_0(k-l)t}}{j2\pi F_0(k-l)}\right]_{t_0}^{t_0+T_p} \tag{4.1.3}$$

对于 $k \neq l$,在下限和上限,即 t_0 和 $t_0 + T_p$,分别对式(4.1.3)右边求值,得到的结果是零。另一方面,如果 $k = l$,我们得到

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} dt = t\Big|_{t_0}^{t_0+T_p} = T_p$$

因此,式(4.1.2)简化为

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)e^{-j2\pi lF_0 t}\,dt = c_l T_p$$

因此,根据给定的周期信号,傅里叶系数的表达式是

$$c_l = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)e^{-j2\pi lF_0 t}\,dt$$

既然 t_0 是任意值,那么这个积分可以在任何长度为 T_p 的区间上求得,即在任一个间隔等于信号 $x(t)$的周期的区间上求得。因此,傅里叶级数系数的积分可以写成

$$c_l = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-j2\pi lF_0 t}dt \tag{4.1.4}$$

来自用傅里叶级数表示周期信号 $x(t)$的一个重要问题是,对于每个 t 值,级数是否收敛于 $x(t)$,也就是说,对于每个 t 值,信号 $x(t)$和它的傅里叶级数表示

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t} \tag{4.1.5}$$

是否相等。所谓的狄利克里条件(Dirichlet conditions)保证,除了使 $x(t)$不连续的 t 值外,式(4.1.5)的级数将等于 $x(t)$。对于所有这些 t 值,式(4.1.5)收敛于不连续的中点(均值)。狄利克里条件是

1. 在任何一个周期中,信号 $x(t)$具有有限个不连续点。
2. 在任何一个周期中,信号 $x(t)$包含有限个最大值和最小值。
3. 在任何一个周期中,信号 $x(t)$是绝对可积的,即

$$\int_{T_p} |x(t)|\mathrm{d}t < \infty \tag{4.1.6}$$

所有有实际意义的周期信号都满足这些条件。

较弱的条件,即信号在一个周期内具有有限的能量,

$$\int_{T_p} |x(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty \tag{4.1.7}$$

保证了在差值信号中的能量

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k F_0 t}$$

为零,尽管 $x(t)$和它的傅里叶级数也许不能在所有的 t 值上都相等。注意,式(4.1.6)必然意味着式(4.1.7),但是反过来不一定成立。式(4.1.7)和狄利克里条件也是充分条件,但不是必要条件(也就是说,存在可以表示成傅里叶级数的信号,但是不满足这些条件)。

总之,如果 $x(t)$是周期的而且满足狄利克里条件,那么它能够表示成如式(4.1.1)所示的傅里叶级数,其中的系数由式(4.1.4)确定。这些关系总结如下:

连续时间周期信号的傅里叶分析

合成等式	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k F_0 t}$	(4.1.8)
分析等式	$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k F_0 t}\mathrm{d}t$	(4.1.9)

一般来说,傅里叶系数 c_k 是复数值。而且容易证明,如果周期信号是实数,那么 c_k 和 c_{-k}是一对共轭复数。结果,如果

$$c_k = |c_k|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_k}$$

那么

$$c_{-k} = |c_k|^{-\mathrm{j}\theta_k}$$

因此,傅里叶级数也可以表示成如下形式:

$$x(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) \tag{4.1.10}$$

其中,当 $x(t)$是实数时,c_0 是实数值。

最后,我们应该指出,傅里叶级数的另外一种形式可以通过将式(4.1.10)中的余弦函数按如下展开求得:

$$\cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) = \cos 2\pi k F_0 t \cos\theta_k - \sin 2\pi k F_0 t \sin\theta_k$$

因此,我们将式(4.1.10)重新写成如下形式:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k F_0 t - b_k \sin 2\pi k F_0 t) \tag{4.1.11}$$

其中,

$$a_0 = c_0$$

$$a_k = 2|c_k|\cos\theta_k$$

$$b_k = 2|c_k|\sin\theta_k$$

式(4.1.8)、式(4.1.10)和式(4.1.11)中的表达式组成了表示实周期信号的傅里叶级数的三个等价形式。

4.1.2　周期信号的功率密度谱

一个周期信号具有无限能量，但是具有一个有限的平均功率，给出如下：

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t \tag{4.1.12}$$

如果我们用式(4.1.8)中的共轭复数替换式(4.1.12)中的 $x^*(t)$，可得

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kF_0 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^*\left[\frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kF_0 t}\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

因此，我们就建立了关系

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \tag{4.1.14}$$

这被称为功率信号的帕塞瓦关系式。

为了说明式(4.1.14)的物理意义，假设 $x(t)$包含一个单复指数

$$x(t) = c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kF_0 t}$$

这种情况下，除了 c_k，所有的傅里叶级数系数都是零。因此，信号的平均功率是

$$P_x = |c_k|^2$$

显然，$|c_k|^2$ 表示信号的第 k 个谐波成分的功率。因此，周期信号中的总平均功率是所有谐波平均功率的简单求和。

如果我们将 $|c_k|^2$ 当做频率 kF_0 的函数画出来，其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，那么我们得到的图表表明了周期信号的功率是如何分布在不同的频率成分上的。图 4.1.2 所示的这个图表被称为周期信号 $x(t)$的功率密度谱①。因为周期信号中的功率仅存在于离散的频率值上(即 $F = 0, \pm F_0, \pm 2F_0, \cdots$)，所以我们就说该信号具有线谱。位于两个连续的谱线之间的间隔等于基本周期 T_p 的倒数，然而频谱的形状(即信号的功率分布)取决于信号的时域特性。

正如前面的小节所示，傅里叶级数的系数 $|c_k|$ 是复数值，也就是说，它们可以表示为

$$c_k = |c_k|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_k}$$

① 这个函数也被称为功率谱密度(power spectral density)，或简称功率谱(power spectrum)。

其中,

$$\theta_k = \measuredangle c_k$$

我们可以画出作为频率的函数的幅度电压谱$\{|c_k|\}$和相位谱$\{\theta_k\}$,来取代画出功率密度谱。显然,周期信号的功率谱密度是幅度谱的平方。在功率谱密度中,相位信息完全遭到了破坏(或者没有出现)。

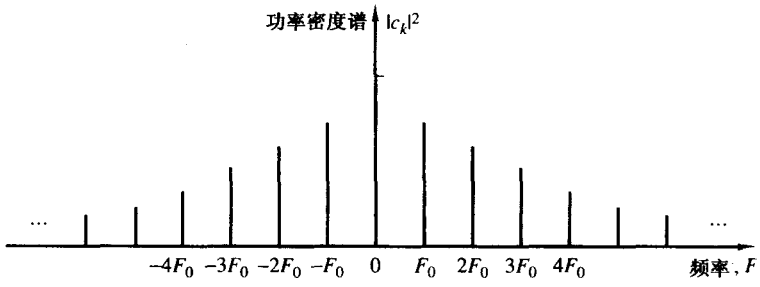


图 4.1.2 一个周期信号的功率密度谱

如果周期信号是实数值,那么傅里叶级数的系数$\{c_k\}$满足条件

$$c_{-k} = c_k^*$$

因此,$|c_k|^2 = |c_k^*|^2$。所以,功率谱是频率的一个对称函数。这个条件也意味着,幅度谱是关于原点对称的(偶对称),而相位谱是一个奇函数。由于对称,仅定义一个实周期信号正频率的频谱就足够了。此外,总平均功率可以表示为

$$P_x = c_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \tag{4.1.15}$$

$$= a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \tag{4.1.16}$$

这直接来自于 4.1.1 节中给出的傅里叶级数表达式中的系数$\{a_k\}$、$\{b_k\}$和$\{c_k\}$的关系式。

例 4.1.1 求如图 4.1.3 所示的时间连续的周期矩形脉冲串的傅里叶级数和功率密度谱。

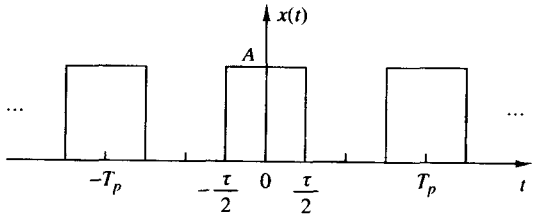


图 4.1.3 时间连续的周期矩形脉冲串

解:该信号是周期信号,基本周期是 T_p,并且显然满足狄利克里条件。因此,我们将该信号表示成由式(4.1.8)给出的傅里叶级数,而傅里叶系数则由式(4.1.9)求得。

既然 $x(t)$是一个偶信号[即 $x(t) = x(-t)$],那么积分区间选择为从 $-T_p/2$ 到 $T_p/2$ 是方便的。当 $k=0$ 时,由式(4.1.9)可得

$$c_0 = \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_p}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\,\mathrm{d}t = \frac{A\tau}{T_p} \tag{4.1.17}$$

其中,c_0 表示信号 $x(t)$的平均值(dc 成分)。当 $k\neq 0$ 时,我们可得

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T_p}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kF_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{T_p}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F_0 kt}}{-\mathrm{j}2\pi kF_0}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} \\
&= \frac{A}{\pi F_0 kT_p}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi kF_0\tau}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi kF_0\tau}}{\mathrm{j}2} \\
&= \frac{A\tau}{T_p}\,\frac{\sin\pi kF_0\tau}{\pi kF_0\tau}, \qquad k=\pm1,\pm2,\cdots
\end{aligned}
\tag{4.1.18}
$$

有趣的是，式(4.1.18)的右边具有$(\sin\phi)/\phi$的形式，其中$\phi=\pi kF_0\tau$。因为 F_0 和 τ 都是固定的，而指数 k 是变化的，所以这种情况下ϕ取离散值。然而，如果我们画出在范围 $-\infty<\phi<\infty$ 内以ϕ为连续参数的$(\sin\phi)/\phi$的函数图，那么我们得到的图如图 4.1.4 所示。我们看到，当$\phi\to\pm\infty$时，这个函数衰减为零；在$\phi=0$处，这个函数具有最大值 1；在 π 的整数倍处(即$\phi=m\pi, m=\pm1,\pm2,\cdots$)，这个函数为零。显然，由式(4.1.18)给出的傅里叶级数系数是函数$(\sin\phi)/\phi$在$\phi=\pi kF_0\tau$处的采样值，而且幅度乘上了比例因子 A_τ/T_p。

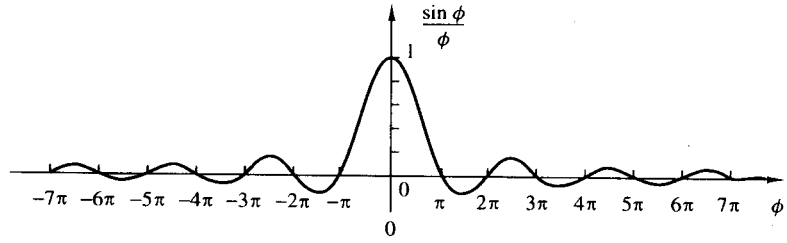


图 4.1.4　函数$(\sin\phi)/\phi$

因为周期函数 $x(t)$是偶函数，所以傅里叶系数 c_k 是实数。因此，相位谱只有两个值，当 c_k 是正数时，相位谱是零，而当 c_k 是负数时，相位谱是 π。我们一般不把幅度谱和相位谱画成单独的两个图，而是只在单幅图上画出$\{c_k\}$，将 c_k 的正值和负值在图上表示出来。当傅里叶系数$\{c_k\}$是实数时，通常是实际中常用的做法。

图 4.1.5 显示了当 T_p 为固定值而脉冲宽度 τ 允许变化时，矩形脉冲串的傅里叶系数。在 $T_p=0.25$ s 的情况下，$F_0=1/T_p=4$ Hz，而 $\tau=0.05T_p$，$\tau=0.1T_p$ 和 $\tau=0.2T_p$。我们看到，保持 T_p 固定而减少 τ 的结果，是将信号的功率扩展到整个频域上。相邻两个谱线间的间隔是 $F_0=4$ Hz，与脉冲宽度 τ 的值没有关系。

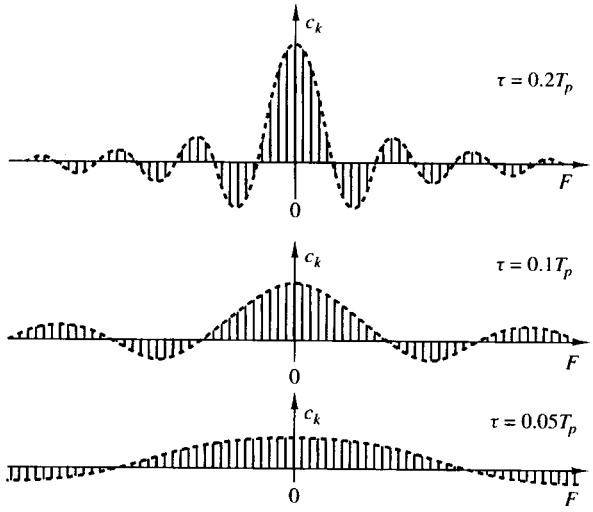


图 4.1.5　当 T_p 固定而脉冲宽度 τ 变化时，矩形脉冲串的傅里叶系数

另一方面,当 $T_p > \tau$ 时保持固定的 τ 值而改变 T_p 的值是有益的。图 4.1.6 表明了当 $T_p = 5\tau$, $T_p = 10\tau$ 和 $T_p = 20\tau$ 时的此种情况。在这个例子中,相邻两个谱线间的间隔是随着 T_p 的增加而减少的。由于 T_p 是式(4.1.18)的除数的因子,当极限 $T_p \to \infty$ 存在时,傅里叶系数逼近零。这种行为与如下的事实一致:当 $T_p \to \infty$ 而且 τ 保持固定时,得到的结果不再是功率信号。取而代之的是这个信号成为能量信号,它的平均功率为零。无限能量信号的频谱将在下一节中描述。

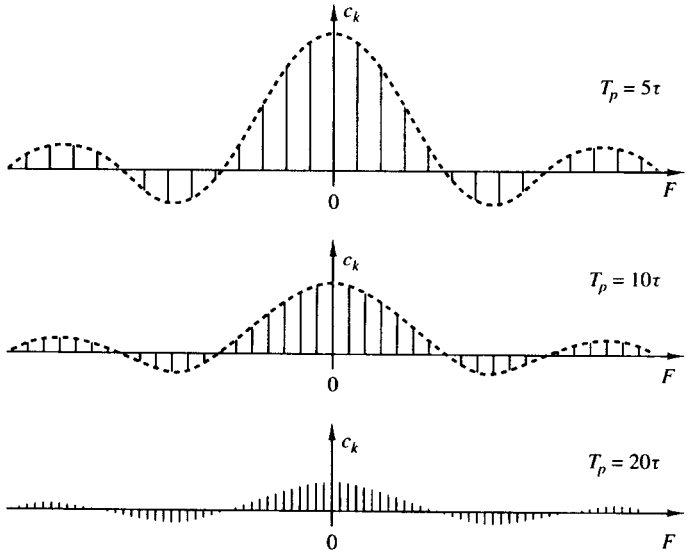


图 4.1.6 当脉冲宽度 τ 固定而 T_p 变化时,矩形脉冲串的傅里叶系数

我们还注意到,如果 $k \neq 0$ 并且 $\sin(\pi k F_0 \tau) = 0$ 时,有 $c_k = 0$。具有零功率的谐波出现在频率为 kF_0 的地方,从而有 $\pi(kF_0)\tau = m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \cdots$,或在 $kF_0 = m/\tau$ 处。例如,如果 $F_0 = 4$ Hz 而 $\tau = 0.2T_p$,则可得出在 ± 20 Hz, ± 40 Hz, $\cdots$ 处的频谱成分具有零功率。这些频率与傅里叶系数 c_k, $k = \pm 5, \pm 10, \pm 15, \cdots$ 对应。另一方面,如果 $\tau = 0.1T_p$,那么具有零功率的频谱成分是 $k = \pm 10, \pm 20, \pm 30, \cdots$。

矩形脉冲串的功率密度谱为

$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{A\tau}{T_p}\right)^2, & k = 0 \\ \left(\dfrac{A\tau}{T_p}\right)^2 \left(\dfrac{\sin \pi k F_0 \tau}{\pi k F_0 \tau}\right)^2, & k = \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases} \tag{4.1.19}$$

4.1.3 连续时间非周期信号的傅里叶变换

在 4.1.1 节中我们推导了傅里叶级数,将一个周期信号表示为调和相关的复指数信号的线性组合。由于周期性,我们看到这些信号的线谱拥有等距离的线。相邻线的间隔等于基频,换言之,它是信号的基本周期的倒数。如图 4.1.6 所示,我们可以将基本周期视为每单位频率的线数的表示(线密度)。

当使用这种解释时,很显然,如果我们允许周期无限制地增大,那么线间隔趋于零。在极限中,当周期变为无限时,信号变为非周期信号,而且它的频谱变为连续的。这样的论证暗示,一个非周期信号的频谱将会是以某个周期 T_p 重复该非周期信号而得到的相应周期信号的线谱的包络。

让我们考虑一个如图 4.1.7(a)所示的、具有无限时长的非周期信号 $x(t)$。由这个非周期信

号，我们生成一个具有周期 T_p 的周期信号 $x_p(t)$，如图 4.1.7(b)所示。显然，在极限 $T_p \to \infty$ 处，$x_p(t) = x(t)$，即

$$x(t) = \lim_{T_p \to \infty} x_p(t)$$

这个解释意味着，通过简单地取极限 $T_p \to \infty$，我们应该能够从 $x_p(t)$的频谱中获得 $x(t)$的频谱。

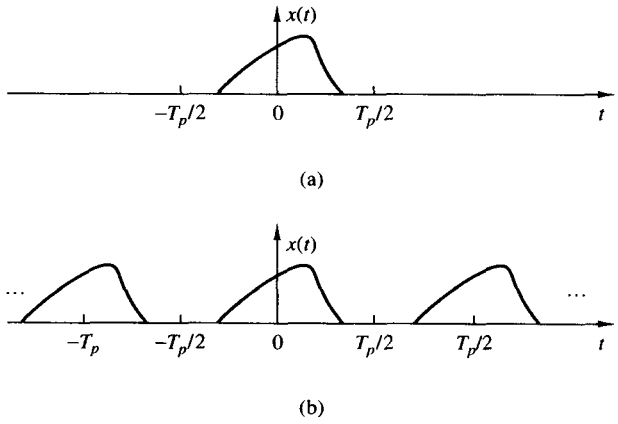


图 4.1.7　(a) 非周期信号 $x(t)$和(b) 以周期 T_p 重复 $x(t)$构造的周期信号 $x_p(t)$

我们由 $x_p(t)$的傅里叶级数表示式入手，

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}, \qquad F_0 = \frac{1}{T_p} \tag{4.1.20}$$

其中，

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x_p(t) e^{-j2\pi k F_0 t} \, dt \tag{4.1.21}$$

因为对于 $-T_p/2 \leqslant t \leqslant T_p/2$，$x_p(t) = x(t)$，所以式(4.1.21)可表示为

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} \, dt \tag{4.1.22}$$

对于 $|t| > T_p/2$，$x(t) = 0$ 也是对的。因此，式(4.1.22)中积分的极限可以用从 $-\infty$ 到 ∞ 替换。所以

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} \, dt \tag{4.1.23}$$

让我们现在来定义被称为 $x(t)$的傅里叶变换的函数 $X(F)$：

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} \, dt \tag{4.1.24}$$

$X(F)$是连续变量 F 的函数。它不依赖于 T_p 或 F_0。然而，如果我们将式(4.1.23)和式(4.1.24)进行比较，那么傅里叶系数 c_k 显然可以用 $X(F)$来表示：

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0)$$

或等价为

$$T_p c_k = X(kF_0) = X\left(\frac{k}{T_p}\right) \tag{4.1.25}$$

这样,傅里叶系数就是 $X(F)$在 F_0 的整数倍处的采样,并乘上因子 F_0(乘以 $1/T_p$)。将来自于式(4.1.25)的 c_k 代入式(4.1.20),得到

$$x_p(t) = \frac{1}{T_p}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_p}\right) e^{j2\pi kF_0 t} \tag{4.1.26}$$

当 T_p 趋于无限时,我们希望得到式(4.1.26)的极限。首先,我们定义 $\Delta F = 1/T_p$。这样替代后,式(4.1.26)成为

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F) e^{j2\pi k\Delta F t}\Delta F \tag{4.1.27}$$

显然,在 T_p 趋于无限的极限中,$x_p(t)$还原为 $x(t)$。ΔF 也成为微分 dF,而 $k\Delta F$ 也成为连续频率变量 F。从而,式(4.1.27)的求和成为在频率变量 F 上的积分。因此,

$$\begin{aligned} \lim_{T_p\to\infty} x_p(t) = x(t) &= \lim_{\Delta F\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F)e^{-j2\pi k\Delta F t}\Delta F \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi Ft}\,dF \end{aligned} \tag{4.1.28}$$

当 $X(F)$已知时,这个积分关系得到的结果是 $x(t)$,并且它被称为傅里叶逆变换。

这就结束了我们对由式(4.1.24)和式(4.1.28)给出的、针对一个非周期信号 $x(t)$的傅里叶变换对的启发式的推导。尽管这不是数学上的严谨推导,但它却以相对直观地论证得到了所期待的傅里叶变换关系。总之,连续时间非周期信号的傅里叶分析涉及以下的傅里叶变换对。

连续时间非周期信号的傅里叶分析

合成等式(逆变换)	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi Ft}\,dF$	(4.1.29)
分析等式(正变换)	$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}\,dt$	(4.1.30)

显然,傅里叶级数和傅里叶变换之间的本质差别是,后者的频谱是连续的。因此,一个非周期信号的合成是通过积分完成的,而不是求和。

最后,我们要指出,式(4.1.29)和式(4.1.30)中的傅里叶变换对可以用弧度频率变量 $\Omega = 2\pi F$ 来表示。因为 $dF = d\Omega/2\pi$,所以式(4.1.29)和式(4.1.30)成为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega \tag{4.1.31}$$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\,dt \tag{4.1.32}$$

保证傅里叶变换存在的条件集是狄利克里条件,可以表示为

1. 信号 $x(t)$具有有限个有限的不连续点。
2. 信号 $x(t)$具有有限个最大值和最小值。
3. 信号 $x(t)$是绝对可积的,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,\mathrm{d}t < \infty \tag{4.1.33}$$

由式(4.1.30)给出的傅里叶变换的定义,很容易得出第三个条件。实际上,

$$|X(F)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,\mathrm{d}t$$

因此,如果式(4.1.33)满足,则 $|X(F)| < \infty$。

傅里叶变换存在的较弱的条件是 $x(t)$具有有限能量;即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty \tag{4.1.34}$$

注意,如果一个信号 $x(t)$是绝对可积的,那么它也将具有有限能量。也就是说,如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$

则有

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty \tag{4.1.35}$$

然而,反过来不成立。也就是说,信号也许具有有限能量,但不是绝对可积的。例如,信号

$$x(t) = \frac{\sin 2\pi F_0 t}{\pi t} \tag{4.1.36}$$

是平方可积的,但不是绝对可积的。该信号的傅里叶变换是

$$X(F) = \begin{cases} 1, & |F| \leqslant F_0 \\ 0, & |F| > F_0 \end{cases} \tag{4.1.37}$$

既然该信号违反了式(4.1.33),那么显然狄利克里条件是傅里叶变换存在的充分条件,但不是必要条件。在任何情况下,几乎所有的有限能量信号都存在傅里叶变换,所以我们不需要担心在实际中甚少遇到的病态信号。

4.1.4　非周期信号的能量密度谱

设 $x(t)$是任意能量有限信号,其傅里叶变换是 $X(F)$。它的能量是

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

上式也可以转化成用 $X(F)$表示,如下所示:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{d}t \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}F \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)\,\mathrm{d}F \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}t \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2\,\mathrm{d}F \end{aligned}$$

因此,我们总结得到

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 \, \mathrm{d}F \tag{4.1.38}$$

这就是非周期有限能量信号的帕塞瓦关系式,表达了时域和频域能量守恒的原理。

一般而言,一个信号的频谱 $X(F)$是复数值。因此,它通常表示成极坐标形式

$$X(F) = |X(F)| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta(F)}$$

其中$|X(F)|$是幅度谱,而是 $\Theta(F)$是相位谱,

$$\Theta(F) = \measuredangle X(F)$$

另一方面,量

$$S_{xx}(F) = |X(F)|^2 \tag{4.1.39}$$

是式(4.1.38)中的被积函数,作为频率的函数表示信号中的能量分布。因此,$S_{xx}(F)$被称为 $x(t)$的能量密度谱。对 $S_{xx}(F)$在所有频率上进行积分可得到信号中的总能量。从另外一个角度看,在频带 $F_1 \leqslant F \leqslant F_1 + \Delta F$ 上的信号 $x(t)$中的能量是

$$\int_{F_1}^{F_1+\Delta F} S_{xx}(F) \, \mathrm{d}F \geqslant 0$$

它意味着对于所有的 F, $S_{xx}(f) \geqslant 0$。

从式(4.1.39)我们看到,$S_{xx}(F)$不包含任何相位信息[即 $S_{xx}(F)$完全是非负实数]。因为 $x(t)$的相位谱不包含在式 $S_{xx}(F)$中,所以在给定 $S_{xx}(F)$的条件下不可能重建信号。

最后,对于傅里叶级数的情况,容易证明,如果信号 $x(t)$是实数,则

$$|X(-F)| = |X(F)| \tag{4.1.40}$$

$$\measuredangle X(-F) = -\measuredangle X(F) \tag{4.1.41}$$

结合式(4.1.39)和式(4.1.40),我们得到

$$S_{xx}(-F) = S_{xx}(F) \tag{4.1.42}$$

换言之,一个实信号的能量密度谱是偶对称的。

例 4.1.2 求如下式定义的矩形脉冲信号的傅里叶变换和能量密度谱:

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \leqslant \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \tag{4.1.43}$$

该信号如图 4.1.8(a)所示。

解:显然,这个信号是非周期的,而且满足狄利克里条件,因此它的傅里叶变换存在。应用式(4.1.30),我们发现

$$X(F) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Ft} \, \mathrm{d}t = A\tau \frac{\sin \pi F\tau}{\pi F\tau} \tag{4.1.44}$$

我们看到,$X(F)$是实数,因此它可以只使用一幅图来描绘,如图 4.1.8(b)所示。显然,$X(F)$具有式(4.1.4)中函数$(\sin\phi)/\phi$的形状。因此,矩形脉冲的频谱是周期信号的线谱(傅里叶系数)的包络,而该周期信号是通过以周期 T_p 不断重复脉冲获得的,见图 4.1.3。换言之,相应于周期信号 $x_p(t)$的傅里叶系数 c_k 仅是 $X(F)$在频率 $kF_0 = k/T_p$ 处的采样。特别地,

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0) = \frac{1}{T_p} X\left(\frac{k}{T_p}\right) \tag{4.1.45}$$

由式(4.1.44)我们注意到,$X(F)$的过零点出现在 $1/\tau$ 的整数倍处。进而,包含了大部分信号能量的主叶的宽度等于 $2/\tau$。随着脉冲宽度 τ 的减少(增加),主叶变得更宽(更窄),而且更多的能量被移到更高(更

低)的频率,如图 4.1.9 所示。则当信号脉冲在时间上扩展(压缩)时,它的变换就在频率上压缩(扩展)。在时间函数和它的频谱之间的这一行为,是一种不确定理论类型,该理论以不同的形式出现在科学和技术的各个分支中。

最后,周期脉冲的能量密度谱是

$$S_{xx}(F) = (A\tau)^2 \left(\frac{\sin \pi F\tau}{\pi F\tau}\right)^2 \tag{4.1.46}$$

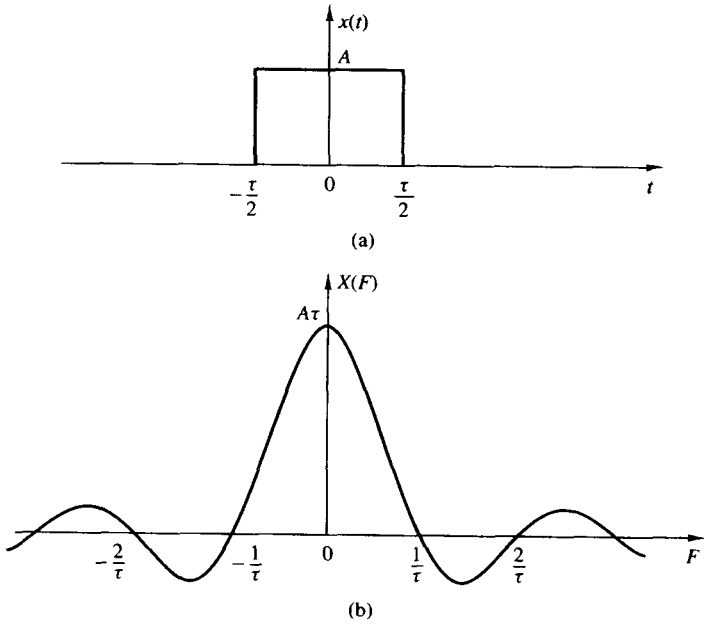


图 4.1.8　(a)矩形脉冲和(b)它的傅里叶变换

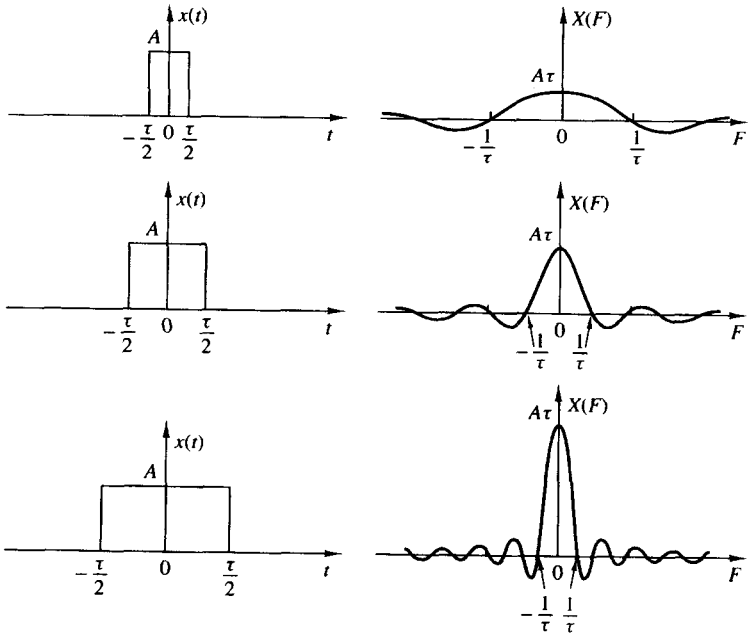


图 4.1.9　不同宽度值的矩形脉冲的傅里叶变换

4.2 离散时间信号的频率分析

在4.1节中,我们针对连续时间周期(功率)信号推导了傅里叶级数表示,并针对有限能量非周期信号推导了傅里叶变换。本节我们针对离散时间信号继续进行推导。

正如我们从4.1节的讨论中看到的那样,连续时间周期信号的傅里叶级数表示能够由无限个频率成分组成,其中两个连续的调和相关的频率之间的频率间隔是 $1/T_p$,而 T_p 是基本周期。因为连续时间信号的频率范围是从 $-\infty$ 到 ∞,所以信号有可能包含无穷的频率成分。相反,离散时间信号的频率范围仅是在区间 $(-\pi,\pi)$ 或 $(0,2\pi)$ 上。基本周期为 N 的离散时间信号可以由被 $2\pi/N$ 弧度或者 $f=1/N$ 周期分离的频率成分组成。因此,离散时间信号的傅里叶级数表示将包含最多 N 个频率成分。这是连续时间周期信号和离散时间周期信号的傅里叶级数表示的基本区别。

4.2.1 离散时间周期信号的傅里叶级数

给定一个周期为 N 的周期序列 $x(n)$,也就是说,对于所有 n,$x(n)=x(n+N)$。$x(n)$ 的傅里叶级数表示由 N 个调和相关的指数函数组成:

$$e^{j2\pi kn/N}, \qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

并被表示为

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}c_k e^{j2\pi kn/N} \tag{4.2.1}$$

其中,$\{c_k\}$ 是级数表达式中的系数。

为了推导傅里叶系数的表达式,我们使用如下公式:

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi kn/N}=\begin{cases}N, & k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{4.2.2}$$

注意式(4.2.2)和相应的关于连续时间信号的式(4.1.3)的相似性。应用几何求和公式可直接证明式(4.2.2),

$$\sum_{n=0}^{N-1}a^n=\begin{cases}N, & a=1\\ \dfrac{1-a^N}{1-a}, & a\neq 1\end{cases} \tag{4.2.3}$$

傅里叶系数 c_k 的表达式可通过在式(4.2.1)两边乘上指数 $e^{-j2\pi ln/N}$,然后从 $n=0$ 到 $n=N-1$ 求乘积之和获得。因此,

$$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi ln/N}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}c_k e^{j2\pi(k-l)n/N} \tag{4.2.4}$$

如果我们先对 n 求和,在式(4.2.4)右边我们得到

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi(k-l)n/N}=\begin{cases}N, & k-l=0,\pm N,\pm 2N,\cdots\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{4.2.5}$$

其中我们使用了式(4.2.2)。因此,式(4.2.4)的右边简化为 Nc_l,而且因为

$$c_l=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi ln/N}, \qquad l=0,1,\cdots,N-1 \tag{4.2.6}$$

这样我们就得到了所期待的、用信号 $x(n)$ 表示的傅里叶系数的表达式。

用于离散时间周期信号的傅里叶分析的关系式(4.2.1)和式(4.2.6)总结如下：

离散时间周期信号的傅里叶分析

合成等式	$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$	(4.2.7)
分析等式	$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$	(4.2.8)

式(4.2.7)通常被称为离散时间傅里叶级数(DTFS)。傅里叶系数$\{c_k\}$，$k=0,1,\cdots,N-1$ 提供了频域中 $x(n)$的描述，这是从 c_k 表示与以下频率成分相关的幅度和相位的意义上来说的：

$$s_k(n)=e^{j2\pi kn/N}=e^{j\omega_k n}$$

其中，$\omega_k=2\pi k/N$。

我们回忆 1.3.3 节，其中讲到函数 $s_k(n)$是具有周期 N 的周期函数。因此 $s_k(n)=s_k(n+N)$。由于这种周期性，当从范围 $k=0,1,\cdots,N-1$ 之外来看时，可得出傅里叶系数 c_k 也满足周期性条件。由对于每个 k 值都成立的式(4.2.8)，我们确实得到

$$c_{k+N}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi(k+N)n/N}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi kn/N}=c_k \tag{4.2.9}$$

因此，当扩展到范围 $k=0,1,\cdots,N-1$ 以外时，傅里叶系数$\{c_k\}$形成了一个周期序列。所以

$$c_{k+N}=c_k$$

也就是说，$\{c_k\}$是具有基本周期 N 的周期序列。从而，一个具有周期 N 的周期信号$x(n)$的频谱是具有周期 N 的周期序列。因此，信号或者它的频谱的任何 N 个连续采样提供了时域上或频域上该信号的完全描述。

虽然傅里叶系数形成了周期序列，但是我们将会集中在范围为 $k=0,1,\cdots,N-1$ 的单个周期上。这是方便的，因为对于 $0\leqslant k\leqslant N-1$，这等于覆盖了频域上的基本范围 $0\leqslant\omega_k=2\pi k/N<2\pi$。相反的是，频率范围 $-\pi<\omega_k=2\pi k/N\leqslant\pi$ 与 $-N/2<k\leqslant N/2$ 对应，当 N 是奇数时，这会造成不便。显然，如果我们使用采样率 F_s，范围 $0\leqslant k\leqslant N-1$ 就与频率范围 $0\leqslant F<F_s$ 对应。

例 4.2.1　求以下信号的频谱：

(a) $x(n)=\cos\sqrt{2}\pi n$

(b) $x(n)=\cos\pi n/3$

(c) $x(n)$是周期为 $N=4$ 的周期信号 $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},1,0,0\}$

解：

(a) 对于 $\omega_0=\sqrt{2}\pi$，我们可得 $f_0=1/\sqrt{2}$。因为 f_0 不是有理数，所以信号不是周期的。因此，这个信号不能展开成傅里叶级数，但信号是具有频谱的。它的频谱内容由在 $\omega=\omega_0=\sqrt{2}\pi$ 处的信号频率成分组成。

(b) 这种情况下 $f_0=\frac{1}{6}$，因此 $x(n)$是具有基本周期 $N=4$ 的周期信号。由式(4.2.8)可得

$$c_k=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x(n)e^{-j2\pi kn/6},\qquad k=0,1,\cdots,5$$

然而，$x(n)$可以表示为

$$x(n)=\cos\frac{2\pi n}{6}=\frac{1}{2}e^{j2\pi n/6}+\frac{1}{2}e^{-j2\pi n/6}$$

这已经具有式(4.2.7)中的指数傅里叶级数的形式了。和式(4.2.7)中 $x(n)$的两个指数项比较,显然 $c_1=1/2$ 的第二个指数和式(4.2.7)中的项 $k=-1$ 对应。然而,这一项也可以写为

$$e^{-j2\pi n/6}=e^{j2\pi(5-6)n/6}=e^{j2\pi(5n)/6}$$

这意味着 $c_{-1}=c_5$。但这与式(4.2.9)是一致的,并且与我们之前的观察所得也是一致的,即傅里叶级数系数形成周期为 N 的周期序列。因此我们有

$$c_0=c_2=c_3=c_4=0$$

$$c_1=\frac{1}{2},\qquad c_5=\frac{1}{2}$$

(c) 由式(4.2.8)可得

$$c_k=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x(n)e^{-j2\pi kn/4},\qquad k=0,1,2,3$$

或者

$$c_k=\frac{1}{4}(1+e^{-j\pi k/2}),\qquad k=0,1,2,3$$

对于 $k=0,1,2,3$,可得

$$c_0=\frac{1}{2},\qquad c_1=\frac{1}{4}(1-j),\qquad c_2=0,\qquad c_3=\frac{1}{4}(1+j)$$

幅度谱和相位谱是

$$|c_0|=\frac{1}{2},\qquad |c_1|=\frac{\sqrt{2}}{4},\qquad |c_2|=0,\qquad |c_3|=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\measuredangle c_0=0,\qquad \measuredangle c_1=-\frac{\pi}{4},\qquad \measuredangle c_2=\text{未定义},\qquad \measuredangle c_3=\frac{\pi}{4}$$

图 4.2.1 显示了(b)和(c)中的信号的频谱内容。

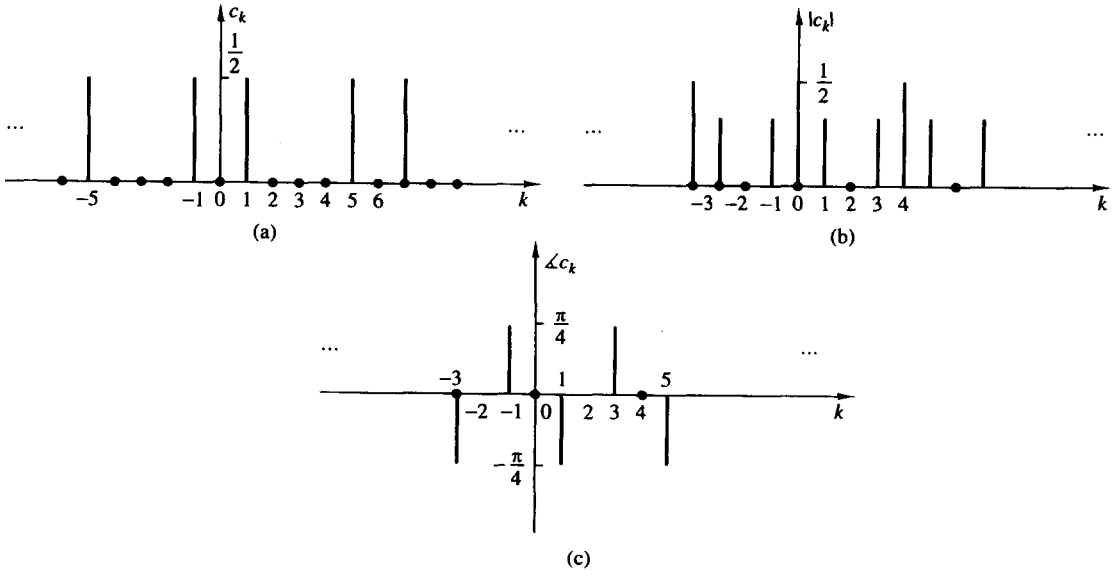


图 4.2.1 例 4.2.1(b)和(c)中讨论的周期信号的频谱

4.2.2　周期信号的功率密度谱

周期为 N 的离散时间周期信号的平均功率在式(2.1.23)中定义如下：

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 \tag{4.2.10}$$

我们现在将推导出用傅里叶系数$\{c_k\}$表示的 P_x 表达式。

如果在式(4.2.10)中使用关系式(4.2.7)，那么可得

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x^*(n) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left(\sum_{k=0}^{N-1}c_k^* e^{-j2\pi kn/N}\right) \end{aligned}$$

现在，我们交换两个求和的顺序，并利用式(4.2.8)，得到

$$\begin{aligned} P_x &= \sum_{k=0}^{N-1}c_k^*\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi kn/N}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

这就是所期待的周期信号的平均功率表达式。换言之，信号中的平均功率是各个频率成分的功率之和。我们将式(4.2.11)视为离散周期信号的帕塞瓦关系式。对于 $k=0,1,\cdots,N-1$，序列$|c_k|^2$是频率的函数的功率分布，被称为周期信号的功率密度谱。

如果我们对在单个周期上的序列 $x(n)$的能量感兴趣，那么式(4.2.11)意味着

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = N\sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2 \tag{4.2.12}$$

这和我们之前得到的连续时间周期信号的结果是一致的。如果信号 $x(n)$是实信号[即 $x^*(n)=x(n)$]，那么正如在 4.2.1 节中所展开的，可容易得到

$$c_k^* = c_{-k} \tag{4.2.13}$$

或等价为

$$|c_{-k}| = |c_k| \quad \text{(偶对称)} \tag{4.2.14}$$

$$-\measuredangle c_{-k} = \measuredangle c_k \quad \text{(奇对称)} \tag{4.2.15}$$

周期信号幅度谱和相位谱的这些对称特性，连同周期特性，对离散时域信号的频域有非常重要的影响。

实际上，联合式(4.2.9)、式(4.2.14)和式(4.2.15)，可得

$$|c_k| = |c_{N-k}| \tag{4.2.16}$$

而且

$$\measuredangle c_k = -\measuredangle c_{N-k} \tag{4.2.17}$$

更具体地，可得

$$\begin{aligned}
&|c_0| = |c_N|, && \measuredangle c_0 = -\measuredangle c_N = 0 \\
&|c_1| = |c_{N-1}|, && \measuredangle c_1 = -\measuredangle c_{N-1} \\
&|c_{N/2}| = |c_{N/2}|, && \measuredangle c_{N/2} = 0 && N\text{为偶数} \\
&|c_{(N-1)/2}| = |c_{(N+1)/2}|, && \measuredangle c_{(N-1)/2} = -\measuredangle c_{(N+1)/2} && N\text{为奇数}
\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

这样,对于一个实信号,当 N 是偶数时,$k=0,1,\cdots,N/2$,当 N 是奇数时,$k=0,1,\cdots,(N-1)/2$,频谱 c_k 就完全描述了频域上的信号。显然,这和离散时间信号所表示的最高相关频率等于 π 的事实是一致的。实际上,如果 $0\leqslant\omega_k=2\pi k/N\leqslant\pi$,那么 $0\leqslant k\leqslant N/2$。

通过利用一个实信号的傅里叶级数系数的对称特性,式(4.2.7)中的傅里叶级数也可以被表示成如下的替换形式:

$$x(n)=c_0+2\sum_{k=1}^{L}|c_k|\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn+\theta_k\right) \tag{4.2.19}$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{L}\left(a_k\cos\frac{2\pi}{N}kn-b_k\sin\frac{2\pi}{N}kn\right) \tag{4.2.20}$$

其中,$a_0=c_0$,$a_k=2|c_k|\cos\theta_k$,$b_k=2|c_k|\sin\theta_k$,而且如果 N 是偶数,那么 $L=N/2$,如果 N 是奇数,那么 $L=(N-1)/2$。

最后,我们注意到,在连续时间信号的情况下功率密度谱 $|c_k|^2$ 不包含任何相位信息。进而,谱是周期离散的,它的周期和信号本身的基本周期相等。

例 4.2.2 周期"方波"信号。求如图 4.2.2 所示的周期信号的傅里叶级数系数和功率密度谱。

解:将分析等式(4.2.8)应用于如图 4.2.2 所示的信号,可得

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1}A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

它是一个几何求和。现在使用式(4.2.3)来简化上述求和。这样可得

$$c_k=\frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/N})^n=\begin{cases}\dfrac{AL}{N}, & k=0\\ \dfrac{A}{N}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kL/N}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/N}}, & k=1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

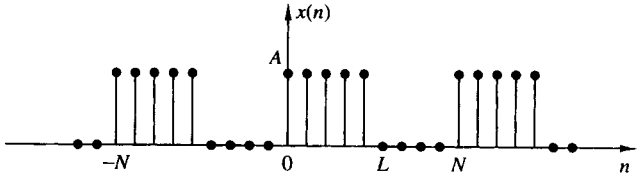


图 4.2.2 离散时间周期方波信号

最后的表达式可以进一步简化,如果留意到

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kL/N}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/N}}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi kL/N}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/N}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi kL/N}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi kL/N}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi k/N}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/N}}$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k(L-1)/N}\frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)}$$

那么有

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{AL}{N}, & k = 0, +N, \pm 2N, \cdots \\ \dfrac{A}{N} e^{-j\pi k(L-1)/N} \dfrac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)}, & \text{其他} \end{cases} \tag{4.2.21}$$

该周期信号的功率密度谱是

$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{AL}{N}\right)^2, & k = 0, +N, \pm 2N, \cdots \\ \left(\dfrac{A}{N}\right)^2 \left(\dfrac{\sin \pi kL/N}{\sin \pi k/N}\right)^2, & \text{其他} \end{cases} \tag{4.2.22}$$

图 4.2.3 显示了当 $L=2, N=10$ 和 40 且 $A=1$ 时 $|c_k|^2$ 的图形。

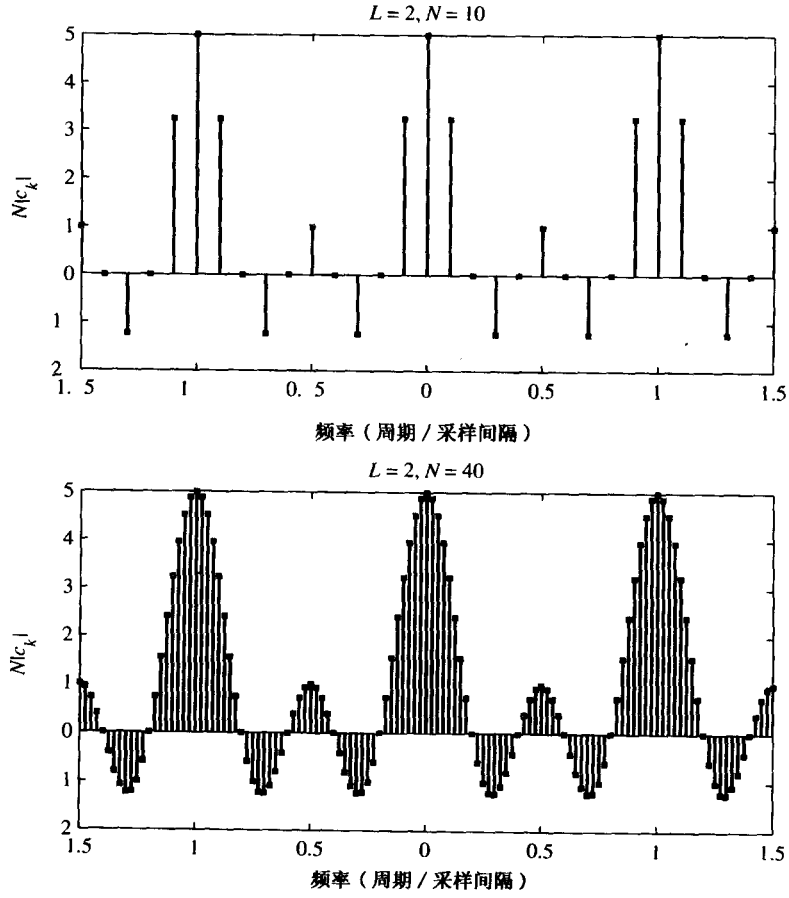


图 4.2.3　由式(4.2.22)得到的功率密度谱图

4.2.3　离散时间非周期信号的傅里叶变换

正如连续时间非周期能量信号的情况，离散时间非周期能量有限信号的频率分析涉及时域信号的傅里叶变换。因此，本节是 4.1.3 节的延伸。

能量有限离散时间信号 $x(n)$ 的傅里叶变换的定义如下：

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \tag{4.2.23}$$

物理上,$X(\omega)$表示信号 $x(n)$的频率内容。换言之,$X(\omega)$是 $x(n)$的分解,由 $x(n)$的频率成分组成。

我们看到,离散时间能量有限的傅里叶变换和能量有限模拟信号的傅里叶变换之间有两个基本的差别。第一,对于连续时间信号,傅里叶变换和信号的频谱的频率范围是$(-\infty,\infty)$。然而,对于离散时间信号,频谱的频率范围只在频率区间$(-\pi,\pi)$或者等价的$(0,2\pi)$上。这一特性可反映在信号的傅里叶变换上。实际上,$X(\omega)$是周期为2π的周期信号,即

$$\begin{aligned} X(\omega+2\pi k) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+2\pi k)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = X(\omega) \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

因此,$X(\omega)$是周期为2π的周期信号。但是这一特性仅是一个事实的结果,而这个事实是:任何离散时间信号的频率范围被限制在$(-\pi,\pi)$或$(0,2\pi)$,而且在这个区间以外的任何频率与这个区间内的频率是相等的。

第二个基本差别也是信号离散时间本质的结果。因为信号在时间上是离散的,所以信号的傅里叶变换将涉及项的求和而不是在时间连续信号的情况下的积分。

因为 $X(\omega)$是频率变量 ω 的周期函数,所以只要如前面所描述的傅里叶级数存在的条件满足,它就具有傅里叶级数表达式。实际上,由式(4.2.23)给出的序列 $x(n)$的傅里叶变换的定义式,我们看到 $X(\omega)$具有傅里叶级数的形式。该级数表达式中的傅里叶系数是序列 $x(n)$的值。

为了证明这一点,让我们从 $X(\omega)$估计序列 $x(n)$的值。首先,在式(4.2.23)两边乘上 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega m}$,并且在区间$(-\pi,\pi)$上求积分,得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega m}\,\mathrm{d}\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega m}\,\mathrm{d}\omega \tag{4.2.25}$$

式(4.2.25)右边的积分可通过交换求和与积分的顺序求得。当 $N\to\infty$时,如果序列

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

一致收敛于 $X(\omega)$,那么这个交换是可行的。一致收敛的意思是,对于任意的 ω,当 $N\to\infty$时,都有 $X_N(\omega)\to X(\omega)$。傅里叶变换的收敛性将会在后面的一节中进行更详细的讨论。目前,让我们假设级数是一致收敛的,所以我们能够交换式(4.2.25)中的求和与积分的顺序。那么

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(m-n)}\,d\omega = \begin{cases} 2\pi, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$$

因此,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(m-n)}\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} 2\pi x(m), & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases} \tag{4.2.26}$$

结合式(4.2.25)和式(4.2.26),可得到所期待的结果

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega \tag{4.2.27}$$

如果我们将式(4.2.27)中的积分与式(4.1.9)中的积分进行比较，将会注意到，这只是周期为 2π 的作为函数的周期级数的表达式。式(4.1.9)和式(4.2.27)之间的唯一不同是被积函数中指数的符号，而这其实是由式(4.2.23)所给出的傅里叶变换定义式的结果。因此，由式(4.2.23)定义的序列 $x(n)$ 的傅里叶变换具有傅里叶级数表达式的形式。

总之，离散时间信号的傅里叶变换如下：

离散时间非周期信号的傅里叶分析

合成等式(逆变换)	$x(n)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{\pi}X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega$　(4.2.28)
分析等式(正变换)	$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$　(4.2.29)

4.2.4　傅里叶变换的收敛性

在由式(4.2.28)给出的逆变换的推导中，我们假设当 $N\to\infty$ 时，序列

$$X_N(\omega)=\sum_{n=-N}^{N}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{4.2.30}$$

一致收敛于在式(4.2.25)的积分中给出的 $X(\omega)$。一致收敛的意思是，对于任意 ω，都有

$$\lim_{N\to\infty}\{\sup_{\omega}|X(\omega)-X_N(\omega)|\}=0 \tag{4.2.31}$$

如果 $x(n)$ 是绝对可和的，那么一致收敛性就得到保证。实际上，如果

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty \tag{4.2.32}$$

那么

$$|X(\omega)|=\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\right|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$$

因此，式(4.2.32)是离散时间傅里叶变换存在的充分条件。我们注意到，这是连续时间信号傅里叶变换的第三个狄利克里条件的离散时间部分。由于 $|x(n)|$ 的离散时间本质，头两个条件不适用。

某些序列不是绝对可和的，但是它们是平方可和的。也就是说，它们具有有限能量

$$E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2<\infty \tag{4.2.33}$$

这是比式(4.2.32)弱的条件。我们希望定义有限能量序列的傅里叶变换，但是必须放松一致收敛的条件。对于这种序列，我们可以应用均方收敛条件：

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\omega)-X_N(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega=0 \tag{4.2.34}$$

如此，误差 $X(\omega)-X_N(\omega)$ 的能量趋于零，但是误差 $|X(\omega)-X_N(\omega)|$ 不一定趋于零。这样我们就可以把有限能量信号列入存在傅里叶变换的一类信号中。

让我们考虑来自这类有限能量信号的一个例子。假设

$$X(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0, & \omega_c<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}\tag{4.2.35}$$

读者应该记得 $X(\omega)$是周期为 2π 的周期信号。因此,式(4.2.35)只是表示 $X(\omega)$的一个周期。$X(\omega)$的逆变换是序列

$$\begin{aligned}x(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega n}\,d\omega=\frac{\sin\omega_c n}{\pi n},\qquad n\neq 0\end{aligned}$$

对于 $n=0$,可得

$$x(0)=\frac{1}{2\pi}\int^{\omega_c}-\omega_c\,d\omega=\frac{\omega_c}{\pi}$$

因此,

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi}, & n=0\\ \dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin\omega_c n}{\omega_c n}, & n\neq 0\end{cases}\tag{4.2.36}$$

这个变换对如图 4.2.4 所示。

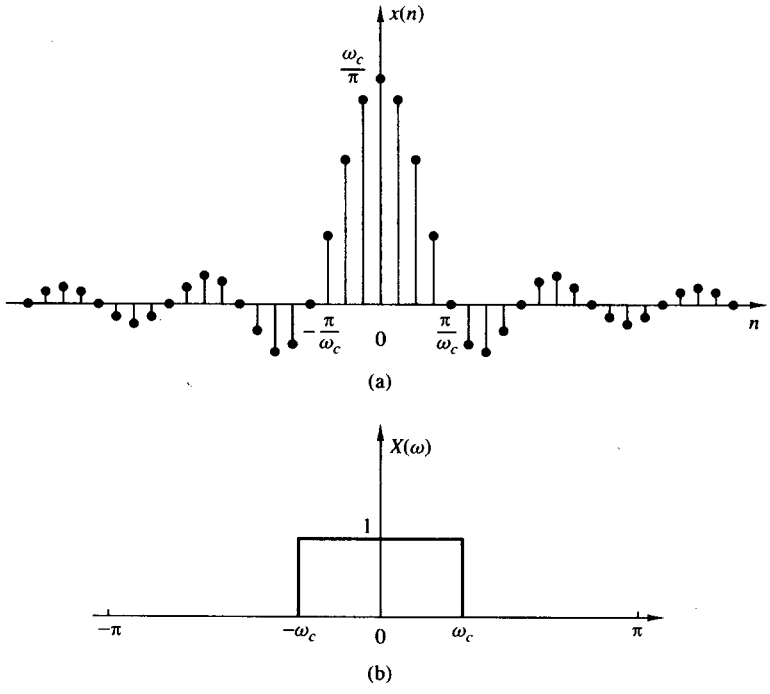


图 4.2.4 式(4.2.35)和式(4.2.36)中的傅里叶变换对

有时候,式(4.2.36)中的序列$\{x(n)\}$表示为

$$x(n)=\frac{\sin\omega_c n}{\pi n},\qquad -\infty<n<\infty\tag{4.2.37}$$

当 $n=0$ 时,$x(n)=\omega_c/\pi$。然而,我们应该强调,$(\sin\omega_c n)/\pi n$ 不是一个连续函数,因此 L'Hospital 准则不能用来求 $x(0)$。

现在让我们来考虑求由式(4.2.37)给出的序列的傅里叶变换。序列$\{x(n)\}$不是绝对可和的。因此,对于所有的 ω,无限级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{4.2.38}$$

不是一致收敛的。然而,正如我们将在 4.3 节所示的那样,序列$\{x(n)\}$具有有限能量 $E_x = \omega_c/\pi$。因此,从均方意义上来看,式(4.2.38)中的求和被保证收敛于由式(4.2.35)给出的 $X(\omega)$。

为了详细阐述这一点,让我们考虑以下的有限求和:

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{4.2.39}$$

图 4.2.5 显示了不同 N 值的函数 $X_N(\omega)$。我们注意到,在 $\omega = \omega_c$ 处有一个独立于 N 值的相当大的过振荡。当 N 增加时,振荡加快,但波纹大小保持不变。可以证明,当 $N \to \infty$ 时,振荡在不连续点 $\omega = \omega_c$ 处汇聚,但是幅度并不为零。然而,当式(4.2.34)满足时,$X_N(\omega)$在均方意义上收敛于 $X(\omega)$。

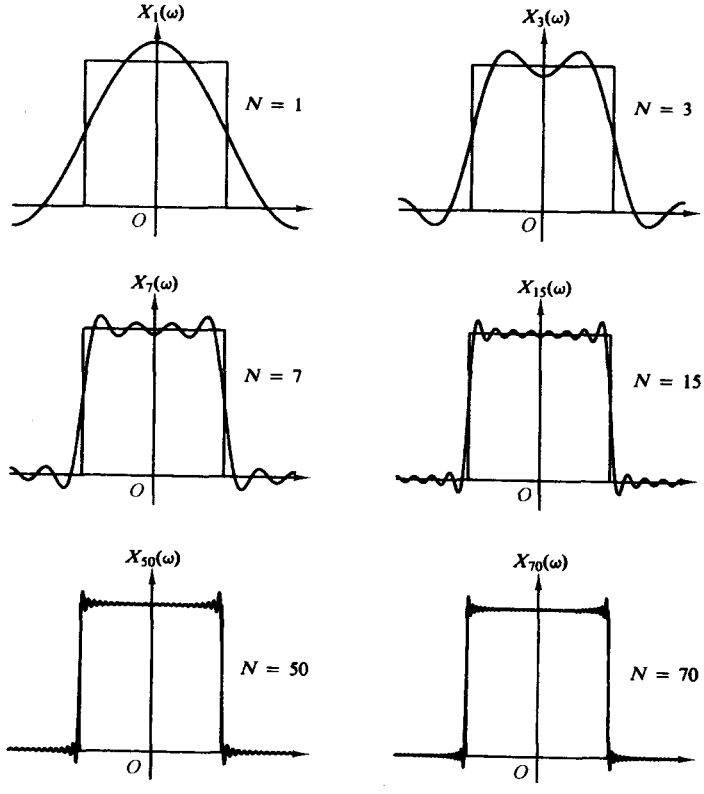


图 4.2.5　傅里叶变换收敛性的说明和不连续点处的吉布斯现象

在 $X(\omega)$的一个不连续点处,$X_N(\omega)$逼近函数 $X(\omega)$的振荡行为被称为吉布斯(Gibbs)现象。相似的结果在对由合成表达式(4.1.8)给出的连续时间周期信号的傅里叶级数进行截断时也可看到。例如,将例 4.1.1 中的周期方波信号的傅里叶级数截断,会在有限求和逼近 $x(t)$中导致相同的振荡行为。吉布斯现象也会在第 10 章考虑的实际离散时间 FIR 系统的设计中遇到。

4.2.5 非周期信号的能量密度谱

回忆离散时间信号的能量的定义

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \tag{4.2.40}$$

现在让我们用谱特性 $X(\omega)$来表示能量 E_x。首先,有

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega\right]$$

如果在上述表达式中交换积分与求和的顺序,可得

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\right]\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

因此,$x(n)$和 $X(\omega)$之间的能量关系是

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \tag{4.2.41}$$

这是具有有限能量的离散时间非周期信号的帕塞瓦关系式。

一般来说,频谱 $X(\omega)$是频率的复值函数。它可以表示成

$$X(\omega) = |X(\omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta(\omega)} \tag{4.2.42}$$

其中,

$$\Theta(\omega) = \measuredangle X(\omega)$$

是相位谱,而$|X(\omega)|$是幅度谱。

正如连续时间信号的情况,量

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \tag{4.2.43}$$

将能量的分布表示成频率的函数,而它被称为 $x(n)$的能量密度谱。显然,$S_{xx}(\omega)$不包含任何相位信息。

现在假设信号 $x(n)$是实信号。那么容易得到

$$X^*(\omega) = X(-\omega) \tag{4.2.44}$$

或等价为

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)|, \quad \text{(偶对称)} \tag{4.2.45}$$

和

$$\measuredangle X(-\omega) = -\measuredangle X(\omega), \quad \text{(奇对称)} \tag{4.2.46}$$

由式(4.2.43),容易得到

$$S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega) \quad \text{(偶对称)} \tag{4.2.47}$$

从这些对称性我们总结得到,实离散时间信号的频率范围可以进一步限制在范围 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 内(即周期的一半)。实际上,如果我们已知在范围 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 内的 $X(\omega)$,那么利用上面给出的对称

性我们可求得范围 $-\pi \leqslant \omega \leqslant 0$ 内的 $X(\omega)$。正如我们已经看到的，相似的结果对离散时间周期信号也成立。因此，实离散时间信号的频域描述是完全由它在频率范围 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 内的频谱确定的。

通常，我们使用基本区间 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$，或者用赫兹表示的 $0 \leqslant F \leqslant F_s/2$。仅当具体的应用要求时我们才会画出多于半个周期的区间。

例 4.2.3　求并画出以下信号的能量密度谱 $S_{xx}(\omega)$：

$$x(n) = a^n u(n), \qquad -1 < a < 1$$

解：因为 $|a| < 1$，所以序列 $x(n)$ 是绝对可和的，这可通过应用几何求和公式证明，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

因此 $x(n)$ 的傅里叶变换存在，而且是通过应用式(4.2.29)求得的。从而

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

因为 $|ae^{-j\omega}| = |a| < 1$，使用几何求和公式可得到

$$X(\omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

能量密度谱由下式给出：

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 = X(\omega)X(\omega) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})}$$

或者其等价式

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

注意，依照式(4.2.47)，有 $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$。

图 4.2.6 显示了信号 $x(n)$ 和当 $a = 0.5$ 以及 $a = -0.5$ 时其相应的频谱。注意，当 $a = -0.5$ 时信号有更快速的变化，自然它的频谱会有更强的高频。

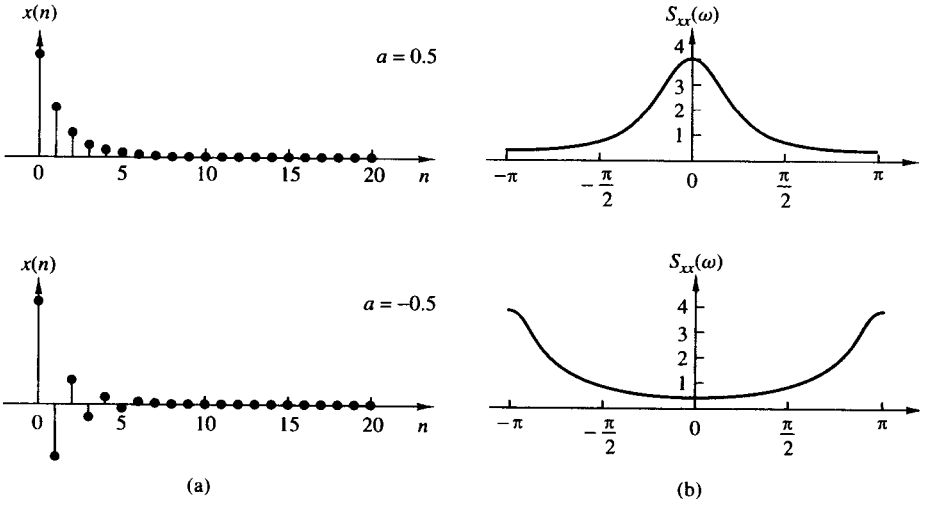


图 4.2.6　(a)序列 $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$ 和 $x(n) = (-\frac{1}{2})^n u(n)$；(b)它们的能量密度谱

例 4.2.4 求以下序列的傅里叶变换和能量密度谱:

$$x(n)=\begin{cases}A, & 0\leqslant n\leqslant L-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{4.2.48}$$

如图 4.2.7 所示。

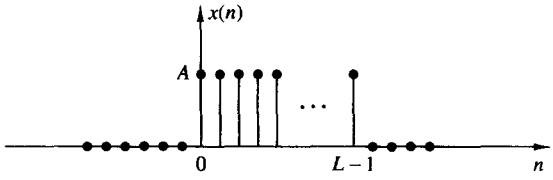


图 4.2.7 离散时间矩形脉冲

解:在计算傅里叶变换之前,观察

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|=\sum_{n=0}^{L-1}|A|=L|A|<\infty$$

因此 $x(n)$是绝对可和的,而且它的傅里叶变换存在。此外,注意 $x(n)$是一个具有 $E_x=|A|^2L$ 的有限能量信号。

该信号的傅里叶变换是

$$\begin{aligned}X(\omega)&=\sum_{n=0}^{L-1}A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\\ &=A\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega L}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\\ &=A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega/2)(L-1)}\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}\end{aligned} \tag{4.2.49}$$

当 $\omega=0$ 时,式(4.2.49)中的变换产生 $X(0)=AL$,这可以容易地通过在 $X(\omega)$的定义等式中设置 $\omega=0$,或者在式(4.2.49)中使用 L'Hospital 准则解决当 $\omega=0$ 时的不确定式来确定。

$x(n)$的幅度谱和相位谱是

$$|X(\omega)|=\begin{cases}|A|L, & \omega=0\\ |A|\left|\dfrac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}\right|, & \text{其他}\end{cases} \tag{4.2.50}$$

和

$$\measuredangle X(\omega)=\measuredangle A-\frac{\omega}{2}(L-1)+\measuredangle\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \tag{4.2.51}$$

其中应该记住的是,如果量是正数,那么实值的相位是零,而如果量是负数,那么实值的相位是 π。

当 $A=1$ 且 $L=5$ 时,谱 $|X(\omega)|$和$\measuredangle X(\omega)$如图 4.2.8 所示。能量密度谱只是由式(4.2.50)给出的表达式的平方。

例 4.2.4 中的常幅度脉冲的傅里叶变换和例 4.2.2 中考虑的周期矩形波之间有一个有趣的关系。如果我们在如下等距离的(调和相关的)频率集合上求式(4.2.49)给出的傅里叶变换:

$$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k,\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

那么,可得

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/N)k(L-1)}\frac{\sin[(\pi/N)kL]}{\sin[(\pi/N)k]} \tag{4.2.52}$$

如果我们将这个结果和由式(4.2.21)给出的周期矩形波的傅里叶级数系数的表达式进行比较，则会得到

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = Nc_k, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{4.2.53}$$

详细而言，我们已经确定了矩形脉冲的傅里叶变换在频率 $\omega = 2\pi k/N, k = 0, 1, \cdots, N-1$ 上的值只是在相应频率上周期矩形脉冲串的傅里叶系数 $|c_k|$ 的倍数，而这个矩形脉冲等同于周期矩形脉冲串的单个周期，而频率 $\omega = 2\pi k/N, k = 0, 1, \cdots, N-1$ 与在周期信号的傅里叶级数表达式中使用的调和相关频率成分相同。

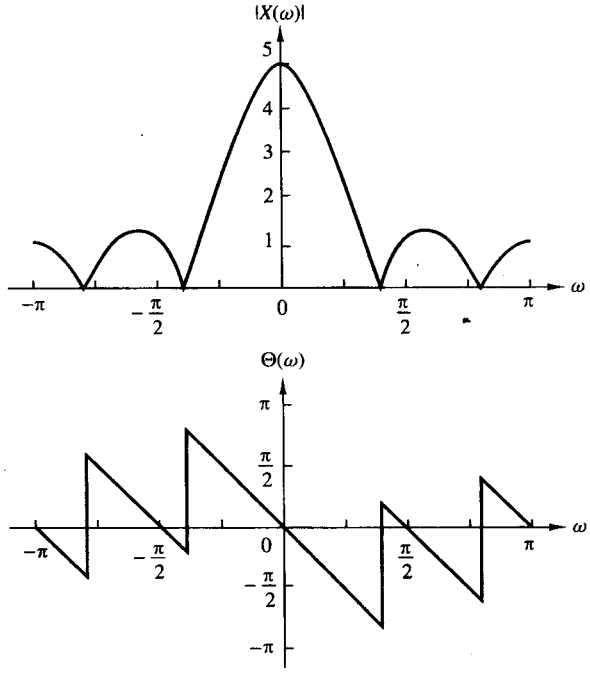


图 4.2.8　图 4.2.7 中离散时间矩形脉冲的傅里叶变换的幅度和相位

由式(4.2.53)给出的关于矩形脉冲的傅里叶变换在频率 $\omega = 2\pi k/N, k = 0, 1, \cdots, N-1$ 上的值和相应的周期信号的傅里叶系数的关系式，不但对这两个信号为真，而且实际上一般都是成立的。第 7 章将进一步推导这个关系式。

4.2.6　傅里叶变换和 z 变换的关系

序列 $x(n)$ 的 z 变换的定义如下：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \qquad \text{收敛域: } r_2 < |z| < r_1 \tag{4.2.54}$$

其中 $r_2 < |z| < r_1$ 是 $X(z)$ 的收敛区间。让我们把复变量 z 表示成极坐标的形式：

$$z = re^{j\omega} \tag{4.2.55}$$

其中 $r = |z|$ 而且 $\omega = \measuredangle z$。在 $X(z)$ 的收敛区间内，我们将 $z = re^{j\omega}$ 代入式(4.2.54)，得到

$$X(z)|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n} \tag{4.2.56}$$

从式(4.2.56)的关系,我们注意到,$X(z)$可被解释为序列 $x(n)r^{-n}$的傅里叶变换。如果 $r<1$,加权因子 r^{-n}随着 n 增长,如果 $r>1$,加权因子 r^{-n}随着 n 衰减。另外,如果当$|z|=1$ 时 $X(z)$收敛,那么

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} \equiv X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{4.2.57}$$

因此,傅里叶变换可以视为序列的 z 变换在单位圆上的取值。如果 $X(z)$在区域$|z|=1$ 内不收敛[即如果单位圆不包含在 $X(z)$的收敛区域内],那么傅里叶变换 $X(\omega)$不存在。图 4.2.9 说明了例 4.2.4 中矩形序列的 $X(z)$和 $X(\omega)$的关系,其中 $A=1$ 而 $L=10$。

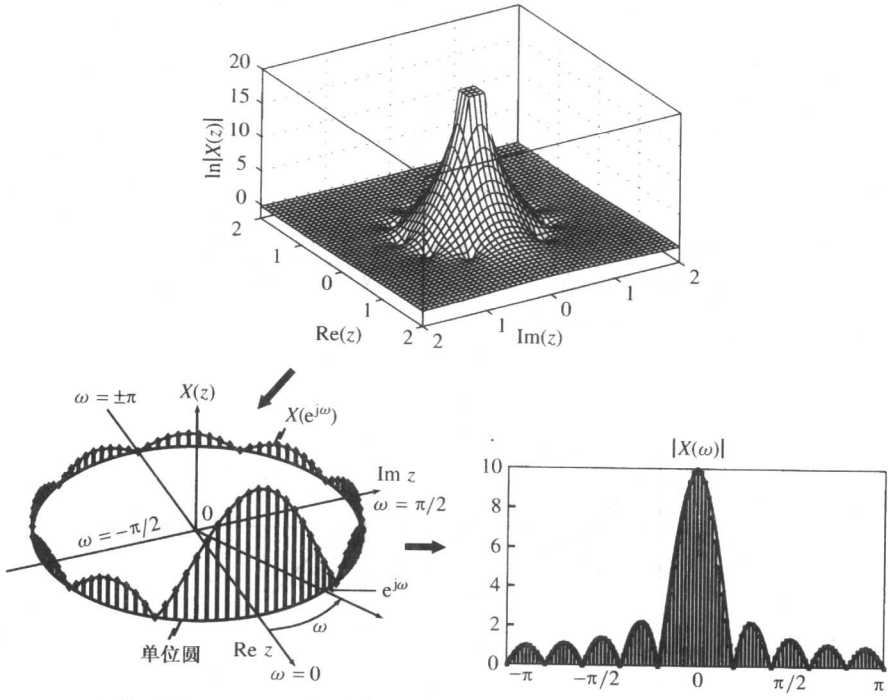


图 4.2.9 例 4.2.4 中矩形序列的 $X(z)$和 $X(\omega)$的关系,其中 $A=1$ 而 $L=10$

我们应该注意,z 变换的存在要求序列$\{x(n)r^{-n}\}$对于某些 r 值绝对可和,也即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty \tag{4.2.58}$$

因此,如果式(4.2.58)仅在 $r>r_0>1$ 的值上收敛,那么虽然 z 变换存在但是傅里叶变换不存在。例如当$|a|>1$ 时,形式为 $x(n)=a^n u(n)$的因果序列就是这种情况。然而,有一些序列不满足式(4.2.58)的要求,如序列

$$x(n) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{4.2.59}$$

这个序列没有 z 变换,因为它具有有限能量,所以它的傅里叶变换在均方意义上收敛于不连续函数 $X(\omega)$,定义如下:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \tag{4.2.60}$$

总之，z 变换的存在要求对于 z 平面上的某个区域式(4.2.58)是满足的。如果这个区域包含单位圆，那么傅里叶变换 $X(\omega)$存在。然而，针对有限能量信号定义的傅里叶变换的存在不一定能保证 z 变换的存在。

4.2.7　倒谱

让我们考虑具有 z 变换 $X(z)$的序列$\{x(n)\}$。我们假设$\{x(n)\}$是一个稳定序列，所以 $X(z)$在单位圆上收敛。序列$\{x(n)\}$的复倒谱被定义为序列$\{c_x(n)\}$，而$\{c_x(n)\}$是 $C_x(z)$的逆 z 变换，其中，

$$C_x(z) = \ln X(z) \tag{4.2.61}$$

如果 $C_x(z)$在环形区域 $r_1 < |z| < r_2$ 上收敛，那么复倒谱存在，其中 $0 < r_1 < 1$ 而 $r_2 > 1$。在这个收敛区域中，$C_x(z)$可以用劳伦(Laurent)级数表示为

$$C_x(z) = \ln X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x(n) z^{-n} \tag{4.2.62}$$

其中，

$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_C \ln X(z) z^{n-1} \, \mathrm{d}z \tag{4.2.63}$$

C 是围绕原点的围线，位于收敛区域内。显然，如果 $C_x(z)$能够表示成式(4.2.62)的形式，那么复倒谱序列$\{c_x(n)\}$是稳定的。此外，如果复倒谱存在，那么 $C_x(z)$在单位圆上收敛，因此可得

$$C_x(\omega) = \ln X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{4.2.64}$$

其中$\{c_x(n)\}$是从 $\ln X(\omega)$的傅里叶逆变换获得的序列，即

$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln X(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n} \, \mathrm{d}\omega \tag{4.2.65}$$

如果我们用 $X(\omega)$的幅度和相位来表示 $X(\omega)$，假定

$$X(\omega) = |X(\omega)| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\omega)} \tag{4.2.66}$$

那么

$$\ln X(\omega) = \ln |X(\omega)| + \mathrm{j}\theta(\omega) \tag{4.2.67}$$

将式(4.2.67)代入式(4.2.65)，可得到如下形式的复倒谱：

$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\ln |X(\omega)| + \mathrm{j}\theta(\omega)] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n} \, \mathrm{d}\omega \tag{4.2.68}$$

我们可以将式(4.2.68)中的傅里叶逆变换分离成 $\ln|X(\omega)|$和 $\theta(\omega)$的傅里叶逆变换：

$$c_m(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |X(\omega)| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n} \, \mathrm{d}\omega \tag{4.2.69}$$

$$c_\theta(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n} \, \mathrm{d}\omega \tag{4.2.70}$$

在某些应用中，如语音信号处理，只计算成分 $c_m(n)$。这种情况下，$X(\omega)$的相位被忽略。因此，序列$\{x(n)\}$不能由$\{c_m(n)\}$恢复。也就是说，从$\{x(n)\}$到$\{c_m(n)\}$的傅里叶变换不是可逆的。

在语音信号处理中,(实)倒谱被用来从语音的基频中分离出语音的频谱内容,进而估计频谱内容。实际中复倒谱被用来分离卷积得到的信号。分离两个卷积得到的信号的过程被称为解卷积,用复倒谱实现分离被称为同态解卷积。这个主题将在5.5.4节中讨论。

4.2.8 单位圆上有极点的信号的傅里叶变换

正如4.2.6节所示,序列 $x(n)$ 的傅里叶变换可通过求它在单位圆上的 z 变换 $X(z)$ 而求得,只要单位圆在 $X(z)$ 的收敛区域内。否则,傅里叶变换不存在。

有一些非周期序列既不绝对可和也不平方可和,因此它们的傅里叶变换不存在。单位阶跃序列就是这种序列中的一个,它具有 z 变换

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

另一个这种序列是因果正弦信号序列 $x(n)=(\cos\omega_0 n)u(n)$。这个序列具有 z 变换

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$$

注意,这两个序列都在单位圆上有极点。

对于这样的两个序列,拓展傅里叶变换的表示有时候是有用的。按照数学上严谨的方式,这可以通过允许傅里叶变换在某些频率处包含冲激来实现,而这些频率和 $X(z)$ 位于单位圆上的极点位置相对应。这些冲激是连续频率变量 ω 的函数,具有无限幅度、零宽度和单位面积。一个冲激可被视为在 $a\to 0$ 的极限中,一个高为 $1/a$、宽为 a 的矩形脉冲的极限形式。因此,通过在信号的频谱中允许冲激,有可能拓展傅里叶变换来表示某些既不绝对可和也不平方可和的信号序列。

以下的例子说明了用拓展的傅里叶变换来表示三个序列。

例 4.2.5 通过以下信号的 z 变换在单位圆上的取值来求它们的傅里叶变换:

(a) $x_1(n)=u(n)$

(b) $x_2(n)=(-1)^n u(n)$

(c) $x_3(n)=(\cos\omega_0 n)u(n)$

解:

(a) 由表3.3可得

$$X_1(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1},\qquad \text{收敛域: } |z|>1$$

$X_1(z)$ 在单位圆上有一个极点 $p_1=1$,但是对于 $|z|>1$ 是收敛的。

如果求 $X_1(z)$ 在单位圆上的值,除了在 $z=1$ 外,可得

$$X_1(\omega)=\frac{e^{j\omega/2}}{2j\sin(\omega/2)}=\frac{1}{2\sin(\omega/2)}e^{j(\omega-\pi/2)},\qquad \omega\neq 2\pi k,\quad k=0,1,\cdots$$

在 $\omega=0$ 和 2π 的倍数处,$X_1(\omega)$ 包含面积为 π 的冲激。

因此,当我们希望计算 $|X_1(\omega)|$ 在 $\omega=0$ 处的值时,在 $z=1$ 处的一个极点的存在就产生了一个问题,因为当 $\omega\to 0$ 时,$|X_1(\omega)|\to\infty$。对于任意其他的 ω 值,$X_1(\omega)$ 是有限的(即行为良好的)。虽然乍看之下,也许以为除了 $\omega=0$,信号在所有的频率处都具有零频率成分,但是情况并不是这样。这种情况之所以发生,是因为对于所有的 $-\infty<n<\infty$,信号 $x_1(n)$ 不是一个常数。实际上,在 $n=0$ 处它翻转了。这个陡然跳跃产生了在范围 $0<\omega\leqslant\pi$ 上存在的所有频率成分。一般而言,从某个有限时间开始的所有信号都具有频率轴上任何从零到折叠频率的非零频率成分。

(b) 由表 3.3，当 $a=-1$ 时 $a^n u(n)$ 的 z 变换简化为

$$X_2(z)=\frac{1}{1+z^{-1}}=\frac{z}{z+1},\quad \text{收敛域: } |z|>1$$

在 $z=-1=e^{j\pi}$ 处，它具有一个极点。在 $\omega=\pi$ 和 2π 的倍数以外的频率上所求得的傅里叶变换是

$$X_2(\omega)=\frac{e^{j\omega/2}}{2\cos(\omega/2)},\qquad \omega\neq 2\pi\left(k+\frac{1}{2}\right),\quad k=0,1,\cdots$$

这种情况下，冲激出现在 $\omega=\pi+2\pi k$ 处。

因此幅度是

$$|X_2(\omega)|=\frac{1}{2|\cos(\omega/2)|},\qquad \omega\neq 2\pi k+\pi,\quad k=0,1,\cdots$$

而相位是

$$\measuredangle X_2(\omega)=\begin{cases}\frac{\omega}{2}, & \cos\frac{\omega}{2}\geqslant 0\\ \frac{\omega}{2}+\pi, & \cos\frac{\omega}{2}<0\end{cases}$$

注意，由于在 $a=-1$ 处的极点存在(即在频率 $\omega=\pi$ 处)，傅里叶变换的幅度变得无限大。现在，当 $\omega\to\pi$ 时，$|X(\omega)|\to\infty$。我们看到，$(-1)^n u(n)=(\cos\pi n)u(n)$，这是离散时间上最快的可能的振荡信号。

(c) 从上述的讨论可得出，在频率成分 $\omega=\omega_0$ 处 $X_3(\omega)$ 是无限的。实际上，由表 3.3 可得

$$x_3(n)=(\cos\omega_0 n)u(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X_3(z)=\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}},\quad \text{收敛域: } |z|>1$$

傅里叶变换是

$$X_3(\omega)=\frac{1-e^{-j\omega}\cos\omega_0}{(1-e^{-j(\omega-\omega_0)})(1-e^{j(\omega+\omega_0)})},\qquad \omega\neq\pm\omega_0+2\pi k,\quad k=0,1,\cdots$$

$X_3(\omega)$ 的幅度由下式给出：

$$|X_3(\omega)|=\frac{|1-e^{-j\omega}\cos\omega_0|}{|1-e^{-j(\omega-\omega_0)}||1-e^{-j(\omega+\omega_0)}|},\qquad \omega\neq\pm\omega_0+2\pi k,\quad k=0,1,\cdots$$

现在，如果 $\omega=-\omega_0$ 或者 $\omega=\omega_0$，那么 $|X_3(\omega)|$ 成为无限。对于所有其他的频率，傅里叶变换都具有良性行为。

4.2.9　信号的频域分类：带宽的概念

正如我们已经根据信号的时域特性对信号进行了分类那样，根据信号的频域特性对信号进行分类也是需要的。实际中，通常是以宽松的条件根据信号的频率内容对信号进行分类。

特别地，如果一个功率信号(或者能量信号)具有集中于零频率的功率密度谱，那么它被称为低频信号。图 4.2.10(a)显示了这样的信号的频谱特性。另一方面，如果信号的功率密度谱(或者能量密度谱)集中在高频率，那么这个信号被称为高频信号。图 4.2.10(b)显示了这样的信号的频谱特性。功率密度谱(或者能量密度谱)集中在低频率和高频率之间宽阔的频率范围内某处的信号，被称为中频信号或带通信号。图 4.2.10(c)显示了这样的信号的频谱特性。

除这个相对宽阔的频域信号分类之外，我们通常希望量化地表示功率或能量密度谱集中的频率范围。这个量化度量被称为信号的带宽。例如，假设一个连续时间信号 95% 的功率(或能量)密度谱集中在频率范围 $F_1\leqslant F\leqslant F_2$，那么该信号 95% 的带宽是 F_2-F_1。用相似的方法，我们可以定义该信号 75%、90% 或 99% 的带宽。

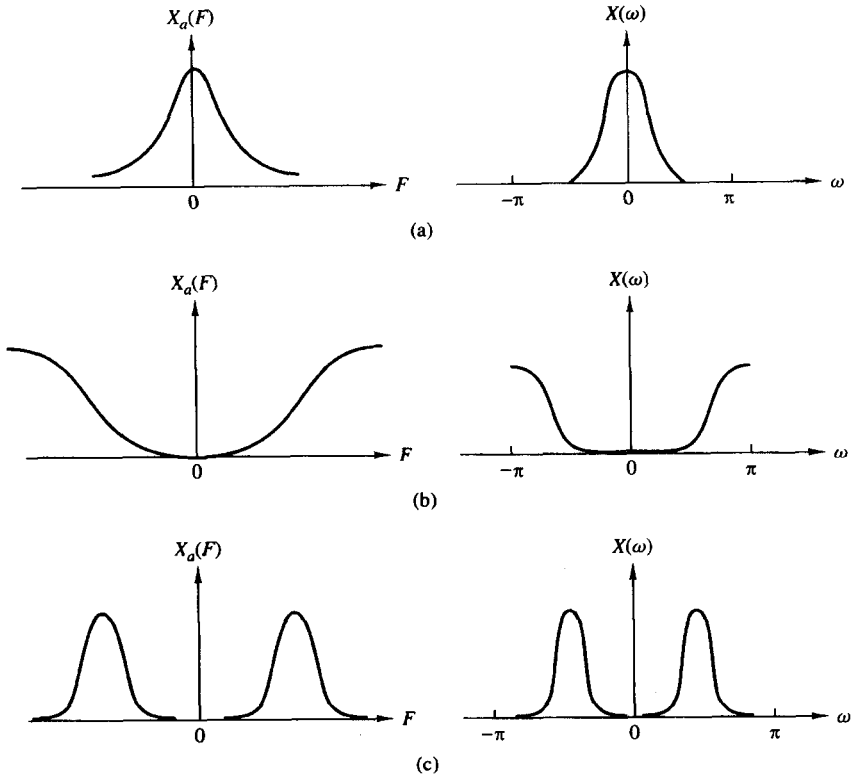


图 4.2.10 (a)低频信号;(b)高频信号;(c)中频信号

对于带通信号,如果信号的带宽 $F_2 - F_1$ 远远小于(比如说 10 倍或更大)中间频率 $(F_2 + F_1)/2$,那么就用术语窄带来描述该信号。否则,该信号被称为是宽带的。

如果信号的密度谱在频率范围 $|F| \geqslant B$ 以外为零,那么我们应该说这个信号是带宽受限的。例如,对于 $|F| > B$,如果一个连续时间的有限能量信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(F) = 0$,那么该信号是带宽受限的。对于一个离散时间的有限能量信号 $x(n)$,如果

$$|X(\omega)| = 0, \qquad \omega_0 < |\omega| < \pi$$

那么该信号被称为是(周期性地)带宽受限的。类似地,对于 $|k| > M$,其中 M 是某个正整数,如果一个周期连续时间信号 $x_p(t)$ 的傅里叶系数 $c_k = 0$,那么该信号是周期性地带宽受限的。对于 $k_0 < |k| < N$,如果一个基本周期为 N 的周期离散时间信号的傅里叶系数 $c_k = 0$,那么该信号是周期性地带宽受限的。图 4.2.11 说明了四种类型带宽受限的信号。

通过利用频率域和时间域之间的二重性,我们可以提供相似的方法来刻画时域上信号的特征。特别地,对于信号 $x(t)$,如果

$$x(t) = 0, \qquad |t| > \tau$$

那么该信号被称为是时间受限的。对于周期为 T_p 的周期信号,如果

$$x_p(t) = 0, \qquad \tau < |t| < T_p/2$$

那么该信号被称为是周期性地时间受限的。如果离散时间信号 $x(n)$ 的持续时间有限,即

$$x(n) = 0, \qquad |n| > N$$

那么该信号也被称为是时间受限的。当信号是基本周期为 N 的周期信号时，如果

$$x(n)=0, \qquad n_0<|n|<N$$

那么该信号被称为是周期性地时间受限的。

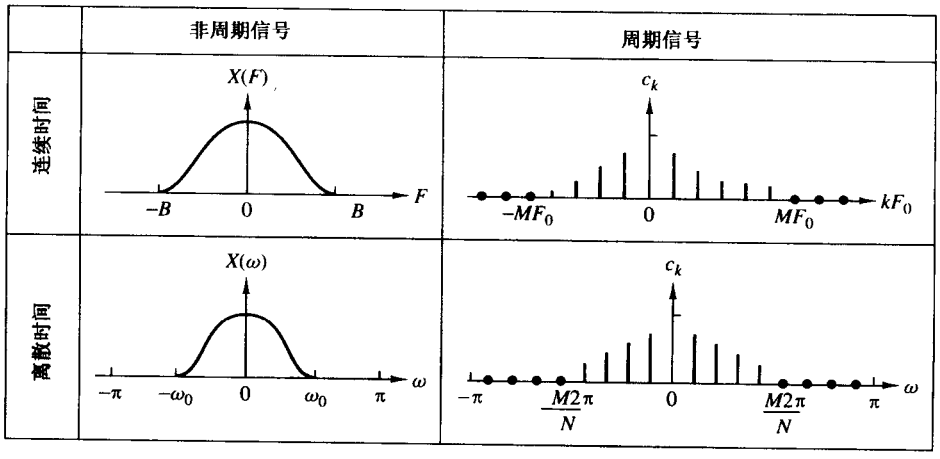


图 4.2.11　一些带宽受限信号的例子

无需证明，我们说没有任何信号同时既是时间受限的也是带宽受限的。从而，信号的时间持续和频率持续之间存在倒数关系。详细而言，如果我们在时域上有短的持续时间的矩形脉冲，那么该脉冲的频谱宽度与时域脉冲的持续成反比。时域上的脉冲越短，信号的带宽就变得越大。因此，不能使信号的时长和带宽的乘积任意小。一个短持续信号具有大的带宽，而一个小带宽的信号具有长的持续时间。因此，对于任意一个信号，时间-带宽积是固定的，不能使之任意小。

最后，注意到我们已经讨论了具有有限能量的周期和非周期信号的频率分析方法。然而，还有一族具有有限功率的确定性的非周期信号。这些信号由具有非调和相关频率的复指数的线性叠加组成，即

$$x(n)=\sum_{k=1}^{M} A_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k n}$$

其中 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_M$ 是非调和相关的。这些信号具有离散谱，但是谱线之间的距离是非调和相关的。具有离散非调和频谱的信号有时被称为是准周期的。

4.2.10　某些自然信号的频率范围

本章中我们推导的频率分析工具通常应用于在实际中遇到的各种信号（如地震、生物学和电磁场信号）。一般而言，执行频率分析是为了从所观测的信号中提取信息。例如，在生物学信号的情况下，像 ECG 信号，分析工具用来提取与诊断目的有关的信息。在地震信号的情况下，我们也许对检测核爆炸的存在或确定地震的特征和位置感兴趣。一个电磁场信号，如从飞机反射回来的雷达信号，包含了关于飞机的位置和飞机的移动速率的信息。这些参数可以从接收到的雷达信号中估计得到。

为了测量参数或提取其他类型的信息，在处理任意一个信号时必须知道信号所包含的大概频率范围。表 4.1、表 4.2 和表 4.3 给出了生物学、地震和电磁场信号近似的频率范围，以作为参考。

表 4.1 某些生物学信号的频率范围

信号类型	频率范围(Hz)
视网膜电流图[a]	0 ~ 20
眼震电图[b]	0 ~ 20
呼吸描记图[c]	0 ~ 40
心电图(ECG)	0 ~ 100
脑电图(EEG)	0 ~ 100
肌电图[d]	10 ~ 200
血压图[e]	0 ~ 200
语音	100 ~ 4000

[a] 一种记录视网膜特性的图片。
[b] 一种记录眼球自然转动的图片。
[c] 一种记录呼吸行为的图片。
[d] 一种记录肌肉行为如肌肉收缩的图片。
[e] 一种记录血压的图片。

表 4.2 某些地震信号的频率范围

信号类型	频率范围(Hz)
风噪声	100 ~ 1000
地震探测信号	10 ~ 100
地震和核爆炸信号	0.01 ~ 10
地震噪声	0.1 ~ 1

表 4.3 某些电磁场信号的频率范围

信号类型	波长(m)	频率范围(Hz)
无线电波传播	$10^4 \sim 10^2$	$3\times10^4 \sim 3\times10^6$
短波无线电信号	$10^2 \sim 10^{-2}$	$3\times10^6 \sim 3\times10^{10}$
雷达,卫星通信,空间通信,共载微波	$1 \sim 10^{-2}$	$3\times10^8 \sim 3\times10^{10}$
红外线	$10^{-3} \sim 10^{-6}$	$3\times10^{11} \sim 3\times10^{14}$
可见光	$3.9\times10^{-7} \sim 8.1\times10^{-7}$	$3.7\times10^{14} \sim 7.7\times10^{14}$
紫外线	$10^{-7} \sim 10^{-8}$	$3\times10^{15} \sim 3\times10^{16}$
γ射线和X射线	$10^{-9} \sim 10^{-10}$	$3\times10^{17} \sim 3\times10^{18}$

4.3 频域和时域的信号特性

在本章的前面部分我们已经介绍了用于信号频率分析的几种方法。为了能处理不同类型的信号,几种方法是必要的。总之,我们已经介绍了以下的频率分析工具:

1. 连续时间周期信号的傅里叶级数。
2. 连续时间非周期信号的傅里叶变换。
3. 离散时间周期信号的傅里叶级数。
4. 离散时间非周期信号的傅里叶变换。

图 4.3.1 总结了这些类型的信号的分析和合成公式。

正如我们已经多次指出的那样,有两种时域特征可以确定我们得到的信号频谱的类型。它们是:时间变量是连续的或离散的;信号是周期的或非周期的。让我们简单总结前面部分的结果。

连续时间信号具有非周期频谱。仔细检查连续时间信号的傅里叶级数和傅里叶变换分析公式,不能揭示频域上任何类型的周期性。因为复指数 $\exp(j2\pi Ft)$是连续变量 t 的函数,所以它在 F 上不是周期信号,而缺少周期性是这一事实的结果。因此,连续时间信号的频率范围从 $F=0$ 拓展到 $F=\infty$。

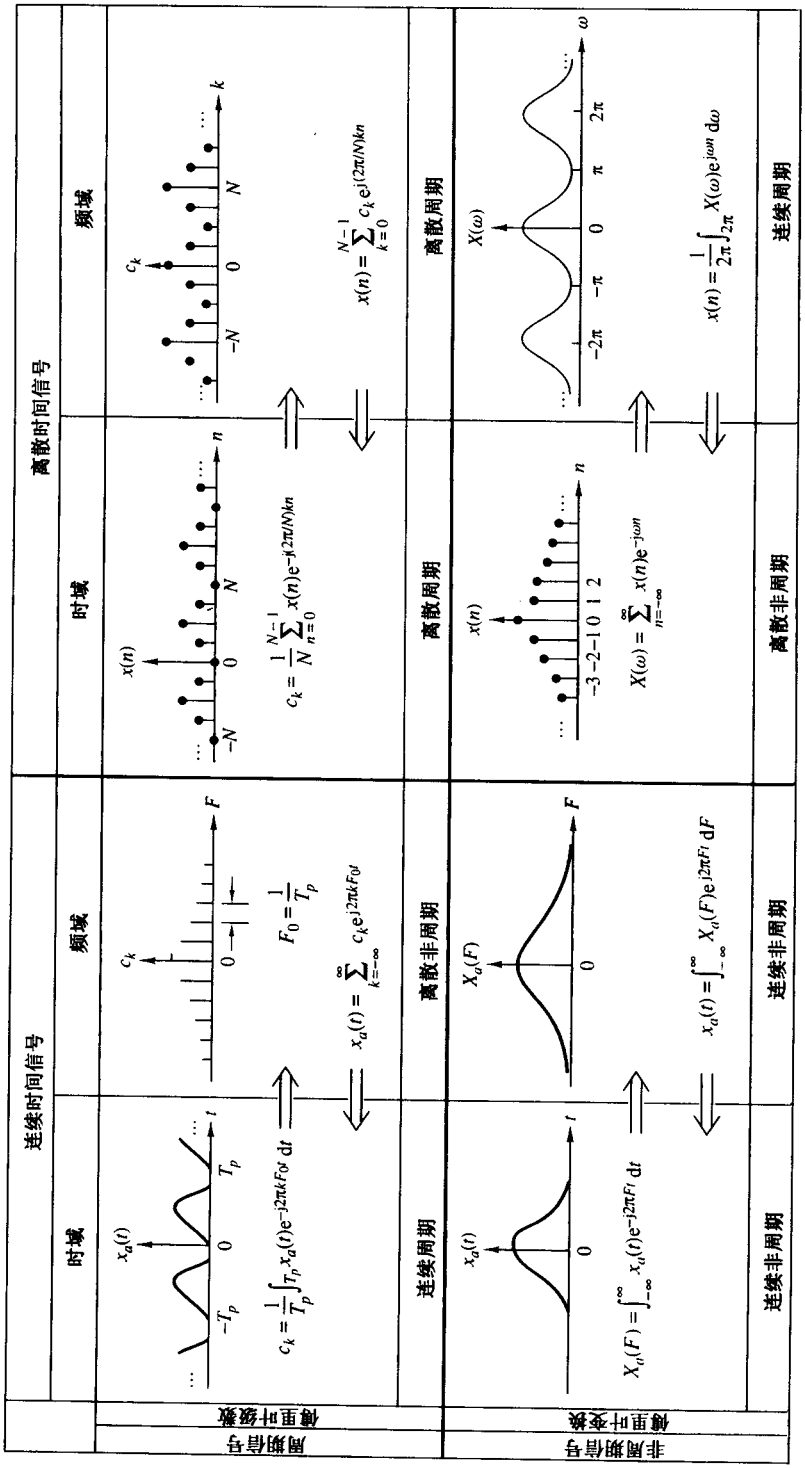


图 4.3.1　分析和合成公式的总结

离散时间信号具有周期频谱。实际上,离散时间信号的傅里叶级数和傅里叶变换具有周期性,其周期为 $\omega = 2\pi$。这种周期性的结果是,离散时间信号的频率范围是有限的,并且从 $\omega = -\pi$ 弧度拓展到 $\omega = \pi$ 弧度,其中 $\omega = \pi$ 与最高的可能振荡率对应。

周期信号具有离散频谱。正如我们已经看到的那样,周期信号由傅里叶级数这种方式描述。傅里叶级数的系数提供了组成离散频谱的"线"。线间隔 ΔF 或 Δf 分别等于时域上的周期 T_p 或 N 的倒数。也就是说,对于连续时间周期信号,$\Delta F = 1/T_p$,而对于离散时间信号,$\Delta f = 1/N$。

非周期有限能量信号具有连续频谱。这一性质是一个事实的直接结果,即 $X(F)$和 $X(\omega)$两者分别是 $\exp(j2\pi Ft)$和 $\exp(j\omega n)$的函数,而 $\exp(j2\pi Ft)$和 $\exp(j\omega n)$分别是变量 F 和ω 的连续函数。频率的连续性对于打破和谐从而生产非周期信号是必需的。

总之,我们已经得出结论:在某个域上具有"周期"α 的周期性,自动地意味在另一个域上具有"间隔"为 $1/\alpha$ 的离散性,反之亦然。

如果我们记住在频域上的"周期"指频率范围,在时域上的"间隔"是采样周期 T,在频域上的线间隔是 ΔF,那么 $\alpha = T_p$ 意味着 $1/\alpha = 1/T_p = \Delta F$,$\alpha = N$ 意味着 $\Delta f = 1/N$,而 $\alpha = F_s$ 意味着 $T = 1/F_s$。

观察图 4.3.1,时频二重性是明显的。然而,我们强调,这幅图上的显示和任何实际的变换对并不对应。因此,它们中间任何的比较都应该避免。

仔细检查图 4.3.1,也能揭示若干傅里叶分析关系中的某些数学对称性和二重性。特别地,我们看到,以下的分析和合成等式之间存在二重性:

1. 连续时间傅里叶变换的分析和合成等式。
2. 离散时间傅里叶级数的分析和合成等式。
3. 连续时间傅里叶级数的分析等式和离散时间傅里叶变换的合成等式。
4. 离散时间傅里叶变换的分析等式和连续时间傅里叶级数的合成等式。

注意,所有的二重关系式只是在相应的复指数的指数符号上不同。有趣的是,这种符号上的变化可以被认为是信号的折叠或者是频谱的折叠,因为

$$e^{-j2\pi Ft} = e^{j2\pi(-F)t} = e^{j2\pi F(-t)}$$

如果我们现在将注意力转移到信号的谱密度,我们记得曾经使用术语能量密度谱来刻画有限能量非周期信号的特征,且使用术语功率密度谱来刻画周期信号的特征。这种术语和周期信号是功率信号,而具有有限能量的非周期信号是能量信号的事实是一致的。

4.4 离散时间信号傅里叶变换的性质

在前面一节描述的非周期有限能量离散时间信号的傅里叶变换具有很多性质,而在许多实际的应用中,这些性质在减少傅里叶分析问题的复杂度方面非常有用。本节我们将给出傅里叶变换的重要性质。相似的性质对于非周期有限能量连续时间信号的傅里叶变换也成立。

出于方便,我们采用记号

$$X(\omega) \equiv F\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{4.4.1}$$

作为正变换(分析等式),而采用

$$x(n) \equiv F^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega \tag{4.4.2}$$

作为逆变换(合成等式)。我们也称 $x(n)$和 $X(\omega)$为傅里叶变换对,并且用以下记号表示这一关系:

$$x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega) \tag{4.4.3}$$

记得 $X(\omega)$是周期为 2π 的周期信号。因此,任何长度为 2π 的区间足以描述频谱。通常,我们在基本区间$[-\pi,\pi]$上画出频谱。我们强调,包含在基本区间内的所有频谱信息对于完全描述信号或完全刻画信号的特性都是必要的。基于这个原因,式(4.4.2)中积分的范围总是 2π,独立于在基本区间内的信号的具体特征。

4.4.1　傅里叶变换的对称性质

当一个信号在时域上满足某些对称性质时,这些性质给该信号的傅里叶变换强加了某些对称条件。利用任意一个对称特征可得出较简单的正反对称性质公式。关于不同的对称性质以及频域上这些性质的含义的讨论,会在这里给出。

假设信号 $x(n)$和它的变换 $X(\omega)$都是复值函数。那么,它们可以表示成矩形的形式

$$x(n) = x_R(n) + \mathrm{j}x_I(n) \tag{4.4.4}$$

$$X(\omega) = X_R(\omega) + \mathrm{j}X_I(\omega) \tag{4.4.5}$$

将式(4.4.4)和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} = \cos\omega - \mathrm{j}\sin\omega$ 代入式(4.4.1),并分离实部和虚部,可得

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n)\cos\omega n + x_I(n)\sin\omega n] \tag{4.4.6}$$

$$X_I(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n)\sin\omega n - x_I(n)\cos\omega n] \tag{4.4.7}$$

类似地,将式(4.4.5)和 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} = \cos\omega + \mathrm{j}\sin\omega$ 代入式(4.4.2),可得

$$x_R(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} [X_R(\omega)\cos\omega n - X_I(\omega)\sin\omega n]\,\mathrm{d}\omega \tag{4.4.8}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} [X_R(\omega)\sin\omega n + X_I(\omega)\cos\omega n]\,\mathrm{d}\omega \tag{4.4.9}$$

现在,让我们研究一些特殊的情况。

实信号。如果 $x(n)$是实信号,那么 $x_R(n) = x(n)$且 $x_I(n) = 0$。因此,式(4.4.6)和式(4.4.7)简化为

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos\omega n \tag{4.4.10}$$

而且

$$X_I(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin\omega n \tag{4.4.11}$$

因为 $\cos(-\omega n) = \cos\omega n$ 且 $\sin(-\omega n) = -\sin\omega n$,所以由式(4.4.10)和式(4.4.11)得到

$$X_R(-\omega) = X_R(\omega),\quad (\text{偶数}) \tag{4.4.12}$$

$$X_I(-\omega) = -X_I(\omega),\quad (\text{奇数}) \tag{4.4.13}$$

如果我们将式(4.4.12)和式(4.4.13)组合在单个等式中,可得

$$X^*(\omega) = X(-\omega) \tag{4.4.14}$$

这种情况下,我们说实信号的频谱具有厄密共轭(Hermitian)对称性。

在图 4.4.1 的辅助下,我们看到实信号的幅度谱和相位谱是

$$|X(\omega)| = \sqrt{X_R^2(\omega) + X_I^2(\omega)} \tag{4.4.15}$$

$$\measuredangle X|\omega| = \arctan \frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)} \tag{4.4.16}$$

作为式(4.4.12)和式(4.4.13)的结果,幅度谱和相位谱也具有对称性质

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)|, \quad \text{(偶数)} \tag{4.4.17}$$

$$\measuredangle X(-\omega) = -\measuredangle X(\omega), \quad \text{(奇数)} \tag{4.4.18}$$

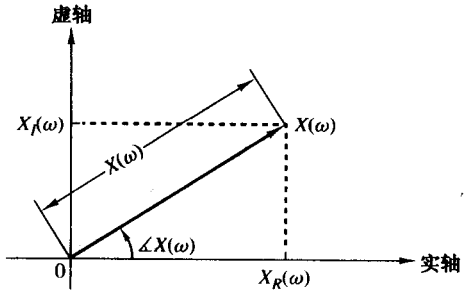


图 4.4.1 幅度函数和相位函数

在实值信号[即 $x(n) = x_R(n)$]逆变换的情况下,式(4.4.8)意味着

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \sin \omega n] \, d\omega \tag{4.4.19}$$

因为 $X_R(\omega)\cos\omega n$ 和 $X_I(\omega)\sin\omega n$ 这两个乘积都是 ω 的偶函数,所以有

$$x(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \sin \omega n] \, d\omega \tag{4.4.20}$$

实偶信号。如果 $x(n)$是实偶信号[即 $x(-n) = x(n)$],那么 $x(n)\cos\omega n$ 是偶数,而 $x(n)\sin\omega n$是奇数。因此,由式(4.4.10)、式(4.4.11)和式(4.4.20)可得

$$X_R(\omega) = x(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} x(n) \cos \omega n, \quad \text{(偶数)} \tag{4.4.21}$$

$$X_I(\omega) = 0 \tag{4.4.22}$$

$$x(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_R(\omega) \cos \omega n \, d\omega \tag{4.4.23}$$

从而,实偶信号具有实值频谱。另外,该实值频谱是频率变量 ω 的偶函数。

实奇信号。如果 $x(n)$是实奇信号[即 $x(-n) = -x(n)$],那么 $x(n)\cos\omega n$ 是奇数,而 $x(n)\sin\omega n$ 是偶数。因此,式(4.4.10)、式(4.4.11)和式(4.4.20)意味着

$$X_R(\omega) = 0 \tag{4.4.24}$$

$$X_I(\omega) = -2\sum_{n=1}^{\infty} x(n) \sin \omega n, \quad \text{(奇数)} \tag{4.4.25}$$

$$x(n) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_I(\omega)\sin\omega n \ \mathrm{d}\omega \tag{4.4.26}$$

从而，实奇信号具有纯虚值频谱特征。另外，该纯虚值频谱是频率变量 ω 的奇函数。

纯虚信号。这种情况下，$x_R(n)=0$ 而 $x(n)=\mathrm{j}x_I(n)$。从而，式(4.4.6)、式(4.4.7)和式(4.4.9)简化为

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I(n)\sin\omega n, \qquad \text{(奇数)} \tag{4.4.27}$$

$$X_I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I(n)\cos\omega n, \qquad \text{(偶数)} \tag{4.4.28}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [X_R(\omega)\sin\omega n + X_I(\omega)\cos\omega n]\,\mathrm{d}\omega \tag{4.4.29}$$

如果 $x_I(n)$是奇数[即 $x_I(-n)=-x_I(n)$]，那么

$$X_R(\omega) = 2\sum_{n=1}^{\infty} x_I(n)\sin\omega n, \qquad \text{(奇数)} \tag{4.4.30}$$

$$X_I(\omega) = 0 \tag{4.4.31}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_R(\omega)\sin\omega n \ \mathrm{d}\omega \tag{4.4.32}$$

类似地，如果 $x_I(n)$是偶数[即 $x_I(-n)=x_I(n)$]，那么

$$X_R(\omega) = 0 \tag{4.4.33}$$

$$X_I(\omega) = x_I(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} x_I(n)\cos\omega n, \qquad \text{(偶数)} \tag{4.4.34}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_I(\omega)\cdot\cos\omega n \ \mathrm{d}\omega \tag{4.4.35}$$

任意一个可能的复值信号 $x(n)$可以分解为

$$x(n) = x_R(n) + \mathrm{j}x_I(n) = x_R^e(n) + x_R^o(n) + \mathrm{j}[x_I^e(n) + x_I^o(n)] = x_e(n) + x_o(n) \tag{4.4.36}$$

其中，根据定义

$$x_e(n) = x_R^e(n) + \mathrm{j}x_I^e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = x_R^o(n) + \mathrm{j}x_I^o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

上标 e 和 o 分别表示偶信号和奇信号成分。

我们注意到 $x_e(n)=x_e(-n)$而 $x_o(-n)=-x_o(n)$。由式(4.4.36)和上述傅里叶变换性质，可得如下关系式：

$$\begin{array}{c} x(n) = [x_R^e(n) + \mathrm{j}x_I^e(n)] + [x_R^o(n) + \mathrm{j}x_I^o(n)] = x_e(n) + x_o(n) \\ \updownarrow \qquad\quad \updownarrow \qquad\quad \times \qquad\quad \updownarrow \qquad\quad \updownarrow \\ X(\omega) = [X_R^e(\omega) + \mathrm{j}X_I^e(\omega)] + [X_R^o(\omega) - \mathrm{j}X_I^o(\omega)] = X_e(\omega) + X_o(\omega) \end{array} \tag{4.4.37}$$

傅里叶变换的这些对称性质总结在表 4.4 和图 4.4.2 中。在实际中,它们通常被用来简化傅里叶变换的计算。

表 4.4 离散时间傅里叶变换的性质

序列	DTFT
$x(n)$	$X(\omega)$
$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
$x^*(-n)$	$X^*(\omega)$
$x_R(n)$	$X_e(\omega)=\frac{1}{2}[X(\omega)+X^*(-\omega)]$
$\mathrm{j}x_I(n)$	$X_o(\omega)=\frac{1}{2}[X(\omega)-X^*(-\omega)]$
$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$	$X_R(\omega)$
$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$	$\mathrm{j}X_I(\omega)$
实信号	
	$X(\omega)=X^*(-\omega)$
任何实信号	$X_R(\omega)=X_R(-\omega)$
$x(n)$	$X_I(\omega)=-X_I(-\omega)$
	$\lvert X(\omega)\rvert=\lvert X(-\omega)\rvert$
	$\measuredangle X(\omega)=-\measuredangle X(-\omega)$
$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$	$X_R(\omega)$
(实偶)	(实偶)
$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$	$\mathrm{j}X_I(\omega)$
(实奇)	(虚奇)

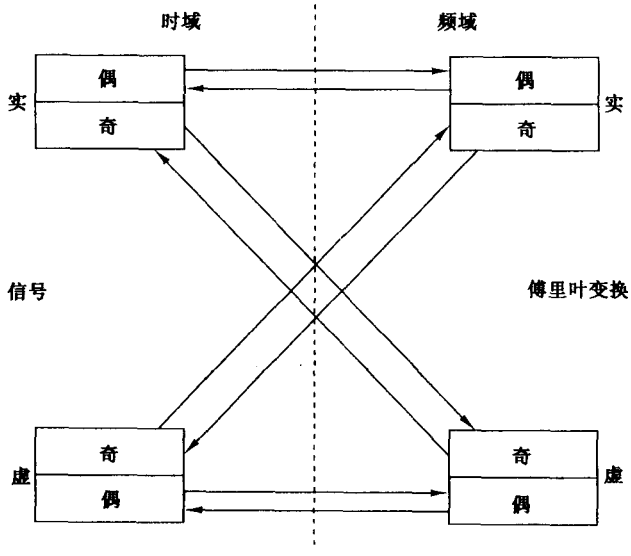


图 4.4.2 傅里叶变换的对称性质的总结

例 4.4.1 求并画出以下傅里叶变换的 $X_R(\omega)$、$X_I(\omega)$、$|X(\omega)|$和$\measuredangle X(\omega)$:

$$X(\omega)=\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}},\qquad -1<a<1 \tag{4.4.38}$$

解:式(4.4.38)的分子和分母都乘上分母的复共轭,可得

$$X(\omega)=\frac{1-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}{(1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})(1-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}=\frac{1-a\cos\omega-\mathrm{j}a\sin\omega}{1-2a\cos\omega+a^2}$$

这个表达式可以分解为实部和虚部。从而可得

$$X_R(\omega)=\frac{1-a\cos\omega}{1-2a\cos\omega+a^2}$$

$$X_I(\omega)=-\frac{a\sin\omega}{1-2a\cos\omega+a^2}$$

将这两个表达式代入式(4.4.15)和式(4.4.16),得到幅度谱和相位谱为

$$|X(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}} \tag{4.4.39}$$

和

$$\measuredangle X(\omega)=-\arctan\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega} \tag{4.4.40}$$

图 4.4.3 和图 4.4.4 显示了当 $a=0.8$ 时这些频谱的图形表示。读者可以容易验证,正如所期待的,可以将实信号频谱的所有对称性质应用于这种情况。

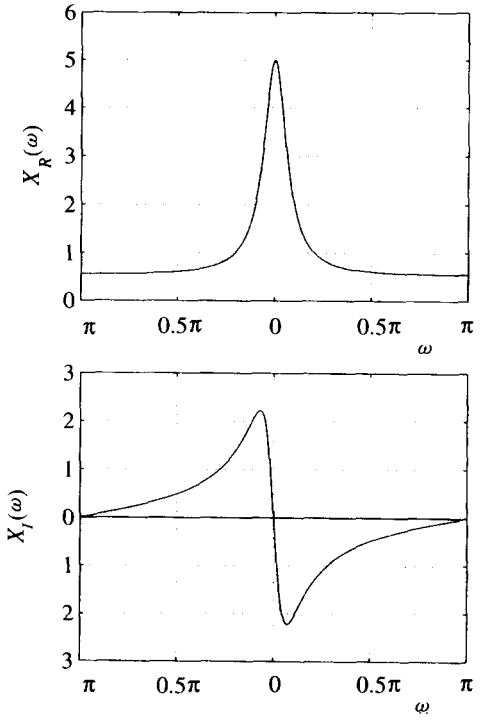


图 4.4.3　例 4.4.1 中变换的 $X_R(\omega)$图和 $X_I(\omega)$图

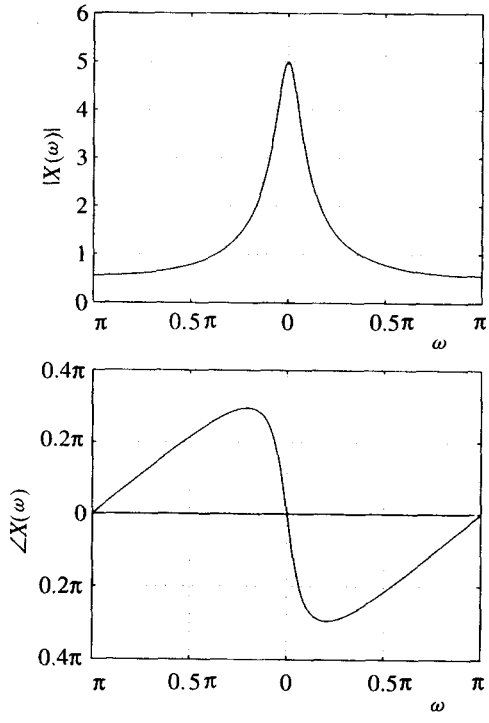


图 4.4.4　例 4.4.1 中变换的幅度谱图和相位谱图

例 4.4.2　求以下信号的傅里叶变换:

$$x(n)=\begin{cases}A, & -M\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{4.4.41}$$

解:显然,$x(n)=x(-n)$,从而 $x(n)$是实偶信号。由式(4.4.21)可得

$$X(\omega)=X_R(\omega)=A\left(1+2\sum_{n=1}^{M}\cos\omega n\right)$$

如果我们使用习题 4.13 给出的恒等式,可得到较简单的形式

$$X(\omega)=A\frac{\sin(M+\frac{1}{2})\omega}{\sin(\omega/2)}$$

因为 $X(\omega)$是实数,其幅度谱和相位谱给出如下:

$$|X(\omega)|=\left|A\frac{\sin(M+\frac{1}{2})\omega}{\sin(\omega/2)}\right| \tag{4.4.42}$$

和

$$\measuredangle X(\omega)=\begin{cases}0, & X(\omega)>0\\ \pi, & X(\omega)<0\end{cases} \tag{4.4.43}$$

图 4.4.5 显示了 $X(\omega)$的图。

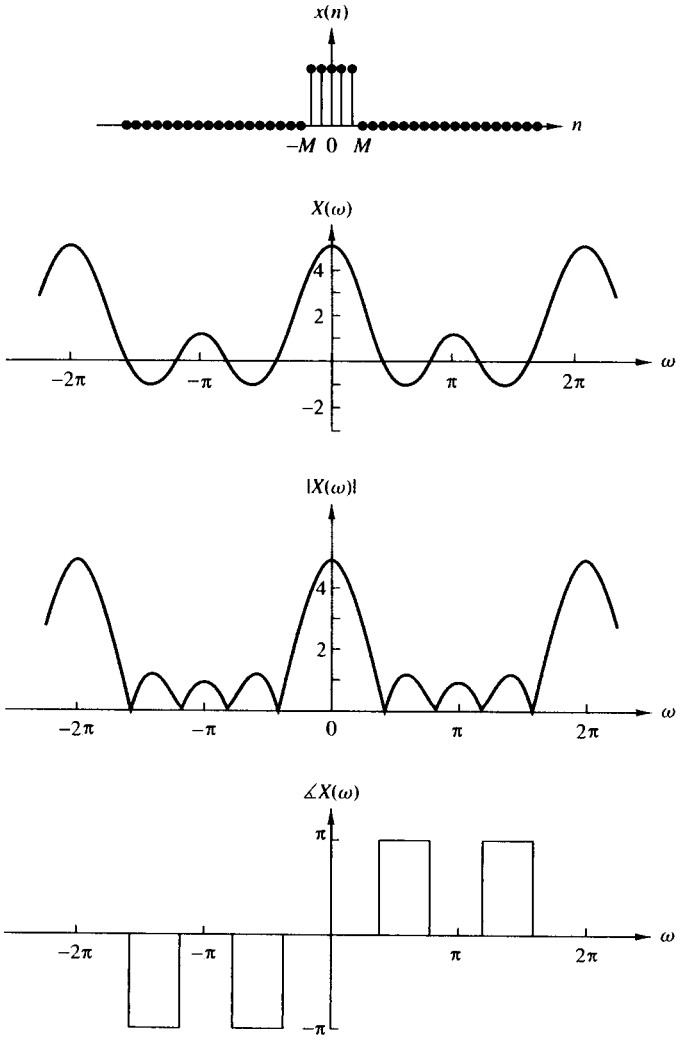


图 4.4.5 例 4.4.2 中矩形脉冲的频谱特征

4.4.2 傅里叶变换的定理和性质

本节我们介绍几个傅里叶变换的定理,并用例子说明它们在实际中的使用。

线性。如果

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$$

并且

$$x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$$

那么

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xleftrightarrow{F} a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega) \tag{4.4.44}$$

简单说来，从对信号 $x(n)$的操作上看，傅里叶变换是一种线性变换。从而两个或更多个信号的线性组合的傅里叶变换等于各个信号的傅里叶变换的线性组合。用式(4.4.1)可以容易地证明这个性质。线性性质使傅里叶变换适合用于线性系统的研究。

例 4.4.3　求以下信号的傅里叶变换：

$$x(n) = a^{|n|}, \qquad -1 < a < 1 \tag{4.4.45}$$

解：首先，我们看到 $x(n)$可表示为

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

其中，

$$x_1(n) = \begin{cases} a^n, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

而且

$$x_2(n) = \begin{cases} a^{-n}, & n < 0 \\ 0, & n \geqslant 0 \end{cases}$$

从傅里叶变换的定义式(4.4.1)开始，可得

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^n$$

这是一个几何级数求和，收敛于

$$X_1(\omega) = \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

假如

$$|a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}| = |a| \cdot |\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}| = |a| < 1$$

这个条件在本问题中得到满足。类似地，$x_2(n)$的傅里叶变换是

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})^{-n} = \sum_{k=1}^{\infty}(a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})^k \\ &= \frac{a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}{1 - a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} \end{aligned}$$

联合这两个变换，可得到 $x(n)$如下形式的傅里叶变换：

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_1(\omega) + X_2(\omega) \\ &= \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2} \end{aligned} \tag{4.4.46}$$

图 4.4.6 显示了当 $a = 0.8$ 的情况下 $x(n)$和 $X(\omega)$的图形。

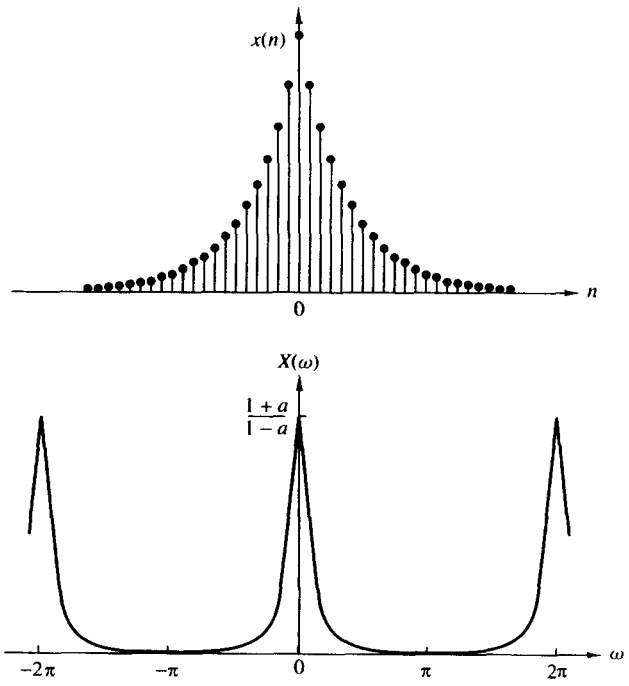


图 4.4.6 例 4.4.3 中当 $a=0.8$ 时序列 $x(n)$及其傅里叶变换

时移。如果

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \tag{4.4.47}$$

那么

$$x(n-k) \xleftrightarrow{F} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k} X(\omega)$$

这个性质的证明直接来自通过改变求和的指数而得到的 $x(n-k)$的傅里叶变换,从而

$$\begin{aligned} F\{x(n-k)\} &= X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k} \\ &= |X(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\measuredangle X(\omega)-\omega k]} \end{aligned}$$

这个关系意味着,如果一个信号在时域上移动 k 个样本,那么它的幅度谱保持不变。但是,相位谱改变了 $-\omega k$。如果我们记得信号的频率内容只取决于它的形状,那么这个结果就容易解释。从数学的角度来说,我们说在时域上移动 k 等于在频域上频谱乘上 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}$。

时间翻转。如果

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$

那么

$$x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-\omega) \tag{4.4.48}$$

这一性质可以通过求 $x(-n)$的傅里叶变换并且对求和指数做一个简单的改变而确立。从而

$$F\{x(-n)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega l} = X(-\omega)$$

如果 $x(n)$是实数,那么由式(4.4.17)和式(4.4.18)可得

$$F\{x(-n)\} = X(-\omega) = |X(-\omega)|e^{j\angle X(-\omega)}$$
$$= |X(\omega)|e^{-j\angle X(\omega)}$$

这意味着，如果信号在时间上是关于原点折叠的，那么它的幅度谱保持不变，而相位谱的符号发生变化(相位倒置)。

卷积定理。如果

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$$

而且

$$x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$$

那么

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega) \tag{4.4.49}$$

为了证明式(4.4.49)，回忆卷积公式

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

在这个等式两边都乘上指数 $\exp(-j\omega n)$，然后对所有 n 求和，可得

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)\right]e^{-j\omega n}$$

交换求和的顺序并且简单改变求和指数后，这个等式的右边简化为乘积 $X_1(\omega)X_2(\omega)$，从而确立了式(4.4.49)。

卷积定理是线性系统分析中最有力的工具之一。也就是说，如果我们将时域上的两个信号进行卷积，那么这等于将这两个信号在频域上的频谱相乘。在随后的章节，我们将会看到卷积定理为许多数字信号处理的应用提供了一个重要的计算工具。

例 4.4.4　使用式(4.4.49)求如下序列的卷积：

$$x_1(n) = x_2(n) = \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1\}$$

解：使用式(4.4.21)，可得

$$X_1(\omega) = X_2(\omega) = 1 + 2\cos\omega$$

则

$$X(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega) = (1 + 2\cos\omega)^2$$
$$= 3 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega$$
$$= 3 + 2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})$$

因此 $x_1(n)$与 $x_2(n)$的卷积是

$$x(n) = \{1\ 2\ \underset{\uparrow}{3}\ 2\ 1\}$$

图 4.4.7 显示了前述的关系。

相关定理。如果

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$$

并且

$$x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$$

那么

$$r_{x_1x_2}(m) \overset{F}{\longleftrightarrow} S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega) \tag{4.4.50}$$

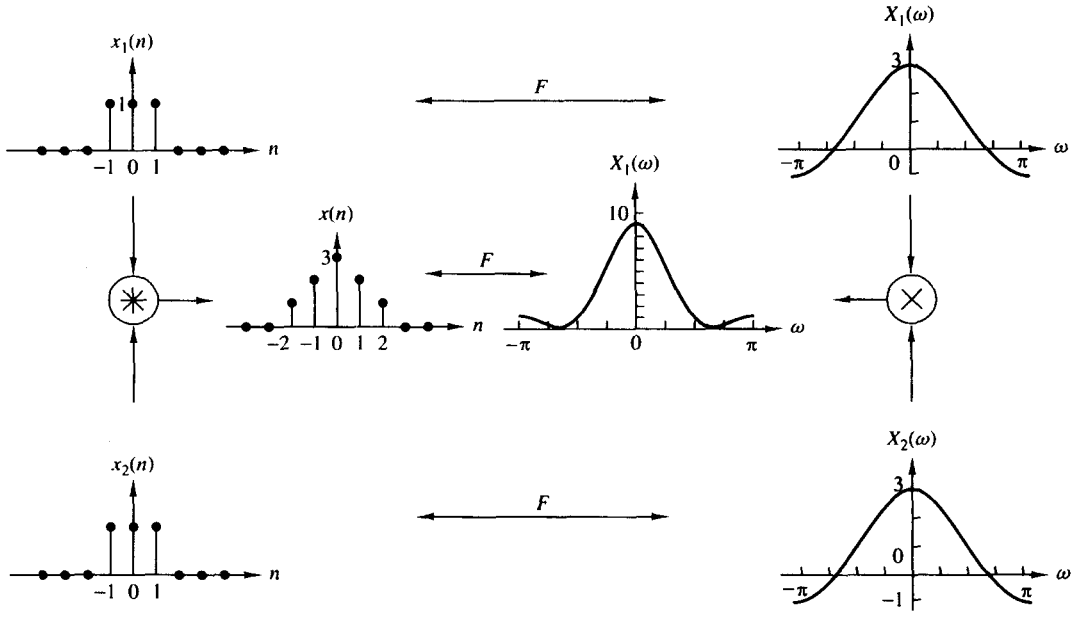


图 4.4.7 卷积性质的图示

式(4.4.50)的证明与式(4.4.49)的证明相似。这种情况下,可得

$$r_{x_1x_2}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(k-n)$$

在这个等式两边都乘上指数 $\exp(-j\omega n)$,然后对所有 n 求和,可得

$$S_{x_1x_2}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{x1x2}(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(k-n)\right]e^{-j\omega n}$$

最后,交换求和的顺序并且改变求和指数,从而这个等式的右边简化为 $X_1(\omega)X_2(-\omega)$。函数 $S_{x_1x_2}(\omega)$被称为信号 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的互能量密度谱。

维纳-辛钦(Wiener-khintchine)定理。 设 $x(n)$是一个实信号。那么

$$r_{xx}(l) \overset{F}{\longleftrightarrow} S_{xx}(\omega) \tag{4.4.51}$$

也就是说,一个能量信号的能量谱密度是它的自相关卷积序列的傅里叶变换。这是式(4.4.50)的一种特殊情况。

这是一个非常重要的结果。它意味着,一个信号的自相关卷积序列和它的能量谱密度包含了关于这个信号的相同的信息。因为两者都不包含任何相位信息,所以唯一地从自相关函数或者能量密度谱重构信号是不可能的。

例 4.4.5 求以下信号的能量密度谱:

$$x(n) = a^n u(n), \qquad -1 < a < 1$$

解：由例 2.6.2，我们发现该信号的自相关函数是

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2}a^{|l|}, \qquad \infty < l < \infty$$

使用在例 4.4.3 中推导的式(4.4.46)中 $a^{|l|}$ 的傅里叶变换的结果，可得

$$F\{r_{xx}(l)\} = \frac{1}{1-a^2}F\{a^{|l|}\} = \frac{1}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

因此，根据维纳-辛钦定理有

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

频移。如果

$$x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

那么

$$e^{j\omega_0 n}x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega - \omega_0) \tag{4.4.52}$$

通过直接代入分析等式(4.4.1)，容易证明这一性质。根据这一性质，序列 $x(n)$乘上 $e^{j\omega_0 n}$等于频谱 $X(\omega)$平移频率 ω_0。频率的平移如图 4.4.8 所示。因为频谱 $X(\omega)$是周期性的，ω_0 的平移将应用于信号每一个周期的频谱。

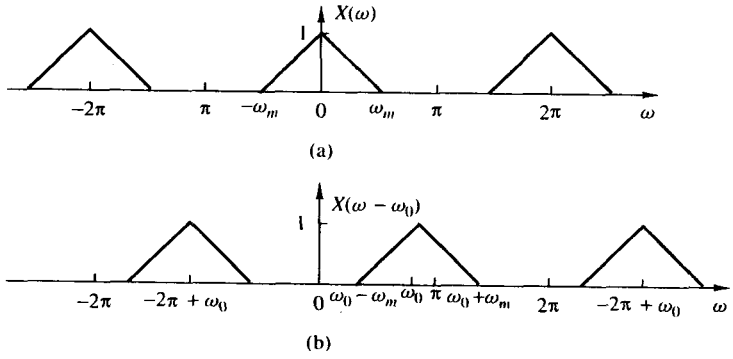


图 4.4.8　傅里叶变换频移性质的说明($\omega_0 \leqslant 2\pi - \omega_m$)

调制定理。如果

$$x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

那么

$$x(n)\cos\omega_0 n \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}[X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] \tag{4.4.53}$$

为了证明这个定理，我们首先将信号 $\cos\omega_0 n$表示成

$$\cos\omega_0 n = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$$

将这两个指数乘以 $x(n)$，并使用前面一节描述的频移性质，可得式(4.4.53)中描述的结果。

虽然式(4.4.52)中给出的性质也可以视为(复)调制，实际中我们宁愿使用式(4.4.53)，因为信号 $x(n)\cos\omega_0 n$ 是实的。显然，这种情况下的对称性质，式(4.4.12)和式(4.4.13)是保持的。

调制定理如图 4.4.9 所示，它包含信号 $x(n)$，$y_1(n) = x(n)\cos 0.5\pi n$ 和 $y_2(n) = x(n)\cos\pi n$ 的频谱图。

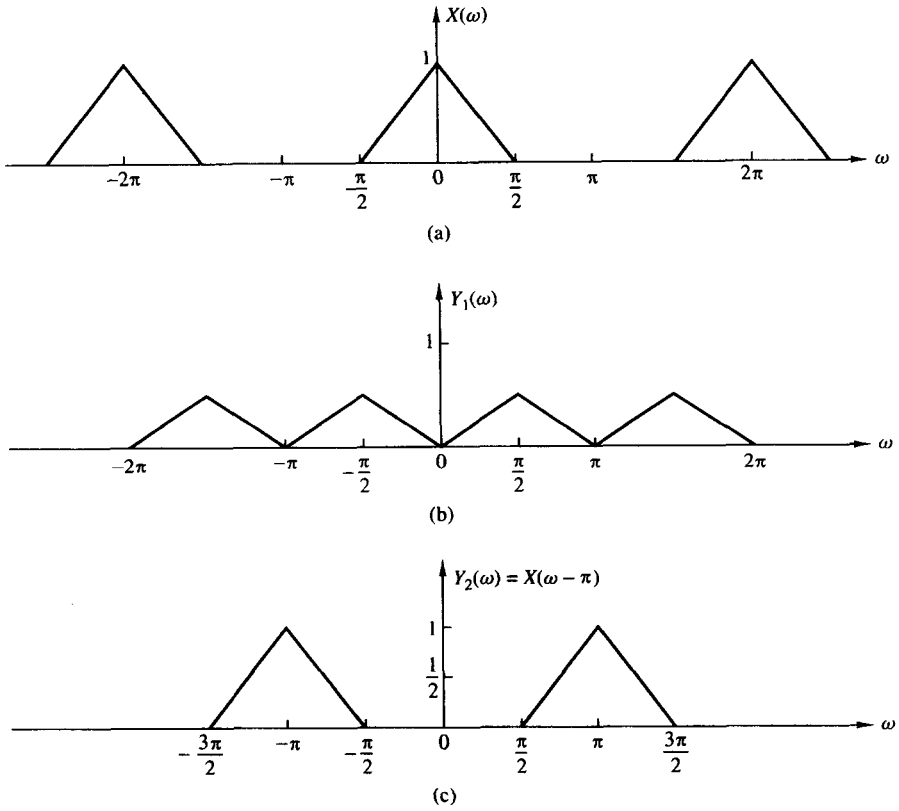


图 4.4.9 调制定理的图示

帕塞瓦定理。如果

$$x_1(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$$

而且

$$x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$$

那么

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{4.4.54}$$

为了证明这个定理,我们使用式(4.4.1)来去掉式(4.4.54)右边的 $X_1(\omega)$。从而得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\right]X_2^*(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_2^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n)$$

在 $x_2(n) = x_1(n) = x(n)$这种特殊情况时,帕塞瓦关系式(4.4.54)简化为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \tag{4.4.55}$$

我们看到,式(4.4.55)的左边只是信号 $x(n)$的能量 E_x。它也等于 $x(n)$的自相关 $r_{xx}(l)$在 $l=0$ 的

值。式(4.4.55)右边的积分等于能量密度谱,所以在区间 $-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$ 上的积分得到信号的总能量。因此,总结可得

$$E_x = r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \qquad (4.4.56)$$

两个序列相乘(窗口定理)。如果

$$x_1(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$$

而且

$$x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$$

那么

$$x_3(n) \equiv x_1(n)x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_3(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)\mathrm{d}\lambda \qquad (4.4.57)$$

式(4.4.57)右边的积分表示傅里叶变换 $X_1(\omega)$和 $X_2(\omega)$的卷积。这一关系是时域卷积的二重性。换言之,两个时域序列的乘积等于它们的傅里叶变换的卷积。另一方面,两个时域序列的卷积等于它们的傅里叶变换的乘积。

为了证明式(4.4.57),我们从 $x_3(n) = x_1(n) = x_2(n)$的傅里叶变换入手,并使用逆变换公式,即

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda n}\mathrm{d}\lambda$$

从而可得

$$\begin{aligned} X_3(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda n}\mathrm{d}\lambda\right]x_2(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\lambda)n}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)\mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

式(4.4.57)中的卷积积分被认为是 $X_1(\omega)$和 $X_2(\omega)$的周期卷积,因为这是两个具有相同周期的周期函数的卷积。我们注意,积分的范围是单个周期。此外,我们注意到,由于离散时间信号傅里叶变换的周期性,对于卷积操作,时域和频域之间没有"完美的"二重性,正如连续时间信号的情况。实际上,时域上的卷积(非周期求和)等于连续周期傅里叶变换的乘积。然而,非周期序列的乘积等于它们的傅里叶变换的周期卷积。

在我们处理基于窗口技术的 FIR 滤波器的设计中,式(4.4.57)中的傅里叶变换对将证明是有用的。

频域微分。如果

$$x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

那么

$$nx(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \tag{4.4.58}$$

为了证明这个性质,我们使用式(4.4.1)中的傅里叶变换定义,并且求级数项关于 ω 的微分。从而可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X(\omega)}{\mathrm{d}\omega} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\ &= -\mathrm{j}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\end{aligned}$$

现在我们在这个等式两边都乘上 j,就得到所期待的式(4.4.58)中的结果。

为了方便参考,本节中推导出来的这些性质总结在表 4.5 中。表 4.6 列出了后面的章节会遇到的一些有用的傅里叶变换对。

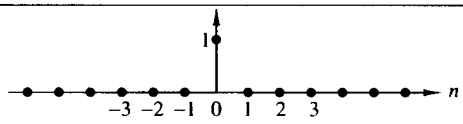
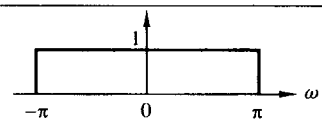
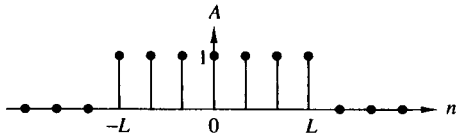
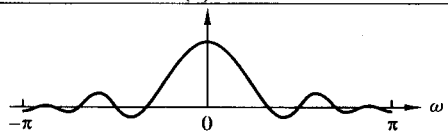
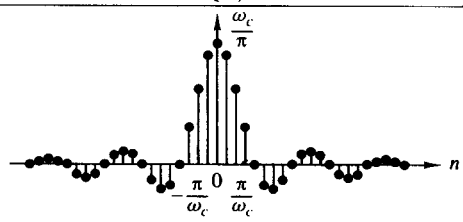
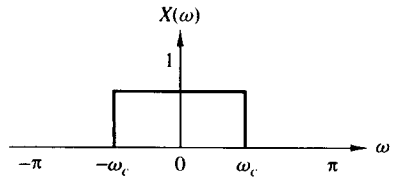
表 4.5 离散时间信号傅里叶变换的性质

性质	时域	频域
记号	$x(n)$	$X(\omega)$
	$x_1(n)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(n)$	$X_2(\omega)$
线性	$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$
时移	$x(n-k)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}X(\omega)$
时间翻转	$x(-n)$	$X(-\omega)$
卷积	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
相关	$r_{x_1x_2}(l)=x_1(l)*x_2(-l)$	$S_{x_1x_2}(\omega)=X_1(\omega)X_2(-\omega)$ $=X_1(\omega)X_2^*(\omega)$ [若$x_2(n)$为实信号]
维纳-辛钦定理	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
频移	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}x(n)$	$X(\omega-\omega_0)$
调制	$x(n)\cos(\omega_0 n)$	$\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)+\frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)$
乘积	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)\mathrm{d}\lambda$
频域微分	$nx(n)$	$\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$
共轭	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
帕塞瓦定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)x_2^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(\omega)X_2^*(\omega)\mathrm{d}\omega$	

4.5 小结与参考文献

傅里叶级数和傅里叶变换是分析信号频域特征的数学工具。傅里叶级数将一个周期信号近似表示成调和相关正弦成分的加权求和,其中加权系数表示每个谐波的强度,而每个加权系数的平方幅度表示相应谐波的功率。正如我们已经指出的,傅里叶级数是周期信号许多可能的正交级数展开式中的一个。它的重要性来自 LTI 系统的行为特征,这将在第 5 章中看到。

表 4.6　离散时间非周期信号一些有用的傅里叶变换对

信号 $x(n)$	频谱 $X(\omega)$
 $x(n)=\delta(n)$	 $X(\pi)=1$
 $x(n)=\begin{cases}A, & \lvert n\rvert\leqslant L\\ 0, & \lvert n\rvert>L\end{cases}$	 $X(\omega)=A\dfrac{\sin\left(L+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}$
 $x(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi}, & n=0\\ \dfrac{\sin\omega_c n}{\pi n}, & n\neq 0\end{cases}$	 $X(\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \omega_c\leqslant\lvert\omega\rvert\leqslant\pi\end{cases}$
$x(n)=\begin{cases}a^n, & n\geqslant 0\\ 0, & n>0\end{cases}$	$X(\omega)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

傅里叶变换是具有有限能量非周期信号的频谱特征的近似表示。傅里叶变换的重要性质也已经在本章中说明了。

关于傅里叶级数和傅里叶变换的优秀教材有许多，如 Bracewell(1978)，Davis(1963)，Dym and McKean(1972)和 Papoulis(1962)。

习题

4.1　考虑图 P4.1 中的全波整流正弦曲线。

(a) 求它的频谱 $X_a(F)$。

(b) 计算信号的功率。

(c) 画出功率谱密度。

(d) 检查该信号的帕塞瓦关系式的有效性。

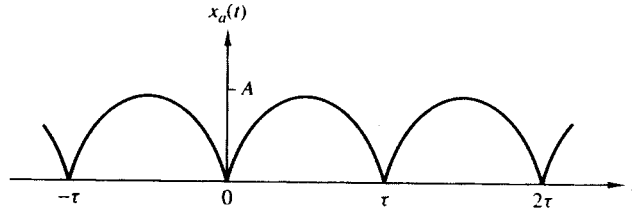


图 P4.1

4.2 计算并描绘以下信号($a>0$)的幅度谱和相位谱:

(a) $x_a(t)=\begin{cases}Ae^{-at}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

(b) $x_a(t)=Ae^{-a|t|}$

4.3 考虑信号

$$x(t)=\begin{cases}1-|t|/\tau, & |t|\leqslant\tau\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(a) 分别计算并描绘该信号的幅度谱$|X_a(F)|$和相位谱$\measuredangle X_a(F)$。

(b) 产生一个周期为$T_p\geqslant 2\tau$的周期信号$x_p(t)$,当$|t|<T_p/2$时,有$x(t)=x_p(t)$。计算信号$x_p(t)$的傅里叶系数c_k。

(c) 使用(a)和(b)的结果证明$c_k=(1/T_p)X_a(k/T_p)$。

4.4 考虑以下周期信号:

$$x(n)=\{\cdots,1,0,1,2,\underset{\uparrow}{3},2,1,0,1,\cdots\}$$

(a) 画出信号$x(n)$及其幅度谱和相位谱。

(b) 使用(a)的结果通过计算时域和频域上的功率来验证帕塞瓦关系式。

4.5 考虑以下信号:

$$x(n)=2+2\cos\frac{\pi n}{4}+\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi n}{4}$$

(a) 求并画出信号的功率密度谱。

(b) 估计信号的功率。

4.6 求并画出以下周期信号的幅度谱和相位谱:

(a) $x(n)=4\sin\frac{\pi(n-2)}{3}$

(b) $x(n)=\cos\frac{2\pi}{3}n+\sin\frac{2\pi}{5}n$

(c) $x(n)=\cos\frac{2\pi}{3}n\sin\frac{2\pi}{5}n$

(d) $x(n)=\{\cdots,-2,-1,\underset{\uparrow}{0},1,2,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$

(e) $x(n)=\{\cdots,-1,2,\underset{\uparrow}{1},2,-1,0,-1,2,1,2,\cdots\}$

(f) $x(n)=\{\cdots,0,0,\underset{\uparrow}{1},1,0,0,0,1,1,0,0,\cdots\}$

(g) $x(n)=1,-\infty<n<\infty$

(h) $x(n)=(-1)^n,-\infty<n<\infty$

4.7 求基本周期为$N=8$的周期信号$x(n)$,它们的傅里叶变换系数给出如下:

(a) $c_k=\cos\frac{k\pi}{4}+\sin\frac{3k\pi}{4}$

(b) $c_k=\begin{cases}\sin\frac{k\pi}{3}, & 0\leqslant k\leqslant 6\\ 0, & k=7\end{cases}$

(c) $\{c_k\}=\{\cdots,0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\underset{\uparrow}{1},2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},0\cdots\}$

4.8 两个DT信号$s_k(n)$和$s_l(n)$被认为是在区间$[N_1,N_2]$上正交的,如果

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} s_k(n)s_l^*(n) = \begin{cases} A_k, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

如果 $A_k = 1$,信号被称为是标准正交的。

(a) 证明关系

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(b) 通过画出 $k = 1,2,\cdots,6$, $n = 0,1,\cdots,5$ 时信号 $s_k(n) = e^{j(2\pi/6)kn}$ 的每个值,来说明(a)中关系的有效性。[注:对于一个给定的 k 和 n,信号 $s_k(n)$可以表示成复平面中的矢量。]

(c) 证明调和相关信号

$$s_k(n) = e^{j(2\pi/N)kn}$$

在任何长度为 N 的区间上都是正交的。

4.9 计算以下信号的傅里叶变换:

(a) $x(n) = u(n) - u(n-6)$

(b) $x(n) = 2^n u(-n)$

(c) $x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n+4)$

(d) $x(n) = (\alpha^n \sin \omega_0 n)u(n), \quad |\alpha| < 1$

(e) $x(n) = |\alpha|^n \sin \omega_0 n, \quad |\alpha| < 1$

(f) $x(n) = \begin{cases} 2 - (\frac{1}{2})n, & |n| \leqslant 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(g) $x(n) = \{-2, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2\}$

(h) $x(n) = \begin{cases} A(2M + 1 - |n|), & |n| \leqslant M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$

画出(a)、(f)和(g)的幅度谱和相位谱。

4.10 求具有以下傅里叶变换的信号:

(a) $X(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_0 \\ 1, & \omega_0 < |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$

(b) $X(\omega) = \cos^2 \omega$

(c) $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_0 - \delta\omega/2 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_0 + \delta\omega/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(d) 如图P4.10所示的信号。

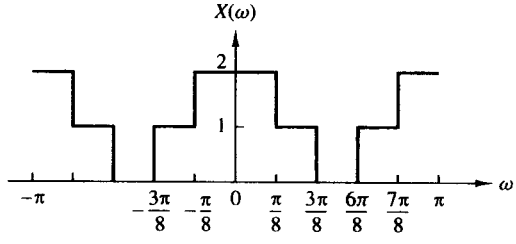


图 P4.10

4.11 考虑具有傅里叶变换 $X(\omega)=X_R(\omega)+\mathrm{j}[X_I(\omega)]$的信号

$$x(n)=\{1,0,-1,\underset{\uparrow}{2},3\}$$

求并画出具有以下傅里叶变换的信号 $y(n)$:

$$Y(\omega)=X_I(\omega)+X_R(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}$$

4.12 如果信号 $x(n)$的傅里叶变换给出如图 P4.12,求这个信号。

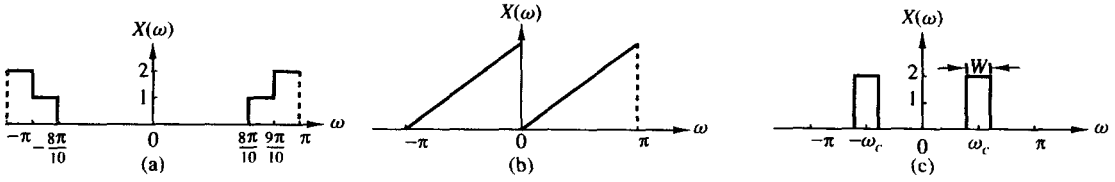


图 P4.12

4.13 在例 4.4.2 中,信号

$$x(n)=\begin{cases}1, & -M\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的傅里叶变换被证明是

$$X(\omega)=1+2\sum_{n=1}^{M}\cos\omega n$$

证明:信号

$$x_1(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

和

$$x_2(n)=\begin{cases}1, & -M\leqslant n\leqslant -1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的傅里叶变换分别是

$$X_1(\omega)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M+1)}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

$$X_2(\omega)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(M+1)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}$$

从而证明

$$\begin{aligned}X(\omega)&=X_1(\omega)+X_2(\omega)\\&=\frac{\sin(M+\frac{1}{2})\omega}{\sin(\omega/2)}\end{aligned}$$

并因此

$$1+2\sum_{n=1}^{M}\cos\omega n=\frac{\sin(M+\frac{1}{2})\omega}{\sin(\omega/2)}$$

4.14 考虑具有傅里叶变换 $X(\omega)$的信号

$$x(n)=\{-1,2,\underset{\uparrow}{-3},2,-1\}$$

以不明显计算 $X(\omega)$的方式计算以下的量:

(a) $X(0)$

(b) $\angle X(\omega)$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\,\mathrm{d}\omega$

(d) $X(\pi)$

(e) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$

4.15 信号 $x(n)$的重心定义为

$$c=\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)}$$

并为该信号的"时延"提供了一种度量。

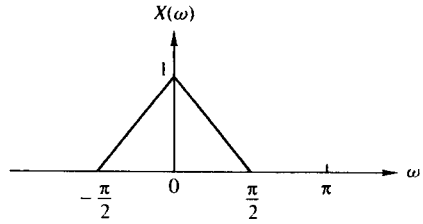


图 P4.15

(a) 用 $X(\omega)$表示 c。

(b) 计算傅里叶变换如图 P4.15 所示的信号 $x(n)$的 c。

4.16 考虑傅里叶变换对

$$a^n u(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}, \qquad |a|<1$$

使用频率定理中的微分和归纳来证明

$$x(n)=\frac{(n+l-1)!}{n!(l-1)!}a^n u(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)=\frac{1}{(1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^l}$$

4.17 设 $x(n)$是一个任意信号,不一定是实值,其傅里叶变换是 $X(\omega)$。用 $X(\omega)$来表示以下信号的傅里叶变换:

(a) $x^*(n)$

(b) $x^*(-n)$

(c) $y(n)=x(n)-x(n-1)$

(d) $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

(e) $y(n)=x(2n)$

(f) $y(n)=\begin{cases} x(n/2), & n\text{为偶数} \\ 0, & n\text{为奇数} \end{cases}$

4.18 求并画出以下信号的傅里叶变换是 $X_1(\omega)$、$X_2(\omega)$和 $X_3(\omega)$。

(a) $x_1(n)=\{1,1,\underset{\uparrow}{1},1,1\}$

(b) $x_2(n)=\{1,0,1,0,\underset{\uparrow}{1},0,1,0,1\}$

(c) $x_3(n)=\{1,0,0,1,0,0,\underset{\uparrow}{1},0,0,1,0,0,1\}$

(d) 在 $X_1(\omega)$、$X_2(\omega)$和 $X_3(\omega)$之间存在任何关系吗? 其物理意义是什么?

(e) 证明:如果

$$x_k(n)=\begin{cases} x\left(\dfrac{n}{k}\right), & \text{若 } n/k \text{ 是整数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

那么

$$X_k(\omega)=X(k\omega)$$

4.19 设信号 $x(n)$具有如图 P4.19 所示的傅里叶变换。求并画出以下信号的傅里叶变换:

(a) $x_1(n) = x(n)\cos(\pi n/4)$

(b) $x_2(n) = x(n)\sin(\pi n/2)$

(c) $x_3(n) = x(n)\cos(\pi n/2)$

(d) $x_4(n) = x(n)\cos \pi n$

注意,这些信号是通过用载波 $\cos \omega_c n$ 或 $\sin \omega_c n$ 对序列 $x(n)$进行幅度调制而获得的。

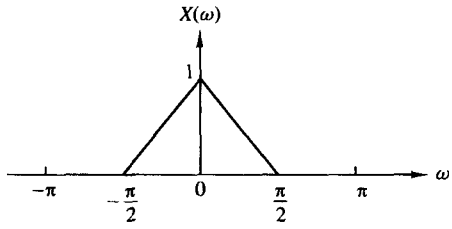


图 P4.19

4.20 考虑具有傅里叶变换 $X(\omega)$的非周期信号 $x(n)$。证明:周期信号

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$$

的傅里叶级数系数是

$$C_k^y = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right), \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

4.21 证明

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

可以表示为

$$X_N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin[(2N+1)(\omega - \theta/2)]}{\sin[(\omega - \theta)/2]} d\theta$$

4.22 信号 $x(n)$具有以下傅里叶变换:

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

求以下信号的傅里叶变换:

(a) $x(2n+1)$

(b) $e^{\pi n/2}x(n+2)$

(c) $x(-2n)$

(d) $x(n)\cos(0.3\pi n)$

(e) $x(n) * x(n-1)$

(f) $x(n) * x(-n)$

4.23 从如图 P4.23 所示的具有傅里叶变换 $X(\omega)$的离散时间信号 $x(n)$,求并画出以下信号的傅里叶变换:

(a) $y_1(n)=\begin{cases}x(n), & n \text{ 为偶数}\\ 0, & n \text{ 为奇数}\end{cases}$

(b) $y_2(n)=x(2n)$

(c) $y_3(n)=\begin{cases}x(n/2), & n \text{ 为偶数}\\ 0, & n \text{ 为奇数}\end{cases}$

注意，$y_1(n)=x(n)s(n)$，其中$s(n)=\{\cdots,0,1,0,\underset{\uparrow}{1},0,1,0,1,\cdots\}$

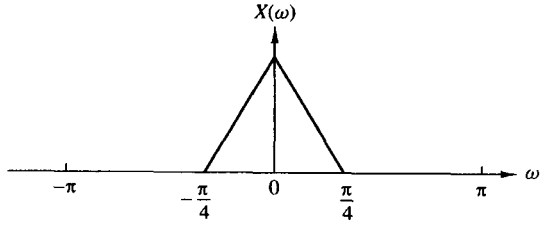


图 P4.23

第 5 章　LTI 系统的频域分析

在这一章中，我们将从频域来描述线性时不变系统的特性。本章中的基本激励信号是复指数函数和正弦函数。我们将观察到 LTI 系统对输入端的各种频率分量进行分流或滤波。这样可以根据一些简单的 LTI 系统对任何输入信号的滤波类型，来描述它们的特性并对它们进行分类。我们还会介绍这些简单滤波器的设计，并给出某些应用。

此外，我们将进一步学习 LTI 系统的输入和输出序列的频谱关系。本章的最后一节将集中介绍 LTI 系统进行逆滤波和去卷积的应用。

5.1　线性时不变系统的频域特性

在这一节中，我们将分析线性时不变系统的频域特性。本章中的基本激励信号是复指数函数和正弦函数。系统的特性是通过频率变量 ω 的函数进行描述的，这个函数是系统冲激响应 $h(n)$ 的傅里叶变换，称为频率响应。

频率响应函数可以完全描述线性时不变系统的频域特性。这就可以让我们计算系统对正弦或复指数信号的任意加权组合的稳态响应。因为周期序列，特别是对它们进行了傅里叶级数分解，可以视为谐波相关的复指数信号的加权和，所以计算这类信号对线性时不变系统的响应将变成一个简单的问题。由于非周期信号可以视为无穷小复指数信号的叠加，所以这种方法也同样适用于非周期信号。

5.1.1　对复指数和正弦信号的响应：频率响应函数

在第 2 章中，我们介绍了任何弛豫线性时不变系统对任意输入信号 $x(n)$ 的响应，它可以通过卷积公式进行计算：

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{5.1.1}$$

在这个输入-输出关系中，系统特性是通过时域单位采样响应 $\{h(n), -\infty < n < \infty\}$ 进行描述的。

为了推导系统的频域特性，我们用复指数信号来激励系统，

$$x(n) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.1.2}$$

其中 A 是幅度，ω 是限制在频率区间 $[-\pi, \pi]$ 上的任意频率。将式(5.1.2)代入式(5.1.1)，得到响应

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)[A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(n-k)}] = A\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n} \tag{5.1.3}$$

我们看到，式(5.1.3)方括号中的项是频率变量 ω 的函数。实际上，这一项是系统单位采样响应 $h(k)$ 的傅里叶变换。因此，我们将这个函数表示为

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k} \tag{5.1.4}$$

很明显，函数 $H(\omega)$ 存在的条件是系统必须是 BIBO 稳定的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

利用式(5.1.4)中的定义，系统对式(5.1.2)给出的复指数信号的响应为

$$y(n) = AH(\omega)e^{j\omega n} \tag{5.1.5}$$

我们注意到，响应同样是复指数形式，并且和输入具有相同的频率，但比输入多了一个倍乘因子 $H(\omega)$。

由于这个特性，式(5.1.2)中的指数信号被称为系统的特征函数。换言之，系统的特征函数就是一个输入信号，这个信号会产生一个与输入相差一个常数倍乘因子的输出。这个倍乘因子称为系统的特征值。在这种情况下，形如式(5.1.2)的复指数信号就是线性时不变系统的特征函数，而在输入信号频率处的 $H(\omega)$值就是相应的特征值。

例 5.1.1　一个系统的冲激响应为

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) \tag{5.1.6}$$

其输入为复指数序列

$$x(n) = Ae^{j\pi n/2}, \qquad -\infty < n < \infty$$

计算系统的输出序列。

解：首先计算冲激响应 $h(n)$的傅里叶变换，然后用式(5.1.5)计算 $y(n)$。从例 4.2.3 的结果得知

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{5.1.7}$$

在 $\omega = \pi/2$ 处，由式(5.1.7)得出

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1+j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j26.6°}$$

于是，得到输出结果

$$y(n) = A\left(\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j26.6°}\right)e^{j\pi n/2}$$

$$y(n) = \frac{2}{\sqrt{5}}Ae^{j(\pi n/2-26.6°)}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.1.8}$$

这个例题清楚地说明了输入信号对系统产生的影响仅仅是幅度上变化了 $2/\sqrt{5}$，相位上移动了 $-26.6°$。因此，这个输出也同样是个复指数，它的频率为 $\pi/2$，幅度为 $2A/\sqrt{5}$，相位为 $-26.6°$。

如果改变输入信号的频率，那么系统对输入的影响就会产生变化，因此输出也会相应变化。特别地，如果输入序列是频率为 π 的复指数信号，即

$$x(n) = Ae^{j\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.1.9}$$

那么，在 $\omega = \pi$ 处，

$$H(\pi) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

并且系统的输出为

$$y(n) = \frac{2}{3}Ae^{j\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.1.10}$$

我们注意到，$H(\pi)$是一个纯实数[即与 $H(\omega)$有关的相位在 $\omega = \pi$ 处为零]。因此，输入在幅度上乘了一个因子 $H(\pi) = \frac{2}{3}$，但相位移动却为零。

通常,$H(\omega)$是频率变量 ω 的复值函数,因此 $H(\omega)$可以表示成点斜式,形式为

$$H(\omega)=|H(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta(\omega)} \tag{5.1.11}$$

其中$|H(\omega)|$是 $H(\omega)$的幅度,并且

$$\Theta(\omega)=\measuredangle H(\omega)$$

这是在频率 ω 处系统加到输入信号上的相移。

因为 $H(\omega)$是$\{h(k)\}$的傅里叶变换,由此可得出 $H(\omega)$是周期为 2π 的周期函数。此外,我们可以把式(5.1.4)视为 $H(\omega)$的指数傅里叶级数扩展式,而 $h(k)$视为傅里叶级数的系数。从而,单位冲激响应 $h(k)$与 $H(\omega)$存在的积分关系为

$$h(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k}\mathrm{d}\omega \tag{5.1.12}$$

对于具有实值冲激响应的线性时不变系统,其幅度和相位函数具有对称特性,这将在下面进行阐述。由 $H(\omega)$的定义,得出

$$\begin{aligned}H(\omega)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\cos\omega k-\mathrm{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\sin\omega k\\&=H_R(\omega)+\mathrm{j}H_I(\omega)\\&=\sqrt{H_R^2(\omega)+H_I^2(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan[H_I(\omega)/H_R(\omega)]}\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

其中 $H_R(\omega)$和 $H_I(\omega)$表示 $H(\omega)$的实部和虚部,其定义为

$$\begin{aligned}H_R(\omega)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\cos\omega k\\H_I(\omega)&=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\sin\omega k\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

从式(5.1.13)明显看出,$H(\omega)$的幅度和相位可以用 $H_R(\omega)$和 $H_I(\omega)$的形式进行表示,

$$\begin{aligned}|H(\omega)|&=\sqrt{H_R^2(\omega)+H_I^2(\omega)}\\\Theta(\omega)&=\arctan\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}\end{aligned} \tag{5.1.15}$$

我们注意到,$H_R(\omega)=H_R(-\omega)$并且 $H_I(\omega)=-H_I(-\omega)$,因此 $H_R(\omega)$是 ω 的偶函数,$H_I(\omega)$是 ω 的奇函数。由此可得出$|H(\omega)|$是 ω 的偶函数,$\Theta(\omega)$是 ω 的奇函数。所以,如果知道了$|H(\omega)|$和 $\Theta(\omega)$在 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$ 上的值,那么就可得到这两个函数在 $-\pi\leqslant\omega\leqslant0$ 上的值。

例 5.1.2 滑动平均滤波器

计算三点滑动平均(MA)系统 $H(\omega)$的幅度和相位,

$$y(n)=\frac{1}{3}[x(n+1)+x(n)+x(n-1)]$$

并画出这两个函数在 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$ 上的略图。

解：因为

$$h(n)=\{\frac{1}{3},\underset{\uparrow}{\frac{1}{3}},\frac{1}{3}\}$$

由此得到

$$H(\omega)=\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=\frac{1}{3}(1+2\cos\omega)$$

因此，

$$|H(\omega)|=\frac{1}{3}|1+2\cos\omega|$$

$$\Theta(\omega)=\begin{cases}0, & 0\leqslant\omega\leqslant 2\pi/3\\ \pi, & 2\pi/3\leqslant\omega<\pi\end{cases}\tag{5.1.16}$$

图 5.1.1 画出了 $H(\omega)$的幅度和相位图。如前所述，$|H(\omega)|$是频率的偶函数，$\Theta(\omega)$是频率的奇函数。显然，从频率响应特性 $H(\omega)$可以看出，这个滑动平均滤波器平滑了输入信号，这从输入-输出方程也可得出。

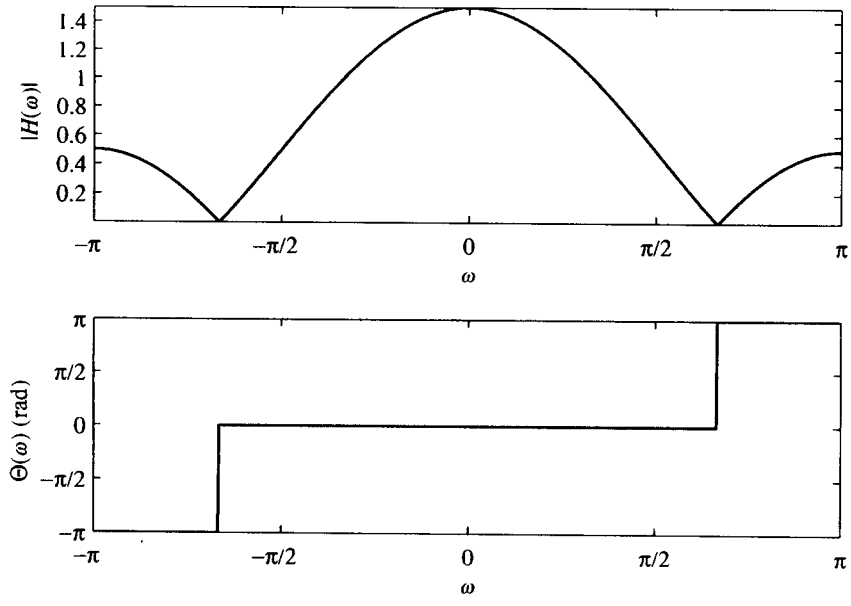


图 5.1.1　例 5.1.2 中 MA 系统的幅度和相位响应

$H(\omega)$的幅度和相位函数满足对称特性，实际上，正统函数可以表示成两个复共轭指数函数的和或差，这意味着线性时不变系统对正弦信号的响应在形式上类似于输入是复指数信号的响应。的确，如果输入是

$$x_1(n)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$$

则输出为

$$y_1(n)=A|H(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$$

另一方面，如果输入是

$$x_2(n)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

则系统的响应为

$$y_2(n)=A|H(-\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta(-\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=A|H(\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Theta(\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

其中在最后一个表达式中,利用了对称特性$|H(\omega)| = |H(-\omega)|$和$\Theta(\omega) = -\Theta(-\omega)$。现在,应用线性时不变系统的叠加性,就可以得出系统对输入

$$x(n) = \frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n)] = A\cos\omega n$$

的响应为

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2}[y_1(n) + y_2(n)] \\ y(n) &= A|H(\omega)|\cos[\omega n + \Theta(\omega)] \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

类似地,如果输入是

$$x(n) = \frac{1}{\mathrm{j}2}[x_1(n) - x_2(n)] = A\sin\omega n$$

则系统的响应为

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{\mathrm{j}2}[y_1(n) - y_2(n)] \\ y(n) &= A|H(\omega)|\sin[\omega n + \Theta(\omega)] \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

从以上讨论可以很明显地看出,$H(\omega)$或者等价的$|H(\omega)|$和$\Theta(\omega)$,完全描述了系统对任意频率正弦输入信号的影响。的确,我们注意到,$|H(\omega)|$决定了输入正弦信号经过系统后是放大了($|H(\omega)| > 1$)还是衰减了($|H(\omega)| < 1$),相位$\Theta(\omega)$决定了输入正弦信号经过系统后所产生的相移量。因此,知道了$H(\omega)$后,就可以计算系统对任何正弦输入信号的响应。因为$H(\omega)$确定了系统在频域的响应,所以它称为系统的频率响应。相应地,$|H(\omega)|$称为系统的幅度响应,$\Theta(\omega)$称为系统的相位响应。

如果系统的输入包含多个正弦信号,那么就可以利用线性系统的叠加性计算系统的响应。下面的例子说明了叠加性的应用。

例 5.1.3 计算例 5.1.1 中的系统对输入信号的响应

$$x(n) = 10 - 5\sin\frac{\pi}{2}n + 20\cos\pi n, \qquad -\infty < n < \infty$$

解:根据式(5.1.7)给出的系统频率响应

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

输入信号的第一项是对应于$\omega = 0$的固有信号分量,因此

$$H(0) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$x(n)$中第二项的频率为$\pi/2$,在这个频率处的系统频率响应为

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}26.6^\circ}$$

最后,$x(n)$中第三项的频率为$\omega = \pi$,在这个频率处,

$$H(\pi) = \frac{2}{3}$$

因此,系统对$x(n)$的响应为

$$y(n) = 20 - \frac{10}{\sqrt{5}}\sin\left(\frac{\pi}{2}n - 26.6^\circ\right) + \frac{40}{3}\cos\pi n, \qquad -\infty < n < \infty$$

例 5.1.4　一个线性时不变系统由以下差分方程进行描述：

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n), \qquad 0 < a < 1$$

(a) 计算系统的频率响应 $H(\omega)$的幅度和相位。

(b) 选择参数 b，使得$|H(\omega)|$的最大值为单位 1，并画出$|H(\omega)|$和$\measuredangle H(\omega)$在 $a=0.9$ 时的略图。

(c) 计算系统对以下输入信号的输出：

$$x(n) = 5 + 12\sin\frac{\pi}{2}n - 20\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$$

解：系统的冲激响应为

$$h(n) = ba^n u(n)$$

因为$|a|<1$，所以系统是 BIBO 稳定的，因此 $H(\omega)$存在。

(a) 频率响应为

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \frac{b}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

因为

$$1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} = (1 - a\cos\omega) + \mathrm{j}a\sin\omega$$

由此得出

$$|1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}| = \sqrt{(1-a\cos\omega)^2 + (a\sin\omega)^2} = \sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}$$

并且

$$\measuredangle(1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = \arctan\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$$

因此，

$$|H(\omega)| = \frac{|b|}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

$$\measuredangle H(\omega) = \Theta(\omega) = \measuredangle b - \arctan\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$$

(b) 因为参数 a 是正数，$|H(\omega)|$的分母在 $\omega=0$ 处取得最小值。因此，$|H(\omega)|$在 $\omega=0$ 处取得最大值。在这个频率得出

$$|H(0)| = \frac{|b|}{1-a} = 1$$

这意味着 $b=\pm(1-a)$，取 $b=1-a$，于是

$$|H(\omega)| = \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

并且

$$\Theta(\omega) = -\arctan\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$$

频率响$|H(\omega)|$和 $\Theta(\omega)$应如图 5.1.2 所示，可以看出，该系统衰减了高频信号。

(c) 输入信号由 $\omega=0,\pi/2$ 和 π 的频率分量组成。对于 $\omega=0$，$|H(0)|=1$ 并且 $\Theta(0)=0$。对于 $\omega=\pi/2$，

$$\left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{0.1}{\sqrt{1.81}} = 0.074$$

$$\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\arctan a = -42°$$

对于 $\omega=\pi$,

$$|H(\pi)|=\frac{1-a}{1+a}=\frac{0.1}{1.9}=0.053$$

$$\Theta(\pi)=0$$

因此,系统的输出为

$$\begin{aligned}y(n)&=5|H(0)|+12\left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\sin\left[\frac{\pi}{2}n+\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\\&\quad-20|H(\pi)|\cos\left[\pi n+\frac{\pi}{4}+\Theta(\pi)\right]\\&=5+0.888\sin\left(\frac{\pi}{2}n-42^\circ\right)-1.06\cos\left(\pi n+\frac{\pi}{4}\right),\qquad -\infty<n<\infty\end{aligned}$$

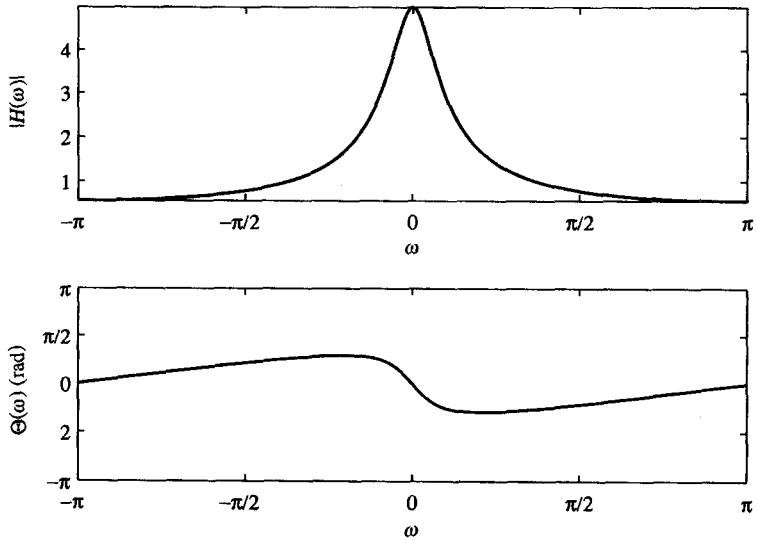


图 5.1.2 例 2.1.4 中系统的幅度和相位响应($a=0.9$)

在最通常的情况下,如果系统输入是正弦信号的任意线性组合,其形式为

$$x(n)=\sum_{i=1}^{L}A_i\cos(\omega_i n+\phi_i),\qquad -\infty<n<\infty$$

其中$\{A_i\}$和$\{\phi_i\}$是相应频率分量的幅度和相位,那么系统的响应就仅仅是

$$y(n)=\sum_{i=1}^{L}A_i|H(\omega_i)|\cos[\omega_i n+\phi_i+\Theta(\omega_i)]\tag{5.1.19}$$

其中$|H(\omega_i)|$和$\Theta(\omega_i)$分别是输入信号中各频率分量经过系统后所对应的幅度和相位。

很明显,系统的频率响应 $H(\omega)$决定了系统对输入的不同频率正弦信号的影响也是不同的。例如,如果在某些频率上 $H(\omega)=0$,则在这些频率点的正弦信号将可能被完全抑制掉,而其他的正弦信号经过系统后可能不产生任何衰减(甚至可能得到某种程度的放大)。事实上,我们可以把线性时不变系统的功能视为对不同频率正弦信号的滤波器,使某些频率分量可以输出,而抑制或禁止其他频率分量的输出。实际上,我们将在第 10 章讨论基本数字滤波器的设计问题,包括计算线性时不变系统的参数,以达到预期的频率响应 $H(\omega)$。

5.1.2　正弦输入信号的稳态和暂态响应

在前面一节的讨论中，我们求解了线性时不变系统对作用于 $n=-\infty$ 的指数和正弦输入信号的响应。因为指数或正弦信号作用于 $n=-\infty$，所以通常称这些信号为无穷指数和无穷正弦。在这种情况下，输出端观察到的响应即是稳态响应，而没有暂态响应。

另一方面，如果指数或正弦信号作用于有限的时刻，比如说在 $n=0$，那么系统的响应就包括两项：暂态响应和稳态响应。为了说明这点，我们来考虑这样的一个例子。一个系统由一阶差分方程描述

$$y(n)=ay(n-1)+x(n) \tag{5.1.20}$$

这个系统在 2.4.2 节已经提到过，它对任何作用于 $n=0$ 的 $x(n)$ 的输出，由式(2.4.8)给出

$$y(n)=a^{n+1}y(-1)+\sum_{k=0}^{n}a^k x(n-k), \qquad n\geqslant 0 \tag{5.1.21}$$

其中 $y(-1)$ 为初始状态。

现在假设系统的输入是复指数信号

$$x(n)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}, \qquad n\geqslant 0 \tag{5.1.22}$$

作用于 $n=0$。将式(2.1.22)代入到式(5.1.21)得出

$$\begin{aligned} y(n)&=a^{n+1}y(-1)+A\sum_{k=0}^{n}a^k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(n-k)}\\ &=a^{n+1}y(-1)+A\left[\sum_{k=0}^{n}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^k\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\\ &=a^{n+1}y(-1)+A\frac{1-a^{n+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(n+1)}}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}, \qquad n\geqslant 0\\ &=a^{n+1}y(-1)-\frac{Aa^{n+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(n+1)}}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}+\frac{A}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}, \qquad n\geqslant 0 \end{aligned} \tag{5.1.23}$$

回忆可知，当 $|a|<1$ 时，式(5.1.20)中的系统是 BIBO 稳定的。在这种情况下，当 n 趋向无穷大时，式(5.1.23)中含有 a^{n+1} 的两项衰减趋于零。因此，剩下的稳态响应为

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{ss}}(n)&=\lim_{n\to\infty}y(n)=\frac{A}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\\ &=AH(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n} \end{aligned} \tag{5.1.24}$$

式(5.1.23)中的前两项构成了系统的暂态响应，即

$$y_{\mathrm{tr}}(n)=a^{n+1}y(-1)-\frac{Aa^{n+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(n+1)}}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}, \qquad n\geqslant 0 \tag{5.1.25}$$

当 n 趋于无穷大时，这部分衰减趋于零。暂态响应中第一项是系统的零输入响应，第二项是由指数输入信号产生的暂态响应。

通常，所有线性时不变 BIBO 系统，在 $n=0$ 或其他有限时刻受到复指数信号或正弦信号的激励时，都具有类似的特点。也就是说，当 $n\to\infty$ 时，暂态响应衰减趋于零，剩下的只有前面一节所计算的稳态响应。在许多实际应用中，系统的暂态响应是不重要的，因此在计算系统对正弦输入的响应时，暂态响应常常被忽略。

5.1.3 周期输入信号的稳态响应

假设输入到稳定的线性时不变系统的是基本周期为 N 的周期信号 $x(n)$。因为这样的信号存在于 $-\infty < n < \infty$,所以系统在任意时刻 n 的总响应就仅仅等于稳态响应。

为了计算系统响应 $y(n)$,利用傅里叶级数来表示周期性信号,即

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{5.1.26}$$

其中,$\{c_k\}$是傅里叶级数的系数。此时,系统对复指数信号

$$x_k(n) = c_k e^{j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

的响应为

$$y_k(n) = c_k H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{5.1.27}$$

其中,

$$H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = H(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

利用线性系统的叠加性原则,得到系统对式(5.1.26)中的周期性信号 $x(n)$的响应为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j2\pi kn/N}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.1.28}$$

该结果表明系统对周期性输入信号 $x(n)$的响应也是周期性的,其基本周期同样也是 N。$y(n)$的傅里叶级数的系数为

$$d_k \equiv c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{5.1.29}$$

因此,线性系统可能会改变周期输入信号的形状,表现在傅里叶级数各分量的幅度发生了缩放,或是相位发生了移动,但系统不会影响周期性输入信号的周期。

5.1.4 非周期输入信号的响应

式(4.4.49)给出的卷积定理,提供了我们想要的时域关系,以计算 LTI 系统对非周期性、能量有限信号的输出。如果$\{x(n)\}$表示输入序列,$\{y(n)\}$表示输出序列,$\{h(n)\}$表示系统的单位采样响应,那么根据卷积定理可得出

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \tag{5.1.30}$$

其中,$Y(\omega)$、$X(\omega)$和 $H(\omega)$分别是$\{y(n)\}$、$\{x(n)\}$和$\{h(n)\}$对应的傅里叶变换。从这个关系式可以看出,输出信号的频谱等于输入信号的频谱乘以系统的频率响应。

如果将 $Y(\omega)$、$H(\omega)$和 $X(\omega)$表示为点斜式,那么输出信号的幅度和相位可以表示为

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)| \tag{5.1.31}$$

$$\measuredangle Y(\omega) = \measuredangle X(\omega) + \measuredangle H(\omega) \tag{5.1.32}$$

其中,$|H(\omega)|$和$\measuredangle H(\omega)$是系统的幅度和相位响应。

作为固有特性,能量有限、非周期信号包含有许多连续的频率分量。线性时不变系统通过它的频率响应函数,会衰减输入信号中的某些频率分量,而放大其他的频率分量,因此系统的作用就像是对输入信号进行处理的滤波器。从$|H(\omega)|$的图形上可以看出哪些频率分量被放大了,哪些

频率分量被衰减了。另一方面，$H(\omega)$的角度决定了输入信号中各连续的频率分量经过系统后产生的相移，它是频率的函数。如果系统对输入信号频谱的变化是非预期的，那么称这个系统引起了幅度和相位失真。

同样还可以看出，线性时不变系统的输出不可能包含输入信号中没有的频率分量，而线性时变系统或者非线性系统可以产生输入信号中无须包含的频率分量。

图 5.1.3 画出了用来分析 BIBO 稳定的 LTI 系统的时域和频域关系图。可以看出，在时域分析中，要得到系统的输出序列，需要对输入信号和系统的冲激响应做卷积；另一方面，在频率分析中，要得到系统输出信号的频谱，需要对输入信号的频谱 $X(\omega)$和系统的频域响应 $H(\omega)$做乘积。

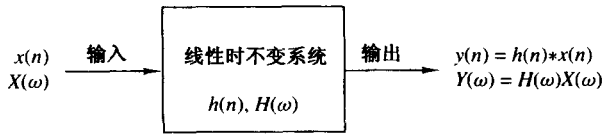


图 5.1.3　LTI 系统的时域和频域输入-输出关系

我们可以利用式(5.1.30)中的关系来计算输出信号的频谱 $Y(\omega)$，然后输出序列$\{y(n)\}$就可以通过傅里叶逆变换得到：

$$y(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Y(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega \tag{5.1.33}$$

然而，这种方法很少采用，更多的是用第 3 章介绍的一种更简单的方法——z 变换来解决计算输出序列$\{y(n)\}$的问题。

现在回到式(5.1.30)中的基本输入-输出关系式，并计算等式两边的幅度平方值，由此得到

$$\begin{aligned}|Y(\omega)|^2&=|H(\omega)|^2|X(\omega)|^2\\ S_{yy}(\omega)&=|H(\omega)|^2S_{xx}(\omega)\end{aligned} \tag{5.1.34}$$

其中，$S_{xx}(\omega)$和 $S_{yy}(\omega)$分别是输入和输出信号的能量密度谱。对式(5.1.34)在频率区间$(-\pi,\pi)$上进行积分，得到输出信号的能量

$$E_y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{yy}(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(\omega)|^2S_{xx}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{5.1.35}$$

例 5.1.5　一个线性时不变系统由它的冲激响应描述如下：

$$h(n)=(\frac{1}{2})^nu(n)$$

系统的激励信号为

$$x(n)=(\frac{1}{4})^nu(n)$$

计算输出信号的频谱及能量密度谱。

解：系统的频率响应函数为

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

类似地，输入序列$\{x(n)\}$的傅里叶变换为

$$X(\omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

因此,系统输出信号的频谱为

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

对应的能量密度谱为

$$S_{yy}(\omega)=|Y(\omega)|^2=|H(\omega)|^2|X(\omega)|^2=\frac{1}{(\frac{5}{4}-\cos\omega)(\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos\omega)}$$

5.2 LTI 系统的频率响应

在这一节中,我们将集中于计算具有有理系统函数的 LTI 系统频率响应。回忆可知,这类 LTI 系统在时域是用常系数差分方程进行描述的。

5.2.1 具有有理系统函数系统的频率响应

从 4.2.6 节的讨论中我们知道,如果系统函数 $H(z)$收敛在单位圆上,则可以通过计算 $H(z)$在单位圆上的值得到系统的频率响应。因此,

$$H(\omega)=H(z)|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n} \tag{5.2.1}$$

在这种情况下,$H(z)$是一个有理函数且形式为 $H(z)=B(z)/A(z)$,于是得出

$$H(\omega)=\frac{B(\omega)}{A(\omega)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k e^{-j\omega k}} \tag{5.2.2}$$

$$=b_0\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-z_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k e^{-j\omega})} \tag{5.2.3}$$

其中,$\{a_k\}$和$\{b_k\}$是实数,但是$\{z_k\}$和$\{p_k\}$可能为复数。

有时候我们需要将 $H(\omega)$的幅度平方值表示成 $H(z)$的形式。首先,我们注意到

$$|H(\omega)|^2=H(\omega)H^*(\omega)$$

对于式(5.2.3)给出的有理系统函数,得到

$$H^*(\omega)=b_0\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-z_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k^* e^{j\omega})} \tag{5.2.4}$$

由此得出,对于有理系统函数,$H^*(\omega)$是通过计算 $H^*(1/z^*)$在单位圆上的值得到的,

$$H^*(1/z^*)=b_0\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-z_k^* z)}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k^* z)} \tag{5.2.5}$$

然而，当$\{h(n)\}$是实数，或者等价的系数$\{a_k\}$和$\{b_k\}$是实数时，复值的极点与零点会以复共轭对的形式出现。在这种情况下，$H^*(1/z^*)=H(z^{-1})$。因此，$H^*(\omega)=H(-\omega)$，并且

$$|H(\omega)|^2=H(\omega)H^*(\omega)=H(\omega)H(-\omega)=H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} \tag{5.2.6}$$

根据 z 变换的相关性定理(见表 3.2)，函数 $H(z)H(z^{-1})$是单位采样响应$\{h(n)\}$的自相关序列$\{r_{hh}(m)\}$的 z 变换。根据维纳-辛钦定理，得出$|H(\omega)|^2$ 是$\{r_{hh}(m)\}$的傅里叶变换。

类似地，如果 $H(z)=B(z)/A(z)$，那么变换 $D(z)=B(z)B(z^{-1})$和 $C(z)=A(z)A(z^{-1})$是自相关序列$\{c_l\}$和$\{d_l\}$的 z 变换，其中，

$$c_l=\sum_{k=0}^{N-|l|}a_k a_{k+l},\qquad -N\leqslant l\leqslant N \tag{5.2.7}$$

$$d_l=\sum_{k=0}^{M-|l|}b_k b_{k+l},\qquad -M\leqslant l\leqslant M \tag{5.2.8}$$

因为系统参数$\{a_k\}$和$\{b_k\}$是实值，由此得出 $c_l=c_{-l}$并且 $d_l=d_{-l}$。通过利用对称性，$|H(\omega)|^2$ 可表示为

$$|H(\omega)|^2=\frac{d_0+2\sum_{k=1}^{M}d_k\cos k\omega}{c_0+2\sum_{k=1}^{N}c_k\cos k\omega} \tag{5.2.9}$$

最后，我们注意到，$\cos k\omega$ 可以表示成 $\cos\omega$ 的多项式函数，即

$$\cos k\omega=\sum_{m=0}^{k}\beta_m(\cos\omega)^m \tag{5.2.10}$$

其中，$\{\beta_m\}$是扩展式的系数。因此，$|H(\omega)|^2$ 的分子和分母可以视为 $\cos\omega$ 的多项式函数。下面举例说明前面所述的关系。

例 5.2.1　计算系统

$$y(n)=-0.1y(n-1)+0.2y(n-2)+x(n)+x(n-1)$$

的$|H(\omega)|^2$。

解：系统函数为

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$$

它的收敛域为$|z|>0.5$，所以 $H(\omega)$存在。此时

$$H(z)H(z^{-1})=\frac{1+z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}\cdot\frac{1+z}{1+0.1z-0.2z^2}$$

$$=\frac{2+z+z^{-1}}{1.05+0.08(z+z^{-1})-0.2(z^{-2}+z^{-2})}$$

通过计算 $H(z)H(z^{-1})$在单位圆上的值，可得出

$$|H(\omega)|^2=\frac{2+2\cos\omega}{1.05+0.16\cos\omega-0.4\cos 2\omega}$$

而 $\cos 2\omega = 2\cos^2\omega - 1$,因此,$|H(\omega)|^2$ 可表示为

$$|H(\omega)|^2 = \frac{2(1+\cos\omega)}{1.45 + 0.16\cos\omega - 0.8\cos^2\omega}$$

我们注意到,给定 $H(z)$是计算 $H(z^{-1})$以及$|H(\omega)|^2$ 的直接方法。然而相反的问题,即给定$|H(\omega)|^2$或相应的冲激响应$\{h(n)\}$来计算 $H(z)$,却不是一种直接的方法,这是因为$|H(\omega)|^2$ 不包含 $H(\omega)$中的相位信息,所以就无法唯一地计算出 $H(z)$。

为了详细说明这一点,我们假设 $H(z)$的 N 个极点和 M 个零点分别是$\{p_k\}$和$\{z_k\}$,对应的$H(z^{-1})$的极点和零点分别是$\{1/p_k\}$和$\{1/z_k\}$。给定$|H(\omega)|^2$ 或等价的 $H(z)H(z^{-1})$,通过给 $H(z)$赋以极点 p_k 或其倒数 $1/p_k$,以及零点 z_k 或其倒数 $1/z_k$,就可以求解出不同的系统函数 $H(z)$。例如,如果 $N=2, M=1$,那么 $H(z)H(z^{-1})$的极点和零点分别为$\{p_1, p_2, 1/p_1, 1/p_2\}$和$\{z_1, 1/z_1\}$。如果 p_1 和 p_2 是实数,那么 $H(z)$的极点可能为$\{p_1, p_2\}$、$\{1/p_1, 1/p_2\}$、$\{p_1, 1/p_2\}$和$\{p_2, 1/p_1\}$,而零点则可能是$\{z_1\}$或$\{1/z_1\}$。因此,系统函数有 8 种可能的选择,所有这些函数的$|H(\omega)|^2$ 都相同。即使限制 $H(z)$的极点在单位圆内,$H(z)$仍有 2 种不同的选择,这取决于选择$\{z_1\}$还是$\{1/z_1\}$作为零点。所以,仅仅给出幅度响应$|H(\omega)|$并不能计算出 $H(z)$。

5.2.2 频率响应函数的计算

作为频率的函数,在计算幅度响应和相位响应时,$H(\omega)$可以很方便地表示成极点和零点的形式,因此将 $H(\omega)$写成因子形式

$$H(\omega) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - z_k e^{-j\omega k})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k e^{-j\omega k})} \tag{5.2.11}$$

或等价的

$$H(\omega) = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^{M}(e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega} - p_k)} \tag{5.2.12}$$

将式(5.2.12)中的各复值因子写成点斜式

$$e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega)e^{j\Theta_k(\omega)} \tag{5.2.13}$$

及

$$e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega)e^{j\Phi_k(\omega)} \tag{5.2.14}$$

其中,

$$V_k(\omega) \equiv |e^{j\omega} - z_k|, \quad \Theta_k(\omega) \equiv \measuredangle(e^{j\omega} - z_k) \tag{5.2.15}$$

并且

$$U_k(\omega) \equiv |e^{j\omega} - p_k|, \quad \Phi_k(\omega) = \measuredangle(e^{j\omega} - p_k) \tag{5.2.16}$$

$H(\omega)$的幅度等于式(5.2.12)中所有项的幅度之积。因为 $e^{j\omega(N-M)}$ 的幅度是 1,所以利用式(5.2.13)到式(5.2.16),可以得出

$$|H(\omega)| = |b_0|\frac{V_1(\omega)\cdots V_M(\omega)}{U_1(\omega)U_2(\omega)\cdots U_N(\omega)} \tag{5.2.17}$$

$H(\omega)$的相位等于分子中所有因子的相位之和，再减去分母中所有因子的相位，因此结合式(5.2.13)到式(5.2.16)，得到

$$\begin{aligned}\measuredangle H(\omega) = \measuredangle b_0 + \omega(N-M) + \Theta_1(\omega) + \Theta_2(\omega) + \cdots + \Theta_M(\omega) \\ - [\Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega) + \cdots + \Phi_N(\omega)]\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

增益项 b_0 的相位是 0 或 π，这取决于 b_0 是正数还是负数。很明显，如果知道了系统函数 $H(z)$的零点和极点，那么就可以根据式(5.2.17)和式(5.2.18)计算出频率响应。

式(5.2.17)和式(5.2.18)中幅度和相位的量有一个几何解释。现在考虑一个问题，在图 5.2.1(a)中，极点 p_k 和零点 z_k 位于 z 平面上的点 A 和点 B 处。假设我们想计算 $H(\omega)$在指定频率 ω 处的值，给定的 ω 值决定了 $e^{j\omega}$ 在实数正半轴上的角度，矢量 $e^{j\omega}$ 的倾斜角度决定了单位圆上的点 L。计算给定 ω 值的傅里叶变换等同于计算在复平面上 L 点的 z 变换。为了计算 L 点的傅里叶变换，从极点和零点的位置向 L 点作出矢量 $\boldsymbol{AL}$ 和 $\boldsymbol{BL}$。从图 5.2.1(a)可以得出

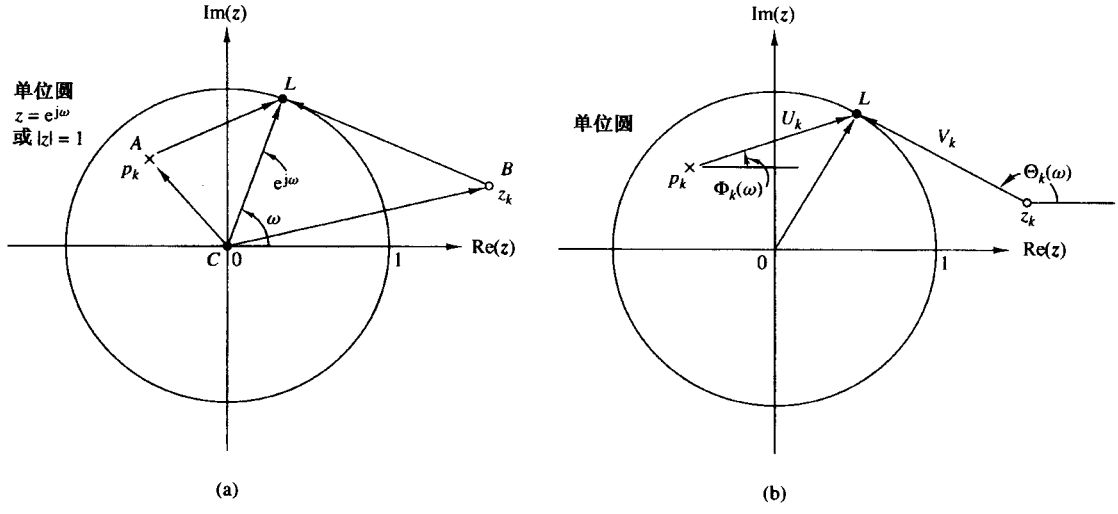


图 5.2.1　极点和零点对傅里叶变换作用的几何解释。(a)幅度：因子 V_k/U_k；(b)相位：因子 $\Theta_k - \Phi_k$

$$\boldsymbol{CL} = \boldsymbol{CA} + \boldsymbol{AL}$$

并且

$$\boldsymbol{CL} = \boldsymbol{CB} + \boldsymbol{BL}$$

然而，$\boldsymbol{CL} = e^{j\omega}$，$\boldsymbol{CA} = p_k$，$\boldsymbol{CB} = z_k$，因此

$$\boldsymbol{AL} = e^{j\omega} - p_k \tag{5.2.19}$$

并且

$$\boldsymbol{BL} = e^{j\omega} - z_k \tag{5.2.20}$$

结合式(5.2.13)和(5.2.14)的关系，得出

$$\boldsymbol{AL} = e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega)e^{j\Phi_k(\omega)} \tag{5.2.21}$$

$$\boldsymbol{BL} = e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega)e^{j\Theta_k(\omega)} \tag{5.2.22}$$

因而 $U_k(\omega)$是 $\boldsymbol{AL}$ 的长度，即从极点 p_k 到对应于 $e^{j\omega}$ 的 L 点的距离，而 $V_k(\omega)$是从零点 z_k 到相同

的 L 点的距离。相位 $\Phi_k(\omega)$和 $\Theta_k(\omega)$分别是矢量 $\boldsymbol{AL}$ 和 $\boldsymbol{BL}$ 在实数正半轴上的角度,这些几何解释如图 5.2.1(b)所示。

几何解释对于理解极点和零点的位置如何影响傅里叶变换的幅度和相位是非常有用的。假如一个零点(比如说 z_k)和一个极点(比如说 p_k)都位于单位圆上,如图 5.2.2 所示。我们注意到,在 $\omega = \measuredangle z_k$ 处,$V_k(\omega)$变成零,因此 $|H(\omega)|$也变成零。类似地,在 $\omega = \measuredangle p_k$ 处,长度 $U_k(\omega)$变成零,所以 $|H(\omega)|$将变成无穷大。很明显,在这种情况下计算相位是没有意义的。

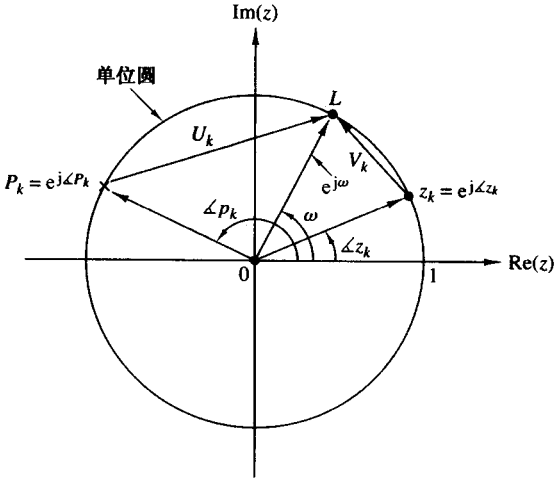


图 5.2.2 单位圆上的零点使得在 $\omega = \measuredangle z_k$ 时 $|H(\omega)| = 0$;相反,单位圆上的极点使得在 $\omega = \measuredangle p_k$ 时 $|H(\omega)| = \infty$

从以上讨论可以很容易看出,靠近单位圆存在零点,使得频率响应的幅度在靠近该零点的单位圆上的点所对应的频率处的值变小;相反,靠近单位圆存在极点,使得频率响应的幅度在靠近该极点的频率处的值变大,因而极点具有与零点相反的效果。同样,在极点附近放置零点可以抵消极点的影响,反之亦然。这同样也可以从式(5.2.12)看出,这是因为,如果 $z_k = p_k$,那么 $e^{j\omega} - z_k$ 项和 $e^{j\omega} - p_k$ 项将抵消。显而易见,在变换中,极点和零点的存在,将导致出现各种形状的 $|H(\omega)|$和 $\measuredangle H(\omega)$。在设计数字滤波器时,这种零极点的观测是至关重要的。现在通过下面这个例子来总结以上讨论的这些概念。

例 5.2.2 计算系统的频率响应。该系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.8}$$

解:显然,$H(z)$在 $z = 0$ 处有一个零点,在 $p = 0.8$ 处有一个极点,因此系统的频率响应为

$$H(\omega) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 0.8}$$

幅度响应为

$$|H(\omega)| = \frac{|e^{j\omega}|}{|e^{j\omega} - 0.8|} = \frac{1}{\sqrt{1.64 - 1.6\cos\omega}}$$

相位响应为

$$\theta(\omega) = \omega - \arctan\frac{\sin\omega}{\cos\omega - 0.8}$$

幅度和相位响应如图 5.2.3 所示。我们注意到，幅度响应的峰值出现在 $\omega = 0$ 处，这一点在单位圆上最靠近在 0.8 处的极点。

如果式(5.2.17)中的幅度响应表示成分贝形式，那么

$$|H(\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\lg|b_0| + 20\sum_{k=1}^{M}\lg V_k(\omega) - 20\sum_{k=1}^{N}\lg U_k(\omega) \tag{5.2.23}$$

因此，幅度响应可以表示成 $|H(\omega)|$ 各因子幅度的和。

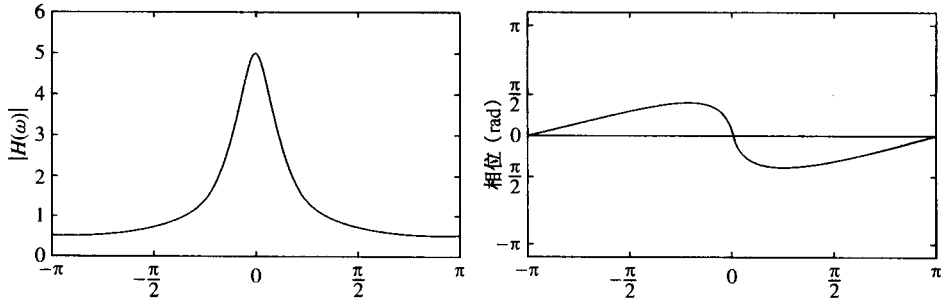


图 5.2.3　系统 $H(z) = 1/(1-0.8z^{-1})$ 的幅度和相位

5.3　LTI 系统输出的相关函数和频谱

在这一节中，我们将推导 LTI 系统输入和输出信号的频谱关系。在 5.3.1 节，将描述确定性输入和输出信号的能量密度谱关系；在 5.3.2 节，将集中介绍随机输入和输出信号的功率密度谱关系。

5.3.1　输入–输出相关函数和频谱

在 2.6.4 节中，我们描述了 LTI 系统输入和输出序列的各种相互关系。特别地，还推导出了以下等式：

$$r_{yy}(m) = r_{hh}(m) * r_{xx}(m) \tag{5.3.1}$$

$$r_{yx}(m) = h(m) * r_{xx}(m) \tag{5.3.2}$$

其中，$r_{xx}(m)$ 是输入信号 $\{x(n)\}$ 的自相关序列，$r_{yy}(m)$ 是输出信号 $\{y(n)\}$ 的自相关序列，$r_{hh}(m)$ 是冲激响应 $\{h(n)\}$ 的自相关序列，$r_{yx}(m)$ 是输出和输入信号之间的互相关序列。因为式(5.3.1)和式(5.3.2)包含有卷积运算，所以对这些等式进行 z 变换得出

$$\begin{aligned} S_{yy}(z) &= S_{hh}(z)S_{xx}(z) \\ &= H(z)H(z^{-1})S_{xx}(z) \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

$$S_{yx}(z) = H(z)S_{xx}(z) \tag{5.3.4}$$

如果将 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 代入式(5.3.4)，那么可以得到

$$S_{yx}(\omega) = H(\omega)S_{xx}(\omega) = H(\omega)|X(\omega)|^2 \tag{5.3.5}$$

其中，$S_{yx}(\omega)$ 是 $\{y(n)\}$ 和 $\{x(n)\}$ 的互能量密度谱。类似地，在单位圆上计算 $S_{yy}(z)$ 得到输出信号的能量密度谱

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \tag{5.3.6}$$

其中，$S_{xx}(\omega)$ 是输入信号的能量密度谱。

因为 $r_{yy}(m)$ 和 $S_{yy}(\omega)$ 是傅里叶变换对，所以它们满足

$$r_{yy}(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{yy}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega m}\mathrm{d}\omega \tag{5.3.7}$$

输出信号的总能量仅仅是

$$E_y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{yy}(\omega)\mathrm{d}\omega=r_{yy}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(\omega)|^2\,S_{xx}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{5.3.8}$$

利用式(5.3.8)中的结果,可以很容易地证明 $E_y\geqslant 0$。

最后,我们注意到,如果输入信号的频谱是平坦的[即对于 $-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$, $S_{xx}(\omega)=S_x=$常数],那么式(5.3.5)就简化为

$$S_{yx}(\omega)=H(\omega)S_x \tag{5.3.9}$$

其中,S_x 是频谱常数。因此,

$$H(\omega)=\frac{1}{S_x}S_{yx}(\omega) \tag{5.3.10}$$

或等价地

$$h(n)=\frac{1}{S_x}r_{yx}(m) \tag{5.3.11}$$

式(5.3.11)中的关系意味着,通过在输入端用一个平坦频谱的信号$\{x(n)\}$激励系统,并确定系统输入和输出的互相关特性,就可以计算 $h(n)$。这种方法在测量未知系统的冲激响应时是非常有用的。

5.3.2 随机输入信号的相关函数和功率谱

本节讨论的内容与 5.3.1 节的内容类似,所不同的是现在将会涉及到统计平均以及 LTI 系统输入和输出信号的互相关特性。

我们现在来考虑一个离散时间线性时不变系统,它的单位采样响应为$\{h(n)\}$,频率响应为 $H(f)$。为了推导出结果,假设$\{h(n)\}$是实数。令 $x(n)$为激励系统的静态随机过程 $X(n)$的采样函数,令 $y(n)$表示系统对 $x(n)$的响应。

从输入和输出的卷积和关系得出

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k) \tag{5.3.12}$$

因为 $x(n)$是随机输入信号,所以输出也是随机序列。换言之,对随机过程$X(n)$的每个采样序列 $x(n)$,输出随机过程 $Y(n)$都有一个采样序列 $y(n)$与之相对应。我们希望能找出输出随机过程 $Y(n)$的统计特性和输入过程的统计特性之间的关系,并描述出系统的特性。

输出 $y(n)$的期望值为

$$\begin{aligned}m_y\equiv E[y(n)]&=E\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)\Big]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)E[x(n-k)]\\ m_y&=m_x\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

从傅里叶变换关系

$$H(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k} \tag{5.3.14}$$

可得出

$$H(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k) \tag{5.3.15}$$

这就是系统的直流增益。利用式(5.3.15)中的关系，可将式(5.3.13)中的均值表示为

$$m_y=m_xH(0) \tag{5.3.16}$$

输出随机过程的自相关序列定义为

$$\begin{aligned}\gamma_{yy}(m)&=E[y^*(n)y(n+m)]\\&=E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x^*(n-k)\sum_{j=-\infty}^{\infty}h(j)x(n+m-j)\right]\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}h(k)h(j)E[x^*(n-k)x(n+m-j)]\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}h(k)h(j)\gamma_{xx}(k-j+m)\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

这是输出自相关序列用输入自相关序列和系统冲激响应来表示的一般形式。

当输入随机过程为白噪声时，就得到了式(5.3.17)的一种特殊形式，即当 $m_x=0$ 时，

$$\gamma_{xx}(m)=\sigma_x^2\delta(m) \tag{5.3.18}$$

其中 $\sigma_x^2\equiv\gamma_{xx}(0)$ 为输入信号功率，于是式(5.3.17)简化为

$$\gamma_{yy}(m)=\sigma_x^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)h(k+m) \tag{5.3.19}$$

在这种条件下，输出过程的平均功率为

$$\gamma_{yy}(0)=\sigma_x^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}h^2(n)=\sigma_x^2\int_{-1/2}^{1/2}|H(f)|^2\mathrm{d}f \tag{5.3.20}$$

这里应用了帕塞瓦定理。

通过计算 $\gamma_{yy}(m)$ 的功能密度谱，式(5.3.17)中的关系可以转换到频域，

$$\begin{aligned}\Gamma_{yy}(\omega)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_{yy}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega m}\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(k)h(l)\gamma_{xx}(k-l+m)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega m}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(k)h(l)\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_{xx}(k-l+m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega m}\right]\\&=\Gamma_{xx}(f)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k}\right]\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega l}\right]\\&=|H(\omega)|^2\Gamma_{xx}(\omega)\end{aligned} \tag{5.3.21}$$

这才是我们想要的输出过程的功率谱密度关系式，它是用输入过程的功率密度谱和系统的频率响应形式表示的。

随机输入的连续时间系统的等价表达式为

$$\Gamma_{yy}(F) = |H(F)|^2\Gamma_{xx}(F) \tag{5.3.22}$$

其中,功率密度谱 $\Gamma_{yy}(F)$和 $\Gamma_{xx}(F)$分别是自相关函数 $\gamma_{yy}(\tau)$和 $\gamma_{xx}(\tau)$的傅里叶变换,$H(F)$是系统的频率响应,它与冲激响应满足傅里叶变换关系,即

$$H(F) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}t \tag{5.3.23}$$

作为最后一项练习,现在来计算输出 $y(n)$和输入信号 $x(n)$的自相关函数。如果将式(5.3.12)两边同乘以 $x^*(n-m)$,并取数学期望值,则有

$$E[y(n)x^*(n-m)] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x^*(n-m)x(n-k)\right]$$

$$\gamma_{yx}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)E[x^*(n-m)x(n-k)] \tag{5.3.24}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\gamma_{xx}(m-k)$$

因为式(5.3.24)是卷积形式,所以频域等价表达式为

$$\Gamma_{yx}(\omega) = H(\omega)\Gamma_{xx}(\omega) \tag{5.3.25}$$

对于 $x(n)$是白噪声时的特殊情况,式(5.3.25)简化为

$$\Gamma_{yx}(\omega) = \sigma_x^2 H(\omega) \tag{5.3.26}$$

其中,σ_x^2 是输入噪声功率。以上结果表明,一个未知系统的频率响应 $H(\omega)$可以通过以下步骤来确定:首先用白噪声作为输入激励系统,然后求解输入和输出序列的互相关特性得到 $\gamma_{yx}(m)$,最后再对 $\gamma_{yx}(m)$进行傅里叶变换。这些计算的结果与 $H(\omega)$成正比例。

5.4 作为频率选择滤波器的线性时不变系统

"滤波器"这个术语常用来描述一个设备,根据作用于输入端的对象的某些属性进行分辨过滤,以让某部分通过它。例如,空气过滤器只允许空气通过它,而阻止存在于空气中的灰尘颗粒通过它。油过滤器执行着类似的功能,所不同的是,油是允许通过过滤器的物质,而污垢颗粒被聚集在过滤器的入口处,阻止通过过滤器。在摄影方面,紫外线过滤器经常用来阻止存在于阳光中、可见光范围之外的紫外线通过,以避免影响胶片上的化学药品。

在前面的章节我们已经看到,线性时不变系统也同样起着一种分辨或滤除输入端的各种频率分量的作用。这种滤波性质是由频率响应特性 $H(\omega)$决定的,反过来,这得依赖于系统参数的选择(比如,描述系统特性的差分方程的系数$\{a_k\}$和$\{b_k\}$)。因此,通过适当地选择各个系数,可以设计出频率选择滤波器,在某些频段的频率分量的信号可以通过,而包含在其他频段的频率分量中的信号将被衰减。

通常,线性时不变系统会根据它的频率响应 $H(\omega)$来改变输入信号频谱 $X(\omega)$,产生出频谱为 $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$的输出信号。在某种意义上,$H(\omega)$对输入信号中不同频率分量起着加权函数或者频谱整形函数的作用。从本节前后的描述来看,任何线性时不变系统都可被认为频率整形滤波器,即使它不需要完全阻止部分或全部频率分量。因此,"线性时不变系统"和"滤波器"这两个术语是同义的,常常可以替换使用。

我们使用“滤波器”这个术语来描述线性时不变系统的频谱整形或者频率选择滤波。滤波在数字信号处理中的使用相当广泛，例如，从有用的信号中去除不想要的噪声，类似于通信信道均衡的频谱整形，在雷达、声纳、通信中的信号检测，以及信号频谱分析，等等。

5.4.1　理想滤波器特性

根据频域特性，常常将滤波器分为低通、高通、带通、带阻、全通滤波器。这些类型滤波器的理想幅度响应特性如图 5.4.1 所示。从图上可以看出，这些理想滤波器有一个常数增益（通常视为单位增益）的带通特性，而在带阻部分的增益为零。

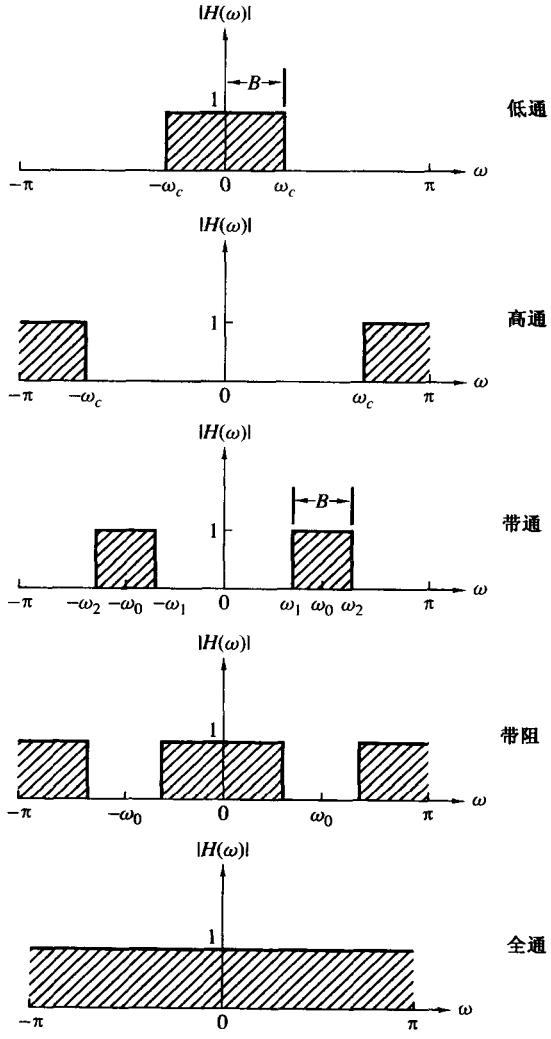


图 5.4.1　某些理想频率选择、离散时间滤波器的幅度响应

理想滤波器的另外一个特性是线性相位响应。为了说明这一点，假设一个信号序列 $\{x(n)\}$ 的频率分量限制在频率范围 $\omega_1 < \omega < \omega_2$ 内，这个信号通过具有以下频率响应的滤波器：

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega n_0}, & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{5.4.1}$$

其中,C 和 n_0 是常数。滤波器输出端的信号频谱为

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\ &= CX(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0}, \qquad \omega_1 < \omega < \omega_2 \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

利用傅里叶变换的缩放与时移特性,得到时域输出

$$y(n) = Cx(n - n_0) \tag{5.4.3}$$

因此,滤波器输出仅仅是延时和幅度缩放的输入信号的另一种形式。纯延时是可以忍受的,这并不认为是信号的失真,同样幅度缩放也不认为是信号失真。所以,理想滤波器在其带通范围内,具有线性相频特性,即

$$\Theta(\omega) = -\omega n_0 \tag{5.4.4}$$

相位对频率的导数为单位延迟,所以可以将信号延时定义成频率的函数,

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\mathrm{d}\Theta(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \tag{5.4.5}$$

$\tau_g(\omega)$通常称为滤波器的包络时延或群时延。我们把 $\tau_g(\omega)$解释为信号频率为 ω 的信号分量从输入到输出通过系统后所经历的延时。注意,当式(5.4.4)中的 $\Theta(\omega)$为线性时,$\tau_g(\omega) = n_0 =$ 常数。在这种情况下,输入信号的所有频率分量都经历相同的延时。

总之,理想滤波器在它的通频带内,具有常数的幅频特性和线性的相频特性。在所有情况下,这些滤波器都是物理上不可实现的,它们只能作为实际滤波器的数学理想化模型。例如,理想低通滤波器的冲激响应为

$$h_{lp}(n) = \frac{\sin \omega_c \pi n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.4.6}$$

我们注意到,这个滤波器不是因果的,也不是绝对可和的,因此它也是不稳定的。所以,这个理想滤波器是物理上不可实现的。然而,物理上可实现的滤波器的频率响应特性在实际中可以非常接近理想滤波器,这将在第 10 章进行介绍。

在接下来的讨论中,我们通过在 z 平面放置极点和零点,来设计一些简单的数字滤波器。我们已经描述了极点和零点的位置是如何影响系统的频率响应特性,特别是在 5.2.2 节,我们介绍了使用图形方法,从零-极点图来计算频率响应特性。这种方法同样可以用来设计许多具有我们期望频率响应特性的、简单但很重要的数字滤波器。

放置零-极点的基本原则是:在单位圆上对应于需要加强频率的点附近放置极点,在需要拉低的频率点处附近放置零点。此外,还必须注意下面的约束:

1. 为了做到滤波器的稳定,所有极点必须放置在单位圆内,而零点可以放在 z 平面上的任何位置。
2. 为了使滤波器系数是实数,所有复值的零点和极点必须以复共轭对的形式出现。

从前面的讨论可以回想起,对于一个给定的零-极点模型,系统函数 $H(z)$可以表示为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k z^{-1})} \tag{5.4.7}$$

其中,b_0 是为了归一化在某个指定的频率处的频率响应而选取的增益常数。即选择 b_0 以使得

$$|H(\omega_0)| = 1 \tag{5.4.8}$$

其中，ω_0 是滤波器通频带内的频率。通常，选择 N 要大于或等于 M，这样滤波器的非平凡的极点数才会多于零点数。

在下一节，我们将介绍在设计简单的低通、高通、带通滤波器、数字谐振器和梳状滤波器时的零-极点放置方法。在具有图形终端的数字计算机上，可以很便利地、交互式地进行这些设计步骤。

5.4.2　低通、高通和带通滤波器

在设计低通数字滤波器时，极点要放置在对应低频点（靠近 $\omega = 0$）的单位圆附近，零点要放置在对应高频点（靠近 $\omega = \pi$）的单位圆上或单位圆附近。

三个低通和三个高通滤波器的零-极点布局如图 5.4.2 所示。一个单极点滤波器的系统函数为

$$H_1(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}} \tag{5.4.9}$$

它的幅度和相位响应如图 5.4.3 所示，其中 $a = 0.9$。选择 $1 - a$ 作为增益 G，使得滤波器在 $\omega = 0$ 处具有单位增益，而这个滤波器在高频处增益相对较小。

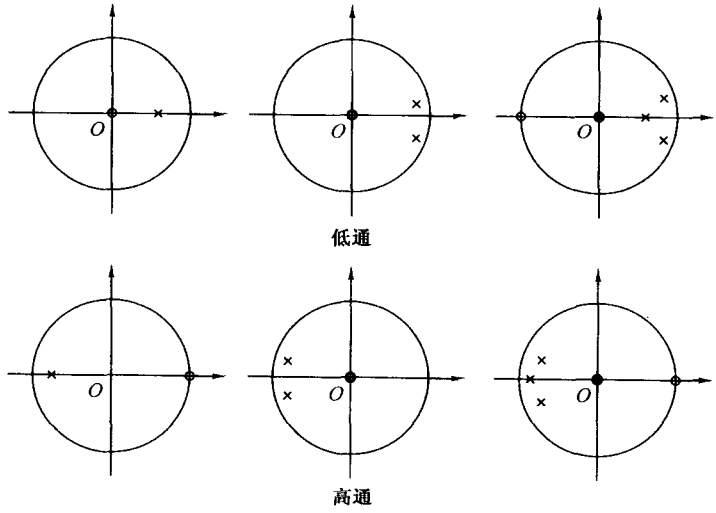


图 5.4.2　几个低通和高通滤波器的零-极点模型

进一步，在 $z = -1$ 处增加一个零点，将会减弱滤波器在高频的响应，这将得出另外一种滤波器，它的系统函数为

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} \tag{5.4.10}$$

它的频率响应特性同样画在图 5.4.3 上，在这种情况下，$H_2(\omega)$ 在 $\omega = \pi$ 处幅度将变为零。

类似地，通过将低通滤波器的零-极点位置在 z 平面关于虚轴进行反转（折叠），就可以得到简单的高通滤波器，因此得到的系统函数为

$$H_3(z) = \frac{1-a}{2}\frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}} \tag{5.4.11}$$

它的频率响应特性如图 5.4.4 所示，其中 $a = 0.9$。

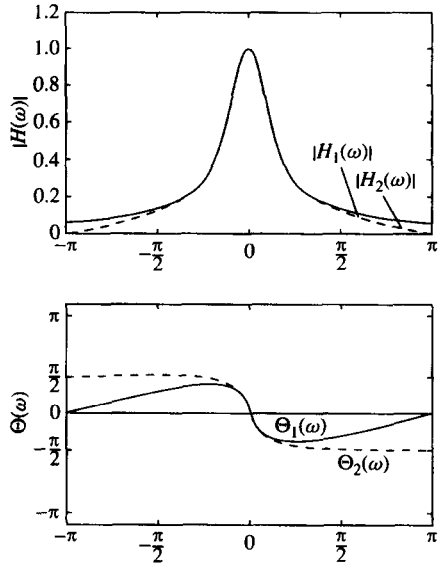


图 5.4.3 滤波器的幅度和相位响应(1)单极点滤波器;(2)具有一个极点和一个零点的滤波器:$H_1(z)=(1-a)/(1-az^{-1})$,$H_2(z)=[(1-a)/2][(1+z^{-1})/(1-az^{-1})]$,其中 $a=0.9$

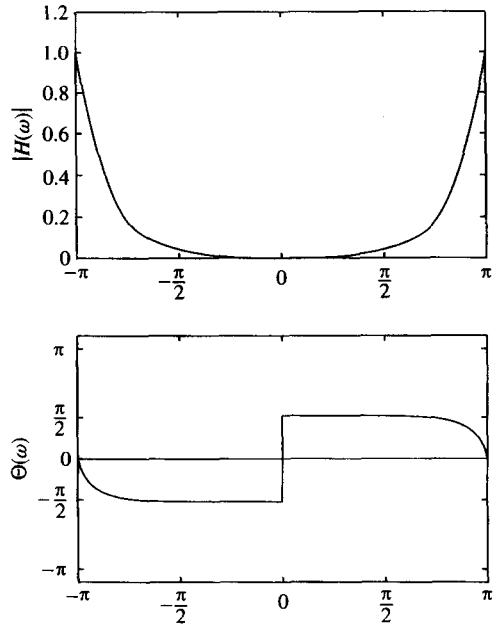


图 5.4.4 一个简单高通滤波器的幅度和相位响应:$H(z)=[(1-a)/2][(1-z^{-1})/(1+az^{-1})]$,其中 $a=0.9$

例 5.4.1 一个两个极点的滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{b_0}{(1-pz^{-1})^2}$$

计算 b_0 和 p 的值,使得频率响应 $H(\omega)$ 满足条件

$$H(0)=1$$

以及

$$\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|^2=\frac{1}{2}$$

解:在 $\omega=0$ 处,得到

$$H(0)=\frac{b_0}{(1-p)^2}=1$$

因而

$$b_0=(1-p)^2$$

在 $\omega=\pi/4$ 处,

$$H\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(1-p)^2}{(1-pe^{-j\pi/4})^2}$$

$$=\frac{(1-p)^2}{(1-p\cos(\pi/4)+jp\sin(\pi/4))^2}$$

$$=\frac{(1-p)^2}{(1-p/\sqrt{2}+jp/\sqrt{2})^2}$$

所以

$$\frac{(1-p)^4}{[(1-p/\sqrt{2})^2+p^2/2]^2}=\frac{1}{2}$$

或等价地，

$$\sqrt{2}(1-p)^2=1+p^2-\sqrt{2}p$$

满足这个方程的解为 $p=0.32$，因此，期望滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{0.46}{(1-0.32z^{-1})^2}$$

同样的规则还可应用于设计带通滤波器。基本上，带通滤波器在其通频带内的某些频段附近、靠近单位圆处应该包含一个或多个复共轭的极点对。现在就用下面的例子来阐明这个基本思想。

例 5.4.2　设计一个两个极点的带通滤波器，它的通频带的中心在 $\omega=\pi/2$ 处，零值在频率响应特性的 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处，幅度响应在 $\omega=4\pi/9$ 处的值为 $1/\sqrt{2}$。

解：很明显，这个滤波器的极点必定存在于

$$p_{1,2}=re^{\pm j\pi/2}$$

并且在 $z=1$ 和 $z=-1$ 处存在零点。因而，系统函数为

$$H(z)=G\frac{(z-1)(z+1)}{(z-jr)(z+jr)}=G\frac{z^2-1}{z^2+r^2}$$

通过计算滤波器在 $\omega=\pi/2$ 处的频率响应 $H(\omega)$ 值，可以确定增益因子，从而

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right)=G\frac{2}{1-r^2}=1$$

$$G=\frac{1-r^2}{2}$$

通过计算 $H(\omega)$ 在 $\omega=4\pi/9$ 的值，可以确定 r 的值，从而

$$\left|H\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right|^2=\frac{(1-r^2)^2}{4}\frac{2-2\cos(8\pi/9)}{1+r^4+2r^2\cos(8\pi/9)}=\frac{1}{2}$$

或等价地，

$$1.94(1-r^2)^2=1-1.88r^2+r^4$$

满足这个方程的解为 $r^2=0.7$。所以，期望的滤波器的系统函数为

$$H(z)=0.15\frac{1-z^{-2}}{1+0.7z^{-2}}$$

它的频率响应如图 5.4.5 所示。

值得强调的是，前面讲述通过放置零-极点来设计简单数字滤波器方法的主要目的是为了让读者领悟极点和零点对系统频率响应特性的影响。这种方法并不是我们想要的设计具有指定带通和带阻特性数字滤波器的好办法。在实际应用中，常用对称方法来设计复杂的数字滤波器，这将在第 10 章进行讨论。

低通到高通滤波器的简单转换。假如我们设计了一个冲激响应为 $h_{lp}(n)$ 的原型低通滤波器，利用傅里叶变换的频移特性，有可能将这个原型滤波器转换成带通滤波器或高通滤波器。这种将原型低通滤波转换成另一种形式滤波器所用的频率转移方法，将在 10.3 节详细描述。在这一节中，我们来介绍将一种简单的低通滤波器转换成高通滤波器的频率转移方法，反之亦然。

如果 $h_{lp}(n)$表示频率响应为 $H_{lp}(\omega)$的低通滤波器的冲激响应,通过将 $H_{lp}(\omega)$平移 π 弧度(即用 $\omega-\pi$ 代替 ω),可以得到高通滤波器,所以

$$H_{hp}(\omega)=H_{lp}(\omega-\pi) \tag{5.4.12}$$

其中,$H_{hp}(\omega)$是高通滤波器频率响应。因为频率平移了 π 弧度,等价于冲激响应 $h_{lp}(n)$乘了 $e^{j\pi n}$,所以高通滤波器的冲激响应为

$$h_{hp}(n)=(e^{j\pi})^n h_{lp}(n)=(-1)^n h_{lp}(n) \tag{5.4.13}$$

因而,仅仅通过改变低通滤波器冲激响应 $h_{lp}(n)$中奇数样本的符号,就得到高通滤波器的冲激响应。相反,

$$h_{lp}(n)=(-1)^n h_{hp}(n) \tag{5.4.14}$$

如果低通滤波器由差分方程来描述,

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k) \tag{5.4.15}$$

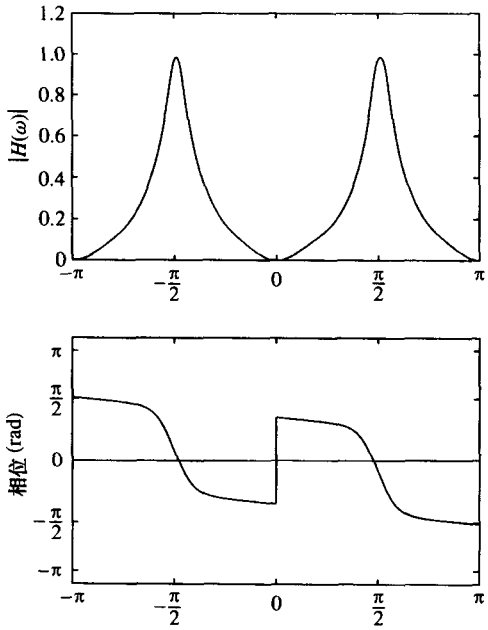


图 5.4.5 例 5.4.2 中的简单带通滤波器的幅度和相位响应 $H(z)=0.15[(1-z^{-2})/(1+0.7z^{-2})]$

那么它的频率响应为

$$H_{lp}(\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k e^{-j\omega k}} \tag{5.4.16}$$

现在,如果用 $\omega-\pi$ 来代替式(5.4.16)中的 ω,那么

$$H_{hp}(\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{M}(-1)^k b_k e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k a_k e^{-j\omega k}} \tag{5.4.17}$$

与之对应的差分方程为

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}(-1)^k a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}(-1)^k b_k x(n-k) \tag{5.4.18}$$

例 5.4.3 一个低通滤波器的差分方程为

$$y(n)=0.9y(n-1)+0.1x(n)$$

试将它转换成高通滤波器。

解:根据式(5.4.18),得出高通滤波器的差分方程为

$$y(n)=-0.9y(n-1)+0.1x(n)$$

它的频率响应为

$$H_{hp}(\omega)=\frac{0.1}{1+0.9e^{-j\omega}}$$

读者可以验证 $H_{hp}(\omega)$ 的高通特性。

5.4.3　数字谐振器

数字谐振器是一种特殊的两极点带通滤波器，这两个极点以复共轭对的形式位于单位圆附近，如图 5.4.6(a)所示。该滤波器的幅度响应如图 5.4.6(b)所示。谐振器这个名字归因于这个滤波器在极点位置附近具有较大的幅度响应(也就是共振)这个事实。极点的角度位置决定了滤波器的共振频率。数字谐振器在许多应用中是非常有用的，包括简单的带通滤波以及语音生成。

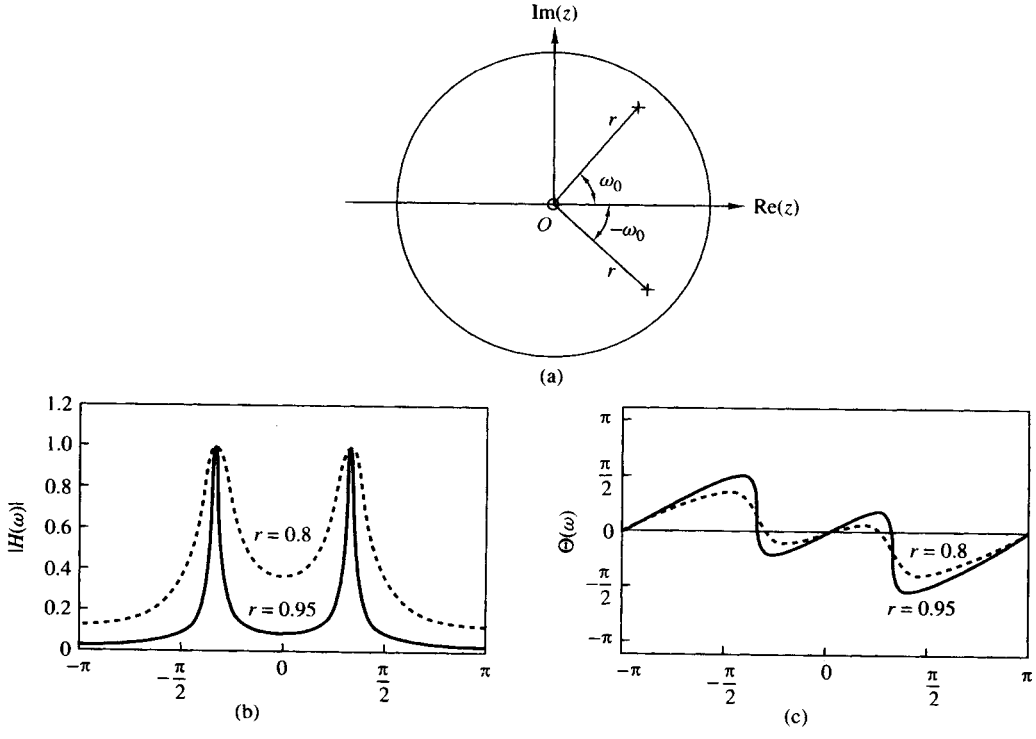


图 5.4.6　数字谐振器(1) $r=0.8$，(2) $r=0.95$。(a)零-极点模式；(b)对应的幅度响应；(c)对应的相位响应

在设计数字谐振器时，要使共振峰值出现在 $\omega=\omega_0$ 处或其附近，选择复共轭的极点位于

$$p_{1,2}=re^{\pm j\omega_0},\qquad 0<r<1$$

另外，我们可以选择最多两个零点。虽然有许多种可能的选择，但有两种情况是至关重要的。一种选择是把零点定位在原点；另一种选择是把一个零点定位在 $z=1$ 处，把另一个零点定位在 $z=-1$ 处。这种选择完全消除了滤波器在频率 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处的响应，这在实际应用中是非常有用的。

零点在原点的数字谐振器的系统函数为

$$H(z)=\frac{b_0}{(1-re^{j\omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})} \tag{5.4.19}$$

$$H(z)=\frac{b_0}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}} \tag{5.4.20}$$

因为$|H(\omega)|$的峰值出现在$\omega=\omega_0$处或其附近,所以选择增益b_0使$|H(\omega_0)|=1$。从式(5.4.19)得出

$$\begin{aligned}H(\omega_0)&=\frac{b_0}{(1-re^{j\omega_0}e^{-j\omega_0})(1-re^{-j\omega_0}e^{-j\omega_0})}\\&=\frac{b_0}{(1-r)(1-re^{-j2\omega_0})}\end{aligned}\tag{5.4.21}$$

因此,

$$|H(\omega_0)|=\frac{b_0}{(1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos 2\omega_0}}=1$$

所以,期望的归一化因子为

$$b_0=(1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos 2\omega_0}\tag{5.4.22}$$

式(5.4.19)中谐振器的频率响应可表示为

$$\begin{aligned}|H(\omega)|&=\frac{b_0}{U_1(\omega)U_2(\omega)}\\\Theta(\omega)&=2\omega-\Phi_1(\omega)-\Phi_2(\omega)\end{aligned}\tag{5.4.23}$$

其中,$U_1(\omega)$和$U_2(\omega)$是从p_1和p_2到单位圆上点ω的矢量幅度,$\Phi_1(\omega)$和$\Phi_2(\omega)$是这两个矢量的对应角度。幅度$U_1(\omega)$和$U_2(\omega)$可表示为

$$\begin{aligned}U_1(\omega)&=\sqrt{1+r^2-2r\cos(\omega_0-\omega)}\\U_2(\omega)&=\sqrt{1+r^2-2r\cos(\omega_0+\omega)}\end{aligned}\tag{5.4.24}$$

对于任何r值,$U_1(\omega)$在$\omega=\omega_0$处取得最小值$(1-r)$,积$U_1(\omega)U_2(\omega)$的最小值在频率

$$\omega_r=\arccos\left(\frac{1+r^2}{2r}\cos\omega_0\right)\tag{5.4.25}$$

它准确地定义了滤波器的共振频率。我们观察到,当r非常接近1时,$\omega_r\approx\omega_0$,这是极点的角度位置。我们还可以看到,当r接近1时,共振的峰值会变得更加尖锐,这是因为$U_1(\omega)$在ω_0附近的变化相对更迅速了。滤波器的3 dB带宽$\Delta\omega$提供了谐振器尖锐程度的定量评估方法。对于r接近1,

$$\Delta\omega\approx 2(1-r)\tag{5.4.26}$$

图5.4.6画出了数字谐振器在$\omega_0=\pi/3$,$r=0.8$以及$\omega_0=\pi/3$,$r=0.95$时的幅度和相位响应。我们注意到,相位响应在共振频率附近经历了最大的变化率。

如果数字谐振器的零点放置在$z=1$和$z=-1$处,那么谐振器的系统函数为

$$\begin{aligned}H(z)&=G\frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-re^{j\omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})}\\&=G\frac{1-z^{-2}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}\end{aligned}\tag{5.4.27}$$

频率响应特性为

$$H(\omega)=b_0\frac{1-e^{-j2\omega}}{[1-re^{j(\omega_0-\omega)}][1-re^{-j(\omega_0+\omega)}]}\tag{5.4.28}$$

我们观察到，零点在 $z=\pm 1$ 处，谐振器的幅度和相位响应都受到影响。例如，幅度响应为

$$|H(\omega)| = b_0 \frac{N(\omega)}{U_1(\omega)U_2(\omega)} \tag{5.4.29}$$

其中，$N(\omega)$定义为

$$N(\omega) = \sqrt{2(1-\cos 2\omega)}$$

由于零因子的存在，表达式(5.4.25)所给出的共振频率发生了变化，滤波器的带宽也同样发生了变化。尽管要推导出这两个参数的精确值是令人非常头痛的，但我们可以很容易地计算出式(5.4.28)中的频率响应，并与前面那种零点在原点情况的结果进行比较。

图 5.4.7 画出了 $\omega_0=\pi/3, r=0.8$ 和 $\omega_0=\pi/3, r=0.95$ 的幅度和相频特性。我们观察到，这个滤波器的带宽比零点在原点的谐振器要稍微窄了一些。另外，由于零点的存在，共振频率也发生非常小的偏移。

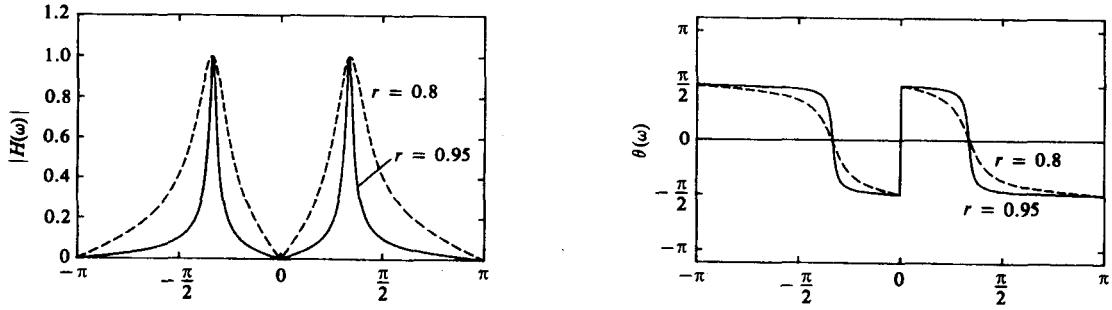


图 5.4.7　零点在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处的数字谐振器的幅度和相位响应：(1) $r=0.8$，(2) $r=0.95$

5.4.4　槽口滤波器

槽口滤波器是包含一个或多个深槽口的滤波器，理想情形下，在这些点的频率响应为零。图 5.4.8 画出了一个槽口滤波器的频率响应特性，它在频率 ω_0 和 ω_1 处的响应为零。槽口滤波器在许多必须滤除指定的频率分量的应用中是很有用的。例如，在仪表应用和录音系统中，要求滤除电力线的 60 Hz 频率及其谐波。

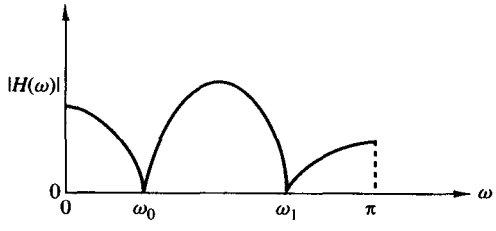


图 5.4.8　槽口滤波器的频率响应特性

为了使滤波器频率响应特性在频率 ω_0 处产生零值，我们只需在单位圆的角 ω_0 处引入一对复共轭的零点。即

$$z_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega_0}$$

从而，FIR 槽口滤波器的系统函数仅仅是

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}z^{-1})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}z^{-1}) \\ &= b_0(1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}) \end{aligned} \tag{5.4.30}$$

如图 5.4.9 所示，该槽口滤波器的幅度响应在 $\omega=\pi/4$ 处为零。

FIR 槽口滤波器的问题是槽口具有相对大的带宽，这意味着在期望为零的频率点周围的其他频率分量也受到严重衰减。为了缩小槽口零点的带宽，我们可以采用更复杂更长的 FIR 滤波器，

它的设计标准将在第 10 章进行讲述。另一种可行的办法是,我们可以用一种特殊的方法,试图在系统函数中引入极点以改善频率响应特性。

假设在

$$p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$$

处放置了一对复共轭的极点,极点的影响是在槽口零点处引起了共振,因而会缩小槽口的带宽。改善后的滤波器的系统函数为

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \tag{5.4.31}$$

式(5.4.31)中的滤波器的幅度响应 $|H(\omega)|$ 如图 5.4.10 所示,其中 $\omega_0 = \pi/4$, $r = 0.85$ 以及 $\omega_0 = \pi/4$, $r = 0.95$。与图 5.4.9 所画的 FIR 滤波器的频率响应相比,发现极点的影响是缩小槽口的带宽。

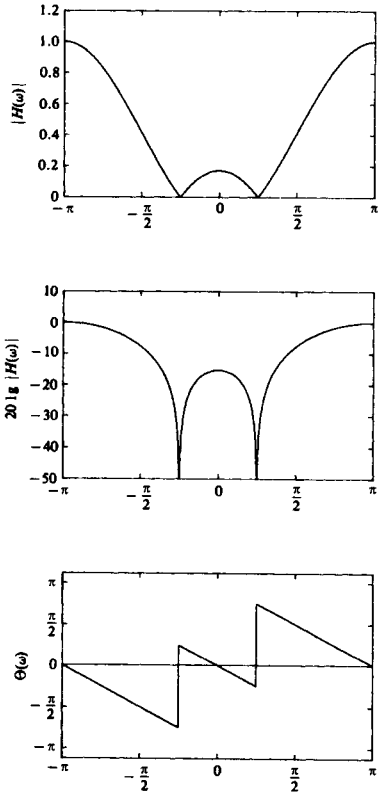


图 5.4.9 槽口滤波器的频率响应特性。槽口位于 $\omega = \pi/4$,或 $f = 1/8$ 处,$H(z) = G[1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}]$

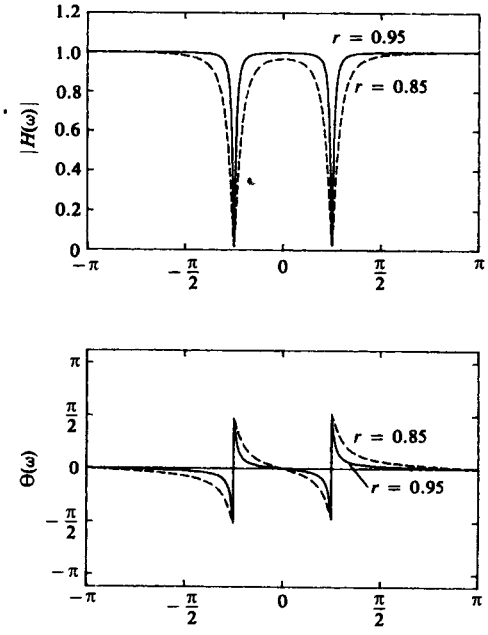


图 5.4.10 双槽口滤波器的频率响应特性,$H(z) = b_0[(1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2})/(1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r_2 z^{-2})]$。(1)极点位于 $r = 0.85$;(2)极点位于 $r = 0.95$

另外,在槽口零点附近引入极点来缩小槽口带宽,会导致在滤波器的通频带内产生小的纹波,这是由极点产生的共振造成的。为了减弱纹波的影响,可以在槽口滤波器系统函数中引入附加的极点和(或)零点。这种方法的主要问题是,它基本上是一种反复实验的方法。

5.4.5 梳状滤波器

梳状滤波器最简单的形式可以视为槽口滤波器,在它的频带范围内,槽口零值会周期性地出

现。因此，类推到普通的梳状滤波器，也会有周期性间隔的牙齿。梳状滤波器在实际的系统中有着广泛的应用，比如抑制电力线谐波，从电离层测得的电子浓度中分离出太阳和月亮分量，降低固定物体在运行目标指示雷达中产生的混乱，等等。

为了描述梳状滤波器的简单形式，考虑如下滑动平均(FIR)滤波器，它的差分方程为

$$y(n)=\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M}x(n-k) \tag{5.4.32}$$

这个 FIR 滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M}z^{-k}=\frac{1}{M+1}\frac{[1-z^{-(M+1)}]}{(1-z^{-1})} \tag{5.4.33}$$

它的频率响应为

$$H(\omega)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega M/2}}{M+1}\frac{\sin\omega(\frac{M+1}{2})}{\sin(\omega/2)} \tag{5.4.34}$$

从式(5.4.33)可以看出，该滤波器的零点位于单位圆上，

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/(M+1)},\qquad k=1,2,3,\cdots,M \tag{5.4.35}$$

我们注意到，在 $z=1$ 处的极点实际上被 $z=1$ 处的零点抵消了，这使得该滤波器实际上除 $z=0$ 以外不再含有极点。

式(5.4.34)的幅频特性图清楚地说明了在频率 $\omega_k=2\pi k/(M+1)$ 处有周期性间隔的零点存在，$k=1,2,\cdots,M$。图 5.4.11 画出了 $M=10$ 的 $|H(\omega)|$ 图。

以更普通的形式，通过采用系统函数为

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M}h(k)z^{-k} \tag{5.4.36}$$

的 FIR 滤波器，并用 z^L 来代替 z，就可以构造梳状滤波器，其中 L 为正整数，因而得到新的 FIR 滤波器的系统函数为

$$H_L(z)=\sum_{k=0}^{M}h(k)z^{-kL} \tag{5.4.37}$$

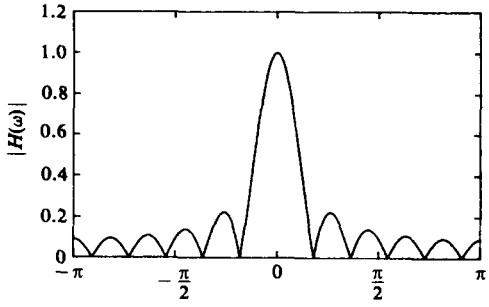


图 5.4.11　式(5.4.34)给出的梳状滤波器的幅度响应特性，$M=10$

如果原 FIR 滤波器的频率响应为 $H(\omega)$，那么式(5.4.37)中 FIR 的频率响应为

$$\begin{aligned}H_L(\omega)&=\sum_{k=0}^{M}h(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kL\omega}\\&=H(L\omega)\end{aligned} \tag{5.4.38}$$

因此，$H_L(\omega)$的频率响应特性仅仅是 $H(\omega)$在区间 $0\leqslant\omega\leqslant2\pi$ 内的 L 阶重得。图 5.4.12 画出了 $H_L(\omega)$和 $H(\omega)$在 $L=5$ 时，两者之间的关系。

现在假设原 FIR 滤波器的系统函数 $H(z)$的频谱在某个频率 ω_0 处为零值，于是滤波器的系统函数 $H_L(z)$会有周期间隔的零值出现在 $\omega_k=\omega_0+2\pi k/L$，$k=0,1,2,\cdots,L-1$。作为说明，

图 5.4.13 画出了一个 $M=3$ 及 $L=3$ 的 FIR 梳状滤波器。该 FIR 滤波器可以视为一个长度为 10 的 FIR 滤波器,但是 10 个滤波系数中只有 4 个为非零值。

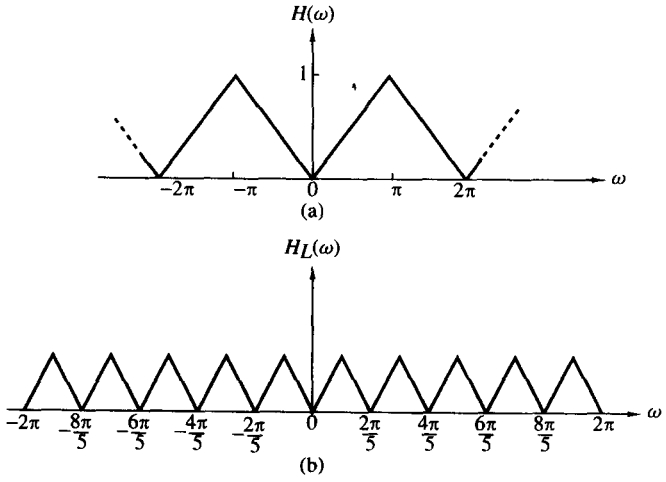


图 5.4.12 从 $H(\omega)$得到的梳状滤波器的频率响应 $H_L(\omega)$

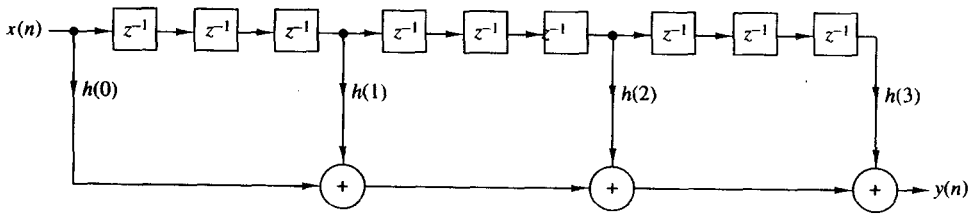


图 5.4.13 $M=3$ 及 $L=3$ 的 FIR 梳状滤波器的实现

现在再回到系统函数由式(5.4.33)给出的滑动平均滤波器。假设用 z^L 代替 z,于是得到的梳状滤波器的系统函数为

$$H_L(z)=\frac{1}{M+1}\,\frac{1-z^{-L(M+1)}}{1-z^{-L}} \tag{5.4.39}$$

它的频率响应为

$$H_L(\omega)=\frac{1}{M+1}\,\frac{\sin[\omega L(M+1)/2]}{\sin(\omega L/2)}\,e^{-j\omega LM/2} \tag{5.4.40}$$

该滤波器有零点位于单位圆上,

$$z_k=e^{j2\pi k/L(M+1)} \tag{5.4.41}$$

其中,k 是不等于 $0,L,2L,\cdots,ML$ 的所有整数。图 5.4.14 画出了 $L=3$ 及 $M=10$ 的 $|H_L(\omega)|$图。

式(5.4.39)所描述的梳状滤波器,应用于从电离层测得的电子浓度中分离出太阳和月亮分量,Bernhardt 等人在他们的论文(1976)中有关于这方面的描述。太阳的周期是 $T_s=24$ 小时,这导致出现了每天一次循环的太阳分量及其谐波。月亮的周期是 $T_L=24.84$ 小时,这使得在每天 0.96618 循环处出现了月亮频谱线及其谐波线。图 5.4.15(a)画出了未经滤波的电离层测得的电子浓度的功率密度谱。我们注意到,弱的月亮频谱分量几乎被强的太阳频谱分量掩盖了。

可以通过使用梳状滤波器来把这两组频谱分量隔离开。如果我们想获得太阳分量，可以使用在每天一次循环的整数倍处具有窄的带通特性的梳状滤波器，这样的滤波器可以通过选择 L 使得 $F_s/L = 1$ 次循环/天，其中 F_s 是相应的采样率。该设计结果会得到一个频率响应峰值出现在每天一次循环整数倍处的滤波器。通过选择 $M = 58$，使滤波器在 $(F_s/L)/(M+1) = 1/59$ 次循环/天的整数倍处为零值。这些零值点非常接近月亮分量，从而具有良好的抑制作用。图 5.4.15(b)画出了梳状滤波器隔离的太阳分量输出的功率谱密度。以相同的方式可以设计出抑制太阳分量、通过月亮分量的梳状滤波器，图5.4.15(c)画出了月亮滤波器输出的功率谱密度。

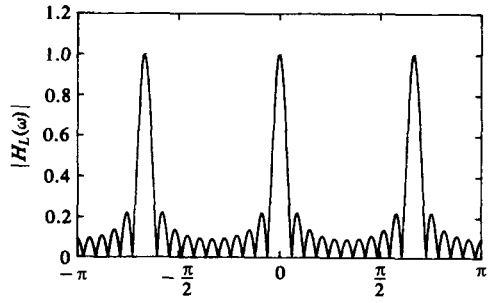


图 5.4.14　式(5.4.40)给出的梳状滤波器的幅频响应特性，$L = 3$，$M = 10$

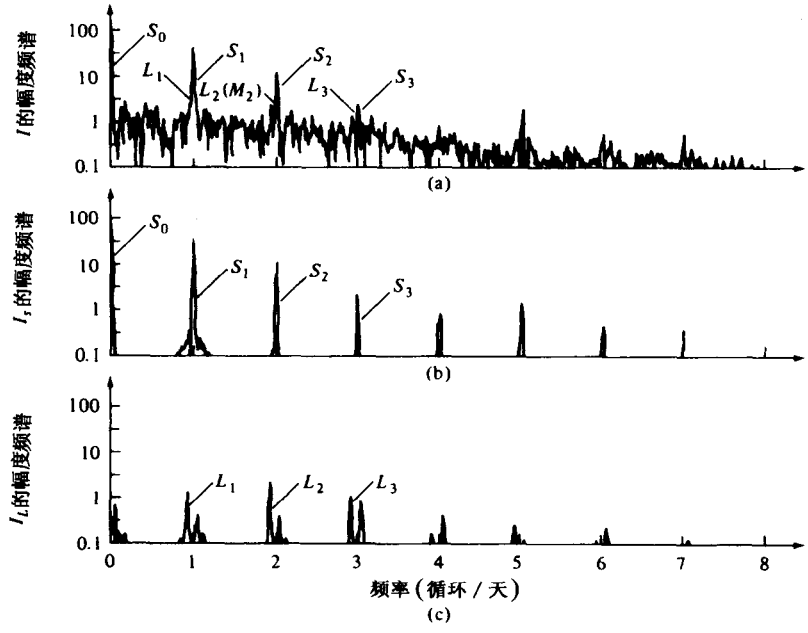


图 5.4.15　(a)未滤波的电子密度数据的频谱；(b)太阳滤波器的输出频谱；(c)月亮滤波器的输出频谱[来源于Bernhardt等人的论文(1976)，美国地球物理协会许可重印]

5.4.6　全通滤波器

全通滤波器定义为对所有频率具有常数幅度响应的系统，即

$$|H(\omega)| = 1, \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant \pi \tag{5.4.42}$$

全通滤波器最简单的例子就是纯延时系统，它的系统函数为

$$H(z) = z^{-k}$$

这样的系统会通过所有信号而不产生改变，只是延迟了 k 个样本。具有线性相位响应特性的系统称为平凡全通系统。

一个更加有趣的全通滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{a_N+a_{N-1}z^{-1}+\cdots+a_1z^{-N+1}+z^{-N}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-N+k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}},\qquad a_0=1 \tag{5.4.43}$$

其中,所有滤波系统$\{a_k\}$均为实数。如果将多项式$A(z)$定义为

$$A(z)=\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k},\qquad a_0=1$$

那么,式(5.4.43)可以表示为

$$H(z)=z^{-N}\frac{A(z^{-1})}{A(z)} \tag{5.4.44}$$

因为

$$|H(\omega)|^2=H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}}=1$$

所以,式(5.4.44)给出的系统是一个全通系统。此外,如果z_0是$H(z)$的极点,那么$1/z_0$就是$H(z)$的零点(即极点和零点互为倒数)。图5.4.16画出了典型的单极点、单零点滤波器和双极点、双零点滤波器的零-极点模型。这些滤波器的相频特性图如图5.4.17所示,其中$a=0.6$,$r=0.9$,$\omega_0=\pi/4$。

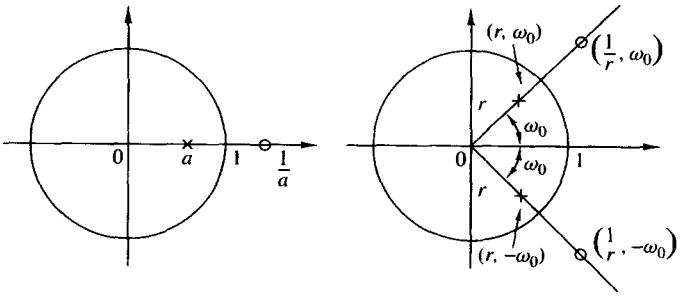


图5.4.16 (a)一阶和(b)二阶全通滤波器的零-极点模型

具有实系数全通滤波器的系统函数的最普通形式,以极点和零点因子的方式表示为

$$H_{ap}(z)=\prod_{k=1}^{N_R}\frac{z^{-1}-\alpha_k}{1-\alpha_kz^{-1}}\prod_{k=1}^{N_c}\frac{(z^{-1}-\beta_k)(z^{-1}-\beta_k^*)}{(1-\beta_kz^{-1})(1-\beta_k^*z^{-1})} \tag{5.4.45}$$

其中,有N_R个实数的极点和零点,以及N_c个极点和零点的复共轭对。对于因果、稳定系统,要求$-1<\alpha_k<1$且$|\beta_k|<1$。

利用5.2.1节所描述的方法,可以很容易地获得全通系统的相位响应和群时延的表达式。对于一个单极点-单零点的全通系统,可得到

$$H_{ap}(\omega)=\frac{e^{j\omega}-re^{-j\theta}}{1-re^{j\theta}e^{-j\omega}}$$

因此,

$$\Theta_{ap}(\omega)=-\omega-2\arctan\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}$$

并且

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\mathrm{d}\Theta_{\mathrm{ap}}(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)} \tag{5.4.46}$$

我们注意到，对于因果、稳定系统，$r<1$，所以 $\tau_g(\omega)\geqslant 0$。因为高阶零-极点系统的群时延是由类似于式(5.4.46)的正数项的和组成的，所以群时延通常也是正数。

全通滤波器常被用做相位均衡器。当系统的相位响应达不要求时，级联一个相位均衡器以补偿系统不良的相频特性，因此能得到一个大体上的线性相位响应。

5.4.7　数字正弦振荡器

数字正弦振荡器可以视为两极点谐振器的限制形式，它的复共轭极点位于单位圆上。从前面的讨论，可以回想起二阶系统的系统函数

$$H(z) = \frac{b_0}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} \tag{5.4.47}$$

其中，参数

$$a_1 = -2r\cos\omega_0 \quad 且 \quad a_2 = r^2 \tag{5.4.48}$$

该系统在 $p = re^{\pm j\omega_0}$ 处有复共轭的极点，并且它的采样响应为

$$h(n) = \frac{b_0 r^n}{\sin\omega_0}\sin(n+1)\omega_0 u(n) \tag{5.4.49}$$

如果极点位于单位圆上($r=1$)并且 b_0 置为 $A\sin\omega_0$，那么

$$h(n) = A\sin(n+1)\omega_0 u(n) \tag{5.4.50}$$

因此，复共轭极点位于单位圆上的二阶系统的冲激响应是一条正弦曲线，这样的系统称为数字正弦振荡器，或数字正弦信号发生器。

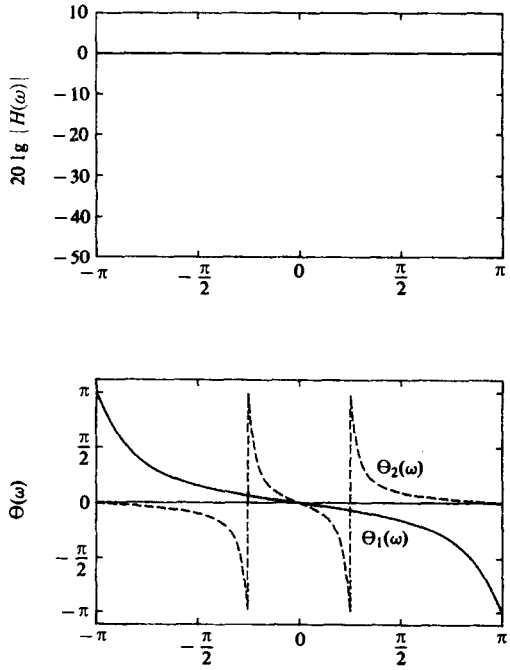


图 5.4.17　全通滤波器的频率响应特性。系统函数为(1) $H(z) = (0.6+z^{-1})/(1+0.6z^{-1})$，(2) $H(z) = (r^2-2r\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2})/(1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2})$，$r=0.9$，$\omega_0=\pi/4$

数字正弦信号发生器是数字频率合成器中的基本元件。

图 5.4.18 用结构图来表示了式(5.4.47)给出的系统函数。该系统对应的差分方程为

$$y(n) = -a_1y(n-1) - y(n-2) + b_0\delta(n) \tag{5.4.51}$$

其中，参数 $a_1 = -2\cos\omega_0$，$b_0 = A\sin\omega_0$，并且初始状态为 $y(-1)=y(-2)=0$。通过式(5.4.51)中的差分方程的反复迭代，得到

$$\begin{aligned}
y(0) &= A\sin\omega_0 \\
y(1) &= 2\cos\omega_0 y(0) = 2A\sin\omega_0\cos\omega_0 = A\sin 2\omega_0 \\
y(2) &= 2\cos\omega_0 y(1) - y(0) \\
&= 2A\cos\omega_0\sin 2\omega_0 - A\sin\omega_0 \\
&= A(4\cos^2\omega_0 - 1)\sin\omega_0 \\
&= 3A\sin\omega_0 - 4\sin^3\omega_0 = A\sin 3\omega_0
\end{aligned}$$

并依次类推。我们注意到,在 $n=0$ 处应用冲激信号来达到正弦振荡启动的目的。此后,振荡是自维持的,这是因为系统没有阻尼(即 $r=1$)。

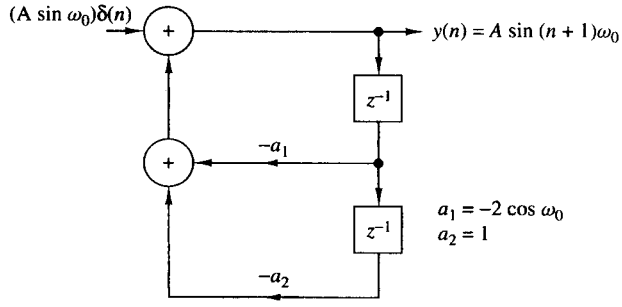


图 5.4.18 数字正弦信号发生器

还有一个有趣的问题值得注意,由式(5.4.51)中系统得到的正弦振荡器,同样也可以通过把输入置为零并设定初始条件为 $y(-1)=0, y(-2)=-A\sin\omega_0$ 得到。因此,由齐次差分方程所描述的二阶系统

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - y(n-2) \tag{5.4.52}$$

当初始状态为 $y(-1)=0, y(-2)=-A\sin\omega_0$ 时,它的零输入响应和式(5.4.51)给出的系统对冲激激励的响应完全相同。实际上,式(5.4.52)中的差分方程可以由三角恒等式直接获得:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{5.4.53}$$

其中,定义 $\alpha=(n+1)\omega_0, \beta=(n-1)\omega_0$,并且 $y(n)=\sin(n+1)\omega_0$。

在一些实际应用中,包括两个正弦载波信号进行四分相位调制,需要产生正弦信号 $A\sin\omega_0 n$ 和 $A\cos\omega_0 n$。这些信号由所谓的耦合振荡器产生,这种振荡器可以由三角公式获得:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

其中,定义 $\alpha=n\omega_0, \beta=\omega_0$,并且

$$y_c(n) = \cos n\omega_0 u(n) \tag{5.4.54}$$

$$y_s(n) = \sin n\omega_0 u(n) \tag{5.4.55}$$

因此,可以获得两个成对的差分方程:

$$y_c(n) = (\cos\omega_0)y_c(n-1) - (\sin\omega_0)y_s(n-1) \tag{5.4.56}$$

$$y_s(n) = (\sin\omega_0)y_c(n-1) + (\cos\omega_0)y_s(n-1) \tag{5.4.57}$$

或者写成矩阵的表达形式:

$$\begin{bmatrix} y_c(n) \\ y_s(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 & -\sin\omega_0 \\ \sin\omega_0 & \cos\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c(n-1) \\ y_s(n-1) \end{bmatrix} \tag{5.4.58}$$

耦合振荡器的实现结构如图 5.4.19 所示,我们注意到,这是一个两输出的系统,它没有任何驱动输入,但是需要初始状态为 $y_c(-1)=A\cos\omega_0$ 并且 $y_s(-1)=-A\sin\omega_0$,以启动它的自维持振荡。

最后,我们还发现一个有趣的问题,即式(5.4.58)对应于坐标为 $y_c(n)$ 和 $y_s(n)$ 的二维坐标系中的矢量旋转。因此,耦合振荡器也可以利用所谓的 CORDIC 算法来实现[见 Kung 等的著作(1985)]。

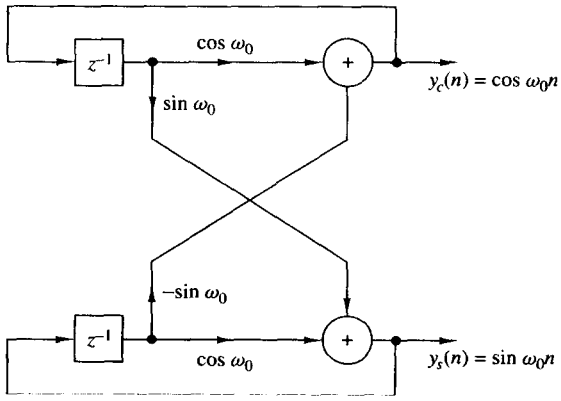


图 5.4.19　耦合振荡器的实现

5.5　逆系统和去卷积

我们已经看到，输入信号 $x(n)$经过线性时不变系统后，产生输出信号 $y(n)$，它是 $x(n)$与系统单位采样响应 $h(n)$的卷积。在许多实际的应用中，对于一个未知特性的系统，只给出了系统的输出信号，需要计算输入信号。例如，在电话信道上传输高速率的数字信息时，众所周知，信道会使信号发生变形，并且在各数据符号间产生码间干扰。当我们试图恢复数据时，码间干扰可能会引起错误。在这种情况下，就需要设计一套纠错系统，当这套系统与信道级联后，产生的输出在某种意义上校正了由于信道引起的变形，因而得到期望的传输信号的副本。在数字通信中，这样的纠错系统称为均衡器。然而，在一般线性系统理论中，我们把纠错系统称为逆系统，这是因为纠错系统的频率响应基本上是引起失真系统频率响应的倒数。此外，因为引起失真的系统所产生的输出 $y(n)$是输入 $x(n)$和冲激响应 $h(n)$的卷积，而逆系统的作用是由 $y(n)$得到 $x(n)$，所以称之为去卷积。

如果失真系统的特性未知，如果可能，常常需要用已知的信号来激励这个系统，然后观察它的输出，并与输入进行比较。在一定情况下，可以确定系统的特性。例如，刚刚所述的数字通信问题，信道的频率响应是未知的。为了测出信道的频率响应，需要发送一组幅度相等、具有指定的相位集并且在信道频带范围之内的不同频率的正弦信号，信道会引起每个正弦信号的衰减和移相。通过比较接收信号与发送信号，接收者可以测出信道的频率响应，以此用来设计逆系统。通过对未知系统进行一序列的测量以确定未知系统的特性 $h(n)$或 $H(\omega)$的过程称为系统辨识。

“去卷积”这个术语常用于地震信号处理中，更普遍地，在地球物理学中，用于描述从我们想测定的系统特性中分离输入信号的操作。去卷积运算的实际目的是辨识出系统的特性，在这种情况下，最终可以视为系统辨识问题。在这种情况下，逆系统频率响应是原系统频率响应的倒数。

5.5.1　线性时不变系统的可逆性

如果输入和输出信号是一一对应的，那这个系统称为可逆的。这个定义意味着，如果我们知道了一个可逆系统$\mathcal{T}$的输出序列 $y(n)$，$-\infty < n < \infty$，那么就可以唯一地确定它的输入 $x(n)$，$-\infty < n < \infty$。对于输入为 $y(n)$、输出为 $x(n)$的逆系统，用$\mathcal{T}^{-1}$进行表示。很明显，一个系统与它的逆系统的级联等价于一个恒等系统，这是因为

$$w(n) = \mathcal{T}^{-1}[y(n)] = \mathcal{T}^{-1}\{\mathcal{T}[x(n)]\} = x(n) \tag{5.5.1}$$

恒等系统如图 5.5.1 所示。例如，由输入-输出关系 $y(n) = ax(n)$及 $y(n) = x(n-5)$定义的系统是可逆的，而由输出关系 $y(n) = x^2(n)$ 及 $y(n) = 0$ 表示的系统是不可逆系统。

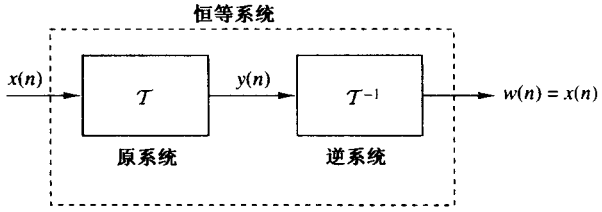


图 5.5.1 系统$\mathcal{T}$与逆系统$\mathcal{T}^{-1}$的级联

正如上面所指出的那样,逆系统在许多实际应用包括地球物理学与数字通信中是非常重要的。现在从计算给定系统的逆系统的问题入手,把讨论点限定在此类线性时不变离散时间系统上。

现在假设线性时不变系统$\mathcal{T}$的冲激响应为 $h(n)$,令 $h_I(n)$表示逆系统$\mathcal{T}^{-1}$的冲激响应。于是式(5.5.1)等价于卷积方程

$$w(n) = h_I(n) * h(n) * x(n) = x(n) \tag{5.5.2}$$

而式(5.5.2)意味着

$$h(n) * h_I(n) = \delta(n) \tag{5.5.3}$$

式(5.5.3)中的卷积方程可以用来求解一个给定 $h(n)$的 $h_I(n)$。然而,式(5.5.3)是在时域中进行求解,通常很困难。更简单的方法是将式(5.5.3)转换到 z 域来求解$\mathcal{T}^{-1}$。因而在 z 变换域,式(5.5.3)变为

$$H(z)H_I(z) = 1$$

所以,逆系统的系统函数为

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} \tag{5.5.4}$$

如果 $H(z)$是有理系统函数

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{5.5.5}$$

那么

$$H_I(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \tag{5.5.6}$$

因此,$H(z)$的零点变成了逆系统的极点,反之亦然。此外,如果 $H(z)$是 FIR 系统,那么 $H_I(z)$就是全极点系统;或者如果 $H(z)$是全极点系统,那么 $H_I(z)$就是 FIR 系统。

例 5.5.1 一个系统的冲激响应为

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

求解它的逆系统。

解:对应于 $h(n)$的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{收敛域: } |z| > \frac{1}{2}$$

这个系统是因果稳定的。因为 $H(z)$是全极点系统,所以它的逆系统是 FIR,其系统函数为

$$H_I(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$$

因此,它的冲激响应为

$$h_I(n)=\delta(n)-\frac{1}{2}\delta(n-1)$$

例 5.5.2　一个系统的冲激响应为

$$h(n)=\delta(n)-\frac{1}{2}\delta(n-1)$$

求解它的逆系统。

解：这是一个 FIR 系统，它的系统函数为

$$H(z)=1-\frac{1}{2}z^{-1},\quad \text{收敛域：}|z|>0$$

逆系统的系统函数为

$$H_I(z)=\frac{1}{H(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

因而，$H_I(z)$在原点处存在一个零点，并且在 $z=1/2$ 处存在一个极点。在这种情况下，存在两个可能的收敛域，因此有两个可能的逆系统，如图 5.5.2 所示。如果 $H_I(z)$的收敛域为$|z|>\frac{1}{2}$，那么由逆变换可得出

$$h_I(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$$

这是因果稳定系统的冲激响应。另一方面，如果假定收敛域取$|z|<\frac{1}{2}$，则逆系统的冲激响应为

$$h_I(n)=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

在这种情况下，逆系统是非因果且不稳定的。

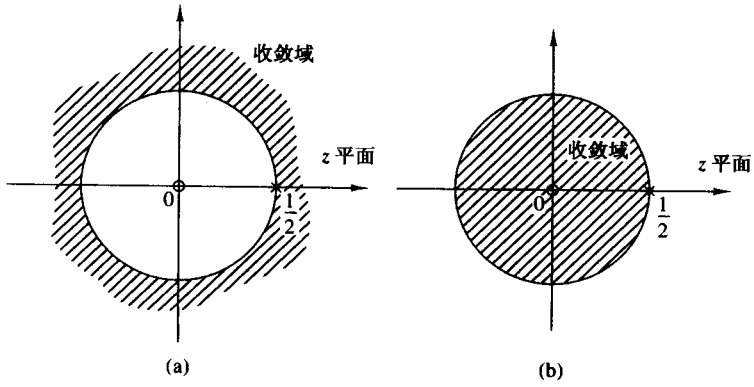


图 5.5.2　$H(z)=z/(z-\frac{1}{2})$的两种可能的收敛域

可以看出，除非我们指定了逆系统的系统函数的收敛域，否则并不能利用式(5.5.6)来唯一地确定式(5.5.3)的值。

在某些实际应用中，冲激响应 $h(n)$并不具有 z 变换，但可以用接近的形式来表示。作为一种方法，我们可以直接利用数字计算机来求解式(5.5.3)。因为式(5.5.3)通常并不具有唯一解，所以假定该系统及它的逆系统是因果的，于是将式(5.5.3)简化为等式

$$\sum_{k=0}^{n}h(k)h_I(n-k)=\delta(n)\tag{5.5.7}$$

假设当 $n<0$ 时，$h_I(n)=0$。对于 $n=0$，得出

$$h_I(0) = 1/h(0) \tag{5.5.8}$$

对于 $n \geqslant 1$，$h_I(n)$的值可以通过以下等式以递推方式获得：

$$h_I(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h(n)h_I(n-k)}{h(0)}, \qquad n \geqslant 1 \tag{5.5.9}$$

这种递推关系很容易在数字计算机上进行编程。

式(5.5.9)带来了两个问题。第一，如果 $h(0) = 0$，则这种方法就不再适用。然而，这个问题可以很容易地通过在式(5.5.7)的右边引入适当的延迟来解决，即用 $\delta(n-m)$来代替 $\delta(n)$，当 $m = 1$ 时，若 $h(0) = 0$，则 $h(1) \neq 0$，依次类推。第二，式(5.5.9)的递推随着 n 的增大会引起截取误差，因而对于大的 n，$h(n)$的数值准确性就会变差。

例 5.5.3 求解 FIR 的因果逆系统，它的冲激响应为

$$h(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$$

解：因为 $h(0) = 1$，$h(1) = -\alpha$，并且当 $n > 1$ 时，$h(n) = 0$，所以得出

$$h_I(0) = 1/h(0) = 1$$

并且

$$h_I(n) = \alpha h_I(n-1), \qquad n \geqslant 1$$

因此，

$$h_I(1) = \alpha, \quad h_I(2) = \alpha^2, \quad \cdots, \quad h_I(n) = \alpha^n$$

这与期望的因果 IIR 系统相一致。

5.5.2 最小相位、最大相位及混合相位系统

线性时不变系统的可逆性与系统的相位谱函数的特性紧密联系在一起。为了说明这一点，我们考虑两个 FIR 系统，它们的系统函数为

$$H_1(z) = 1 + \tfrac{1}{2}z^{-1} = z^{-1}(z + \tfrac{1}{2}) \tag{5.5.10}$$

$$H_2(z) = \tfrac{1}{2} + z^{-1} = z^{-1}(\tfrac{1}{2}z + 1) \tag{5.5.11}$$

式(5.5.10)中系统在 $z = -\frac{1}{2}$处有一个零点，并且冲激响应 $h(0) = 1$，$h(1) = 1/2$。式(5.5.11)中系统在 $z = -2$ 处有一个零点，并且冲激响应 $h(0) = 1/2$，$h(1) = 1$，它与式(5.5.10)中的系统相反，这是由于 $H_1(z)$和 $H_2(z)$的零点互为倒数。

在频域，这两个系统的特性由它们的频率响应函数进行描述，可表示为

$$|H_1(\omega)| = |H_2(\omega)| = \sqrt{\frac{5}{4} + \cos\omega} \tag{5.5.12}$$

和

$$\Theta_1(\omega) = -\omega + \arctan\frac{\sin\omega}{\frac{1}{2} + \cos\omega} \tag{5.5.13}$$

$$\Theta_2(\omega) = -\omega + \arctan\frac{\sin\omega}{2 + \cos\omega} \tag{5.5.14}$$

因为 $H_1(z)$和 $H_2(z)$的零点互为倒数，所以这两个系统的幅频特性是相同的。

图 5.5.3 画出了 $\Theta_1(\omega)$和 $\Theta_2(\omega)$的图形。我们观察到，第一个系统的相频特性 $\Theta_1(\omega)$开始于频率 $\omega=0$ 处的零相位，并且终止于频率 $\omega=\pi$ 处的零相位，因此净相位变化 $\Theta_1(\pi)-\Theta_1(0)$等于零。另一方面，零点位于单位圆之外的系统，它的相频特性经历的净相位变化为 $\Theta_2(\pi)-\Theta_2(0)=\pi$ rad。由于相频特性的不同，我们称第一个系统为最小相位系统，第二个系统为最大相位系统。

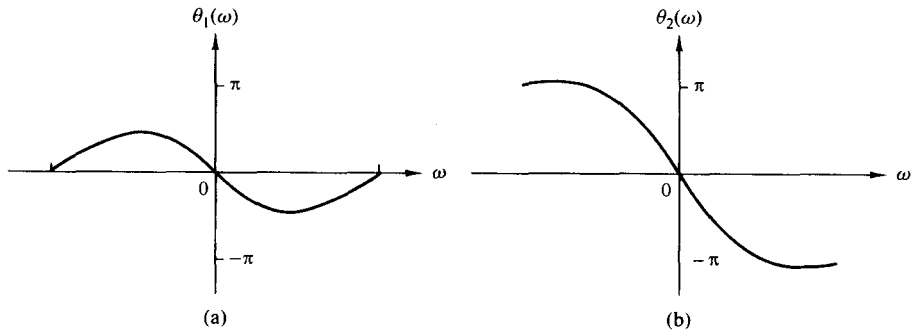


图 5.5.3　式(5.5.10)和式(5.5.11)给出的系统的相位响应特性

这些定义很容易扩展到任意长度的 FIR 系统。作为一个特例，一个长度为 $M+1$ 且有 M 个零点的 FIR 系统，它的频率响应可以表示为

$$H(\omega)=b_0(1-z_1e^{-j\omega})(1-z_2e^{-j\omega})\cdots(1-z_Me^{-j\omega}) \tag{5.5.15}$$

其中，$\{z_i\}$表示零点，b_0 是任意常数。当所有零点位于单位圆内时，式(5.5.15)中的所有乘积项，都对应于实值零点，它们在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 之间经历的净相位变化为零。同样，$H(\omega)$中的每对复共轭的因子经历的净相位变化也为零。因此，

$$\measuredangle H(\pi)-\measuredangle H(0)=0 \tag{5.5.16}$$

所以这样的系统称为最小相位系统。另一方面，当所有零点位于单位圆外时，当频率从 $\omega=0$ 变化到 $\omega=\pi$ 时，每个实值零点都会带来 π rad 的净相位变化，并且在同样的频率区间 ω，每对复共轭零点都会带来 2π rad 的净相位变化。因此，

$$\measuredangle H(\pi)-\measuredangle H(0)=M\pi \tag{5.5.17}$$

这是具有 M 个零点的 FIR 系统可能的最大相位变化，所以这样的系统称为最大相位系统。从上面的讨论可以得出

$$\measuredangle H_{\max}(\pi)\geqslant\measuredangle H_{\min}(\pi) \tag{5.5.18}$$

如果一个具有 M 个零点的 FIR 系统，其中一部分的零点位于单位圆内，其余的零点位于单位圆外，则这样的系统称为混合相位系统或者非最小相位系统。

因为系统相频特性的导数是度量信号频率分量通过系统后产生时间延迟的一种方法，所以最小相位特性意味着最小的延迟函数，而最大相位特性意味着延迟特性同样也是最大的。

现在假设一个 FIR 系统具有实系数，于是它的频率响应的幅度平方值为

$$|H(\omega)|^2=H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} \tag{5.5.19}$$

这个关系意味着，如果我们把系统的零点 z_k 用它的倒数 $1/z_k$ 进行替换，那么系统的幅频特性并没有变化。因此，如果我们将单位圆内的零点 z_k 映射到单位圆外的零点 $1/z_k$，那么就可以看到频率响应的幅频特性对这样的变换是没有改变的。

从以上讨论显而易见，如果 $|H(\omega)|^2$ 是一个具有 M 个零点的 FIR 系统频率响应的幅度平方

值,那么零点就有 2^M 种可能的布局,其中有一部分位于单位圆内,其余位于单位圆外。很明显,存在一种布局,它的所有零点均位于单位圆内,这对应于最小相位系统。第二种布局是所有零点位于单位圆外,这对应于最大相位系统。剩下的 2^M-2 种布局对应于混合相位系统。然而,并不是所有 2^M-2 种混合相位布局都需要对应于具有实值系数的 FIR 系统。特别地,任何一对复共轭零点仅有两种可能布局,但是一对实值的零点却会产生出四种可能的布局。

例 5.5.4 计算以下 FIR 系统的零点,并指出这些系统是最小相位系统、最大相位系统,还是混合相位系统:

$$H_1(z)=6+z^{-1}-z^{-2}$$

$$H_2(z)=1-z^{-1}-6z^{-2}$$

$$H_3(z)=1-\frac{5}{2}z^{-1}-\frac{3}{2}z^{-2}$$

$$H_4(z)=1+\frac{5}{3}z^{-1}-\frac{2}{3}z^{-2}$$

解:通过分解系统函数,可以得到四个系统的零点为

$$H_1(z)\rightarrow z_{1,2}=-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\rightarrow\text{最小相位}$$

$$H_2(z)\rightarrow z_{1,2}=-2,3\rightarrow\text{最大相位}$$

$$H_3(z)\rightarrow z_{1,2}=-\frac{1}{2},3\rightarrow\text{混合相位}$$

$$H_4(z)\rightarrow z_{1,2}=-2,\frac{1}{3}\rightarrow\text{混合相位}$$

因为四个系统的零点相互之间互为倒数,所以四个系统具有相同的幅频响应特性,但相频特性却不相同。

由最小相位 FIR 系统的特性可以得出,IIR 系统具有有理系统函数。特别地,当一个 IIR 系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)} \tag{5.5.20}$$

如果它的所有极点和零点都在单位圆内,则称之为最小相位系统。对于一个稳定因果系统[$A(z)$的所有根都落在单位圆内],如果它的所有零点都在单位圆外,则称之为最大相位系统;如果只是部分而不是全部零点位于单位圆外,则称之为混合相位系统。

以上讨论提出了一个值得强调的重点:一个稳定的、具有最小相位的零-极点系统具有同样也是最小相位的逆系统。这个逆系统的系统函数为

$$H^{-1}(z)=\frac{A(z)}{B(z)} \tag{5.5.21}$$

因此,$H(z)$的最小相位性保证了逆系统 $H(z)^{-1}$的稳定性,并且 $H(z)$的稳定性又意味着 $H(z)^{-1}$的最小相位性。混合相位系统和最大相位系统导致了逆系统的不稳定。

非最小相位零-极点系统的分解。任何非最小相位零-极点系统可表示为

$$H(z)=H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z) \tag{5.5.22}$$

其中,$H_{\min}(z)$是最小相位系统,$H_{\text{ap}}(z)$是全通系统。对于这类具有有理系统函数 $H(z)=B(z)/A(z)$的因果稳定系统,现在我们来论证上式的有效性。通常,如果 $B(z)$有一个或多个根位于单位圆

外，那么可以将 $B(z)$分解成积 $B_1(z)B_2(z)$，其中 $B_1(z)$的所有根位于单位圆内，而 $B_2(z)$的所有根位于单位圆外。于是，$B_2(z^{-1})$的所有根位于单位圆内。我们定义最小相位系统为

$$H_{\min}(z)=\frac{B_1(z)B_2(z^{-1})}{A(z)}$$

以及全通系统

$$H_{\text{ap}}(z)=\frac{B_2(z)}{B_2(z^{-1})}$$

因而，$H(z)=H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z)$。注意，$H_{\text{zp}}(z)$是一个稳定的、全通的、最大相位系统。

非最小相位系统的群时延。基于式(5.5.22)给出的非最小相位系统的分解，$H(z)$的群时延可以表示为

$$\tau_g(\omega)=\tau_g^{\min}(\omega)+\tau_g^{\text{ap}}(\omega) \tag{5.5.23}$$

因为对于 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$，$\tau_g^{\text{ap}}(\omega)\geqslant 0$，由此得出 $\tau_g(\omega)\geqslant\tau_g^{\min}(\omega)$，$0\leqslant\omega\leqslant\pi$。从式(5.5.23)可以总结出：在所有具有相同幅度响应的零-极点系统中，最小相位系统的群时延最小。

非最小相位系统的偏能。冲激响应为 $h(n)$的因果系统的偏能定义为

$$E(n)=\sum_{k=0}^{n}|h(k)|^2 \tag{5.5.24}$$

可以看出，在所有具有相同幅度响应的系统中，对于同样的总能量 $E(\infty)$，最小相位系统具有最大的偏能[即 $E_{\min}(n)\geqslant E(n)$，其中 $E_{\min}(n)$是最小相位系统的偏能]。

5.5.3　系统辨识与去卷积

假如用输入序列 $x(n)$来激励一个未知的线性时不变系统，并观察输出序列 $y(n)$。我们希望能从输出序列求解出该未知系统的冲激响应，这是系统辨识问题，可以通过去卷积来解决。因而得出

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k) \tag{5.5.25}$$

去卷积问题的解析方法可以通过对式(5.5.25)进行 z 变换获得，在 z 变换域得到

$$Y(z)=H(z)X(z)$$

因此，

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \tag{5.5.26}$$

$X(z)$和 $Y(z)$分别是有用的输入信号 $x(n)$及观察到的输出信号 $y(n)$的 z 变换。这种方法只适用于 $X(z)$和 $Y(z)$具有相近表达形式的情况。

例 5.5.5　一个因果系统的输出序列为

$$y(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ \frac{7}{10}, & n=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

激励的输入序列为

$$x(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ -\frac{7}{10}, & n=1\\ \frac{1}{10}, & n=2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

计算它的冲激响应及它的输入-输出方程。

解:通过对 $x(n)$和 $y(n)$进行 z 变换,很容易求得系统函数。因此得出

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{7}{10}z^{-1}}{1-\frac{7}{10}z^{-1}+\frac{1}{10}z^{-2}}=\frac{1+\frac{7}{10}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{5}z^{-1})}$$

因为该系统是因果的,所以它的收敛域为 $|z|>\frac{1}{2}$。由于系统的极点位于单位圆内,因而它也是稳定的。

系统的输入-输出差分方程为

$$y(n)=\frac{7}{10}y(n-1)-\frac{1}{10}y(n-2)+x(n)+\frac{7}{10}x(n-1)$$

通过对 $H(z)$进行部分分数展开来求解冲激响应,并对结果进行逆变换,计算结果为

$$h(n)=[4(\frac{1}{2})^n-3(\frac{1}{5})^n]u(n)$$

可以看出,如果知道未知系统是因果的,用式(5.5.26)就能唯一地求解出未知系统。然而上述例子是人为设计的,因为系统的响应$\{y(n)\}$很可能是无限长的。因此,这种方法通常不适用。

作为另一种选择,我们可以直接计算式(5.5.25)给出的时域表达式。如果系统是因果的,则得出

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}h(k)x(n-k),\qquad n\geqslant 0$$

因而

$$\begin{aligned}h(0)&=\frac{y(0)}{x(0)}\\ h(n)&=\frac{y(n)-\sum_{k=0}^{n-1}h(k)x(n-k)}{x(0)},\qquad n\geqslant 1\end{aligned}\tag{5.5.27}$$

这种递推方法要求 $x(0)\neq 0$。然而,我们又注意到,当$\{h(n)\}$无限长时,这种方法可能不再适用,除非我们在递推阶段对递推方法进行截断处理[即缩短$\{h(n)\}$]。

对于未知系统辨识的另一种方法是基于互相关性技术。回想可知,在2.6.4节推导的输入-输出互相关函数为

$$r_{yx}(m)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)r_{xx}(m-k)=h(n)*r_{xx}(m)\tag{5.5.28}$$

其中,$r_{yx}(m)$是系统输入$\{x(n)\}$与系统输出$\{y(n)\}$的互相关序列,$r_{xx}(m)$是输入信号的自相关序列。在频域,对应的关系为

$$S_{yx}(\omega)=H(\omega)Sxx(\omega)=H(\omega)|X(\omega)|^2$$

因此,

$$H(\omega)=\frac{S_{yx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}=\frac{S_{yx}(\omega)}{|X(\omega)|^2}\tag{5.5.29}$$

这些关系暗示着，对未知系统的冲激响应$\{h(n)\}$或频率响应的求解(测量)，通过先确定输入序列$\{x(n)\}$和输出序列$\{y(n)\}$的互相关特性，然后利用式(5.5.27)的递推方程来求解式(5.5.28)中的去卷积问题。或者，我们只是计算式(5.5.28)的傅里叶变换，并求解式(5.5.29)给出的频率响应。此外，如果选择输入序列$\{x(n)\}$使得它的自相关序列$\{r_{xx}(n)\}$是单位采样序列，或者等价地，在$H(\omega)$的通频带内，它的频谱是平坦的(常数)，则冲激响应$\{h(n)\}$的值仅仅等于互相关序列$\{r_{yx}(n)\}$。

通常，上述的互相关方法是一种有效的、实用的系统辨识方法。另一种基于最小二乘优化的实用方法将在第 13 章介绍。

5.5.4　同态去卷积

在 4.2.7 节介绍的复数倒频谱，在某些应用如地震信号处理中，是一种非常有用的去卷积运算工具。为了描述这种方法，假设$\{y(n)\}$是输入序列$\{x(n)\}$激励线性时不变系统后的输出序列，那么

$$Y(z) = X(z)H(z) \tag{5.5.30}$$

其中，$H(z)$是系统函数。$Y(z)$的自然对数为

$$\begin{aligned} C_y(z) &= \ln Y(z) \\ &= \ln X(z) + \ln H(z) \\ &= C_x(z) + C_h(z) \end{aligned} \tag{5.5.31}$$

因此，输出序列$\{y(n)\}$的复数倒频谱可表示为$\{x(n)\}$和$\{h(n)\}$的倒频谱之和，即

$$c_y(n) = c_x(n) + c_h(n) \tag{5.5.32}$$

从而我们看到，两个序列在时域的卷积对应于在倒频域的倒频谱序列之和。进行这些变换的系统称为同态系统，如图 5.5.4 所示。



图 5.5.4　用于获得序列$\{y(n)\}$的倒频谱$\{c_y(n)\}$的同态系统

在某些应用场合，如地震信号处理以及语音信号处理，倒频序列$\{c_x(n)\}$和$\{c_h(n)\}$的特性的差异非常大，它们在倒频域很容易分离。特别地，我们设想$\{c_h(n)\}$在小值 n 的附近存在它的主要分量(主能量)，而$\{c_x(n)\}$的分量主要集中在大值 n 邻近。我们称$\{c_h(n)\}$为“低通”，$\{c_x(n)\}$为“高通”。通过利用适当的“低通”或“高通”窗口，就可以从$\{c_x(n)\}$中分离出$\{c_h(n)\}$，如图 5.5.5 所示。因此，

$$\hat{c}_h(n) = c_y(n)w_{\text{lp}}(n) \tag{5.5.33}$$

并且

$$\hat{c}_x(n) = c_y(n)w_{\text{hp}}(n) \tag{5.5.34}$$

其中，

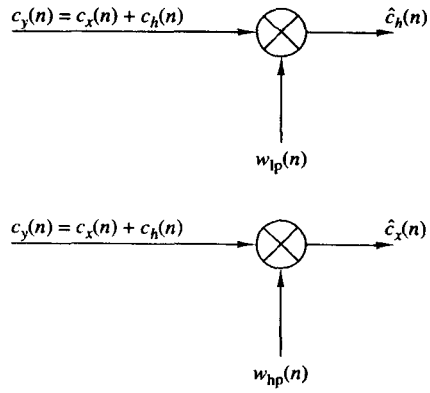


图 5.5.5　利用“低通”或“高通”窗口来分离两个倒频谱分量

$$w_{\mathrm{lp}}(n)=\begin{cases}1, & |n|\leqslant N_1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{5.5.35}$$

$$w_{\mathrm{hp}}(n)=\begin{cases}0, & |n|\leqslant N_1\\ 1, & |n|>N_1\end{cases} \tag{5.5.36}$$

前面我们已经通过加窗的方法分离出倒频序列$\{c_h(n)\}$和$\{c_x(n)\}$,再将$\{c_h(n)\}$和$\{c_x(n)\}$通过逆同态系统,就可得到$\{x(n)\}$和$\{h(n)\}$,如图5.5.6所示。

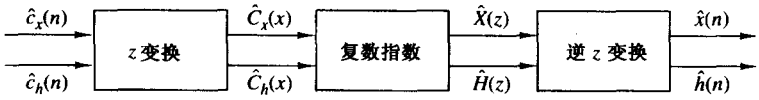


图5.5.6 从对应的倒频谱中恢复出序列$\{x(n)\}$和$\{h(n)\}$的逆同态系统

在实际中,用数字计算机来计算序列$\{y(n)\}$的倒频谱,执行加窗函数,并实现如图5.5.6所示的逆同态系统。我们将用一种特殊形式的傅里叶变换及其逆变换,来代替z变换及逆z变换。这种特殊的形式称为离散傅里叶变换,我们将在第7章进行介绍。

5.6 小结与参考文献

在这一章中,我们介绍了LTI系统的频域特性,展示了通过频率响应函数$H(\omega)$,即系统冲激响应的傅里叶变换,描述LTI系统在频域的特性。我们同样也看到,频率响应函数决定了系统对任何输入信号的影响。实际上,通过把输入信号变换到频域,可以使计算系统对信号的影响以及计算系统输出变得非常简单。从频域来看,LTI系统对输入信号进行了频谱整形或频谱滤波。

本章还从零-极点布局角度介绍了简单的IIR滤波器的设计。通过这种方法,可以设计出简单的数字谐振器、槽口滤波器、梳状滤波器、全通滤波器以及数字正弦信号发生器。更加复杂的IIR滤波器设计及其相关参考文献将在第10章详细论述。数字正弦信号发生器常用于频率合成,在Gorski-Popiel主编的书(1975)中,给出了频率合成技术更全面的论述。

最后,我们依据极点和零点在频域的位置,将LIT系统描述为最小相位、最大相位以及混合相位系统。利用LTI系统的这些基本特性,我们介绍了在逆滤波、去卷积以及系统辨识中的实际问题。基于对线性系统输出信号的倒频谱分析,我们总结描述了去卷积的方法。

在逆滤波、去卷积以及系统辨识方面有大量的技术文献。在通信理论背景中,系统辨识及逆滤波被视为与信道均衡相关的问题,Proakis在他的书(2001)中有论述。去卷积广泛应用于地震信号处理。作为参考,我们推荐Wood和Treitel的论文(1975)、Peacock和Treitel的论文(1969)以及Robinson和Treitel的书(1978,1980)。同态去卷积以及它在语音处理中的应用在Oppenheim和Schafer的书(1989)中有论述。

习题

5.1 下列输入-输出对是各种系统在工作中观测到的:

(a) $x(n)=(\frac{1}{2})^n \xrightarrow{\mathcal{T}_1} y(n)=(\frac{1}{8})^n$

(b) $x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n) \xrightarrow{\mathcal{T}_2} y(n)=(\frac{1}{8})^n u(n)$

(c) $x(n)=e^{j\pi/5} \xrightarrow{\mathcal{T}_3} y(n)=3e^{j\pi/5}$

(d) $x(n)=e^{j\pi/5}u(n)\xrightarrow{\mathcal{T}_4}y(n)=3e^{j\pi/5u(n)}$

(e) $x(n)=x(n+N_1)\xrightarrow{\mathcal{T}_5}y(n)=y(n+N_2),\quad N_1\neq N_2, N_1, N_2$

如果上面的所有系统均是 LTI,计算它们的频率响应。

5.2 (a) 计算如下矩形序列的傅里叶变换 $W_R(\omega)$,并画图:

$$w_R(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(b) 已知三角序列

$$w_T(n)=\begin{cases}n, & 0\leqslant n\leqslant M/2\\ M-n, & M/2<2\leqslant M\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

通过将 $w_T(n)$表示成一个矩形序列与它自身卷积的形式,来计算 $w_T(n)$的傅里叶变换 $W_T(\omega)$,并画图。

(c) 已知序列

$$w_C(n)=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi n}{M}\right)w_R(n)$$

利用 $W_R(\omega)$计算 $W_C(\omega)$,并画图。

5.3 一个 LTI 系统,它的冲激响应为 $h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$,

(a) 分别计算幅度响应$|H(\omega)|$和相位响应$\angle H(\omega)$,并画图。

(b) 对于以下的输入,计算输入和输出的幅度及相位谱,并画图。

1. $x(n)=\cos\frac{3\pi n}{10},\ -\infty<n<\infty$

2. $x(n)=\{\cdots,1,0,0,\underset{\uparrow}{1},1,1,0,1,1,1,0,1,\cdots\}$

5.4 计算以下系统的幅度和相位响应,并画图。

(a) $y(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(n-1)]$

(b) $y(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(n-1)]$

(c) $y(n)=\frac{1}{2}[x(n+1)-x(n-1)]$

(d) $y(n)=\frac{1}{2}[x(n+1)+x(n-1)]$

(e) $y(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(n-2)]$

(f) $y(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(n-2)]$

(g) $y(n)=\frac{1}{3}[x(n)+x(n-1)+x(n-2)]$

(h) $y(n)=x(n)-x(n-8)$

(i) $y(n)=2x(n-1)-x(n-2)$

(j) $y(n)=\frac{1}{4}[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)]$

(k) $y(n)=\frac{1}{8}[x(n)+3x(n-1)+3x(n-2)+x(n-3)]$

(l) $y(n)=x(n-4)$

(m) $y(n)=x(n+4)$

(n) $y(n)=\frac{1}{4}[x(n)-2x(n-1)+x(n-2)]$

5.5 一个 FIR 滤波器,它的差分方程为

$$y(n)=x(n)+x(n-10)$$

(a) 计算它的幅度和相位响应,并画图。

(b) 计算对以下输入的响应:

1. $x(n)=\cos\frac{\pi}{10}n+3\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{10}\right), \quad -\infty<n<\infty$

2. $x(n)=10+5\cos\left(\frac{2\pi}{5}n+\frac{\pi}{2}\right), \quad -\infty<n<\infty$

5.6 图 P5.6 画出了一个 FIR 滤波器,当输入信号 $x(n)=10e^{j\pi n/2}u(n)$ 时,计算它的暂态和稳态响应。令 $b=2$,且 $y(-1)=y(-2)=y(-3)=y(-4)=0$。

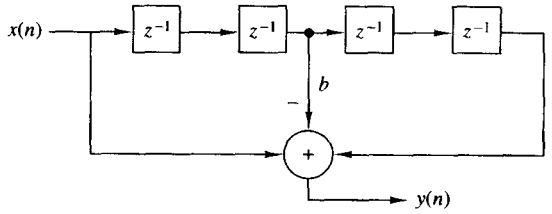


图 P5.6

5.7 一个 FIR 滤波器

$$y(n)=x(n)+x(n-4)$$

(a) 计算它的幅度和相位响应,并画图。

(b) 当输入为

$$x(n)=\cos\frac{\pi}{2}n+\cos\frac{\pi}{4}n, \quad -\infty<n<\infty$$

计算它的响应。

(c) 用(a)部分得到的幅度和相应响应形式,来解释(b)部分得到的结果。

5.8 一个系统

$$y(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(n-2)]$$

当输入信号为

$$x(n)=5+3\cos\left(\frac{\pi}{2}n+60^\circ\right), \quad -\infty<n<\infty$$

计算系统的稳态和暂态响应。

5.9 从我们的讨论可以很明显地看出,LTI 系统不能产生与作用在输入端信号不同频率的输出。因此,如果一个系统产生了新的频率,那么它肯定是非线性的而且(或者)时变的。计算以下系统输出信号的频率分量,其输入信号为

$$x(n)=A\cos\frac{\pi}{4}n$$

(a) $y(n)=x(2n)$

(b) $y(n)=x^2(n)$

(c) $y(n)=(\cos\pi n)x(n)$

5.10 计算图 P5.10(a)到(c)所画系统的幅度和相位响应,并画图。

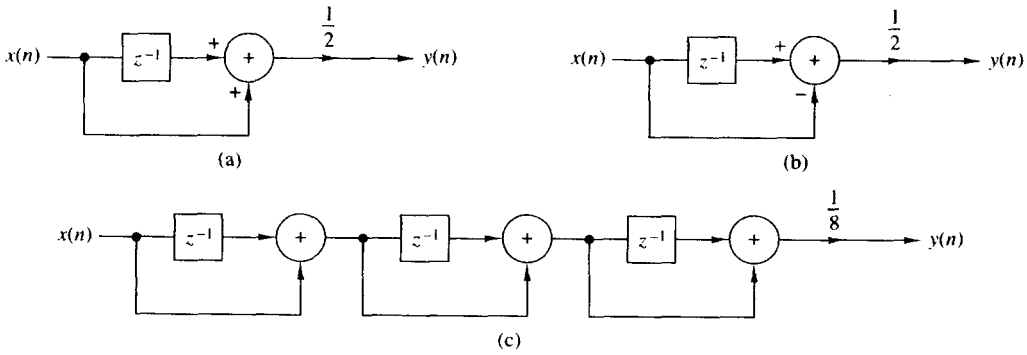


图 P5.10

5.11 计算以下多径信道的幅度和相位响应：

$$y(n) = x(n) + x(n - M)$$

在什么频率，$H(\omega) = 0$?

5.12 一个滤波器

$$y(n) = 0.9y(n - 1) + bx(n)$$

(a) 计算 b 值使得 $|H(0)| = 1$。

(b) 计算在什么频率，$|H(\omega)| = 1/\sqrt{2}$。

(c) 这个滤波器是低通滤波器、带通滤波器，还是高通滤波器？

(d) 对于滤波器 $y(n) = -0.9y(n-1) + 0.1x(n)$，重做(b)和(c)部分。

5.13 数字正弦信号发生器的谐波失真。一个理想的正弦信号发生器产生的信号为

$$x(n) = \cos 2\pi f_0 n, \qquad -\infty < n < \infty$$

如果 $f_0 = k_0/N$ 并且 k_0 和 N 互为素数，那么 $x(n)$就是基本周期为 N 的周期信号。这样的纯正弦信号的频谱由在 $k = k_0$ 及 $k = N - k_0$(限定在基本区间 $0 \leqslant k \leqslant N-1$)处的两条谱线组成。在实际中，计算正弦信号在相对频率 f_0 处的采样所做的近似会导致一部分的功率衰落到其他频率分量中。这种假的功率会导致失真，这称为谐波失真。谐波失真常以总谐波失真(THD)的形式进行度量，它的定义是一个比例

$$\text{THD} = \frac{\text{假的谐波功率}}{\text{总功率}}$$

(a) 证明

$$\text{THD} = 1 - 2\frac{|c_{k_0}|^2}{P_x}$$

其中，

$$c_{k_0} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)k_0 n}$$

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

(b) 利用泰勒级数近似

$$\cos\phi = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \cdots$$

对于 $f_0 = 1/96, 1/32, 1/256$,通过把泰勒展开项的个数从 2 增加到 8,分别计算 $x(n)$一个周期的值。

(c) 对于(b)部分的每个正弦信号及利用 cos 函数计算得到的正弦信号,计算它们的 THD,画出功率密度谱图,并对结果进行注释。

5.14 量化后的正弦波总谐波失真的度量。令 $x(n)$是一个频率为 $f_0 = k/N$ 的周期正弦信号,即

$$x(n) = \sin 2\pi f_0 n$$

(a) 编写一段计算机程序,根据四舍五入原则,将信号 $x(n)$量化成 b 位,或者等价地量化成 $L = 2^b$ 级,量化后的信号用 $x_q(n)$表示。

(b) 对于 $f_0 = 1/50$,计算用 $b = 4, 6, 8$ 和 16 位进行量化后的信号 $x_q(n)$的 THD。

(c) 对于 $f_0 = 1/100$,重做(b)部分。

(d) 解释(b)和(c)部分的结果。

5.15 已知离散时间系统

$$y(n) = ay(n-1) + (1-a)x(n), \qquad n \geqslant 0$$

其中 $a = 0.9, y(-1) = 0$。

(a) 系统的输入信号为

$$x_i(n) = \sin 2\pi f_i n, \qquad 0 \leqslant n \leqslant 100$$

其中,$f_1 = \frac{1}{4}, f_2 = \frac{1}{5}, f_3 = \frac{1}{10}, f_4 = \frac{1}{20}$。计算系统的输出,并画图。

(b) 计算系统的幅度和相位响应,并画图。利用这些结果说明系统对(a)部分输入信号的响应。

5.16 一个 LTI 系统,它的冲激响应为 $h(n) = (\frac{1}{3})^{|n|}$。

(a) 分别计算幅度响应 $|H(\omega)|$和相位响应$\measuredangle H(\omega)$,并画图。

(b) 对于以下输入:

1. $x(n) = \cos\frac{3\pi n}{8}, \quad -\infty < n < \infty$

2. $x(n) = \{\cdots, -1, 1, -1, \underset{\uparrow}{1}, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots\}$

计算输入与输出信号的幅度和相位谱,并画图。

5.17 对于图 P5.17 所示的数字滤波器,

(a) 求解输入-输出关系式,并计算冲激响应 $h(n)$。

(b) 计算该滤波器的幅度响应 $|H(\omega)|$和相位响应$\measuredangle H(\omega)$,并画图。该滤波器能将哪些频率可以完全滤除?

(c) 当 $\omega_0 = \pi/2$ 时,输入为

$$x(n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}n + 30^\circ\right), \qquad -\infty < n < \infty$$

计算输出 $y(n)$。

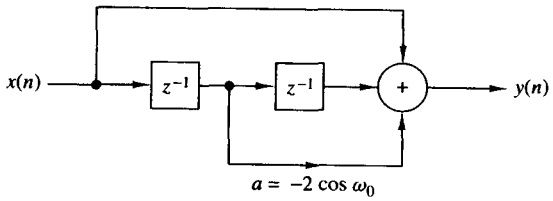


图 P5.17

5.18 一个滤波器

$$y(n) = x(n) - x(n-4)$$

(a) 计算幅度和相位响应，并画图。

(b) 对于输入

$$x(n) = \cos\frac{\pi}{2}n + \cos\frac{\pi}{4}n, \qquad -\infty < n < \infty$$

计算它的响应。

(c) 用(a)部分给出的解答形式，解释(b)部分得到的结果。

5.19 计算系统

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(n-2)]$$

对输入信号

$$x(n) = 5 + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n + 60^\circ\right) + 4\sin(\pi n + 45^\circ), \qquad -\infty < n < \infty$$

的稳态响应。

5.20 回忆习题 5.9，LTI 系统不能产生与作用在输入端信号不同频率的输出。因此，如果一个系统产生了新的频率，那它肯定是非线性的并且(或者)时变的。指出下列系统是否是非线性的并且(或者)时变的。当输入频谱为

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant \pi/4 \\ 0, & \pi/4 \leqslant |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

计算输出频谱。

(a) $y(n) = x(2n)$

(b) $y(n) = x^2(n)$

(c) $y(n) = (\cos\pi n)x(n)$

5.21 一个 LTI 系统的冲激响应为

$$h(n) = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]u(n)$$

(a) 计算它的系统函数 $H(z)$。

(b) 能否利用有限数量的加法器、乘法器以及单位延迟器来实现这个系统？如果可以，那么如何实现？

(c) 利用零-极点图画出 $|H(\omega)|$ 的响应图。

(d) 计算系统对输入

$$x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$$

的响应。

5.22 一个 FIR 滤波器的差分方程为

$$y(n) = x(n) - x(n-6)$$

(a) 计算它的幅度和相位响应，并画图。

(b) 计算对以下输入的响应：

1. $x(n) = \cos\frac{\pi}{10}n + 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right), \qquad -\infty < n < \infty$

2. $x(n) = 5 + 6\cos\left(\frac{2\pi}{5}n + \frac{\pi}{2}\right), \qquad -\infty < n < \infty$

5.23 理想带通滤波器的频率响应为

$$H(\omega)=\begin{cases}0, & |\omega|\leqslant\dfrac{\pi}{8}\\ 1, & \dfrac{\pi}{8}<|\omega|<\dfrac{3\pi}{8}\\ 0, & \dfrac{3\pi}{8}\leqslant|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

(a) 计算它的冲激响应。

(b) 证明它的冲激响应可以表示为 $\cos(n\pi/4)$与低通滤波器冲激响应的积。

5.24 一个系统,描述它的差分方程为

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

(a) 计算它的冲激响应。

(b) 用以下两种方式计算它的频率响应:

1. 从冲激响应
2. 从差分方程

(c) 对于输入

$$x(n)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right),\qquad -\infty<n<\infty$$

计算它的响应。

5.25 图 P5.25 给出了四个系统的零-极点模型,简单地画出对应傅里叶变换幅度 $|H(\omega)|$的略图。

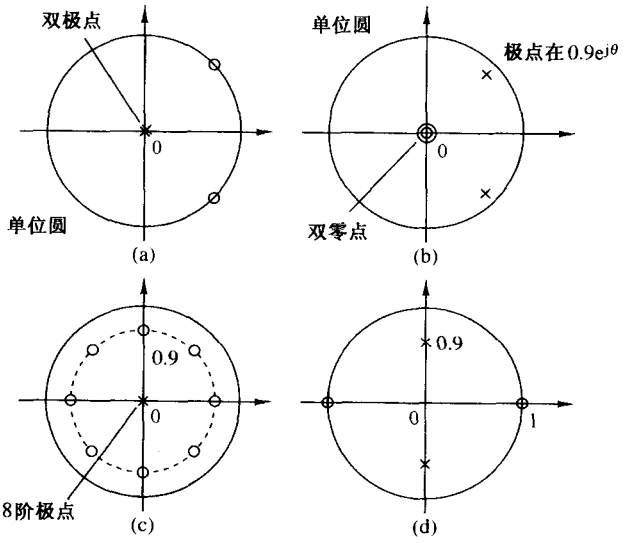


图 P5.25

5.26 设计一个 FIR 滤波器,可以完全滤除频率 $\omega_0=\pi/4$。对于输入

$$x(n)=\left(\sin\frac{\pi}{4}n\right)u(n)$$

计算 $n=0,1,2,3,4$ 时的输出。这个滤波器能够实现预期的设计目标吗? 说明理由。

5.27 一个数字滤波器的特性如下:

1. 它是高通滤波器,并且有一个极点和一个零点。

2. 极点位于距离原点 $r=0.9$ 的 z 平面上。

3. 直流信号无法通过该系统。

(a) 画出该滤波器的零 - 极点模型,并计算它的系统函数 $H(z)$。

(b) 计算该滤波器的幅度响应 $|H(\omega)|$ 和相位响应 $\angle H(\omega)$。

(c) 归一化频率响应 $H(\omega)$,使得 $|H(\pi)|=1$。

(d) 求解该滤波器的时域输入-输出关系(差分方程)。

(e) 对于输入

$$x(n)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}n+45^\circ\right),\qquad -\infty<n<\infty$$

计算系统的输出(可以用代数或几何方法)。

5.28 一个一阶因果数字滤波器,它的系统函数为

$$H(z)=b_0\frac{1+bz^{-1}}{1+az^{-1}}$$

(a) 画出该滤波器的直接形式 I 和直接形式 II 的实现图,并确定对应的差分方程。

(b) 对于 $a=0.5$ 及 $b=-0.6$,画出零-极点模型图。该系统是稳定的吗? 为什么?

(c) 对于 $a=-0.5$ 及 $b=0.5$,计算 b_0,使得 $|H(\omega)|$ 的最大值等于 1。

(d) 画出(c)部分得出的滤波器的幅度响应 $|H(\omega)|$ 和相位响应 $\angle H(\omega)$ 图。

(e) 在一个特殊应用场合,已知 $a=0.8$,这个滤波器会放大输入的高频还是低频信号? 选择 b 的值以提升该滤波器的特性(即把它做成一个更好的低通或高能滤波器)。

5.29 推导式(5.4.25)给出的双极点滤波器的共振频率表达式。其极点位于 $p_1=re^{j\theta}$,$p_2=p_1^*$。

5.30 汉宁滤波器的差分方程(滑动平均)为

$$y(n)=\frac{1}{4}x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)+\frac{1}{4}x(n-2)$$

计算它的幅度和相位响应,并画图。

5.31 输入信号

$$x(n)=(\frac{1}{4})^nu(n)+u(-n-1)$$

激励一个因果 LTI 系统,产生输出 $y(n)$ 的 z 变换为

$$Y(z)=\frac{-\frac{3}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1+z^{-1})}$$

(a) 计算系统函数 $H(z)$ 及它的收敛域。

(b) 计算系统的输出 $y(n)$。提示:取消极点可以增加最初的收敛域。

5.32 计算线性相位 FIR 滤波器的系数,

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$

使得

(a) 它可以完全抑制 $\omega_0=2\pi/3$ 的频率分量。

(b) 归一化后频率响应的 $H(0)=1$。

(c) 计算该滤波器的幅度和相位响应,并画图。检查它是否满足需求。

5.33 计算以下滑动平均滤波器的频率响应 $H(\omega)$:

(a) $y(n)=\dfrac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M}x(n-k)$

(b) $y(n)=\frac{1}{4M}x(n+M)+\frac{1}{2M}\sum_{k=-M+1}^{M-1}x(n-k)+\frac{1}{4M}x(n-M)$

哪一个滤波器具有更好的平滑效果？为什么？

5.34 一个滤波的系统函数为

$$H(z)=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-8}$$

计算它的幅度和相位响应。如果采样率 $F_s=1$ kHz,计算无法通过该滤波器的模拟正弦信号频率。

5.35 一个二阶系统在 $p_{1,2}=0.5$ 处有双极点,在 $z_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}3\pi/4}$ 处有两个零点。

利用几何方法,选择滤波器的增益 G 使得 $|H(0)|=1$。

5.36 在本题中,我们来了解单零点对系统频率响应的影响。令 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ 是位于单位圆内($r<1$)的一个零点。于是,

$$\begin{aligned}H_z(\omega)&=1-r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\\&=1-r\cos(\omega-\theta)+\mathrm{j}r\sin(\omega-\theta)\end{aligned}$$

(a) 证明幅度响应为

$$|H_z(\omega)|=[1-2r\cos(\omega-\theta)+r^2]^{1/2}$$

或者等价地,

$$20\lg|H_z(\omega)|=10\lg[1-2r\cos(\omega-\theta)+r^2]$$

(b) 证明相位响应为

$$\Theta_z(\omega)=\arctan\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}$$

(c) 证明群时延为

$$\tau_g(\omega)=\frac{r^2-r\cos(\omega-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)}$$

(d) 对于 $r=0.7,\theta=0,\pi/2$ 以及 π,画出幅度 $|H(\omega)|_{\mathrm{dB}}$、相位 $\Theta(\omega)$ 及群时延 $\tau_g(\omega)$ 的略图。

5.37 在本题中,我们来了解单极点对系统频率响应的影响。令

$$H_p(\omega)=\frac{1}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}},\qquad r<1$$

证明

$$\begin{aligned}|H_p(\omega)|_{\mathrm{dB}}&=-|H_z(\omega)|_{\mathrm{dB}}\\ \measuredangle H_p(\omega)&=-\measuredangle H_z(\omega)\\ \tau_g^p(\omega)&=-\tau_g^z(\omega)\end{aligned}$$

其中,$H_z(\omega)$ 和 $\tau_g^z(\omega)$ 的在习题 5.36 中有定义。

5.38 在本题中,我们来了解复共轭对的极点和零点对系统频率响应的影响。令

$$H_z(\omega)=(1-r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})(1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$$

(a) 证明分贝形式表示的幅度响应为

$$\begin{aligned}|H_z(\omega)|_{\mathrm{dB}}&=10\lg[1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)]\\&\quad+10\lg[1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)]\end{aligned}$$

(b) 证明相位响应为

$$\Theta_z(\omega)=\arctan\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}+\arctan\frac{r\sin(\omega+\theta)}{1-r\cos(\omega+\theta)}$$

(c) 证明群时延为

$$\tau_g^z(\omega)=\frac{r^2-r\cos(\omega-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)}+\frac{r^2-r\cos(\omega+\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)}$$

(d) 证明:如果 $H_p(\omega)=1/H_z(\omega)$,则

$$|H_p(\omega)|_{\mathrm{dB}}=-|H_z(\omega)|_{\mathrm{dB}}$$

$$\Theta_p(\omega)=-\Theta_z(\omega)$$

$$\tau_g^p(\omega)=-\tau_g^z(\omega)$$

(e) 对于 $r=0.9,\theta=0,\pi/2$,画出 $|H_p(\omega)|,\Theta_p(\omega)$和 $\tau_g^p(\omega)$的略图。

5.39 计算滤波器的 3 dB 带宽($0<a<1$)

$$H_1(z)=\frac{1-a}{1-az^{-1}}$$

$$H_2(z)=\frac{1-a}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

哪一个是更好的低通滤波器?

5.40 设计一个相位可调整的数字振荡器,即一个滤波器产生的信号为

$$y(n)=\cos(\omega_0 n+\theta)u(n)$$

5.41 本题将推导耦合振荡器的另一种结构。已知系统

$$y(n)=ay(n-1)+x(n)$$

其中 $a=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}$,令 $x(n)$为实数,于是 $y(n)$为复数。所以,

$$y(n)=y_R(n)+\mathrm{j}y_I(n)$$

(a) 求解描述系统的等式,它有一个输入 $x(n)$,两个输出 $y_R(n)$及 $y_I(n)$。

(b) 确定实现的结构图。

(c) 证明:如果 $x(n)=\delta(n)$,那么

$$y_R(n)=(\cos\omega_0 n)u(n)$$

$$y_I(n)=(\sin\omega_0 n)u(n)$$

(d) 对于 $\omega_0=\pi/6$,计算 $y_R(n),y_I(n)$,其中 $n=0,1,\cdots,9$。将这些结果与 sin 和 cos 的精确值进行比较。

5.42 已知一个系统,它的系统函数为

$$H(z)=b_0\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}z^{-1})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}z^{-1})}{(1-r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}z^{-1})(1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}z^{-1})}$$

(a) 画出零-极点模型图。

(b) 利用几何方法,证明:对于 $r\approx 1$,系统是一个槽口滤波器,并画出 $\omega_0=60°$时的幅度响应图。

(c) 对于 $\omega_0=60°$,选择 b_0 使得 $|H(\omega)|$的最大值为 1。

(d) 画出系统直接形式 II 的实现图。

(e) 计算系统的近似 3 dB 带宽。

5.43 设计一个 FIR 数字滤波器,用来抑制污染了 200 Hz 有用的正弦信号的 60 Hz 强干扰正弦信号。确定滤波器的增益使得有用信号的幅度不发生改变。该滤波器工作的采样率为 $F_s=500$ 个样本/s。

如果输入是 60 Hz 或者 200 Hz 正弦信号,计算滤波器的输出。与你的需求相比,滤波器的性能如何?

5.44 计算式(5.4.28)所描述的数字谐振器的增益 b_0,使得 $|H(\omega_0)|=1$。

5.45 应用三角恒等式

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

推导式(5.4.52)给出的差分方程。其中,$\alpha=(n+1)\omega_0$,$\beta=(n-1)\omega_0$,$y(n)=\cos\omega_0 n$。证明:利用初始条件 $y(-1)=A\cos\omega_0$ 及 $y(-2)=A\cos 2\omega_0$,正弦信号 $y(n)=A\cos\omega_0 n$ 可以由式(5.4.52)产生。

5.46 利用式(5.4.53)中的三角恒等式,推导用来产生正弦信号 $y(n)=A\sin n\omega_0$ 的差分方程,其中 $\alpha=n\omega_0$,$\beta=(n-2)\omega_0$。并计算相应的初始条件。

5.47 利用表 3.3 中的 z 变换对 8 和 9,分别求解冲激响应为 $h(n)=A\cos n\omega_0 u(n)$ 和 $h(n)=A\sin n\omega_0 u(n)$ 的数字振荡器的差分方程。

5.48 通过合并习题 5.47 得出的数字振荡器,确定耦合振荡器的结构。

5.49 一个高通滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}},\qquad a<1$$

将它转变成槽口滤波器,使得可以抑制 $\omega_0=\pi/4$ 的频率及其谐波。

(a) 求解差分方程。

(b) 画出零-极点模型图。

(c) 画出这两个滤波器的幅度响应图。

5.50 选择月亮滤波器的 L 和 M,使得它在 $(k\pm\Delta F)$次循环/天,必须具有窄的通频带,其中 $k=1,2,3,\cdots$,并且 $\Delta F=0.067\ 726$。

5.51 (a)证明对应于图 5.4.16 中的零-极点模型的系统是全通系统。(b)为了有效地实现一个二阶全通滤波器,需要多少个延迟器及乘法器?

5.52 一个数字槽口滤波器,在 ECG 记录仪上用来去除供电电源带来的 60 Hz 嘈杂声。使用的采样率为 $F_s=500$ 个样本/s。为了实现这个功能,(a)设计一个二阶 FIR 槽口滤波器和(b)一个二阶零-极点槽口滤波器。在这两种情况下,选择增益 b_0,使得在 $\omega=0$ 处,$|H(\omega)|=1$。

5.53 求解一个长度为 $M=4$ 的高通线性相位 FIR 滤波器的系数 $|h(n)|$,它具有反对称的单位采样响应 $h(n)=-h(M-1-n)$,并且频率响应满足条件

$$\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{1}{2},\qquad \left|H\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right|=1$$

5.54 试设计一个四极点带通数字滤波器,要求幅度响应为

$$|H_d(\omega)|=\begin{cases}1, & \dfrac{\pi}{6}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

选择四个极点位于

$$p_{1,2}=0.8\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}2\pi/9}$$

$$p_{3,4}=0.8\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}4\pi/9}$$

四个零点位于

$$z_1=1,\qquad z_2=-1,\qquad z_{3,4}=\mathrm{e}^{\pm 3\pi/4}$$

(a) 计算增益值,使得

$$\left|H\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right| = 1$$

(b) 计算系统函数 $H(z)$。

(c) 计算 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 上的频率响应 $H(\omega)$的幅度,并与期望的响应 $|H_d(\omega)|$进行比较。

5.55 一个离散时间系统的输入 $x(n)$与输出 $y(n)$的频域关系为

$$Y(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega}X(\omega) + \frac{\mathrm{d}X(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

(a) 计算输入 $x(n) = \delta(n)$时的系统响应。

(b) 检查该系统是否为 LTI 而且稳定。

5.56 一个理想低通滤波器,它的冲激响应为 $h(n)$,频率响应为

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

另一个滤波器定义为

$$g(n) = \begin{cases} h\left(\dfrac{n}{2}\right), & n \text{为偶数} \\ 0, & n \text{为奇数} \end{cases}$$

求解该滤波器的频率响应。

5.57 考虑图 P5.57 中的系统。如果 $H(\omega)$是

(a) 截止频率为 ω_c 的低通滤波器。

(b) 截止频率为 ω_c 的高通滤波器。

分别计算该系统的冲激响应和频率响应。

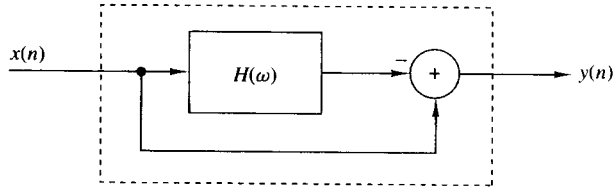


图 P5.57

5.58 频率反转器在语音扰频中,已经使用很多年了。的确,如果将声音信号 $x(n)$的频谱按图 P5.58 进行反转,那么此声音将变得难以理解。

(a) 指出频率反转是如何在时域中实现的。

(b) 设计一个解扰器。提示:要求运算简单,容易实时处理。

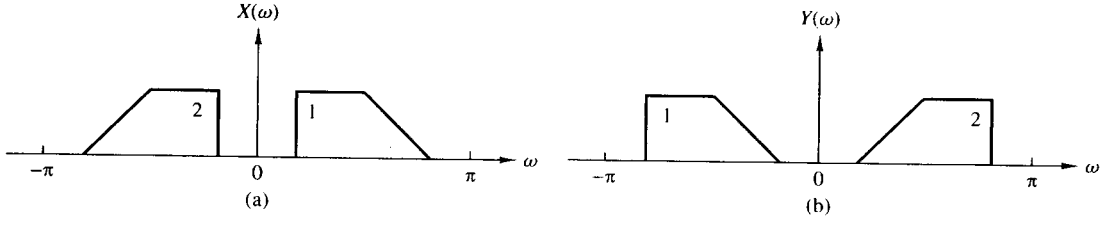


图 P5.58　(a)原频谱;(b)反转后的频谱

5.59 一个低通滤波器的差分方程为

$$y(n) = 0.9y(n-1) + 0.1x(n)$$

(a) 通过将频率平移 $\pi/2$,将该滤波器转变成带通滤波器。

(b) 这个带通滤波器的冲激响应是怎样的?

(c) 用频率平移的方法将原型低通滤波器转变成带通滤波器,存在哪些主要问题?

5.60 一个系统有实值的冲激响应 $h(n)$,并且频率响应为

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

量

$$D = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 h^2(n)$$

提供了 $h(n)$的"有效长度"的一种测度。

(a) 将 D 以 $H(\omega)$的形式表示。

(b) 证明当 $\theta(\omega) = 0$ 时,D 最小。

5.61 一个低通滤波器

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n), \qquad 0 < a < 1$$

(a) 计算 b 的值使得 $|H(0)| = 1$。

(b) 计算(a)部分的归一化滤波器的 3 dB 带宽 ω_3。

(c) 参数 a 的选择对 ω_3 有何影响?

(d) 通过选择 $-1 < a < 0$,可得到一个高通滤波器,重做(a)到(c)部分。

5.62 画出多径信道的幅度和相位响应图:

$$y(n) = x(n) + \alpha x(n-M), \qquad \alpha > 0$$

其中 $\alpha \ll 1$。

5.63 计算图 P5.63(a)到(c)中所画系统的系统函数及零-极点分布,并指出它们是否为稳定系统。

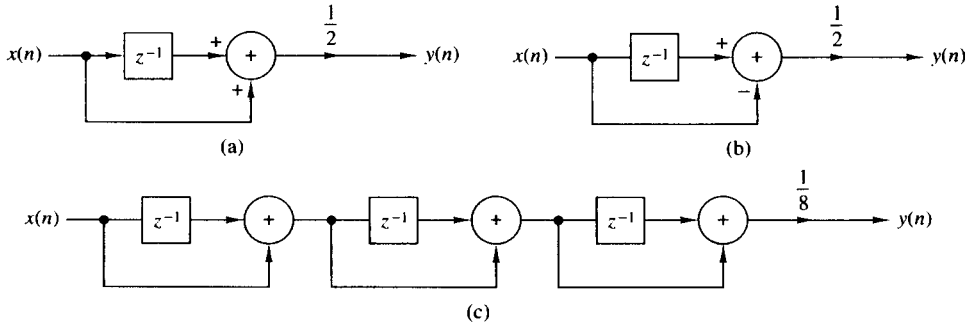


图 P5.63

5.64 图 P5.64 画出了一个 FIR 滤波器,对于 $b = 1$ 及 $b = -1$ 这两种情况,分别计算它的冲激响应、幅度响应和相位响应,并画图。

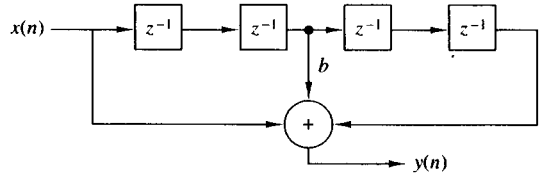


图 P5.64

5.65 已知一个系统

$$y(n) = x(n) - 0.95x(n-6)$$

(a) 画出它的零-极点模型图。

(b) 利用零-极点图，画出它的幅度响应图。

(c) 计算它的因果逆系统的系统函数。

(d) 利用零-极点图，画出它的逆系统的幅度响应图。

5.66 对下面指定的系统函数，计算所有可能系统的冲激响应和差分方程。

(a) $H(z) = \dfrac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$　　(b) $H(z) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-4a}z^{-4}}$，　$0 < a < 1$

5.67 一个因果 LTI 系统的输出响应为

$$y(n) = \{1, -1, 3, -1, 6\}$$

输入激励信号为

$$x(n) = \{1, 1, 2\}$$

计算该系统的冲激响应。

5.68 系统

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n)$$

的输入激励信号为

$$x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$$

计算序列 $r_{xx}(l)$，$r_{hh}(l)$，$r_{xy}(l)$以及 $r_{yy}(l)$。

5.69 判断下面的 FIR 系统是否为最小相位系统：

(a) $h(n) = \{10, 9, -7, -8, 0, 5, 3\}$

(b) $h(n) = \{5, 4, -3, -4, 0, 2, 1\}$

5.70 一个全零点系统

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

如果已知它的阶数 N 以及冲激响应 $h(0), h(1), \cdots, h(L-1)$的值，你是否能够计算它的系数？如何计算？如果不知道 N 怎么办？

5.71 已知一个系统的冲激响应为

$$h(n) = b_0\delta(n) + b_1\delta(n - D) + b_2\delta(n - 2D)$$

(a) 解释为什么系统会产生间隔为 D 个样本的回波？

(b) 计算系统的幅度和相位响应。

(c) 对于 $|b_0 + b_2| << |b_1|$，证明 $|H(\omega)|^2$ 的最大值和最小值位于

$$\omega = \pm\frac{k}{D}\pi, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

(d) 对于 $b_0 = 0.1$，$b_1 = 1$ 以及 $b_2 = 0.05$，画出 $|H(\omega)|$和$\measuredangle H(\omega)$的图，并对结果进行讨论。

5.72 一个零-极点系统

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

(a) 计算 $h(0),h(1),h(2)$和 $h(3)$,结果以 a,b 的形式表示。

(b) 令 $r_{hh}(l)$为 $h(n)$的自相关序列。计算 $r_{hh}(0),r_{hh}(1),r_{hh}(2)$和 $r_{hh}(3)$,结果以 a,b 的形式表示。

5.73 令 $x(n)$为实值的最小相位序列。修改 $x(n)$以得到另一个实值的最小相位序列 $y(n)$,使得 $y(0)=x(0)$且 $y(n)=|x(n)|$。

5.74 已知一个稳定的 LTI 系统的频率响应是实偶数。它的逆系统是稳定的吗?

5.75 令 $h(n)$是一个实系数滤波器,具有非零线性或非线性相位响应。证明下列运算等价于对信号 $x(n)$用一个零相位滤波器进行滤波。

(a) $g(n)=h(n)*x(n)$

$f(n)=h(n)*g(-n)$

$y(n)=f(-n)$

(b) $g(n)=h(n)*x(n)$

$f(n)=h(n)*x(-n)$

$y(n)=g(n)+f(-n)$

提示:计算合成系统 $y(n)=H[x(n)]$的频率响应。

5.76 检查下列陈述的正确性:

(a) 两个最小相位序列的卷积通常也是最小相位序列。

(b) 两个最小相位序列的和通常也是最小相位序列。

5.77 已知平方幅度响应为

(a) $|H(\omega)|^2=\dfrac{\frac{5}{4}-\cos\omega}{\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos\omega}$　　(b) $|H(\omega)|^2=\dfrac{2(1-a^2)}{(1+a^2)-2a\cos\omega}$, $\quad |a|<1$

计算其中最小相位系统。

5.78 一个具有如下系统函数的 FIR 系统:

$$H(z)=(1-0.8\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}z^{-1})(1-0.8\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}z^{-1})(1-1.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}z^{-1})(1-1.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4}z^{-1})$$

(a) 求解具有相同幅度响应的所有系统。哪一个是最小相位系统?

(b) 计算(a)部分所有系统的冲激响应。

(c) 画出所有系统的偏能

$$E(n)=\sum_{k=0}^{n}h^2(n)$$

利用这些图指出最小和最大相位系统。

5.79 已知因果系统

$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N}a_kz^{-k}}$$

是不稳定的。修改这个系统,把它的冲激响应 $h(n)$改变成

$$h'(n)=\lambda^nh(n)u(n)$$

(a) 证明通过选择适当的 λ,可以得到一个新的稳定系统。

(b) 描述这个新系统的差分方程是什么?

5.80 给定信号 $x(n)$,通过延迟和缩放,可以产生回波和混响:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}g_kx(n-kD)$$

其中,D 是正整数,并且 $g_k>g_{k-1}>0$。

(a) 解释为什么梳状滤波器

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-D}}$$

可以用做混响器(即用来产生人工混响的设备)。提示:计算它的冲激响应并画图。

(b) 全通梳状滤波器

$$H(z)=\frac{z^{-D}-a}{1-az^{-D}}$$

在实际中,通过级联三到五级这样的滤波器,并选择适当的参数 a 和 D,来构造数字混响器。通过三节级联并选择以下两组参数得到两组混响器,计算这样两组混响器的冲激响应,并画出简图。

组 1

节	D	a
1	50	0.7
2	40	0.665
3	32	0.631 75

组 2

节	D	a
1	50	0.7
2	17	0.77
3	6	0.847

(c) 回波和混响的区别在于:纯回波是信号清楚的重复,而混响则不是。这是如何反映在混响器冲激响应的形状上的?(b)部分中哪组是更好的混响器?

(d) 如果某组的延迟 D_1, D_2, D_3 是素数,则该组的冲激响应会更"密集",解释为什么。

(e) 画出第 1 组和第 2 组的相位响应图,并进行解释。

(f) 对于 D_1, D_2, D_3 是非素数,画出 $h(n)$的略图。你会有什么发现?

有关这方面应用的更详细介绍请参考 J. A. Moorer 的论文 *Signal Processing Aspects of Computer Music: A Survey*, *Proc. IEEE*, Vol. 65, No. 8, Aug. 1997, pp. 1108–1137.

5.81 通过反复试验,设计一个三阶低通滤波器,其截止频率在 $\omega_c=\pi/9$ 弧度/样本区间,从以下条件开始:

(a) $z_1=z_2=z_3=0, p_1=r, p_{2,3}=re^{\pm j\omega_c}, r\approx 0.8$

(b) $r=0.9, z_1=z_2=z_3=-1$

5.82 一个语音信号的带宽 $B=10$ kHz,以 $F_2=20$ kHz 频率对它进行采样。假如该信号受到四种频率正弦信号的破坏:

$$F_1=10\,000\text{ Hz}, \qquad F_3=7778\text{ Hz}$$
$$F_2=8889\text{ Hz}, \qquad F_4=6667\text{ Hz}$$

(a) 设计一个 FIR 滤波器,可以滤除这些频率分量。

(b) 选择滤波器增益,使得 $|H(0)|=1$,然后画出该滤波器的对数幅度响应及相位响应图。

(c) 这个滤波器能达到预期的目标吗?你是否推荐这种滤波器应用于实际工作中?

5.83 一个数字谐振器的 $\omega=\pi/6, r=0.6, 0.9, 0.99$,计算它的频率响应并画图。在每一种情况下,从图上计算其带宽及共振频率,并检查是否与理论结果一致。

5.84 一个通信信道的系统函数为

$$H(z)=(1-0.9e^{j0.4\pi}z^{-1})(1-0.9e^{-j0.4\pi}z^{-1})(1-1.5e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-1.5e^{-j0.6\pi}z^{-1})$$

设计一个因果稳定补偿系统,使它和该系统级联后具有平坦的幅度响应,计算这个补偿系统的系统函数 $H_c(z)$,画出分析过程中所包括的这两个系统的零-极点图,以及幅度和相位响应。提示:利用分解 $H(z)=H_{ap}(z)H_{min}(z)$。

第6章　信号的采样与重建

在第1章中，我们介绍了连续时间信号的采样，并说明了对于带限信号，如果采样率是信号最高频率的两倍以上，那么就可能从样本中重建出原信号。我们还简要地介绍了后续的量化与编码，这是将模拟信号转换成数字信号以进行数字处理的必要操作。

在这一章中，我们将进一步讨论时域采样、模数(A/D)转换(量化与编码)和数模(D/A)转换(信号重建)。我们还将介绍带通信号的采样，最后讨论在设计高精度 A/D 转换器时的过采样与 Σ-Δ 调制应用。

6.1　理想的连续时间信号采样与重建

要用数字信号处理技术来处理连续时间信号，就需要将信号转换成数字序列。类似于在1.4节讨论的那样，通常对模拟信号进行采样，比如说 $x_a(t)$，周期性地每 T s 产生一个离散时间信号 $x(n)$，表示为

$$x(n) = x_a(nT), \qquad -\infty < n < \infty \tag{6.1.1}$$

关系式(6.1.1)描述了时域采样过程。就像第1章讨论的那样，采样率 $F_s = 1/T$ 必须选得足够高，这样采样才不会引起频谱信息的丢失(无混叠)。当然，如果模拟信号的频谱能从离散时间信号的频谱中恢复，就不存在信息丢失。因此，我们通过寻找信号 $x_a(t)$ 和 $x(n)$ 之间的频谱关系，来研究采样过程。

如果 $x_a(t)$ 是能量有限的非周期性信号，那么它(电压)的频谱用傅里叶变换关系表示为

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft}\, dt \tag{6.1.2}$$

同时，信号 $x_a(t)$ 可以通过傅里叶逆变换进行恢复

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft}\, dF \tag{6.1.3}$$

注意，如果信号 $x_a(t)$ 不是带限信号，那么就必须利用无限频率区间 $-\infty < F < \infty$ 上的所有频率分量来恢复 $x_a(t)$。

通过采样 $x_a(t)$，离散时间信号 $x(n)$ 的频谱可以由傅里叶变换关系得到

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \tag{6.1.4}$$

或者等价的

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi fn} \tag{6.1.5}$$

序列 $x(n)$ 可以从频谱 $X(\omega)$ 或者 $X(f)$ 通过逆变换进行恢复

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi fn}\, df \tag{6.1.6}$$

为了求解离散时间信号与模拟信号的频谱关系，我们注意到，周期性采样使得信号 $x_a(t)$ 和 $x(n)$ 中各自的自变量 t 和 n 存在一定关系，即

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \tag{6.1.7}$$

这个时域关系意味着 $X_a(F)$ 和 $X(f)$ 中的频域变量 F 和 f 存在对应关系。

的确，将式(6.1.7)代入式(6.1.3)，就可以得到

$$x(n) \equiv x_a(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} \, dF \tag{6.1.8}$$

如果将式(6.1.6)与式(6.1.8)进行比较，那么就可以得出结论

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi fn} \, df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} \, dF \tag{6.1.9}$$

从第 1 章的介绍中，我们知道，周期性采样使得分别对应于模拟与离散时间信号的频率变量 F 和 f 之间存在一定的关系，即

$$f = \frac{F}{F_s} \tag{6.1.10}$$

利用式(6.1.10)，对式(6.1.9)中的变量进行一个简单变换，得到结果

$$\frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X(F) e^{j2\pi nF/F_s} \, dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} \, dF \tag{6.1.11}$$

现在我们留意式(6.1.11)中右边的积分，该积分区间可以划分成无限多个宽度为 F_s 的区间之和。因此，在无限区间上的积分可以表示为积分之和，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} \, dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} \, dF \tag{6.1.12}$$

我们注意到，$X_a(F)$ 在频率区间 $(k-\frac{1}{2})F_s$ 到 $(k+\frac{1}{2})F_s$ 的值与 $X_a(F-kF_s)$ 在区间 $-F_s/2$ 到 $F_s/2$ 的值相同。因此，

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} \, dF &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F-kF_s) e^{j2\pi nF/F_s} \, dF \\ &= \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F-kF_s) \right] e^{j2\pi nF/F_s} \, dF \end{aligned} \tag{6.1.13}$$

这里我们利用了复指数的周期特性，即

$$e^{j2\pi n(F+kF_s)/F_s} = e^{j2\pi nF/F_s}$$

比较式(6.1.13)、式(6.1.12)和式(6.1.11)，得出结论

$$X(F) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F-kF_s) \tag{6.1.14}$$

或者等价的

$$X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[(f-k)F_s] \tag{6.1.15}$$

这就是我们想得到的离散时间信号频谱 $X(F)$或 $X(f)$与模拟信号频谱 $X_a(F)$的关系。式(6.1.14)及式(6.1.15)的右边是由周期为 F_s 且放大了的频谱 $F_sX_a(F)$周期性地重复构成的。因为离散时间信号的频谱 $X(f)$的周期为 $f_p=1$ 或 $F_p=F_s$,所以这个周期性也是必然的。

例如,假设一个带限模拟信号的频谱如图 6.1.1(a)所示,当 $|F|\geqslant B$ 时,频谱为零。现在,如果选择采样率 F_s 大于 $2B$,那么离散时间信号的频谱 $X(F)$看起来就如图 6.1.1(b)所示。因此,若采样率 F_s 选择为 $F_s\geqslant 2B$,其中 $2B$ 为奈奎斯特率,则

$$X(F)=F_sX_a(F),\qquad |F|\leqslant F_s/2 \tag{6.1.16}$$

在这种情况下,不存在混叠,因而离散时间信号的频谱在基本频率区间 $|F|\leqslant F_s/2$ 或者 $|f|\leqslant\frac{1}{2}$内就和模拟信号的频谱相同(多了比例因子 F_s)。

另一方面,如果采样率 F_s 选择为 $F_s<2B$,则 $X_a(F)$周期性延续会导致频谱重叠,如图 6.1.1(c)和图 6.1.1(d)所示。因此,离散时间信号的频谱 $X(F)$含有模拟信号频谱 $X_a(F)$的混叠频率成分,由于出现了混叠,结果使我们无法从样本中恢复出原始信号 $x_a(t)$。

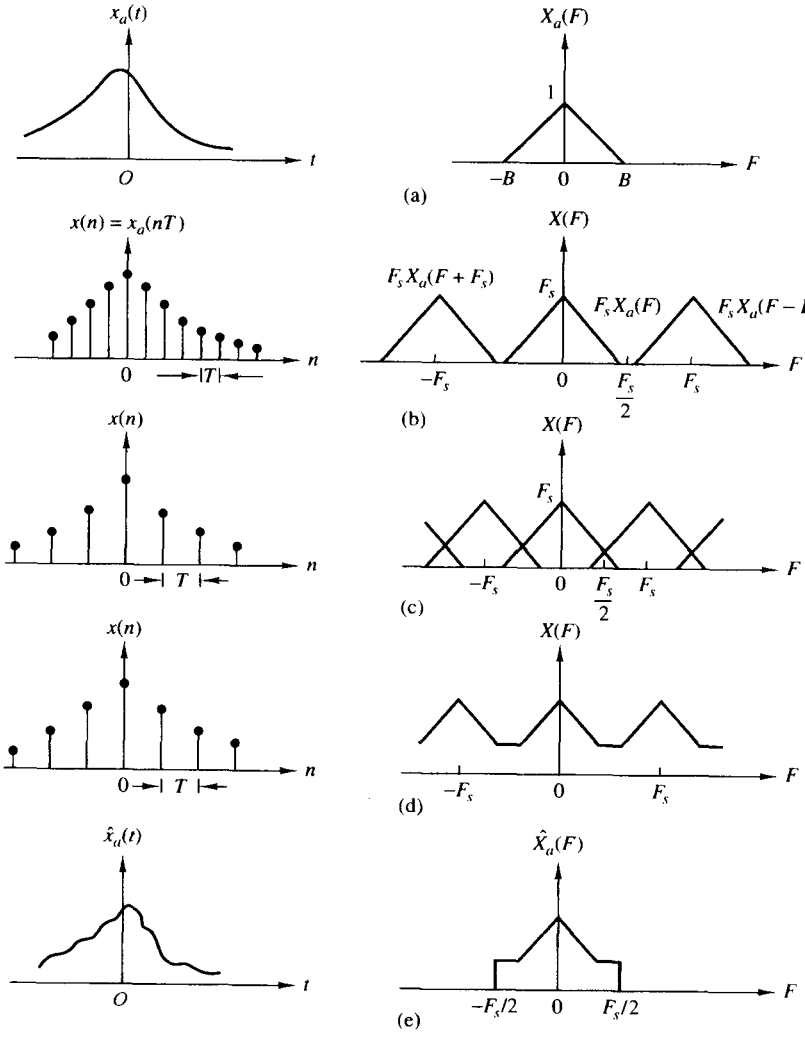


图 6.1.1 模拟带限信号及频谱分量混叠的采样

给定频谱为 $X(F)$的离散时间信号 $x(n)$，如图 6.1.1(b)所示，若不存在混叠，就可能从样本 $x(n)$重建原始模拟信号。由于没有混叠，

$$X_a(F)=\begin{cases}\dfrac{1}{F_s}X(F), & |F|\leqslant F_s/2\\ 0, & |F|>F_s/2\end{cases} \tag{6.1.17}$$

由式(6.1.5)的傅里叶变换关系，

$$X(F)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Fn/F_s} \tag{6.1.18}$$

$X_a(F)$的傅里叶逆变换为

$$x_a(t)=\int_{-F_s/2}^{F_s/2}X_a(F)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}F \tag{6.1.19}$$

假设 $F_s\geqslant 2B$，将式(6.1.17)代入式(6.1.19)，得出

$$\begin{aligned}x_a(t)&=\frac{1}{F_s}\int_{-F_s/2}^{F_s/2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Fn/F_s}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}F\\&=\frac{1}{F_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\int_{-F_s/2}^{F_s/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F(t-n/F_s)}\,\mathrm{d}F\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\frac{\sin(\pi/T)(t-nT)}{(\pi/T)(t-nT)}\end{aligned} \tag{6.1.20}$$

其中，$x(n)=x_a(nT)$，并且 $T=1/F_s$ 是采样间隔。这是我们在讨论采样定理时，由式(1.4.24)给出的重建公式。

重建公式(6.1.20)包括函数

$$g(t)=\frac{\sin(\pi/T)t}{(\pi/T)t} \tag{6.1.21}$$

经过适当地平移 nT，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，并与相应信号样本 $x_a(nT)$相乘或加权。我们称用于从样本重建 $x_a(t)$的式(6.1.20)为插值公式，称式(6.1.21)给出的 $g(t)$为插值函数。我们注意到，在 $t=kT$，除 $k=n$ 外，插值函数 $g(t-nT)$为零。因此，$x_a(t)$在$t=kT$处的值就只是样本值 $x_a(kT)$。在其他所有时间，插值函数的时移加权和的组合就可准确地产生出 $x_a(t)$，这种组合如图 6.1.2 所示。

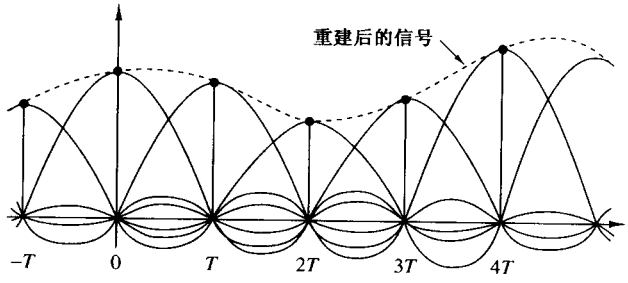


图 6.1.2　利用理想插值法重建连续时间信号

用于从样本重建模拟信号 $x_a(t)$的公式(6.1.20)称为理想插值公式，它构成了采样定理的基础，采样定理可以表述如下。

采样定理。一个带限连续时间信号,它的最高频率(带宽)为 B Hz,如果采样率 $F_s \geqslant 2B$ 个样本/s,那么就可以从它的样本唯一地恢复出原信号。

根据采样定理及重建公式(6.1.20),从样本 $x(n)$恢复出 $x_a(t)$需要无限的样本数目。然而,在实际中,我们要使用有限数目的信号样本来处理有限长信号。因而,我们只要考虑从有限数目样本来重建有限长信号问题。

当由于过低的采样率而出现混叠时,这种影响可描述为:模拟信号频率变量 F 的频率轴上存在若干个折叠。图 6.1.3(a)画出了一个模拟信号的频谱 $X_a(F)$。根据式(6.1.14),用采样率 F_s 对信号进行采样,这使得 $X_a(F)$以周期 F_s 出现重复。如果 $F_s < 2B$,各个平移了的 $X_a(F)$将会出现重叠。这种重叠出现在基本频率区间 $-F_s/2 \leqslant F \leqslant F_s/2$ 内,如图 6.1.3(b)所示。通过将所有在区间 $|f| \leqslant \frac{1}{2}$ 内的平移部分相加,就可以得到对应的离散时间信号在基本频率区间内的频谱,得到的频谱如图 6.1.3(c)所示。

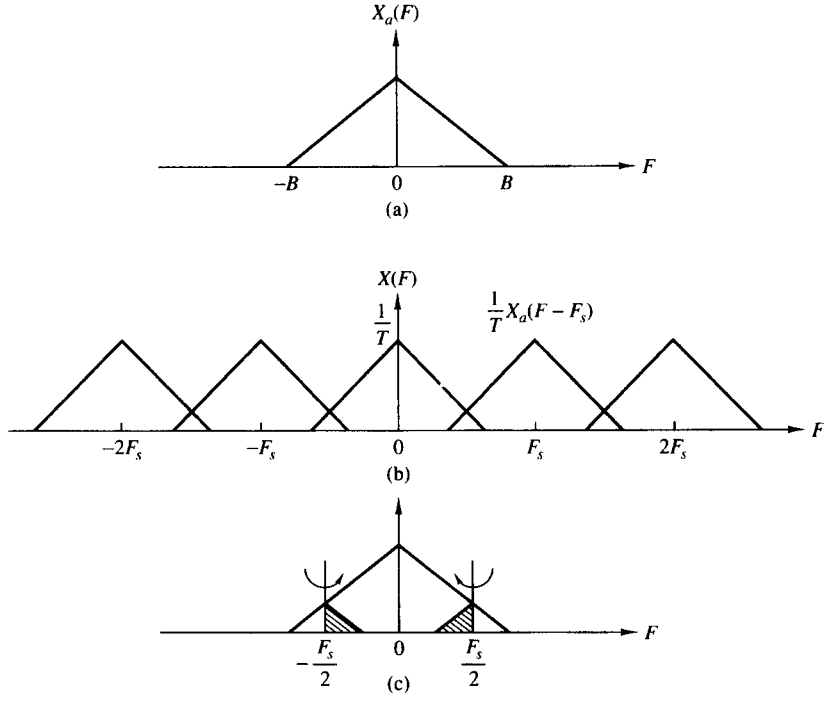


图 6.1.3 频率折叠附近的混叠图解

仔细观察图 6.1.3(a)和图 6.1.3(b),就会发现图 6.1.3(c)中的混叠频谱可以通过在 $F_s/2$ 的每个奇数倍处对折原频谱得到,就像有褶的手风琴一样。因此,频率 $F_s/2$ 称为折叠频率,这在第 1 章中也曾提到过。很明显,周期性的采样使得模拟信号在频率轴的 $F_s/2$ 的奇数倍处自动地产生了折叠,从而使得连续时间信号与离散时间信号在频率上满足关系 $F = fF_s$。由于在频率轴上发生折叠,关系 $F = fF_s$ 并不是真正线性的,而是分段线性的,以适应折叠的影响。这个关系如图 6.1.4 所示。

如果模拟信号的频带限制在 $B \leqslant F_s/2$,那么 f 和 F 的关系就是线性且一一对应的,换言之,不存在混叠。在实际中,通常在采样之前,用一个抗混叠滤波器对信号进行预滤波,这就保证了高于 $F \geqslant B$ 的频率分量得到充分衰减,从而即使存在混叠,对期望信号产生的失真也是可以忽略的。

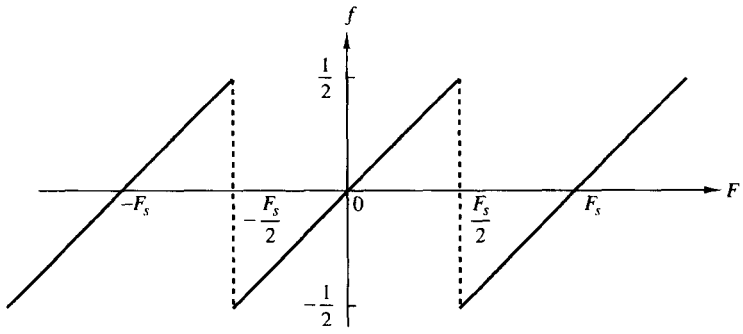


图 6.1.4　频率变量 F 和 f 的关系

时域和频域函数 $x_a(t)$、$x(n)$、$X_a(F)$和 $X(f)$的关系概括如图 6.1.5 所示。这个从离散时间量 $x(n)$和 $X(f)$恢复出连续时间函数 $x_a(t)$和 $X_a(F)$的关系，假定模拟信号是带限的并且用奈奎斯特率(或更高)对它进行采样。

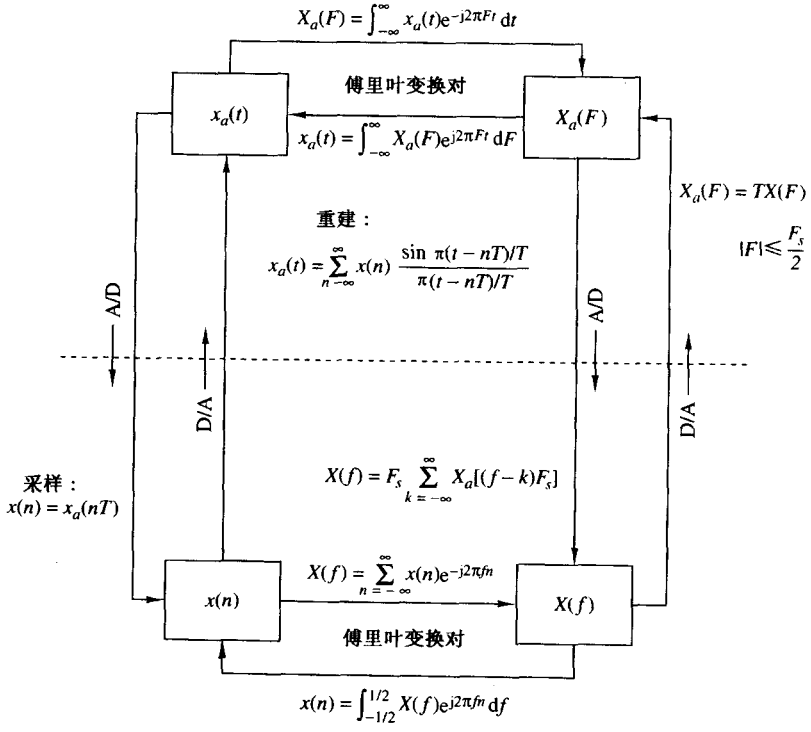


图 6.1.5　采样后信号的时域和频域关系

下面这个例子说明了频率分量混叠问题。

例 6.1.1　正弦信号的混叠

连续时间信号

$$x_a(t)=\cos 2\pi F_0 t=\frac{1}{2}e^{j2\pi F_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j2\pi F_0 t}$$

具有离散谱，谱线位于 $F=\pm F_0$，如图 6.1.6(a)所示。采样率为 F_s，对信号的采样处理在 F_s 的各个倍数处引入了频谱的复制。如图 6.1.6(b)所示，其中 $F_s/2<F_0<F_s$。

为重建连续时间信号,需要选择在基本频率区间 $|F| \leqslant F_s/2$ 内的频率分量,产生的频谱如图 6.1.6(c)所示。重建后的信号为

$$\hat{x}_a(t) = \cos 2\pi (F_s - F_0)t$$

现在,如果选择 F_s 使得 $F_s < F_0 < 3F_s/2$,那么采样后的信号频谱如图 6.1.6(d)所示。重建后的信号如图 6.1.6(e)所示,

$$x_a(t) = \cos 2\pi (F_0 - F_s)t$$

在这两种情况下,都出现了混叠,使得重建后的信号频率是原信号频率的一个混叠形式。

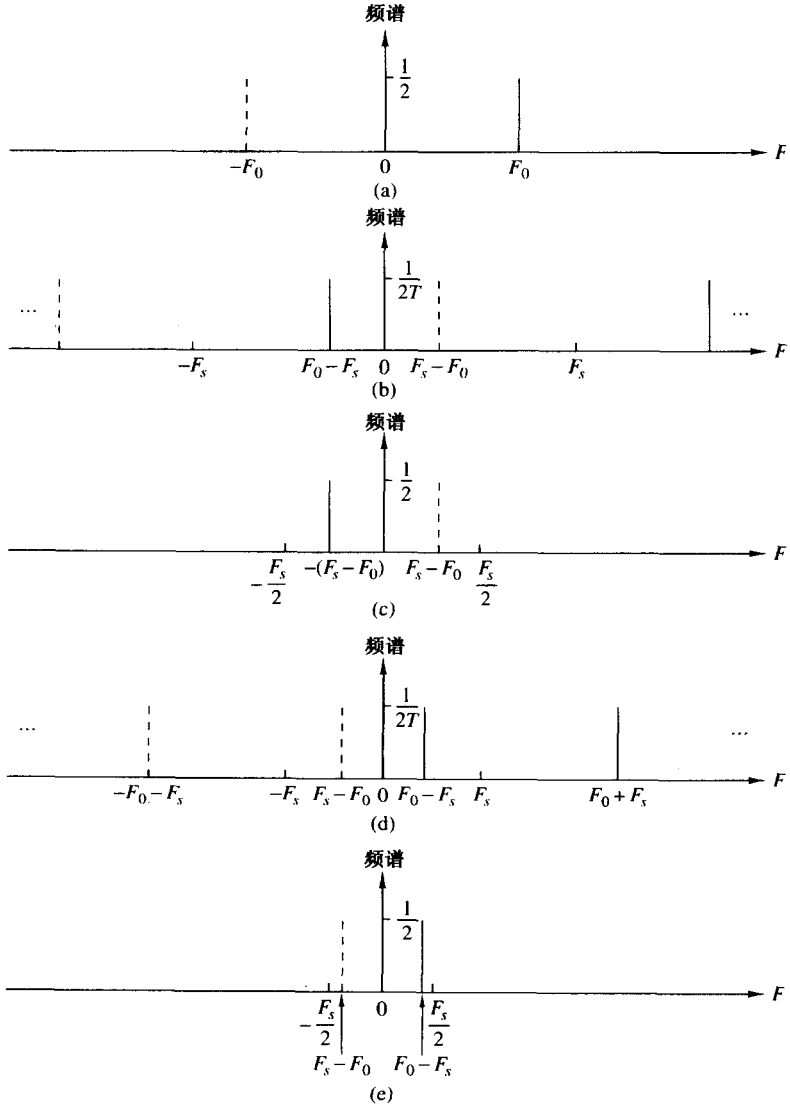


图 6.1.6 正弦信号的混叠

例 6.1.2 非带限信号的采样与重建

考虑如下的连续时间双边指数信号:

$$x_a(t) = e^{-A|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_a(F) = \frac{2A}{A^2 + (2\pi F)^2}, \quad A > 0$$

(a) 求解采样信号 $x(n)=x_a(nT)$的频谱。

(b) 画出 $T=1/3$ s和 $T=1$ s 的信号 $x_a(t)$和 $x(n)=x_a(nT)$的波形及其频谱图。

(c) 画出用理想带限插值方法重建后的连续时间信号 $\hat{x}_a(t)$的波形。

解：

(a) 如果以采样率 $F_s=1/T$ 采样 $x_a(nT)$，则得到

$$x(n)=x_a(nT)=\mathrm{e}^{-AT|n|}=(\mathrm{e}^{-AT})^{|n|},\quad -\infty<n<\infty$$

如果直接计算离散时间傅里叶变换，那么就很容易地得到 $x(n)$的频谱。

$$X(F)=\frac{1-a^2}{1-2a\cos 2\pi(F/F_s)+a^2},\quad a=\mathrm{e}^{-AT}$$

显然，因为 $\cos 2\pi(F/F_s)$是周期为 F_s 的周期函数，所以频谱 $X(F)$也是周期性的。

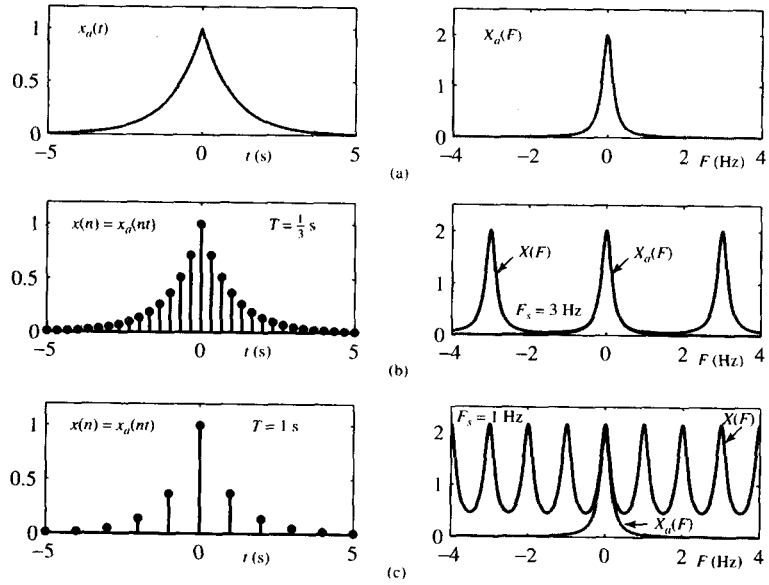


图 6.1.7　(a) 模拟信号 $x_a(t)$和它的频谱 $X_a(F)$；(b) $x(n)=x_a(nT)$及它的频谱，其中 $F_s=3$ Hz；(c) $x(n)=x_a(nT)$及它的频谱，其中 $F_s=1$ Hz

(b) 因为 $X_a(F)$不是带限的，所以不可避免地会出现混叠。图 6.1.7(a)画出了 $A=1$ 时，原信号 $x_a(t)$及它的频谱 $X_a(F)$。图 6.1.7(b)及图 6.1.7(c)分别画出了 $F_s=3$ Hz 和 $F_s=1$ Hz 的采样信号 $x(n)$及其频谱 $X(F)$。当 $F_s=1$ Hz 时，混叠失真在频域是很明显的；而当 $F_s=3$ Hz 时，混叠失真几乎觉察不到。

(c) 重建后的信号 $\hat{x}_a(t)$的频谱 $\hat{X}_a(F)$为

$$\hat{X}_a(F)=\begin{cases}TX(F), & |F|\leqslant F_s/2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

为了画出 $\hat{x}_a(t)$的波形，需要计算 $\hat{x}_a(t)$的值，这得对所有有意义的 $x(n)$和 $\sin(\pi t/T)/(\pi t/T)$的值，利用理想带限插值公式(6.1.20)来进行计算。图 6.1.8 画出了 $F_s=3$ Hz 和 $F_s=1$ Hz 的重建后信号及其频谱图。非常有趣的是，在这两种情况下，$\hat{x}_a(nT)=x_a(nt)$；但对于 $t\neq nT$，$\hat{x}_a(nt)\neq x_a(nT)$。对于 $F_s=1$ Hz，$\hat{x}_a(t)$的频谱明显存在混叠，我们注意到，折叠的频谱大约在 $F=\pm 0.5$ Hz，它增加了 $\hat{X}_a(F)$的高频分量。

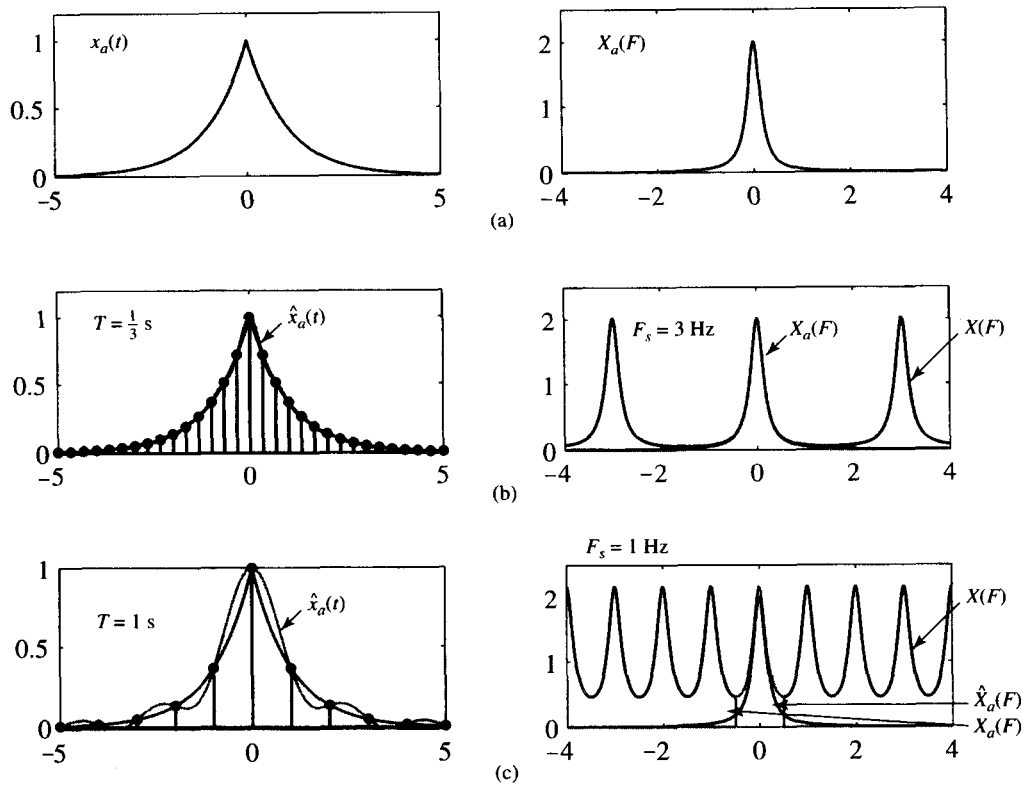


图 6.1.8 (a)模拟信号 $x_a(t)$和它的频谱 $X_a(F)$;(b)重建信号 $\hat{x}_a(t)$及它的频谱,其中 $F_s=3$ Hz;(c)重建信号$\hat{x}_a(t)$及它的频谱,其中 $F_s=1$ Hz

6.2 连续时间信号的离散时间处理

在许多实际应用中,经常需要对连续时间信号进行离散时间处理。图 6.2.1 画出了用来实现这个目的的一般系统结构图。在设计这个处理过程时,首选必须选择处理信号的带宽,这是因为信号带宽决定了最小采样率。例如,对于数字化传输的语音信号,需要包含 3000 Hz 以上的频率分量,但是作为语音清晰度及说话人识别,只保留 3000 Hz 以下的频率分量就足够了。因此,在语音信号处理中,为了保留语音信号的高频分量而发送额外的位,造成了信道带宽的浪费,从信号处理角度来说,这不是有效的方法。一旦选择了预期的频段,我们就可以确定采样率和预滤波器(也称为抗混叠滤波器)的特性,

预滤波器是一个模拟滤波器,它有两个作用。首先,确保采样信号的带宽限制在预期的频率范围内。因此,信号中任何高于 $F_s/2$ 的频率分量都会得到充分的衰减,这样由于混叠产生的信号总失真可以忽略。例如,在电话信道上进行数字化传输的语音信号,要经过一个通频带扩展到 3000 Hz 的低通滤波器进行滤波,其过渡频带大约在 400 ~ 500 Hz,截止频带在 3400 ~ 3500 Hz 以上。语音信号可能以 8000 Hz 进行采样,因此折叠频率为 4000 Hz,所以混叠可以忽略。使用预滤波的另一个目的是限制破坏期望信号的加性噪声频谱及其他干扰。通常,加性噪声是宽频带的,超过了期望信号的带宽。通过预滤波,可以降低落在期望信号频带范围内的加性噪声功率,并抑制带外噪声。

当我们确定了预滤波器的需求并选择了预期的采样率后,就可进行设计用于离散时间信号的

数字信号处理。采样率 $F_s = 1/T$ 的选择(其中 T 是采样间隔)不但决定了模拟信号中预留的最高频率($F_s/2$),而且还作为缩放因子影响数字滤波器及处理信号所经过的其他任何离散时间系统的设计指标。

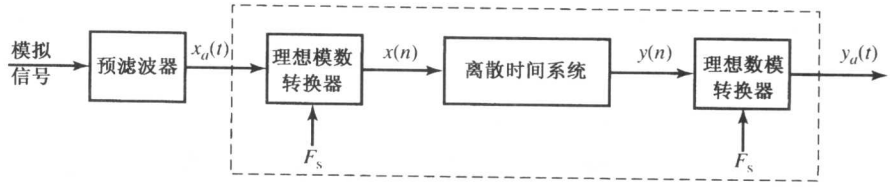


图 6.2.1　对连续时间信号进行离散时间处理的系统

理想 A/D 转换器和理想 D/A 转换器提供了连续时间域和离散时间域之间的接口。整个系统等价于连续时间系统,它可能是也可能不是线性时不变系统(即使离散时间系统是线性时不变系统),这是因为理想 A/D 和 D/A 转换器进行的是时变运算。

图 6.2.2 总结描述了理想 A/D 转换器在时域和频域的输入-输出特性。回想可知,如果 $x_a(t)$ 是输入信号,$x(n)$ 是输出信号,那么可以得出

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT) \qquad \text{(时域)} \tag{6.2.1}$$

$$X(F) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \qquad \text{(频域)} \tag{6.2.2}$$

基本上,理想 A/D 转换器是线性时不变系统,只是(a)将模拟信号的频谱乘上一个因子 $F_s = 1/T$,并且(b)产生了周期为 F_s 的缩放了的频谱复制件。

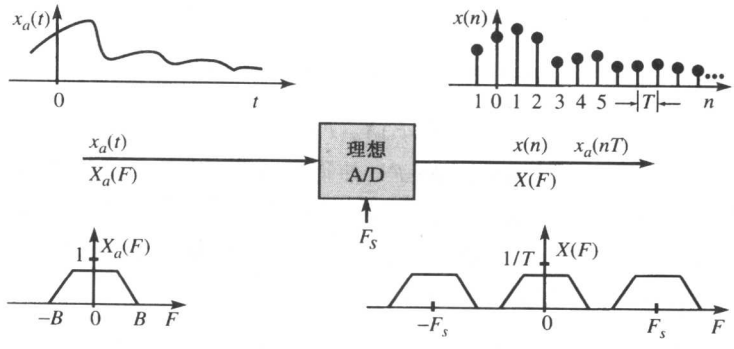


图 6.2.2　理想 A/D 转换器的时域和频域特性

图 6.2.3 描述了理想 D/A 转换器的输入-输出特性,输入输出信号的时域关系为

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)g_a(t - nT), \quad \text{(时域)} \tag{6.2.3}$$

其中,

$$g_a(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G_a(F) = \begin{cases} T, & |F| \leqslant F_s/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{6.2.4}$$

这是理想 D/A 的插值函数。值得强调的是,式(6.2.3)看起来像是卷积,但不是卷积,这是因为 D/A 是线性时变系统,具有离散时间输入和连续时间输出。为了得到频域描述,计算输出信号的傅里叶变换

$$Y_a(F)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)\int_{-\infty}^{\infty}g_a(t-nT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)G_a(F)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi FnT}$$

将 $G_a(F)$放到求和的外面,得出

$$Y_a(F)=G_a(F)Y(F)\qquad(\text{频域})\tag{6.2.5}$$

其中,$Y(F)$是 $y(n)$的离散时间傅里叶变换。我们注意到,理想 D/A 转换器(a)对输入信号频谱乘了一个缩放因子 $T=1/F_s$,并且(b)去除了 $|F|>F_s/2$ 的频率分量。基本上,理想 D/A 的作用就像一个频率窗口,去除了离散时间频谱周期特性,产生了非周期的连续时间信号的频谱。再一次强调,理想 D/A 不是连续时间的理想低通滤波器,这是因为式(6.2.3)不是连续时间的卷积。

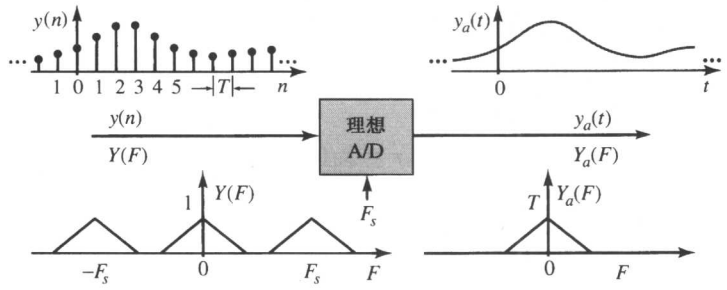


图 6.2.3 理想 D/A 转换器的时域和频域特性

现在假设给出一个连续时间 LTI 系统,

$$\tilde{y}_a(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h_a(\tau)x_a(t-\tau)\,\mathrm{d}t\tag{6.2.6}$$

$$\tilde{Y}_a(F)=H_a(F)X_a(F)\tag{6.2.7}$$

我们希望确定是否存在一个离散时间系统 $H(F)$,使得图 6.2.1 中整个系统等价于连续时间系统 $H_a(F)$。如果 $x_a(t)$不是带限信号,或者它是带限信号但 $F_s<2B$,那么由于混叠的存在就不可能找到这样的一个系统。然而如果 $x_a(t)$是带限信号且 $F_s>2B$,那么对于 $|F|\leqslant F_s/2$,就可以得到 $X(F)=X_a(F)/T$。因此,图 6.2.1 中的系统输出为

$$Y_a(F)=H(F)X(F)G_a(F)=\begin{cases}H(F)X_a(F), & |F|\leqslant F_s/2\\ 0, & |F|>F_s/2\end{cases}\tag{6.2.8}$$

为了确保 $y_a(t)=\hat{y}_a(t)$,需要选择一个离散时间系统,使得

$$H(F)=\begin{cases}H_a(F), & |F|\leqslant F_s/2\\ 0, & |F|>F_s/2\end{cases}\tag{6.2.9}$$

我们注意到,在这种特殊情况下,将 A/D 转换器(线性时变系统)与 LTI 系统和 D/A 转换器(线性时变系统)级联,等价于连续时间系统。这个重要结论为连续时间信号进行离散时间滤波提供了理论基础。在下面的例子中,将介绍这些概念。

例 6.2.1 模拟积分器的仿真

已知一个模拟积分器电路如图 6.2.4(a)所示,它的输入-输出关系为

$$RC\frac{dy_a(t)}{\mathrm{d}t}+y_a(t)=x_a(t)$$

对两边进行傅里叶变换，可以得到该积分器的频率响应

$$H_a(F)=\frac{Y_a(F)}{X_a(F)}=\frac{1}{1+\mathrm{j}F/F_c},\quad F_c=\frac{1}{2\pi RC}$$

计算傅里叶逆变换，可以得出冲激响应

$$h_a(t)=A\mathrm{e}^{-At}u(t),\quad A=\frac{1}{RC}$$

很明显，冲激响应 $h_a(t)$是非带限信号。现在通过采样连续时间冲激响应，定义一个离散时间系统：

$$h(n)=h_a(nT)=A(\mathrm{e}^{-AT})^nu(n)$$

我们说，这个离散时间系统是从连续时间系统通过冲激恒等变换(见 10.3.2 节)得到的。该离散时间系统的系统函数和差分方程为

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A(\mathrm{e}^{-AT})^nz^{-n}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-AT}z^{-1}}$$

$$y(n)=\mathrm{e}^{-AT}y(n-1)+Ax(n)$$

这个系统是因果的，并且在 $p=\mathrm{e}^{-AT}$处存在一个极点。因为 $A>0,|p|<1$，所以系统通常是稳定的。通过计算 $H(z)$在 $z=\mathrm{e}^{j2\pi F/F_s}$处的值，可以得到系统的频率响应。图 6.2.4(b)画出了模拟积分器和离散时间仿真在 $F_s=50$ Hz，100 Hz，200 Hz 和 1000 Hz 时的幅频响应图。我们注意到，只有当采样率大于 1 kHz 时，采样 $h_a(t)$带来的混叠影响才可以忽略。对于带宽远远低于采样率的输入信号的离散时间实现是精确的。

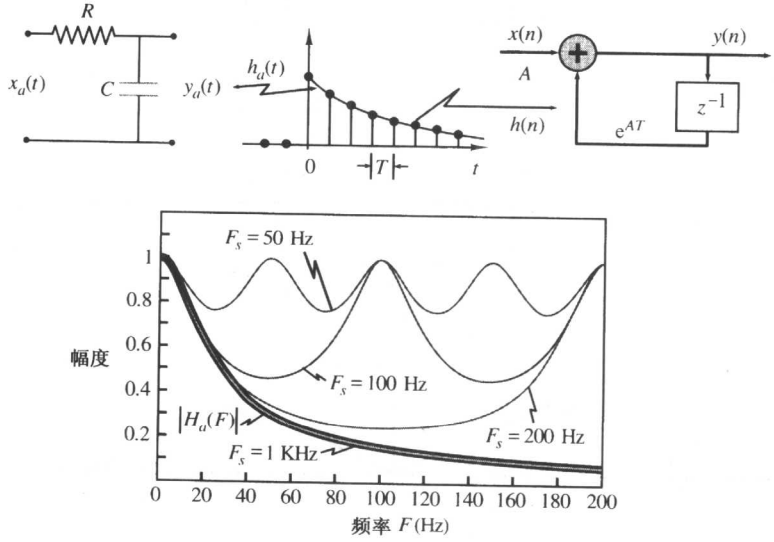


图 6.2.4　利用冲激响应采样在离散时间上实现模拟积分器。当输入信号的带宽远远低于采样率时，这种近似已经可以满足了

例 6.2.2　理想带限微分器

理想连续时间微分器定义为

$$y_a(t)=\frac{\mathrm{d}x_a(t)}{\mathrm{d}t}\tag{6.2.10}$$

并且频率响应函数为

$$H_a(F)=\frac{Y_a(F)}{X_a(F)}=\mathrm{j}2\pi F\tag{6.2.11}$$

为了处理带限信号,利用理想带限微分器就足够了,

$$H_a(F)=\begin{cases}\mathrm{j}2\pi F, & |F|\leqslant F_c\\ 0, & |F|>F_c\end{cases} \tag{6.2.12}$$

如果选择 $F_s=2F_c$,那么可以定义一种理想离散时间微分器

$$H(F)=H_a(F)=\mathrm{j}2\pi F,\quad |F|\leqslant F_s/2 \tag{6.2.13}$$

通过定义 $H(F)=\sum_k H_a(F-kF_s)$,可以得到 $h(n)=h_a(nT)$。根据 $\omega=2\pi F/F_s$,得出 $H(\omega)$是周期为 2π 的周期性函数。因此,离散时间冲激响应为

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi n\cos\pi n-\sin\pi n}{\pi n^2T} \tag{6.2.14}$$

或者用一种更紧凑的形式表示为

$$h(n)=\begin{cases}0, & n=0\\ \frac{\cos\pi n}{nT}, & n\neq 0\end{cases} \tag{6.2.15}$$

微分器的连续时间和离散时间理想幅度和相位响应如图 6.2.5 所示。

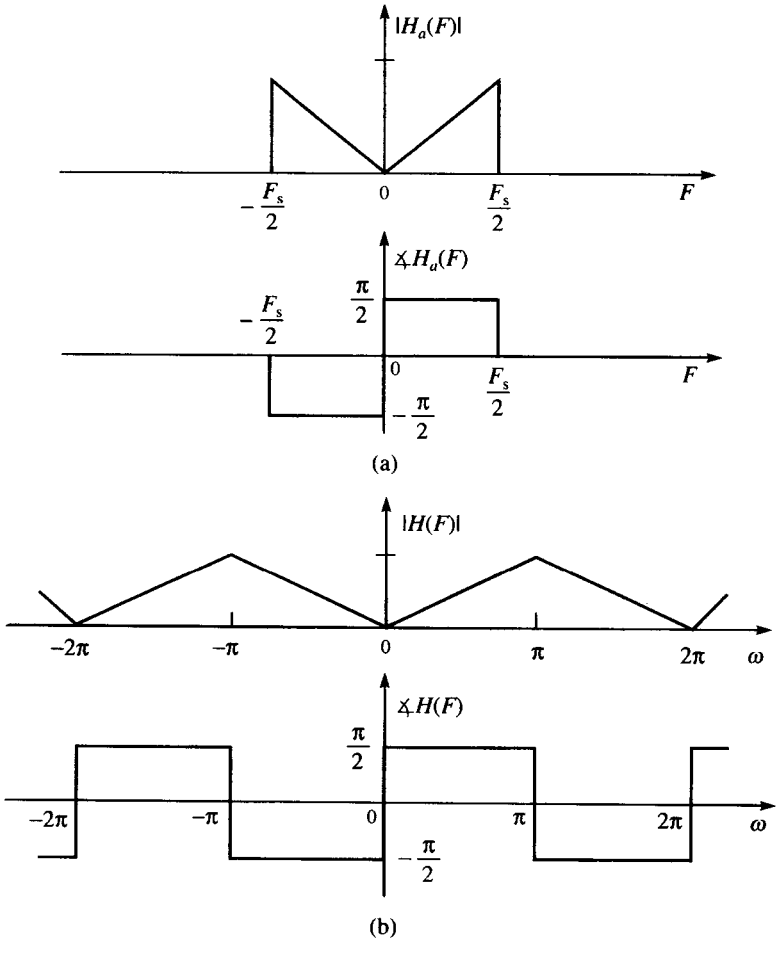


图 6.2.5 (a)理想带限连续时间微分器及(b)对应的离散时间频率响应

例 6.2.3　分数延迟

连续时间延迟系统定义为：对于任意的 $t_d > 0$，

$$y_a(t) = x_a(t - t_d) \tag{6.2.16}$$

虽然这个概念很简单，但是它在实际中的实现却十分复杂。如果 $x_a(t)$是带限的，并且以奈奎斯特率对它进行采样，那么就得到

$$y(n) = y_a(nT) = x_a(nT - t_d) = x_a[(n - \Delta)T] = x(n - \Delta) \tag{6.2.17}$$

其中 $\Delta = t_d/T$。如果 Δ 是整数，那么延迟序列 $x(n)$是一个很简单的操作。对于非整数的 Δ 值，延迟后的 $x(n)$值可能刚好位于两个样本之间。然而这个值是无法获取的，唯一的方法是通过理想带限插值产生适当的值。解决这个问题的一个途径是，考虑式(6.2.17)中的延迟系统的频率响应

$$H_{id}(\omega) = e^{-j\omega\Delta} \tag{6.2.18}$$

它的冲激响应为

$$h_{id}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin\pi(n - \Delta)}{\pi(n - \Delta)} \tag{6.2.19}$$

当延迟 Δ 假设为整数值时，因为 sin 函数在零交叉点被采样，所以 $h_{id}(n)$简化为 $\delta(n - \Delta)$。当 Δ 为非整数时，因为采样时间落在两个零交叉点之间，所以 $h_{id}(n)$为无限长。可惜的是，分数延迟系统的理想冲激响应是非因果的，并且为无限长。因此，频率响应(6.2.18)必须用可实现的 FIR 或 IIR 滤波器来近似。关于分数延迟滤波器的设计在 Laakso 等人的著作(1996)中有详细说明。利用采样率变换技术实现分数延迟将在 11.8 节进行讨论。

6.3　模数转换器和数模转换器

在前面的章节中，我们都假定 A/D 和 D/A 转换器在处理连续时间信号时是理想的。我们在讨论连续时间和离散时间信号处理的等价问题上已经做了一个隐含的假设，即在模-数转换中的量化误差和数字信号处理中的截取误差是可以忽略的，我们在这一节会进一步讨论这个问题。然而，我们还应该强调，模拟信号处理操作很难做到十分准确，这是因为模拟系统中的电子元件存在误差，并且在运算过程中还会引入噪声。通常，数字系统设计者比设计等价模拟系统的模拟系统设计者能更好地控制数字信号处理系统中的误差。

6.1 节的讨论主要集中在，利用理想采样器和理想插值将连续时间信号转变成离散时间信号。在这一节中，我们将研究执行这些模拟到数字转换的器件。

6.3.1　模数转换器

回想可知，连续时间(模拟)信号转换成数字序列的操作，可以通过一个数字系统来处理，这需要将采样后的值量化成有限级，每一级用一定数目的位来表示。

图 6.3.1(a)画出了 A/D 转换器的基本元件结构图。在这一节中，我们来讨论这些元件的性能要求。虽然我们重点关注的是理想系统特性，但是我们还是要提到在实际器件中的某些主要缺陷，并且指出这些缺陷是如何影响转换器的性能的。我们集中于那些与信号处理应用密切相关的方面，A/D 转换器及其相关电路的实际问题可以查阅制造商的说明书和器件手册。

在实际中，对模拟信号的采样是通过采样保持(S/H)电路实现的。采样的信号于是经过量化转换成数字形式。通常，采样 S/H 集成在 A/D 转换器内。S/H 是用数字方式控制模拟电路，在采样模式，跟踪模拟输入信号；然后在保持模式，将系统从采样模式切换到保持模式时信号的瞬时值一直保持。图 6.3.1(b)画出了一个理想 S/H 电路的时域响应图(即 S/H 是即时准确响应的)。

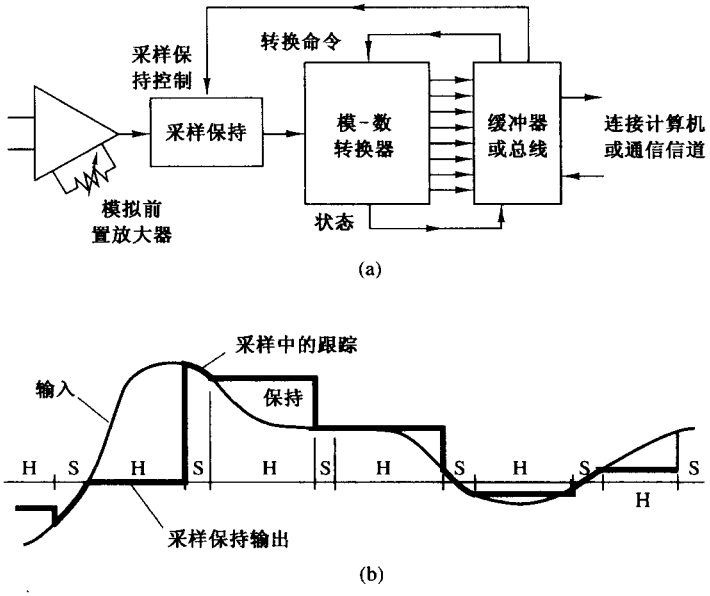


图 6.3.1 (a)A/D 转换器的基本组成结构图;(b)理想采样保持电路的时域响应

S/H 的目的是连续地采样输入信号,然后保持值不变直到 A/D 转换器得到信号的数字表示。与实际获得采样值的时间相比,利用 S/H 使得 A/D 转换器能够以更慢的速度运行。如果没有 S/H,输入信号在转换期间的半个量化步长内不可以改变,这个约束在实际中是办不到的。因此,S/H 在高带宽信号(即信号变化很快)的高分辨率(每个样本 12 位或更高)数字转换器中是至关重要的。

理想的 S/H 在转换过程中不会引入失真,并且可以准确地模拟理想采样器。然而,采样处理周期中出现的错误(抖动)、采样间隙持续时的非线性变化、转换期间保持的电压发生的改变(电压降落),这些与时间有关的退化确实出现在实际器件中。

A/D 转换器收到转换命令后,就开始转换。完成转换所需要的时间应该小于 S/H 保持模式的持续时间。此外,采样周期 T 应该大于采样模式和保持模式的持续时间。

在下一节,假定 S/H 引入的误差可以忽略,我们集中讨论对模拟样本的数字转换。

6.3.2 量化与编码

A/D 转换器的基本任务就是将输入的连续幅度范围转换成离散的数字码字集,这个转换包括量化与编码过程。量化是非线性、不可逆的过程,将 $t = nT$ 时刻给定的幅度 $x(n) \equiv x(nT)$ 映射成有限值集合内的幅度 x_k。这个步骤如图 6.3.2(a)所示,其中信号幅度范围通过 $L+1$ 个判决级别 $x_1, x_2, \cdots, x_{L+1}$,划分成 L 个区间

$$I_k = \{x_k < x(n) \leqslant x_{k+1}\}, \qquad k = 1, 2, \cdots, L \tag{6.3.1}$$

量化可能的输出(即量化级别)表示为 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_L$。量化运算是由关系式

$$x_q(n) \equiv Q[x(n)] = \hat{x}_k, \qquad x(n) \in I_k \tag{6.3.2}$$

定义的。

在大多数数字信号处理运算中,式(6.3.2)的映射与 n 独立(即量化无记忆且仅仅表示为 $x_q = Q[x]$)。此外,在数字信号处理中,通常使用均匀或线性量化,定义为

$$\begin{aligned} &\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k = \Delta, \qquad k = 1, 2, \cdots, L-1 \\ &x_{k+1} - x_k = \Delta, \qquad \text{对于有限} x_k, x_{k+1} \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

其中，Δ 为量化步长。如果最终的数字信号要经过数字系统处理，那么就常常需要均匀量化。然而，对于语音等信号的传输和存储应用，非线性和时变量化得到了频繁使用。

如果零属于一个量化级别，那么这种量化器是中平型；如果零属于一个判决级别，则这种量化器是中升型。图 6.3.2(b)画出一个 $L=8$ 级的中平型量化器。理论上，类似 $x_1=-\infty$，$x_{L+1}=\infty$ 的首尾判决级别要覆盖输入信号的整个动态范围。然而，实际的 A/D 转换器只能处理有限的范围。因此，通过假定 $I_1=I_L=\Delta$，就可以定义量化器的范围 R。例如，图 6.3.2(b)画出的量化器的转换范围等于 8Δ。在实际中，术语“满量程范围”(FSR)用于描述 A/D 转换器对双极性信号(即信号的幅度有正有负)的转换范围。术语“满量程”(FS)用于单极型信号。

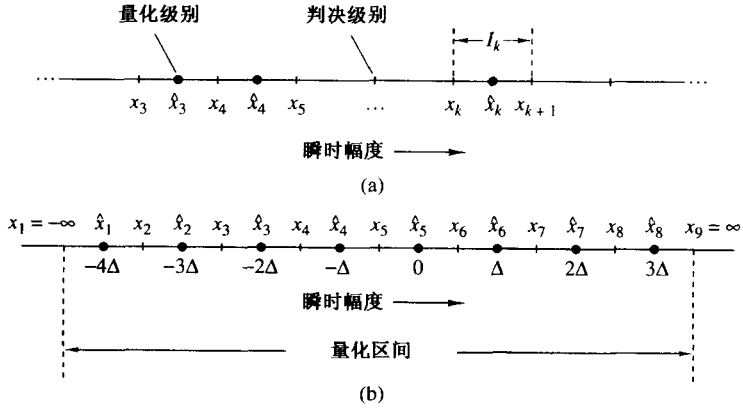


图 6.3.2　量化处理与中平型量化器实例

很容易理解，量化误差 $e_q(n)$ 的范围在通常在-Δ/2 到 Δ/2 之间：

$$-\frac{\Delta}{2}<e_q(n)\leqslant\frac{\Delta}{2} \tag{6.3.4}$$

换言之，瞬时量化误差不可能超过量化步长的一半。如果信号的动态范围定义为 $x_{\max}-x_{\min}$，它超过了量化器的范围，那么超过量化器范围的样本将被截断，导致了更大的(超过 Δ/2)量化误差。

图 6.3.3 画出了一个具有 8 级量化级别的中平型量化器，它的量化特性函数很好地描述了量化运算。这个特性在中升型量化器中更加明显，这是因为它的输出对输入信号的接近于零的微小变化不敏感。中平型量化器的输入幅度被四舍五入到最近的量化级别。

A/D 转换器的编码操作，就是将每个量化级别分配一个唯一的二进制数。如果有 L 个级别，那最少需要 L 个不同的二进制数。长为 $b+1$ 位的字，可以表示 2^{b+1} 个不同的二进制数。因此，要求 $2^{b+1}\geqslant L$，或者等价地，$b+1\geqslant \mathrm{lb}\,L$。于是，就可以得出 A/D 转换器的步长或分辨率为

$$\Delta=\frac{R}{2^{b+1}} \tag{6.3.5}$$

其中，R 为量化器的转换范围。

有很多二进制编码方案，每种方案都各有千秋。表 6.1 给出了一些已有编码方案的 3 位二进制码。我们将在 9.4 节详细描述这些数的表示方法。

在大部分数字信号处理器中，都用二元补码来表示。因此，可以很方便地使用同样的系统来表示数字信号，对它们可以直接运算而不需要额外的格式转换。通常，形如 $\beta_0\beta_1\beta_2\cdots\beta_b$ 的 $(b+1)$ 位二进制小数，用二元补码表示的值为

$$-\beta_0\cdot 2^0+\beta_1\cdot 2^{-1}+\beta_2\cdot 2^{-2}+\cdots+\beta_b\cdot 2^{-b}$$

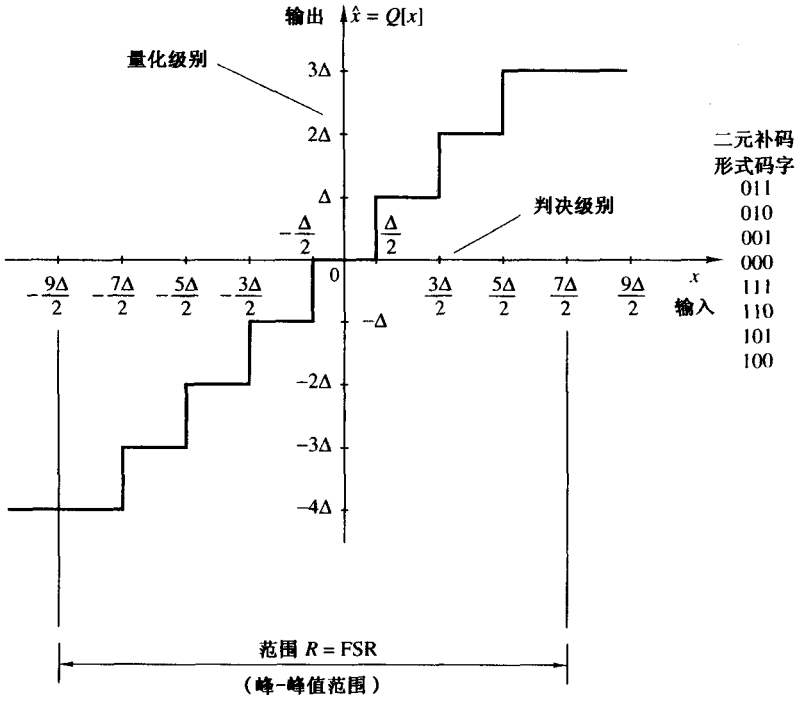


图 6.3.3 中平型量化器实例

表 6.1 常用的双极性码

	十进制分数					
数值	正参考	负参考	正符号幅度	二元补码	偏移二元码	一元补码
+7	$+\frac{7}{8}$	$-\frac{7}{8}$	0111	0111	1111	0111
+6	$+\frac{6}{8}$	$-\frac{6}{8}$	0110	0110	1110	0110
+5	$+\frac{5}{8}$	$-\frac{5}{8}$	0101	0101	1101	0101
+4	$+\frac{4}{8}$	$-\frac{4}{8}$	0100	0100	1100	0100
+3	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	0011	0011	1011	0011
+2	$+\frac{2}{8}$	$-\frac{2}{8}$	0010	0010	1010	0010
+1	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0001	0001	1001	0001
0	0+	0−	0000	0000	1000	0000
0	0−	0+	1000	(0000)	(1000)	1111
−1	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$	1001	1111	0111	1110
−2	$-\frac{2}{8}$	$+\frac{2}{8}$	1010	1110	0110	1101
−3	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{3}{8}$	1011	1101	0101	1100
−4	$-\frac{4}{8}$	$+\frac{4}{8}$	1100	1100	0100	1011
−5	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{5}{8}$	1101	1011	0011	1010
−6	$-\frac{6}{8}$	$+\frac{6}{8}$	1110	1010	0010	1001
−7	$-\frac{7}{8}$	$+\frac{7}{8}$	1111	1001	0001	1000
−8	$-\frac{8}{8}$	$+\frac{8}{8}$		(1000)	(0000)	

注意，β_0为最高有效位(MSB)，β_b 为最低有效位(LSB)。虽然用二元码表示量化级别对设计 A/D 转换器及接下来的数值计算是非常重要的，但是它对量化操作的性能没有任何影响。因此，在接下来分析 A/D 转换器性能的讨论中，会忽略编码操作。

理想 A/D 转换器带来的唯一退化是量化误差，这个误差可以通过增加量化位数来减小。量化误差对实际 A/D 转换器性能具有举足轻重的作用，下一节我们将对它进行分析。

实际 A/D 转换器与理想转换器在许多方面都存在差别。在实际中，常常会遇到各种退化问题。特别是，实际的 A/D 转换器可能会存在偏移误差(最初的转变可能并未准确地出现在 $+\frac{1}{2}$ LSB)、比例因子(或增益)误差(最初转换的值与最后转换值的差不等于 FS - 2LSB)以及线性误差(转换值的差并不是全部相等或者均匀变化)。如果微分线性误差足够大，那么就有可能丢失一个或多个码字。商业上可用的 A/D 转换器的性能参数数据在生产厂家的器件手册中有详细说明。

6.3.3　量化误差分析

为了分析量化对 A/D 转换器性能的影响，我们采用一种统计方法。量化误差依赖于输入信号的特性及量化器的非线性特征，除非特别简单的情况，否则我们很难进行确定性分析。

对于统计方法，假定量化误差具有随机特性。我们把这种误差视为加到原始(未量化)信号中的噪声模型。如果输入模拟信号在量化器的范围之内，则量化误差的幅度 $e_q(n)$是有界的(即 $|e_q(n)| < \Delta/2$)，最终的误差称为颗粒噪声。当输入落到量化器范围之外(截断)时，$e_q(n)$会变成无界，最终出现过载噪声。当出现这种类型的误差时，会导致信号严重失真。唯一的措施是降低输入信号的幅度，使得它的动态范围落在量化器的转换范围之内。下面分析是基于没有过载噪声的假设。

量化误差 $e_q(n)$的数学模型如图 6.3.4 所示。为了进行分析，对 $e_q(n)$的统计特性进行以下假设：

1. 误差 $e_q(n)$在区间 $-\Delta/2 < e_q(n) < \Delta/2$ 上均匀分布。
2. 误差序列$\{e_q(n)\}$是静态的白噪声序列。换言之，对于 $m \neq n$，误差 $e_q(n)$和误差 $e_q(m)$不相关。
3. 误差序列$\{e_q(n)\}$与信号序列 $x(n)$不相关。
4. 信号序列 $x(n)$是零均值且静态的。

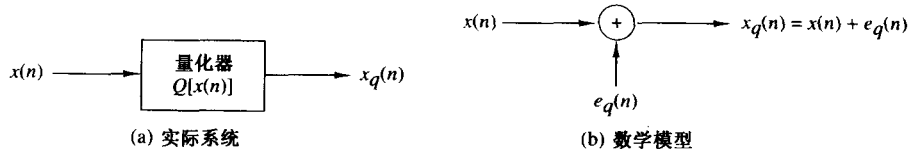


图 6.3.4　量化噪声的数学模型

通常这些假设是不成立的。然而，当量化步长很小且信号序列 $x(n)$的两个连续样本之间的变化经过好几个量化级别时，这些假设确实成立。

基于这些假设，通过计算信号与量化噪声(功率)比(SQNR)，就可以定量分析加性噪声 $e_q(n)$对期望信号的影响，用比例的对数(以 dB 形式)表示为

$$\mathrm{SQNR} = 10\lg\frac{P_x}{P_n} \tag{6.3.6}$$

其中，$P_x = \sigma_x^2 = E[x^2(n)]$是信号功率，$P_n = \sigma_e^2 = E[e_q^2(n)]$是量化噪声功率。

如果量化误差在区间$(-\Delta/2, \Delta/2)$上均匀分布，如图 6.3.5 所示，那么误差的均值为零，方差(量化噪声功率)为

$$P_n = \sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 p(e)\,\mathrm{d}e = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2\,\mathrm{d}e = \frac{\Delta^2}{12} \tag{6.3.7}$$

结合式(6.3.5)和式(6.3.7),并将结果代入式(6.3.6),SQNR 的表达式变为

$$\mathrm{SQNR}=10\lg\frac{P_x}{P_n}=20\lg\frac{\sigma_x}{\sigma_e}=6.02b+16.81-20\lg\frac{R}{\sigma_x}\ \mathrm{dB} \tag{6.3.8}$$

式(6.3.8)中的最后一项取决于 A/D 转换器的范围 R 以及输入信号的统计特性。例如,如果假设 $x(n)$为高斯分布,并且量化器的范围扩展为从 $-3\sigma_x$ 到 $3\sigma_x$(即 $R=6\sigma_x$),那么每 1000 个输入信号的幅度中,平均不到 3 个输出会出现过载。对于 $R=6\sigma_x$,式(6.3.8)变为

$$\mathrm{SQNR}=6.02b+1.25\ \mathrm{dB} \tag{6.3.9}$$

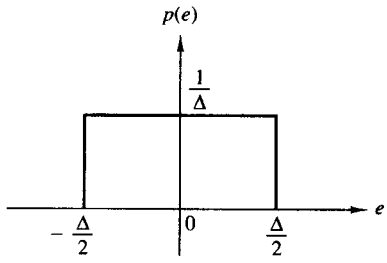


图 6.3.5 量化误差的概率密度函数

公式(6.3.8)常用来确定 A/D 转换器的精度,这意味着量化器每增加一位,信号与量化噪声比增加 6 dB(有意思的是,我们在 1.4 节中对正弦信号用确定性方法分析,也能推导出相同结果)。然而,我们需要用心铭记推导出这些结论的条件。

由于制造工艺限制,A/D 转换器的实际性能要低于式(6.3.8)给出的理论值。因此,A/D 转换器的有效位数可能会稍微低于它本身的位数。例如,一个 16 位的转换器,可能只有 14 个有效位的精度。

6.3.4 数模转换器

在实际中,D/A 转换通常由具有采样保持(S/H)功能的 D/A 转换器紧接着一个低通(平滑)滤波来实现,如图 6.3.6 所示。D/A 转换器以对应于二进制字的电信号作为输入,产生与二进制字的值成比例的输出电压或电流。在理想情况下,对于三位的双极性信号,输入-输出特性如图 6.3.7 所示,与各点相连的线是一条穿过原点的直线。与理想值的典型偏差是:偏移误差、增益误差以及输入-输出特性中的非线性。

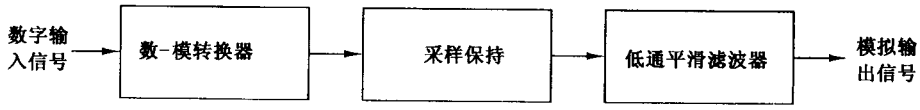


图 6.3.6 将数字信号转换成模拟信号的基本操作

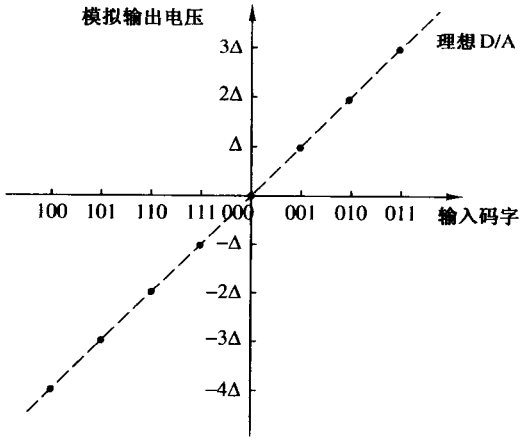


图 6.3.7 理想 D/A 转换器特性

D/A 转换器的一个重要参数是调整时间，它定义为当输入的码字作用后，D/A 转换器的输出达到并维持在最后值的给定小数(通常为 $\pm\frac{1}{2}$ LSB)范围内所需要的时间。输入码字的作用常常会引起大幅度的跳变，称为“毛刺”，特别是当进行 D/A 转换的两个连续码字有多个位不同时，这种现象更加明显。解决这个问题的常用方法是利用 S/H 电路，并把它设计成“限变器”。因此，S/H 的基本功能是在 D/A 转换器输出的新样本值达到稳定状态之前，保持 D/A 转换器的先前输出值不变。在下一个采样间隔内，采样保持电路进行采样并保持新的值。所以，S/H 用与对应信号脉冲等高的矩形脉冲序列来近似表示模拟信号。图 6.3.8 画出 S/H 对离散时间正弦信号的响应，如图所示，这种近似基本上是阶梯函数，它从 D/A 转换器获得信号样本值并保持 T s。当下一个样本到达时，跳变到下一个值，并保持 T s，依次类推。

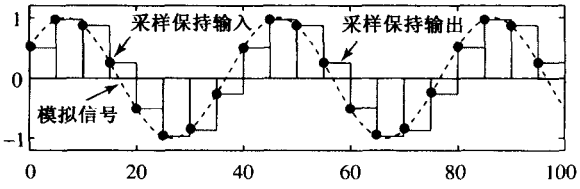


图 6.3.8　采样保持插值器对离散时间正弦信号的响应

S/H 系统的插值函数是一个方形脉冲，定义为

$$g_{SH}(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant T\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{6.3.10}$$

通过计算它的傅里叶变换，可以得到它的频域特性

$$G_{SH}(F)=\int_{-\infty}^{\infty}g_{SH}(t)e^{-j2\pi Ft}\,dt=T\frac{\sin\pi FT}{\pi FT}e^{-2\pi F(T/2)} \tag{6.3.11}$$

$G_{SH}(F)$的幅度如图 6.3.9 所示，为了比较，图 6.3.9 中还添加了理想的带限插值器的幅度响应。很明显，S/H 并不具有尖锐的截止频率特性，这是由于它的插值函数 $g_{SH}(t)$有一个大范围的转变。因此，S/H 将不需要的混叠频率成分(高于 $F_s/2$ 的频率)传到输出端。这种效果有时候会涉及到后混叠，为了解决这个问题，常用的实际可行的方法是用低通滤波器对 S/H 的输出进行滤波，这样可以大大衰减高于 $F_s/2$ 的频率分量。的确，在 S/H 后接一个低通滤波器，通过去除明显的不连续，以平滑采样保持的输出。有时，这个低通滤波器的频率响定义为

$$H_a(F)=\begin{cases}\dfrac{\pi FT}{\sin\pi FT}e^{2\pi F(T/2)}, & |F|\leqslant F_s/2\\ 0, & |F|>F_s/2\end{cases} \tag{6.3.12}$$

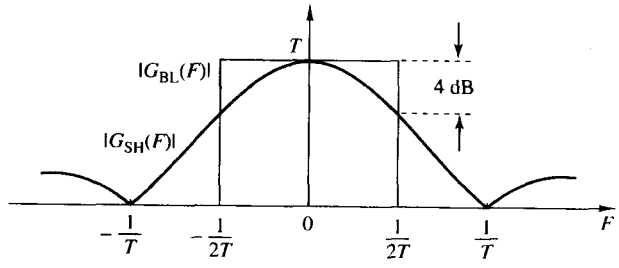


图 6.3.9　采样保持和理想带限插值器的频率响应

从而补偿 S/H 的 $\sin x/x$ 的失真(孔径效应)。这种补偿在 $F=F_s/2$ 处最大值可达到 $2/\pi$ 或 4 dB，而孔径效应对这种补偿的衰减作用通常可以忽略不计。然而，在序列作用于 D/A 转换器前使用数字

滤波器也可以引入这种补偿。由于我们无法设计时间超前的模拟滤波器,所以 S/H 引入的半采样延迟无法得到补偿。

6.4 连续时间带通信号的采样与重建

带宽为 B、中心频率为 F_c 的连续时间带通信号,在 $0 < F_L < |F| < F_H$ 两个频段都有频率分量,其中 $F_c = (F_L + F_H)/2$,如图 6.4.1(a)所示。由采样定理,自然想到采样率 $F_s \geqslant 2F_H$。然而,在这一节中,我们将看到,有一些采样技术可以使采样率只与带宽 B 有关,而与信号频谱的最高频率 F_H 无关。带通信号采样在数字通信、雷达、声呐系统领域具有重要的意义。

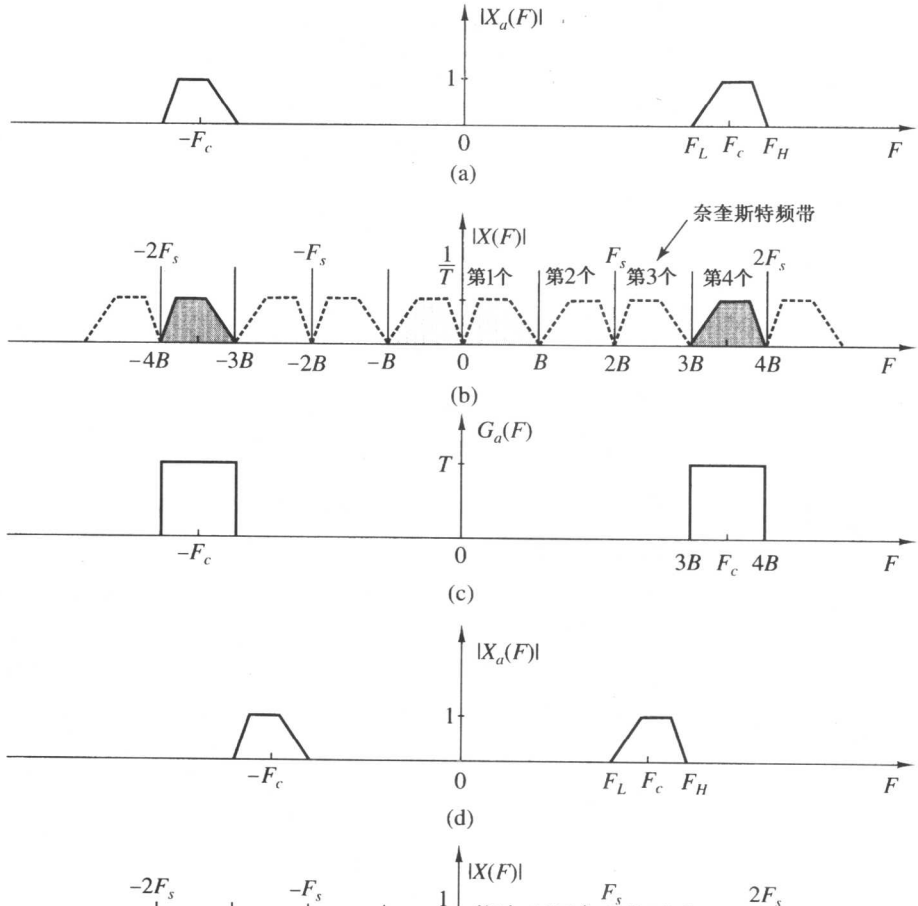


图 6.4.1 整数频段定位的带通信号采样图解

6.4.1 均匀或一阶采样

均匀或一阶采样是 6.1 节介绍的典型周期性采样。对图 6.4.1(a)中的带通信号用采样率 $F_s = 1/T$进行采样,生成序列 $x(n) = x_a(nT)$,其频谱为

$$X(F)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(F-kF_s) \tag{6.4.1}$$

移位后的频谱 $X(F-kF_s)$的定位只要用采样率 F_s 这一个参数就可以进行控制。因为带通信号有两个频带，所以，为了避免出现混叠现象，只用参数 F_s 来控制定位通常是比较复杂的。

整数频段定位。在我们起初的讨论中，先限定频段的最高频率是带宽的整数倍，即 $F_H=mB$(整数频带定位)。$m=F_H/B$，通常是分数，也就是我们了解的频带位置。图 6.4.1(a)和图 6.4.1(d)画出了两个带通信号，分别以偶数($m=4$)和奇数($m=3$)进行频段定位。从图 6.4.1(b)很容易看出，对于整数频段分布的带通信号，选择 $F_s=2B$，产生的序列不存在频谱混叠。从图 6.4.1(c)可以看出，原始带通信号可以利用以下重建公式进行恢复：

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)g_a(t-nT) \tag{6.4.2}$$

其中，

$$g_a(t)=\frac{\sin\pi Bt}{\pi Bt}\cos 2\pi F_c t \tag{6.4.3}$$

这是图 6.4.1(c)所示的带通频率门函数的傅里叶逆变换。我们注意到，$g_a(t)$等于低通信号的理想插值函数[见式(6.1.21)]与频率为 F_c 的载波信号进行调制。

值得注意的是，选择合适的 $G_a(F)$中心频率 F_c，可以重建频段中心在 $F_c=\pm(kB+B/2)$的连续时间带通信号，$k=0,1,\cdots$。对于 $k=0$，可以获得相同的基带信号，这就是我们熟知的下变频。再观察图 6.4.1，可以看出，对于 $m=3$ 的基带频谱与原始频谱的结构相同，然而，对于 $m=4$，基带频谱被反转了。通常，当频带位置是偶数时，基带频谱图像是原始频谱的反转。在通信应用中，区分这两种情况是非常重要的。

任意频段定位。现在来考虑任意频段分布的带通信号，如图 6.4.2 所示。为了避免混叠，采样率应该使得负频带的第$(k-1)$个和 k 个频移分量不会与正频带的分量发生重叠。从图 6.4.2(b)可以看出，如果整数 k 和采样率 F_s 满足下列条件：

$$2F_H\leqslant kF_s \tag{6.4.4}$$

$$(k-1)F_s\leqslant 2F_L \tag{6.4.5}$$

那么避免混叠是完全可能的。这样，系统就有两个不等式，且有两个未知量 k 和 F_s。从式(6.4.4)和式(6.4.5)，可以很容易理解，F_s 的范围应该为

$$\frac{2F_H}{k}\leqslant F_s\leqslant\frac{2F_L}{k-1} \tag{6.4.6}$$

为了计算整数 k，将式(6.4.4)和式(6.4.5)重写如下：

$$\frac{1}{F_s}\leqslant\frac{k}{2F_H} \tag{6.4.7}$$

$$(k-1)F_s\leqslant 2F_H-2B \tag{6.4.8}$$

将式(6.4.7)和式(6.4.8)两边相乘，得到最后 k 的不等式为

$$k_{\max}\leqslant\frac{F_H}{B} \tag{6.4.9}$$

整数 k 的最大值就是区间从 0 到 F_H 内所能容纳的频带数，即

$$k_{\max} = \left\lfloor \frac{F_H}{B} \right\rfloor \tag{6.4.10}$$

其中,$\lfloor b \rfloor$表示 b 的整数部分。为了避免混叠,要求最低的采样率为 $F_{s\min} = 2F_H / k_{\max}$。因此,可以接受的均匀采样率范围由下式确定:

$$\frac{2F_H}{k} \leqslant F_s \leqslant \frac{2F_L}{k-1} \tag{6.4.11}$$

其中 k 是整数,

$$1 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{F_H}{B} \right\rfloor \tag{6.4.12}$$

只要没有频谱混叠,利用式(6.4.2)和式(6.4.3),对整数和任意频带定位的信号都可以进行有效的重建。

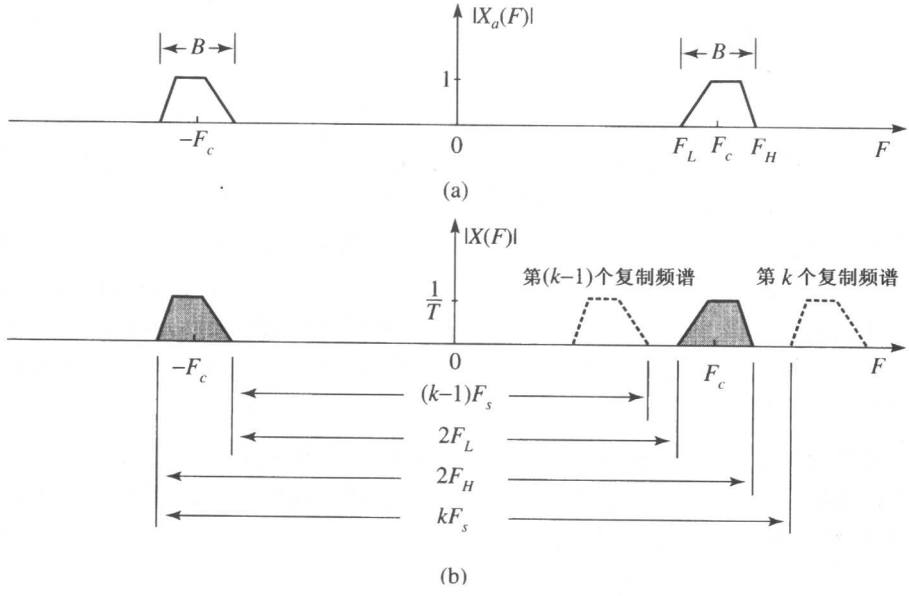


图 6.4.2 任意频段定位的带通信号采样图解

选择采样率。为了充分领悟式(6.4.11)和式(6.4.12)的暗含条件,在图 6.4.3 中,用图形化方法[由 Vaughan 等人(1991)提出]来描述这些关系。图形显示了由 B 归一化后的采样率是频带位置 F_H/B 的函数。这使我们可以很容易将式(6.4.11)重写为

$$\frac{2}{k}\frac{F_H}{B} \leqslant \frac{F_s}{B} \leqslant \frac{2}{k-1}\left(\frac{F_H}{B} - 1\right) \tag{6.4.13}$$

图中的阴影区域表示会产生混叠的采样率,采样率的允许范围在白色的楔形区域内。对于 $k=1$,$2F_H \leqslant F_s \leqslant \infty$,这就是低通信号采样定理。图中每个楔形区域对应一个不同的 k 值。

对于给定 F_H 和 B,为了计算允许的采样率,在 F_H/B 确定的点处画一条竖线。在允许区域内,竖线分隔的部分表示可允许的采样率。我们注意到,理论上最低采样率 $F_s = 2B$,对应于整数频带定位,出现在楔形的尖端。因此,采样率或信号载波频率的任何细小变化都会将采样率移到禁止区域内。实用的解决方法是以更高的采样率进行采样,相当于将信号增加一个保护频带 $\Delta B = \Delta B_L + \Delta B_H$。增加频带的位置及带宽为

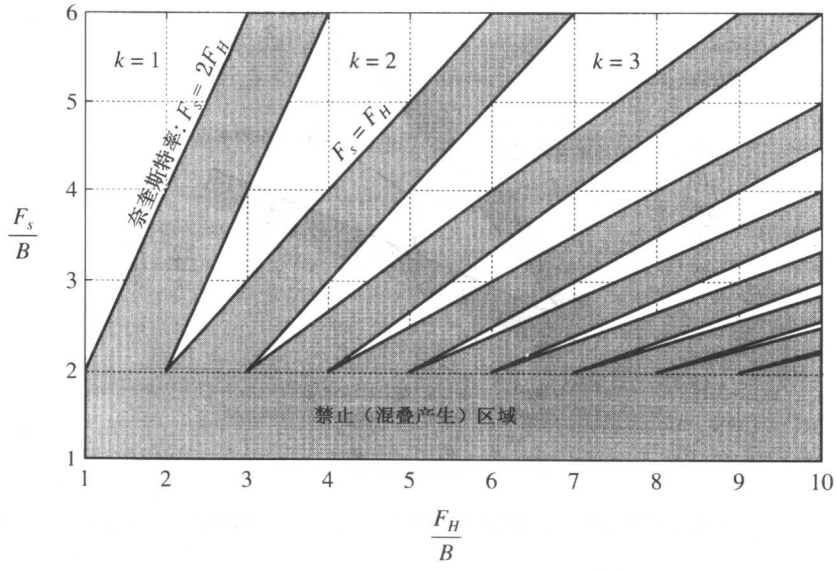


图 6.4.3　用于带通信号的允许(白色)和禁止(阴影)采样率。最低采样率 $F_s = 2B$,对应于无混叠的楔形的尖角,只有整数分布频带才有可能存在

$$F'_L = F_L - \Delta B_L \tag{6.4.14}$$

$$F'_H = F_H + \Delta B_H \tag{6.4.15}$$

$$B' = B + \Delta B \tag{6.4.16}$$

低阶的楔形区域及对应的允许采样率范围为

$$\frac{2F'_H}{k'} \leqslant F_s \leqslant \frac{2F'_L}{k'-1} \quad \text{此处} \quad k' = \left\lfloor \frac{F'_H}{B'} \right\rfloor \tag{6.4.17}$$

第 k 个增加了保护频带的楔形区域及采样率容许误差如图 6.4.4 所示。采样率的可允许范围划分不同的值,高于或低过实际工作频率点,其形式为

$$\Delta F_s = \frac{2F'_L}{k'-1} - \frac{2F'_H}{k'} = \Delta F_{\mathrm{sL}} + \Delta F_{\mathrm{sH}} \tag{6.4.18}$$

从图 6.4.4 中的阴影的直角三角形,可以得出

$$\Delta B_L = \frac{k'-1}{2}\Delta F_{\mathrm{sH}} \tag{6.4.19}$$

$$\Delta B_H = \frac{k'}{2}\Delta F_{\mathrm{sL}} \tag{6.4.20}$$

这说明了对称的保护频带会带来不对称的采样率容许误差。

如果选择实际工作频率点在楔形区域的垂直中点,则采样率为

$$F_s = \frac{1}{2}\left(\frac{2F'_H}{k'} + \frac{2F'_L}{k'-1}\right) \tag{6.4.21}$$

通过构造 $\Delta F_{\mathrm{sL}} = \Delta F_{\mathrm{sH}} = \Delta F_s/2$,保护频带变为

$$\Delta B_L = \frac{k'-1}{4}\Delta F_s \tag{6.4.22}$$

$$\Delta B_H = \frac{k'}{4}\Delta F_s \tag{6.4.23}$$

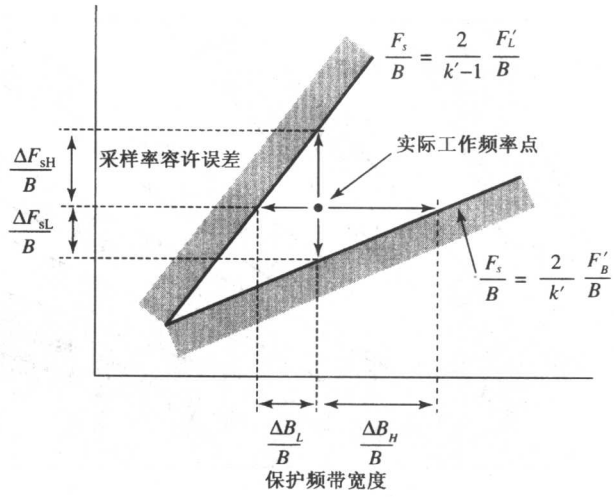


图 6.4.4 对于第 k 个楔形区域,保护频带的大小与采样率允许偏离正常值的关系图解

下面我们举一个例子来说明这种方法的应用。

例 6.4.1 假设给定一个带通信号,$B=25$ kHz,$F_L=10\,702.5$ kHz。从式(6.4.10)得出最大楔形序号为

$$k_{\max}=\lfloor F_H/B\rfloor=429$$

于是,得到理论最低采样率为

$$F_s=\frac{2F_H}{k_{\max}}=50.0117\text{ kHz}$$

为了避免硬件缺陷而带来的潜在混叠,我们希望在信号频带的两边增加两个保护频带 $\Delta B_L=2.5$ kHz 和 $\Delta B_H=2.5$ kHz。信号的有效带宽变为 $B'=B+\Delta B_L+\Delta B_H=30$ kHz。另外,$F'_L=F_L-\Delta B_L=10\,700$ kHz,$F'_H=F_H+\Delta B_H=10\,730$ kHz。从式(6.4.17),得出最大楔形序号为

$$k'_{\max}=\lfloor F'_H/B'\rfloor=357$$

将 $k_{\max}$ 代入不等式(6.4.17)中,得到可接受的采样率为

$$60.1120\text{ kHz}\leqslant F_s\leqslant 60.1124\text{ kHz}$$

在实际中,对带通信号如何选择采样率,Vaughan 等人(1991)和 Qi 等人(1996)提供了详细的分析。

6.4.2 交叉或非均匀二阶采样

假如对连续时间信号 $x_a(t)$ 在每个时刻 $t=nT_i+\Delta_i$ 进行采样,其中 Δ_i 为固定的时间偏移,采样率为 $F_i=1/T_i$。利用序列

$$x_i(nT_i)=x_a(nT_i+\Delta_i),\quad -\infty<n<\infty \tag{6.4.24}$$

及重建函数 $g_a^{(i)}(t)$,可以产生连续时间信号

$$y_a^{(i)}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_i(nT_i)g_a^{(i)}(t-nT_i-\Delta_i) \tag{6.4.25}$$

$y_a^{(i)}(t)$ 的傅里叶变换为

$$Y_a^{(i)}(F)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_i(nT_i)G_a^{(i)}(F)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F(nT_i+\Delta_i)} \tag{6.4.26}$$

$$=G_a^{(i)}(F)X_i(F)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F\Delta_i} \tag{6.4.27}$$

其中，$X_i(F)$是 $x_i(nT_i)$的傅里叶变换。由采样定理(6.1.14)可知，$x_i(nT_i)$的傅里叶变换可以用 $x_a(t+\Delta_i)$的傅里叶变换 $X_a(F)e^{j2\pi F\Delta_i}$的形式进行表示

$$X_i(F)=\frac{1}{T_i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a\left(F-\frac{k}{T_i}\right)e^{j2\pi(F-\frac{k}{T_i})\Delta_i} \tag{6.4.28}$$

将式(6.4.28)代入式(6.4.27)，得到

$$Y_a^{(i)}(F)=G_a^{(i)}(F)\frac{1}{T_i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a\left(F-\frac{k}{T_i}\right)e^{-j2\pi\frac{k}{T_i}\Delta_i} \tag{6.4.29}$$

对于 $i=1,2,\cdots,p$，如果重复式(6.4.24)的采样过程，那么就会得到 p 个交叉均匀采样序列 $x_i(nT_i)$，$-\infty<n<\infty$。这 p 个重建信号的总和为

$$y_a(t)=\sum_{i=1}^{p}y_a^{(i)}(t) \tag{6.4.30}$$

利用式(6.4.29)和式(6.4.30)，$y_a(t)$的傅里叶变换可以表示为

$$Y_a(F)=\sum_{i=1}^{p}G_a^{(i)}(F)V^{(i)}(F) \tag{6.4.31}$$

其中，

$$V^{(i)}(F)=\frac{1}{T_i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a\left(F-\frac{k}{T_i}\right)e^{-j2\pi\frac{k}{T_i}\Delta_i} \tag{6.4.32}$$

现在我们集中讨论最常用的二阶采样，它定义为

$$p=2,\Delta_1=0,\Delta_2=\Delta,T_1=T_2=\frac{1}{B}=T \tag{6.4.33}$$

对于这种情况，图 6.4.5 给出了说明，由式(6.4.31)和式(6.4.32)的关系得出

$$Y_a(F)=BG_a^{(1)}(F)\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(F-kB)+BG_a^{(2)}(F)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma^kX_a(F-kB) \tag{6.4.34}$$

其中，

$$\gamma=e^{-j2\pi B\Delta} \tag{6.4.35}$$

为了理解式(6.4.34)的特征，首先，将频谱 $X_a(F)$分成如下的正频段和负频段：

$$X_a^+(F)=\begin{cases}X_a(F), & F\geqslant 0\\ 0, & F<0\end{cases},\quad X_a^-(F)=\begin{cases}X_a(F), & F\leqslant 0\\ 0, & F>0\end{cases} \tag{6.4.36}$$

然后，画出 $X_a(F-kB)$和 $\gamma^kX_a(F-kB)$的四个独立的分量，如图 6.4.6 所示。我们注意到，因为每个独立的分量的带宽都为 B，且采样率为 $F_s=1/B$，所以这些复制的分量占满了整个频率轴而不会出现重叠，即没有混叠。可是，当我们把这些分量结合在一起时，负频段会混叠到正频段，反之亦然。

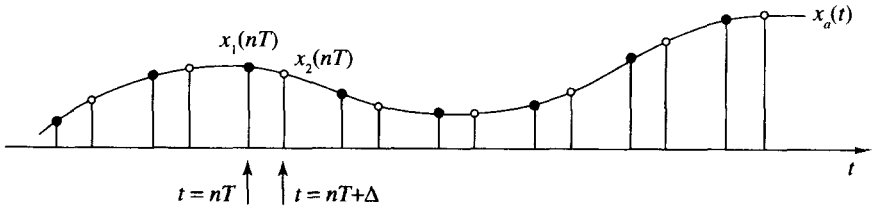
为了使得 $Y_a(F)=X_a(F)$，我们要确定插值函数 $G_a^{(1)}(F)$，$G_a^{(2)}(F)$及时间偏移 Δ 的值。从图 6.4.6 可以看出，首先要求

$$G_a^{(1)}(F)=G_a^{(2)}(F)=0,|F|<F_L\text{ 且 }|F|>F_L+B \tag{6.4.37}$$

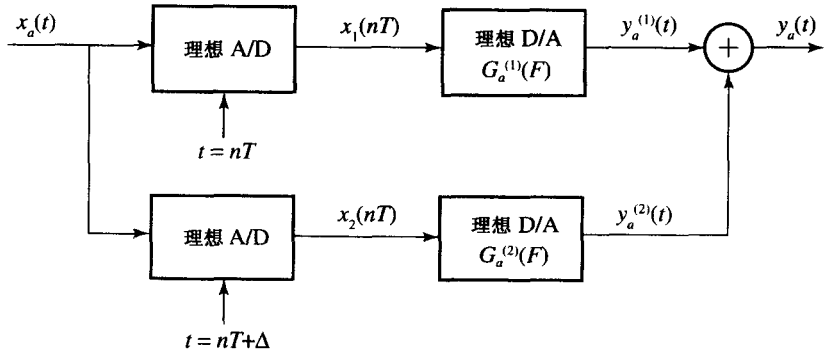
为了计算 $F_L\leqslant|F|\leqslant F_L+B$ 时的 $G_a^{(1)}(F)$和 $G_a^{(2)}(F)$，从图 6.4.6 还可以看出，只有 $k=\pm m$ 和 $k=\pm(m+1)$的频率分量与原始频谱重叠，其中，

$$m = \left\lceil \frac{2F_L}{B} \right\rceil \tag{6.4.38}$$

是大于或等于 $2F_L/B$ 的最小正整数。



(a)



(b)

图 6.4.5 二阶带通采样图解:(a)交叉采样序列;(b)二阶采样和重建系统

在区域 $F_L \leqslant F \leqslant -F_L + mB$,等式(6.4.34)变为

$$Y_a^+(F) = \left[BG_a^{(1)}(F) + BG_a^{(2)}(F)\right] X_a^+(F) \qquad \text{(信号分量)}$$

$$+ \left[BG_a^{(1)}(F) + B\gamma^m G_a^{(2)}(F)\right] X_a^+(F - mB) \quad \text{(混叠分量)}$$

确保完全重建 $Y_a^+(F) = X_a^+(F)$的条件为

$$BG_a^{(1)}(F) + BG_a^{(2)}(F) = 1 \tag{6.4.39}$$

$$BG_a^{(1)}(F) + B\gamma^m G_a^{(2)}(F) = 0 \tag{6.4.40}$$

求解系统方程,得到解为

$$G_a^{(1)}(F) = \frac{1}{B}\frac{1}{1-\gamma^{-m}}, \quad G_a^{(2)}(F) = \frac{1}{B}\frac{1}{1-\gamma^m} \tag{6.4.41}$$

对于所有的 Δ,满足 $\gamma^{\pm m} = \mathrm{e}^{\mp \mathrm{j}2\pi mB\Delta} \neq 1$。

在区域 $-F_L + mB \leqslant F \leqslant F_L + B$,等式(6.4.34)变为

$$Y_a^+(F) = \left[BG_a^{(1)}(F) + BG_a^{(2)}(F)\right] X_a^+(F)$$

$$+ \left[BG_a^{(1)}(F) + B\gamma^{m+1} G_a^{(2)}(F)\right] X_a^+(F - (m+1)B)$$

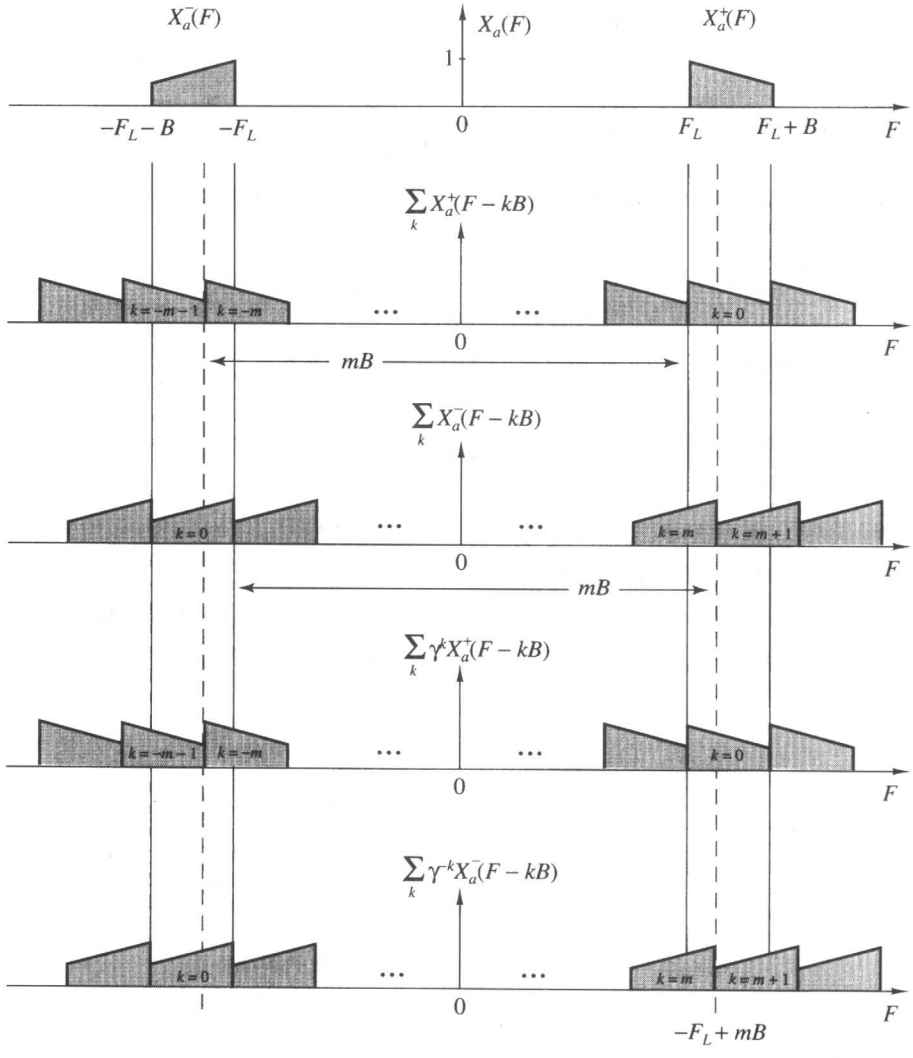


图 6.4.6　二阶带通采样的混叠图解

确保完全重建 $Y_a^+(F)=X_a^+(F)$的条件为

$$BG_a^{(1)}(F)+BG_a^{(2)}(F)=1 \tag{6.4.42}$$

$$BG_a^{(1)}(F)+B\gamma^{m+1}G_a^{(2)}(F)=0 \tag{6.4.43}$$

求解系统方程,得到解为

$$G_a^{(1)}(F)=\frac{1}{B}\frac{1}{1-\gamma^{-(m+1)}},\quad G_a^{(2)}(F)=\frac{1}{B}\frac{1}{1-\gamma^{m+1}} \tag{6.4.44}$$

对于所有的 Δ,满足 $\gamma^{\pm(m+1)}=\mathrm{e}^{\mp \mathrm{j}2\pi(m+1)B\Delta}\neq 1$。

以同样的方法,可以获得在频率区间 $-(F_L+B)\leqslant F\leqslant -F_L$ 上的重建函数。若用 $-m$ 代替 m,$-(m+1)$代替$(m+1)$,那么就得到式(6.4.41)和式(6.4.44)给出的这些公式。函数 $G_a^{(1)}(F)$的带通响应如图 6.4.7 所示,与之类似的 $G_a^{(2)}(F)$图形揭示了

$$G_a^{(2)}(F)=G_a^{(1)}(-F) \tag{6.4.45}$$

这说明了 $g_a^{(2)}(t)=g_a^{(1)}(-t)$。因此,为简单起见,我们采用符号 $g_a(t)=g_a^{(1)}(t)$,并将重建公式(6.4.30)表示为

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a\left(\frac{n}{B}\right)g_a\left(t-\frac{n}{B}\right)+x_a\left(\frac{n}{B}+\Delta\right)g_a\left(-t+\frac{n}{B}+\Delta\right) \tag{6.4.46}$$

对图 6.4.7 中的函数进行傅里叶逆变换,可以证明(见习题 6.7)插值函数为

$$g_a(t)=a(t)+b(t) \tag{6.4.47}$$

$$a(t)=\frac{\cos[2\pi(mB-F_L)t-\pi mB\Delta]-\cos(2\pi F_Lt-\pi mB\Delta)}{2\pi Bt\sin(\pi mB\Delta)} \tag{6.4.48}$$

$$b(t)=\frac{\cos[2\pi(F_L+B)t-\pi(m+1)B\Delta]-\cos[2\pi(mB-F_L)t-\pi(m+1)B\Delta]}{2\pi Bt\sin[\pi(m+1)B\Delta]} \tag{6.4.49}$$

可以看出,正如设想的那样,对于任何插值函数,$g_a(0)=1$;当 $n\neq 0$ 时,$g_a(n/B)=0$;当 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时,$g_a(n/B\pm\Delta)=0$。

我们已经说明了,频率在 $F_L\leqslant|F|\leqslant F_L+B$ 区间的带通信号 $x_a(t)$,利用平均采样率 $F_s=2B$ 个样本/s 且无频带分布限制的插值公式(6.4.46),就可以从两个交叉均匀采样序列 $x_a(n/B)$ 和 $x_a(n/B+\Delta)$ 中完全重建,$-\infty<n<\infty$。时间偏移 Δ 的取值,不能使插值函数的值为无穷大。这种二阶采样定理是由 Kohlenberg(1953)提出的,而 Coulson(1995)讨论了一般的 p 阶采样的情况($p>2$)。

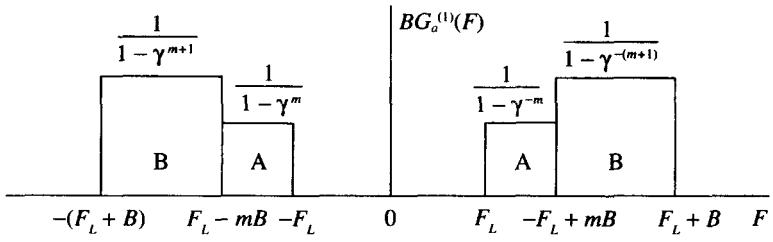


图 6.4.7 用于二阶采样的带通插值函数的频域特性

当 $m=2F_L/B$ 时,即对于整数频段定位(Linden 1959, Vaughan 等人 1991),会出现一些有用的简化。在这种情况下,区域 A 变为零,这意味着 $a(t)=0$。因此,得出 $g_a(t)=b(t)$。有两种情况特别重要。

对于低通信号,$F_L=0$ 并且 $m=0$,于是插值函数变为

$$g_{LP}(t)=\frac{\cos(2\pi Bt-\pi B\Delta)-\cos(\pi B\Delta)}{2\pi Bt\sin(\pi B\Delta)} \tag{6.4.50}$$

附加约束 $\Delta=1/2B$ 会产生均匀采样率,这就是我们熟知的正弦插值函数 $g_{LP}(t)=\sin(2\pi Bt)/2\pi Bt$。

对于 $F_L=mB/2$ 的带通信号,选择时间偏移 Δ 使得 $\gamma^{\pm(m+1)}=-1$。如果

$$\Delta=\frac{2k+1}{2B(m+1)}=\frac{1}{4F_c}+\frac{k}{2F_c},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{6.4.51}$$

那么这个要求就可以满足。其中 $F_c=F_L+B/2=B(m+1)/2$ 是频带的中心频率。在这种情况下,在区间 $mB/2\leqslant|F|\leqslant(m+1)B/2$,插值函数由 $G_Q(F)=1/2$ 确定;而在别处,由 $G_Q(F)=0$ 确定。进行傅里叶逆变换,得到

$$g_Q(t)=\frac{\sin\pi Bt}{\pi Bt}\cos 2\pi F_ct \tag{6.4.52}$$

这是式(6.4.47)至式(6.4.49)的一种特例。这种特殊情况就是我们熟悉的直接正交采样，这是因为从带通信号能清楚地得到同步和正交分量(见 6.4.3 节)。

最后，我们注意到，可以对带通信号采样，然后在一个频段位置重建该离散时间信号，而不是原始信号。在直接正交采样[见 Coulson 等(1994)]中，这种对带通信号的频谱布局变换及频移是最常用的。该方法的意义在于它可以用数字信号处理来实现。

6.4.3　带通信号的表示

对实数带通信号 $x_a(t)$采样的复杂性主要是由于在频率区间 $-(F_L+B)\leqslant F\leqslant -F_L$ 及 $F_L\leqslant F\leqslant F_L+B$上分别存在两个独立的频带。因为 $x_a(t)$是实数，所以在频谱上正、负频率的关系为

$$X_a(-F)=X_a^*(F) \tag{6.4.53}$$

因此，只要半个频谱就可以完全确定一个信号。下一步，我们就利用这个思想，引入带通信号的简单表示。我们先从以下恒等式开始：

$$\cos 2\pi F_c t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F_c t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F_c t} \tag{6.4.54}$$

它用两个幅度为 1/2 的谱线就表示了实信号 $\cos 2\pi F_c t$，一个在 $F=F_c$，另一个在 $F=-F_c$。等价的恒等式有

$$\cos 2\pi F_c t=2\Re\left\{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F_c t}\right\} \tag{6.4.55}$$

它表明了实信号是复信号的实部。就频谱而言，我们现在可以通过频谱的正部分(即 $F=F_c$ 的谱线)来确定实信号 $\cos 2\pi F_c t$。正频率的幅度会变成双倍，以弥补忽略的负频率。

将信号延伸为具有连续的频谱也是很容易的。毫无疑问，$X_a(F)$的傅里叶逆变换的积分可以分成两部分

$$x_a(t)=\int_0^{\infty}X_a(F)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi Ft}\mathrm{d}F+\int_{-\infty}^{0}X_a(F)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}F \tag{6.4.56}$$

将第二个积分项中的积分变量由 F 换为 $-F$，并利用式(6.4.53)，得出

$$x_a(t)=\int_0^{\infty}X_a(F)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}F+\int_0^{\infty}X_a^*(F)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}F \tag{6.4.57}$$

最后的等式还可写成等价的形式

$$x_a(t)=\Re\left\{\int_0^{\infty}2X_a(F)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}F\right\}=\Re\{\psi_a(t)\} \tag{6.4.58}$$

其中复信号

$$\psi_a(t)=\int_0^{\infty}2X_a(F)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}F \tag{6.4.59}$$

就是熟知的 $x_a(t)$的解析信号或预包络。解析信号的频谱可以用单位阶跃函数 $V_a(F)$的形式表示如下：

$$\Psi_a(F)=2X_a(F)V_a(F)=\begin{cases}2X_a(F), & F>0\\ 0, & F<0\end{cases} \tag{6.4.60}$$

对于 $X_a(0)\neq 0$ 的情况，定义$\Psi_a(0)=X_a(0)$。为了以 $x_a(t)$的形式来表示解析信号$\psi_a(t)$，回想到

$V_a(F)$的傅里叶逆变换为

$$v_a(t)=\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{\mathrm{j}}{2\pi t} \tag{6.4.61}$$

从式(6.4.60)、式(6.4.61)以及频域卷积定理,可以得出

$$\psi_a(t)=2x_a(t)*v_a(t)=x_a(t)+\mathrm{j}\frac{1}{\pi t}*x_a(t) \tag{6.4.62}$$

由冲激响应

$$h_Q(t)=\frac{1}{\pi t} \tag{6.4.63}$$

和输入信号 $x_a(t)$的卷积得到的信号

$$\hat{x}_a(t)=\frac{1}{\pi t}*x_a(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_a(\tau)}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{6.4.64}$$

称为 $x_a(t)$的希尔伯特变换,表示为 $\hat{x}_a(t)$。需要强调的是希尔伯特变换是卷积,它并没有改变域,因此输入 $x_a(t)$和它的输出 $\hat{x}_a(t)$都是时间的函数。

式(6.4.63)定义的滤波器的频率响应函数为

$$H_Q(F)=\int_{-\infty}^{\infty}h_Q(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Ft}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}-\mathrm{j}, & F>0\\ \mathrm{j}, & F<0\end{cases} \tag{6.4.65}$$

或者,就幅度和相位响应而言

$$|H_Q(F)|=1,\quad \measuredangle H_Q(F)=\begin{cases}-\pi/2, & F>0\\ \pi/2, & F<0\end{cases} \tag{6.4.66}$$

希尔伯特变换 $H_Q(F)$是一个全通正交滤波器,仅仅是正频率分量的相移为 $-\pi/2$,负频率分量的相移为 $\pi/2$。从式(6.4.43)可以看出,$h_Q(t)$是非因果的,这意味着希尔伯特变换是物理上不可实现的。

现在我们可以利用希尔伯特变换将解析信号表示为

$$\psi_a(t)=x_a(t)+\mathrm{j}\hat{x}_a(t) \tag{6.4.67}$$

可以看出,$x_a(t)$的希尔伯特变换构成了解析信号表达式的虚部。

$x_a(t)$的解析信号$\psi_a(t)$在区域 $F_L\leqslant F\leqslant F_L+B$ 上是带通的。因此,利用傅里叶变换的调制特性,可以将解析信号频移到基带区间$-B/2\leqslant F\leqslant B/2$,

$$x_{\mathrm{LP}}(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F_ct}\psi_a(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}X_{\mathrm{LP}}(F)=\Psi_a(F+F_c) \tag{6.4.68}$$

复低通信号 $x_{\mathrm{LP}}(t)$即是我们熟知的 $x_a(t)$的复包络。

复包络在直角坐标中可以表示为

$$x_{\mathrm{LP}}(t)=x_I(t)+\mathrm{j}x_Q(t) \tag{6.4.69}$$

其中,$x_I(t)$和 $x_Q(t)$都是实低通信号,并且与 $x_{\mathrm{LP}}(t)$处于同一频率区域。从式(6.4.58)、式(6.4.68)及式(6.4.69),就可以很容易地推导出所谓的带通信号的正交表示

$$x_a(t)=x_I(t)\cos 2\pi F_ct-x_Q(t)\sin 2\pi F_ct \tag{6.4.70}$$

因为载波 $\cos 2\pi F_ct$ 和 $\sin 2\pi F_ct$ 彼此是同步正交的,所以我们把 $x_I(t)$称为带通信号的同步分量,$x_Q(t)$为正交分量。利用如图 6.4.8(a)中的正交调制,可以从信号 $x_a(t)$中获得它的同步和正交分量,图 6.4.8(b)中的方案可以用来重建带通信号。

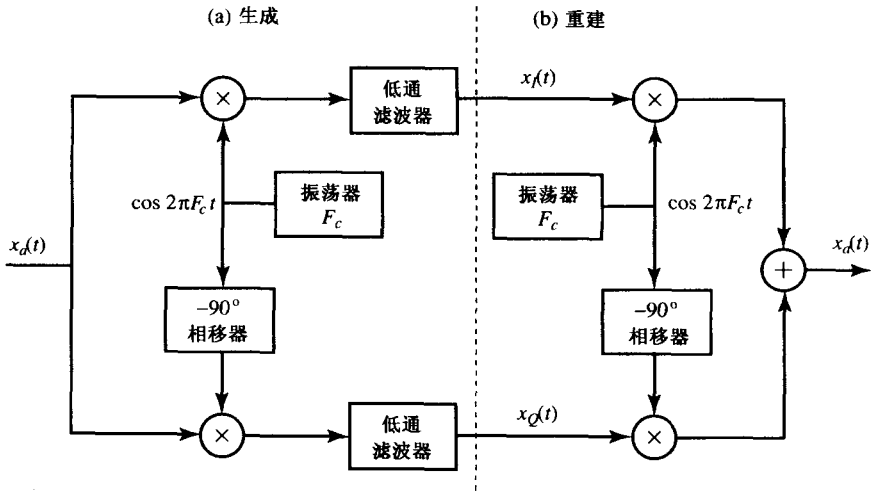


图 6.4.8　(a)产生带通信号同步、正交分量的方案图;(b)从同步、正交分量中重建带通信号的方案图

另外,我们还可以将复包络表示成极坐标的形式

$$x_{\mathrm{LP}}(t) = A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(t)} \tag{6.4.71}$$

其中,$A(t)$和$\phi(t)$都是实值低通信号。以这种极坐标的形式,带通信号 $x_a(t)$可以写成

$$x_a(t) = A(t)\cos[2\pi F_c t + \phi(t)] \tag{6.4.72}$$

其中,$A(t)$就是所知的带通信号的包络,$\phi(t)$则是相位。等式(6.4.72)用幅度和角度调制的组合来表示带通信号。很容易看出,$x_I(t)$,$x_Q(t)$与 $A(t)$,$\phi(t)$具有如下关系:

$$x_I(t) = A(t)\cos 2\pi F_c t, \qquad x_Q(t) = A(t)\sin 2\pi F_c t \tag{6.4.73}$$

$$A(t) = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)}, \qquad \phi(t) = \arctan\left[\frac{x_Q(t)}{x_I(t)}\right] \tag{6.4.74}$$

以 $x_I(t)$和 $x_Q(t)$的形式,并模上 2π,则相位$\phi(t)$就可以被唯一定义。

6.4.4　利用带通信号表示进行采样

复包络(6.4.68)及正交表示(6.4.70),使得对带通信号的采样率为 $F_s = 2B$,而与频带的分布无关。

因为解析信号$\psi_a(t)$在 $F_L \leqslant F \leqslant F_L + B$ 上只有一个单一频带,所以对它采样时,每秒可以采集 B 个复数样本,或者每秒采集 $2B$ 个实数样本,而不会出现混叠(见图 6.4.6 中的第 2 个图)。根据式(6.4.67),通过以每秒 B 个样本的速率采样 $x_a(t)$及它的希尔伯特变换 $\hat{x}_a(t)$,就可获得这些样本。信号重建需要如下定义的复值带通插值函数:

$$g_a(t) = \frac{\sin \pi Bt}{\pi Bt}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F_c t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G_a(F) = \begin{cases} 1, & F_L \leqslant F \leqslant F_L + B \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{6.4.75}$$

其中,$F_c = F_L + B/2$。这种方法主要的问题是要设计出实际可行的模拟希尔伯特变换器。

同样,由于带通信号 $x_a(t)$的同步分量 $x_I(t)$和正交分量 $x_Q(t)$是只有单边带宽 $B/2$ 的低通信号,所以用序列 $x_I(nT)$和 $x_Q(nT)$就可以唯一表示 $x_I(t)$和 $x_Q(t)$,此处 $T = 1/B$,这就得出 $F_s = 2B$ 个实数样本/s 的总采样率。如果要重建原始的带通信号,那么首先要利用理想插值重建同步、正交分量,然后用式(6.4.70)将它们组合起来。

选择合适的 Δ,对信号 $x_a(t)$直接进行二阶采样,就可以得到同步和正交分量。这就带来了很大的简化,避免了由于复数解调运算所必须产生的同步和正交信号。为了从 $x_a(t)$直接提取 $x_I(t)$,即

$$x_a(t_n) = x_I(t_n) \tag{6.4.76}$$

要求采样的时刻为

$$2\pi F_c t_n = \pi n, \text{或} t_n = \frac{n}{2F_c}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{6.4.77}$$

类似地,为了获得 $x_Q(t)$,要求采样的时刻为

$$2\pi F_c t_n = \frac{\pi}{2}(2n+1), \text{或} t_n = \frac{2n+1}{4F_c}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{6.4.78}$$

由此得出

$$x_a(t_n) = -x_Q(t_n) \tag{6.4.79}$$

这与式(6.4.51)所定义的二阶采样的特殊情况相同。Grace 和 Pitt(1969)、Rice 和 Wu(1982)、Waters 和 Jarret(1982)、以及 Jackson 和 Matthewson(1986)描述了该方法的多种变形。

最后,我们注意到,用于带通采样的正交方法已广泛应用于雷达和通信系统中,用于产生同步和正交序列,以进行进一步处理。然而,随着高速 A/D 转换器和数字信号处理的发展,对带通信号进行直接采样(这部分在 6.4.1 节已经介绍),然后用离散时间方法(这部分将在 6.5 节进行讨论)获得 $x_I(n)$和 $x_Q(n)$,已经变得非常方便和经济。

6.5 离散时间信号采样

在这一节中,我们利用对连续时间信号进行采样和表示的技术,来讨论低通和带通离散时间信号的采样和重建。我们的方法是从概念上重建基本的连续时间信号,然后再用期望的采样率对它进行重采样,但最后的实现只包括离散时间处理。采样率变换更一般的应用范围将是第 11 章介绍的主题。

6.5.1 离散时间信号采样和插值

假设对序列 $x(n)$进行周期性采样,并保持 $x(n)$的每 D 个样本中删除$(D-1)$个样本。这种操作也称为抽取或去采样,从而产生新的序列为

$$x_d(n) = x(nD), \quad -\infty < n < \infty \tag{6.5.1}$$

不失一般性,假设$|F| > B$ 时,信号 $x_a(t)$的频谱 $X_a(F) = 0$。以 $F_s = 1/T \geqslant 2B$ 的采样率对 $x_a(t)$进行采样,得到 $x(n)$,即 $x(n) = x_a(nT)$。因此,$x(n)$的频谱 $X(F)$为

$$X(F) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \tag{6.5.2}$$

下一步,在 $t = nDT$ 时刻,采样 $x_a(t)$,即采样率为 F_s/D。序列 $x_d(n) = x_a(nDT)$的频谱为

$$X_d(F) = \frac{1}{DT}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(F - k\frac{F_s}{D}\right) \tag{6.5.3}$$

图 6.5.1 画出了对于 $D=2$ 和 $D=4$ 时的处理过程。从图 6.5.1(c)很容易看出,频谱 $X_d(F)$可以用频谱 $X(F)$的周期形式进行表示,

$$X_d(F)=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}X\left(F-k\frac{F_s}{D}\right) \tag{6.5.4}$$

为了避免混叠，要求采样率满足条件 $F_s/D\geqslant 2B$。如果采样率 F_s 固定，那么通过将 $x(n)$的带宽降低到$(F_s/2)/D$ 就可以避免混叠。就归一化的频率变量而言，如果 $x(n)$的最高频率 $f_{\max}$或 $\omega_{\max}$满足条件

$$f_{\max}\leqslant\frac{1}{2D}=\frac{f_s}{2}\quad\text{或}\quad\omega_{\max}\leqslant\frac{\pi}{D}=\frac{\omega_s}{2} \tag{6.5.5}$$

那么就可以避免混叠。在连续时间采样中，连续时间频谱 $X_a(F)$重复出现无数次，产生周期性的频谱覆盖了无限宽的频率区间。在离散时间采样中，周期性频谱 $X(F)$重复了 D 次，覆盖了周期频域的一段。

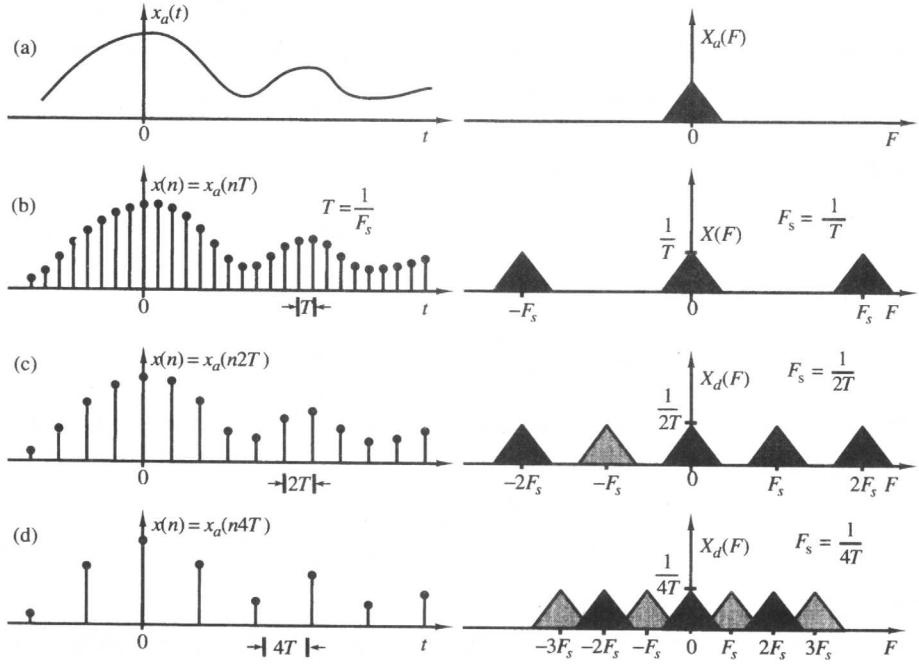


图 6.5.1　离散时间采样的频域图解

为了从采样序列 $x_d(n)$中重建原始序列 $x(n)$，我们从理想插值公式入手，

$$x_a(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_d(m)\frac{\sin\frac{\pi}{DT}(t-mDT)}{\frac{\pi}{DT}(t-mDT)} \tag{6.5.6}$$

上式是在假设了 $F_s/D\geqslant 2B$ 的前提下重建$x_a(t)$的。因为 $x(n)=x_a(nT)$，代入式(6.5.6)，得出

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_d(m)\frac{\sin\frac{\pi}{D}(n-mD)}{\frac{\pi}{D}(n-mD)} \tag{6.5.7}$$

因为函数 $\sin(x)/x$ 是无限延伸的，所以这不是一个实际可行的插值器。在实际中，我们只使用从 $m=-L$到 $m=L$ 的有限和，这种近似的质量随着 L 的增加而提高。式(6.5.7)中的理想带限插值序列的傅里叶变换为

$$g_{BL}(n)=D\frac{\sin(\pi/D)n}{\pi n}\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}G_{BL}(\omega)=\begin{cases}D, & |\omega|\leqslant\pi/D\\ 0, & \pi/D<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}\tag{6.5.8}$$

因此,理想的离散时间插值器具有理想的低通频率特性。

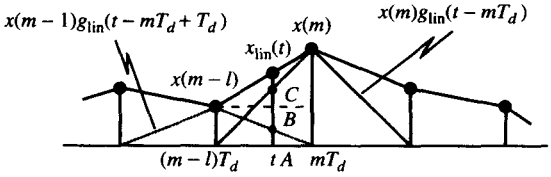


图 6.5.2 连续时间线性插值图解

为了理解离散时间的插值过程,我们将分析应用广泛的线性插值。为简单起见,用符号 $T_d=DT$ 表示 $x_d(m)=x_a(mT_d)$的采样周期。在 mT_d 和$(m+1)T_d$ 之间的时刻 t,作一条竖直线与连接于样本 $x_d(mT_d)$和 $x_d(mT_d+T_d)$的线段相交,这个交点就是 $x_a(t)$的值,如图 6.5.2 所示,这个插值为

$$x_{lin}(t)=x(m-1)+\frac{x(m)-x(m-1)}{T_d}[t-(m-1)T_d],\ (m-1)T_d\leqslant t\leqslant mT_d\tag{6.5.9}$$

上式经过重新整理如下:

$$x_{lin}(t)=\left[1-\frac{t-(m-1)T_d}{T_d}\right]x(m-1)+\left[1-\frac{mT_d-t)}{T_d}\right]x(m)\tag{6.5.10}$$

将式(6.5.10)写成一般的重建公式,

$$x_{lin}(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)g_{lin}(t-mT_d)\tag{6.5.11}$$

我们注意到,因为$(m-1)T_d\leqslant t\leqslant mT_d$,所以通常有 $t-(m-1)T_d=|t-(m-1)T_d|$,并且 $mT_d-t=|t-mT_d|$。因此,如果定义

$$g_{lin}(t)=\begin{cases}1-\frac{|t|}{T_d}, & |t|\leqslant T_d\\ 0, & |t|>T_d\end{cases}\tag{6.5.12}$$

就可以将式(6.5.10)表示式(6.5.11)的形式。

将式(6.5.11)和式(6.5.12)中的 t 用 nT 代替,就得到离散时间插值公式。因为 $T_d=DT$,所以得出

$$x_{lin}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)g_{lin}(n-mD)\tag{6.5.13}$$

其中,

$$g_{lin}(n)=\begin{cases}1-\frac{|n|}{D}, & |n|\leqslant D\\ 0, & |n|>D\end{cases}\tag{6.5.14}$$

同任何插值函数一样,$g_{lin}(0)=1$;对于 $n=\pm D,\pm 2D,\cdots,g_{lin}(n)=0$。将它的傅里叶变换

$$G_{lin}(\omega)=\frac{1}{D}\left[\frac{\sin(\omega D/2)}{\sin(\omega/2)}\right]^2\tag{6.5.15}$$

与式(6.5.8)的理想插值器进行比较,就可评估线性插值器的性能。如图 6.5.3 所示,该图说明了只有当插值后的信号频谱在$|\omega|>\pi/D$ 处可以忽略时,即原始连续时间信号过采样时,线性插值器才具有良好的性能。

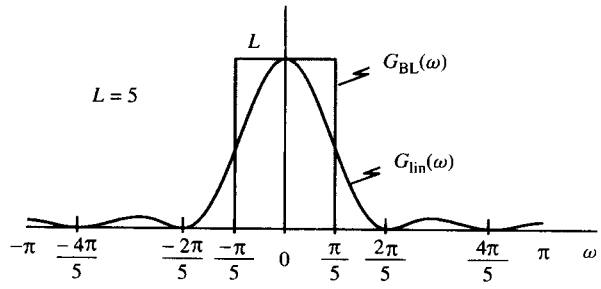


图 6.5.3　理想的线性离散时间插值器的频率响应

等式(6.5.11)和式(6.5.13)类似于卷积和;然而,它们并不是卷积。图 6.5.4 画出了 $D=5$ 时的插值样本 $x(nT)$和 $x((n+1)T)$的计算过程。我们注意到,在每种情况下,只有线性插值器系数的一个子集应用得到。基本上,将 $g_{lin}(n)$分解成 D 个分量,而我们每次只用其中一个来周期性地计算各个插值。这也是第 11 章将要讨论的多相位滤波器结构的基本思想。但是,如果我们在连续的样本 $x_d(m)$间插入$(D-1)$个零值样本,产生一个新的序列 $\tilde{x}(n)$,那么就可以利用卷积

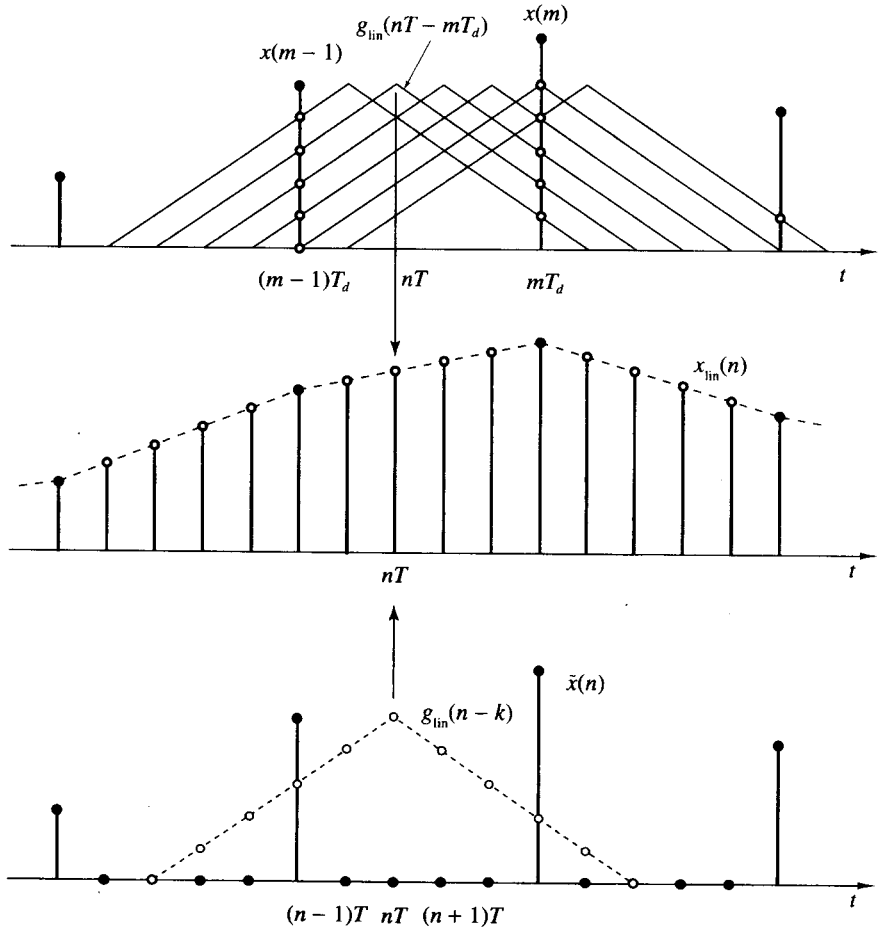


图 6.5.4　作为线性滤波处理的线性插值图解

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{x}(k)g_{\text{lin}}(n-k) \tag{6.5.16}$$

来计算 $x(n)$,这就需要进行一些包含零值在内的不必要的计算。利用等式(6.5.13),可以得到一个更加有效的实现形式。

离散时间信号的采样和插值基本上相当于通过一个整数因子改变它的采样率。采样率变换在实际应用中是非常重要的,这将在第 11 章进一步讨论。

6.5.2 带通离散时间信号表示和采样

6.4.3 节讨论的连续时间信号的带通表示,进行一些简单变化后就可适用于离散时间信号,这需要考虑到离散时间频谱的周期特性。因为在不破坏离散时间傅里叶变换的周期性的情况下无法做到 $\omega<0$ 时的值为零,所以定义带通序列 $x(n)$ 的解析信号 $\psi(n)$ 为

$$\Psi(\omega)=\begin{cases}2X(\omega), & 0\leqslant\omega<\pi\\ 0, & -\pi\leqslant\omega<0\end{cases} \tag{6.5.17}$$

其中,$X(\omega)$ 和 $\Psi(\omega)$ 分别是 $x(n)$ 和 $\psi(n)$ 的傅里叶变换。

理想离散时间希尔伯特变换定义为

$$H(\omega)=\begin{cases}-\mathrm{j}, & 0<\omega<\pi\\ \mathrm{j}, & -\pi<\omega<0\end{cases} \tag{6.5.18}$$

在连续时间情况下,它类似于 90°的相移器。很容易就可证明

$$\Psi(\omega)=X(\omega)+\mathrm{j}\hat{X}(\omega) \tag{6.5.19}$$

其中,

$$\hat{X}(\omega)=H(\omega)X(\omega) \tag{6.5.20}$$

为了在时域计算解析信号,需要希尔伯特变换的冲激响应。利用

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{j}e^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{j}e^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega \tag{6.5.21}$$

就可以得出

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2(\pi n/2)}{n}, & n\neq0\\ 0, & n=0\end{cases}=\begin{cases}0, & n=\text{偶数}\\ \dfrac{2}{\pi n}, & n=\text{奇数}\end{cases} \tag{6.5.22}$$

序列 $h(n)$ 在 $n<0$ 时的值不等于零,并且不满足绝对可和性;因此,理想希尔伯特变换是非因果的、不稳定的。理想希尔伯特变换的冲激响应和频率响应如图 6.5.5 所示。

在连续时间情况下,序列 $x(n)$ 的希尔伯特变换 $\hat{x}(n)$ 给出了解析信号表示的虚部,即

$$\psi(n)=x(n)+\mathrm{j}\hat{x}(n) \tag{6.5.23}$$

将连续时间信号对应公式的各等式中的 t 用 nT 代替,就可以得到复包络、正交以及包络/相位的表示形式。

给定的序列 $x(n)$,以速率 $f_s=1/D$ 对它进行采样,且与带宽 w 一致,$0<\omega_L\leqslant|\omega|\leqslant\omega_L+w$,利用归一化后的带宽 $w=2\pi B/F_s$,就可以推导出等价的复包络或同步及正交低通表示。如果 $\omega_L=(k-1)\pi/D$ 并且 $w=\pi/D$,那么正如 11.7 节所描述的,序列 $x(n)$ 可以直接被采样而不会出现混叠。

在许多雷达和通信系统应用中,有必要以低通的形式来处理带通信号 $x_a(t)$,$F_L\leqslant|F|\leqslant F_L+B$。传统的技术是采用图 6.4.8 中的两个正交模拟信道和两个 A/D 转换器,并紧接着两个低

通滤波器。更新的方法是均匀采样模拟信号，然后利用数字正交调制得到它的正交表示，即图 6.4.8 第一部分所画的离散时间实现形式。类似的方法还可用做数字方式产生通信应用中的单边带信号(Frerking 1994)。

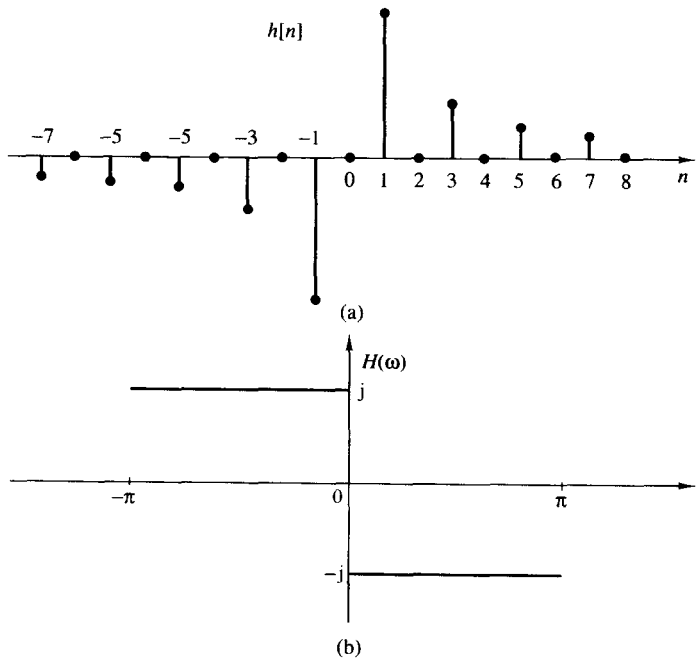


图 6.5.5　离散时间希尔伯特变换的(a)冲激响应和(b)频率响应。

6.6　过采样 A/D 转换器和 D/A 转换器

在这一节中，我们讨论过采样 A/D 转换器和 D/A 转换器。

6.6.1　过采样 A/D 转换器

过采样 A/D 转换器的基本思想就是提高信号的采样率，以适应低分辨率量化器。利用过采样，就可以减小连续样本之间信号值的动态范围，这样就降低了对量化器分辨率的需求。在前一节中，我们已经看到 A/D 转换的量化误差为 $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$，其中 $\Delta = R/2^{b+1}$。因为与信号标准差 σ_x 成比例的信号动态范围要与量化器的范围 R 匹配，所以得出 Δ 与 σ_x 成比例的结论。因此，对于给定的比特数，量化噪声的功率与进行量化信号的方差成正比。因此，对于给出的确定的 SQNR，降低量化信号的方差，就可以减小量化器的比特数。

降低信号动态范围的基本思想，使我们引出差分量化。为了说明这一点，我们计算两个连续信号样本之间差值的方差，得出

$$d(n) = x(n) - x(n-1) \tag{6.6.1}$$

$d(n)$的方差为

$$\begin{aligned}\sigma_d^2 &= E[d^2(n)] = E\{[x(n) - x(n-1)]^2\} \\ &= E[x^2(n)] - 2E[x(n)x(n-1)] + E[x^2(n-1)] \\ &= 2\sigma_x^2[1 - \gamma_{xx}(1)]\end{aligned} \tag{6.6.2}$$

其中，$\gamma_{xx}(1)$是 $x(n)$的自相关序列 $\gamma_{xx}(m)$在 $m=1$ 处的值。如果 $\gamma_{xx}(1)>0.5$，那么我们就会发现 $\sigma_d^2<\sigma_x^2$。在这种情况下，就可以更好地量化差值 $d(n)$并且从量化值$\{d_q(n)\}$中恢复 $x(n)$。为使信号连续样本之间具有较高的相关性，要求采样率明显高于奈奎斯特率。

一种更好的方法就是把差值量化为

$$d(n)=x(n)-ax(n-1) \tag{6.6.3}$$

其中，a 是待选择的参数，以使得 $d(n)$的方差最小。由此得出结果：a 的最优选择(见习题 6.16)为

$$a=\frac{\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)}=\frac{\gamma_{xx}(1)}{\sigma_x^2}$$

并且

$$\sigma_d^2=\sigma_x^2[1-a^2] \tag{6.6.4}$$

在这种情况下，因为 $0\leqslant a\leqslant 1$，所以 $\sigma_d^2<\sigma_x^2$。$ax(n-1)$称为 $x(n)$的一阶预测。

图 6.6.1 画出了一个更普通的差分预测信号量化系统。这个系统用于在电话信道上进行语音编码及传输，这就是熟知的差分脉冲编码调制(DPCM)。预测的目的就是由 $x(n)$过去值的线性组合来给出 $x(n)$的估计值 $\hat{x}(n)$，这样就可以减小差值信号 $d(n)=x(n)-\hat{x}(n)$的动态范围。因此，p 阶预测的形式为

$$\hat{x}(n)=\sum_{k=1}^{p}a_k x(n-k) \tag{6.6.5}$$

在图 6.6.1 中，量化器旁边必须要有反馈回路，以避免在解码器端出现量化误差积聚。在这种结构中，误差 $e(n)=d(n)-d_q(n)$等于

$$e(n)=d(n)-d_q(n)=x(n)-\hat{x}(n)-d_q(n)=x(n)-x_q(n)$$

因此，重建量化信号 $x_q(n)$的误差等于样本 $d(n)$的量化误差。图 6.6.1 还画出了 DPCM 解码器，它用于从量化值中重建信号。

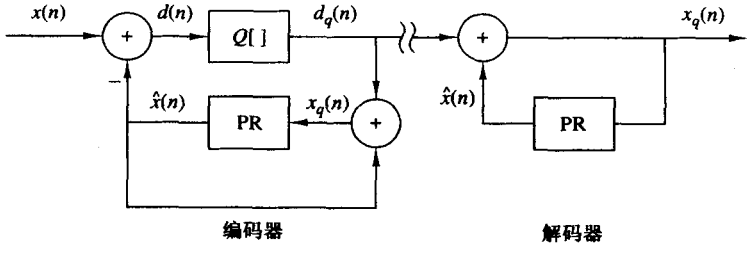


图 6.6.1 差分预测信号量化系统的编码器和解码器

最简单形式的差分预测量化称为 Δ 调制(DM)。在 DM 中，量化器只有一位(两级)，预测器是一阶的，如图 6.6.2(a)所示。基本上，DM 对输入信号提供了一种阶梯近似。在每个采样时刻，输入样本 $x(n)$与它的最近阶梯近似值 $\hat{x}(n)=ax_q(n-1)$的差值符号是确定的，然后阶梯信号在差值方向上以步长 Δ 进行更新。

从图 6.6.2(a)可以看出

$$x_q(n)=ax_q(n-1)+d_q(n) \tag{6.6.6}$$

等价于一个离散时间的模拟积分器。如果 $a=1$，那么就得到理想的累加器(积分器)，然而当选择

$a<1$ 时，就得到泄漏积分器。图 6.6.2(c)画出的模型说明了 DM 系统实际实现的基本思想。模拟低通滤波器是用来抑制频率区间 B 到 $F_s/2$ 内的带外频率分量，这是因为过采样会使得 $F_s >> B$。

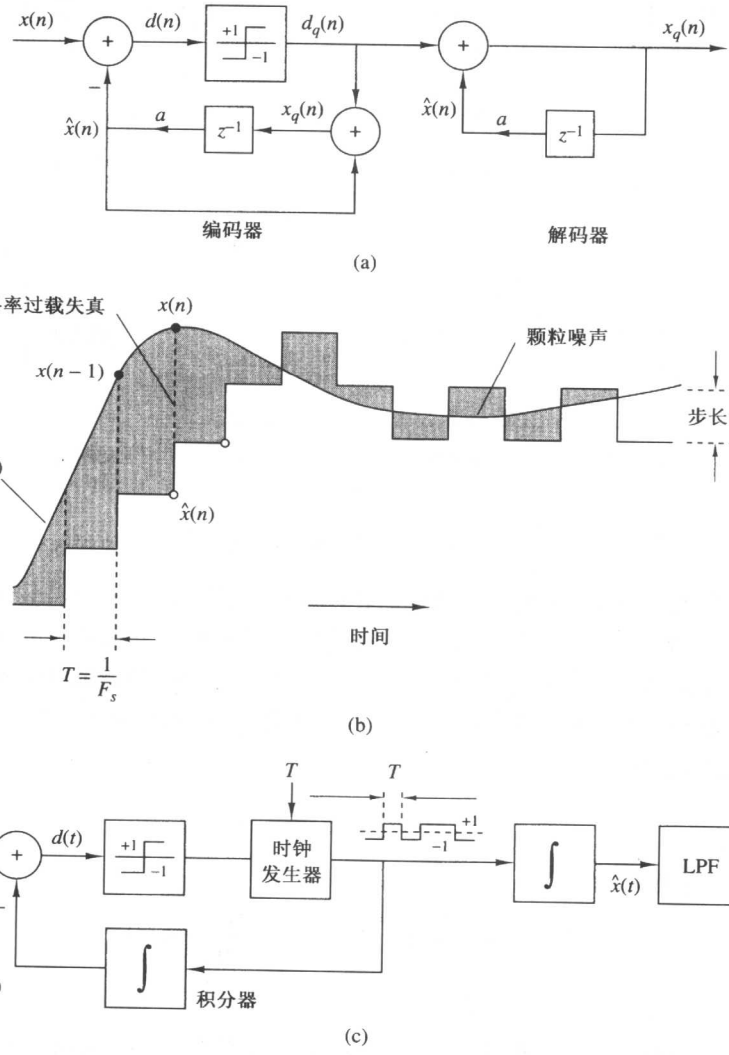


图 6.6.2　调制系统和两种类型的量化误差

图 6.6.2(b)中的交叉线阴影部分说明了 DM 的两种量化误差——斜率过载失真和颗粒噪声。因为步长限制了 $x(n)$的最大斜率 Δ/T，所以如果 $\max(|\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t|)\leqslant\Delta/T$，那么就可以避免斜率过载失真。当 DM 跟踪相对平坦(慢变)的输入信号时，就会出现颗粒噪声。我们注意到，若增加 Δ 则减小了过载失真，却增大了颗粒噪声，反之亦然。

减小这两种失真的一种方法是在 DM 前增加一个积分器，如图 6.6.3(a)所示。这有两个作用：首先，加重了 $x(t)$的低频分量并增加了输入到 DM 的信号的相关性。其次，简化了 DM 解码器，这是因为 DM 积分器取消了解码器所需的微分器(逆系统)，因此解码器就仅仅只是一个低通滤波器，如图 6.6.3(a)所示。此外，编码器端的两个积分器可以由放置在比较器前的一个积分器替代，如图 6.6.3(b)所示。该系统就是我们熟知的 Σ-Δ 调制(SDM)。

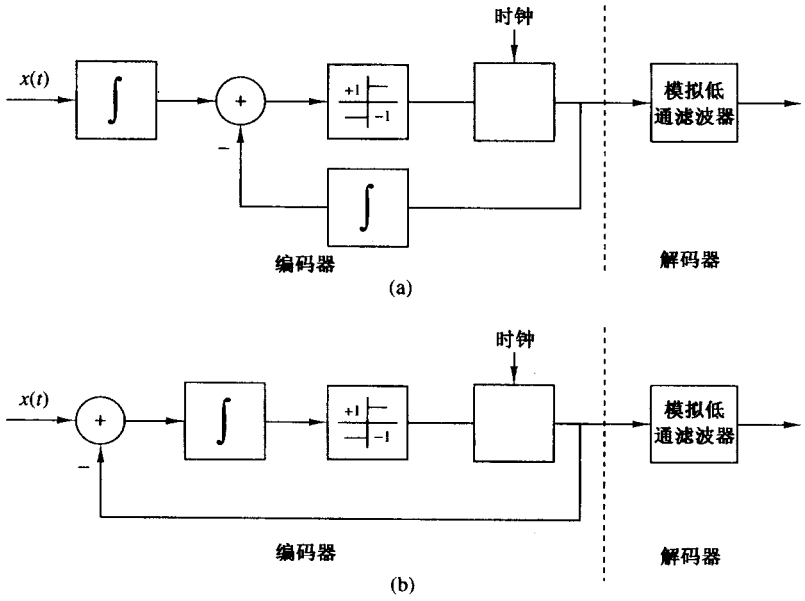


图 6.6.3 ∑-Δ 调制系统

SDM 是 A/D 转换器的理想替代物。这样的转换器利用了高采样率,并将量化噪声散布在一直到 $F_s/2$ 的频带上。因为 $F_s >> B$,所以自由信号频带 $B \leqslant F \leqslant F_s/2$ 上的噪声可以通过适当的数字滤波器来去除。为了说明这个原理,现在考虑图 6.6.4 所示的 SDM 的离散时间模型。假设用方差为 $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$ 的加性白噪声源来模拟比较器(1 位量化器)。积分器则由一个离散时间系统来模拟,该系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \tag{6.6.7}$$

序列 $\{d_q(n)\}$ 的 z 变换为

$$\begin{aligned} D_q(z) &= \frac{H(z)}{1 + H(z)} X(z) + \frac{1}{1 + H(z)} E(z) \\ &= H_s(z)X(z) + H_n(z)E(z) \end{aligned} \tag{6.6.8}$$

其中,$H_s(z)$和 $H_n(z)$分别是信号和噪声的系统函数。一个性能良好的 SDM 系统在信号频带 $0 \leqslant F \leqslant B$ 上具有平坦的频率响应 $H_s(\omega)$,另一方面,$H_n(z)$在频带 $0 \leqslant F \leqslant B$ 上应该有较大的衰减,而在频带 $B \leqslant F \leqslant F_s/2$ 上的衰减较小。

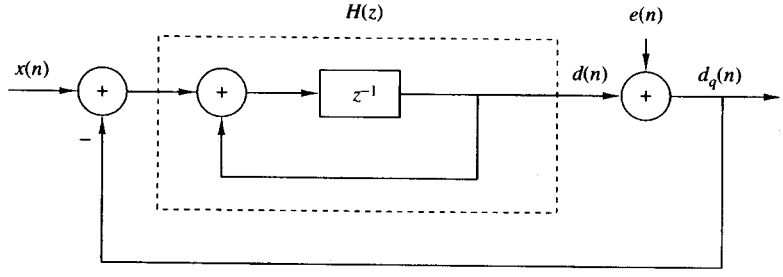


图 6.6.4 ∑-Δ 调制的离散时间模型

对于由式(6.6.7)确定的含有积分器的一阶 SDM 系统,得出

$$H_s(z)=z^{-1},\qquad H_n(z)=1-z^{-1} \tag{6.6.9}$$

因而 $H_s(z)$并没有使信号变形。所以,噪声系统函数 $H_n(z)$决定了 SDM 系统的性能,该函数的幅频响应为

$$|H_n(F)|=2\left|\sin\frac{\pi F}{F_s}\right| \tag{6.6.10}$$

如图 6.6.5 所示。带内量化噪声的方差为

$$\sigma_n^2=\int_{-B}^{B}|H_n(F)|^2S_e(F)\,\mathrm{d}F \tag{6.6.11}$$

其中 $S_e(F)=\sigma_e^2/F_s$ 是量化噪声的功率谱密度。从这个关系式我们看到,保持 B 因定,F_s 每增加一倍(采样率增加一个倍乘因子 2),量化噪声的功率就会下降 3 dB。对于任何量化器这都是成立的。然而,通过选择适当的滤波器 $H(z)$还有可能再降低量化噪声功率。

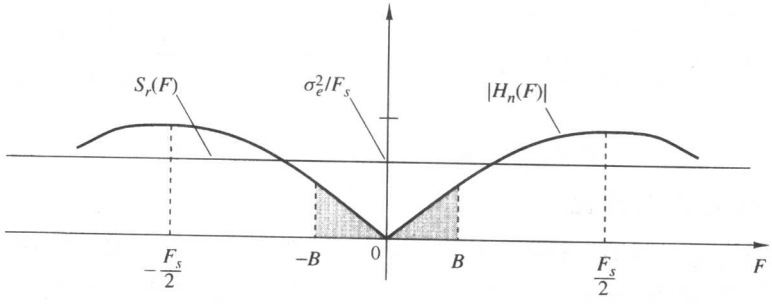


图 6.6.5　噪声系统函数的频率(幅度)响应

对于一阶 SDM,可以证明(见习题 6.19),当 $F_s>>2B$ 时,带内量化噪声功率为

$$\sigma_n^2\approx\frac{1}{3}\pi^2\sigma_e^2\left(\frac{2B}{F_s}\right)^3 \tag{6.6.12}$$

我们注意到,采样率每增加一倍,噪声功率就下降 9 dB,其中 3 dB 是由于 $S_e(F)$的下降,6 dB 是由于 $H_n(F)$的滤波特性。另外,通过使用双积分器还可以得到 6 dB 的下降(见习题 6.20)。

总之,通过增加采样率以将量化噪声功率散布到更大的频带$(-F_s/2, F_s/2)$上,并利用合适的滤波器以调整功噪声率谱密度,就可以减小噪声功率 σ_n^2。因此,SDM 在采样率 $F_s=2IB$ 处输出了一位的量化信号,其中过采样(插值)因子 I 决定了 SDM 量化器的 SNR。

接下来,我们介绍如何将这种信号转换成 b 位的奈奎斯特率的量化信号。首先,想到 SDM 解码器就是一个截止频率为 B 的模拟低通滤波器,该滤波器的输出是输入信号 $x(t)$的近似。给出采样率为 F_s 的 1 位信号 $d_q(n)$,通过以 $2B$ 的速率采样低通滤波器的输出,就可以得到低采样率的信号 $x_q(n)$,这个采样率可以是奈奎斯特率 $2B$ 或者更高一些。为了避免混叠,在处理宽带信号时,首先要滤除频带$(B, F_s/2)$以外的噪声,此信号再通过一个低通滤波器,并以一个更低的采样率进行重采样(下采样)。下采样处理也称为抽取,这方面的内容将在第 11 章进行详细介绍。

例如,如果插值因子 $I=256$,那么通过平均连续的 128 位的非重叠块,就可以得到 A/D 转换器的输出。这个平均操作会在奈奎斯特率处产生数值范围从 0 到 255 的数字信号,平均处理还提供了所需的抗混叠滤波功能。

图 6.6.6 画出了过采样A/D转换器的基本组成。目前,用于语音频带(3 kHz)信号的过采样A/D转换器已经制造成集成电路,典型的特征是能工作在 2 MHz 的采样率,下采样率也能达到 8 kHz,并提供了 16 位的精度。

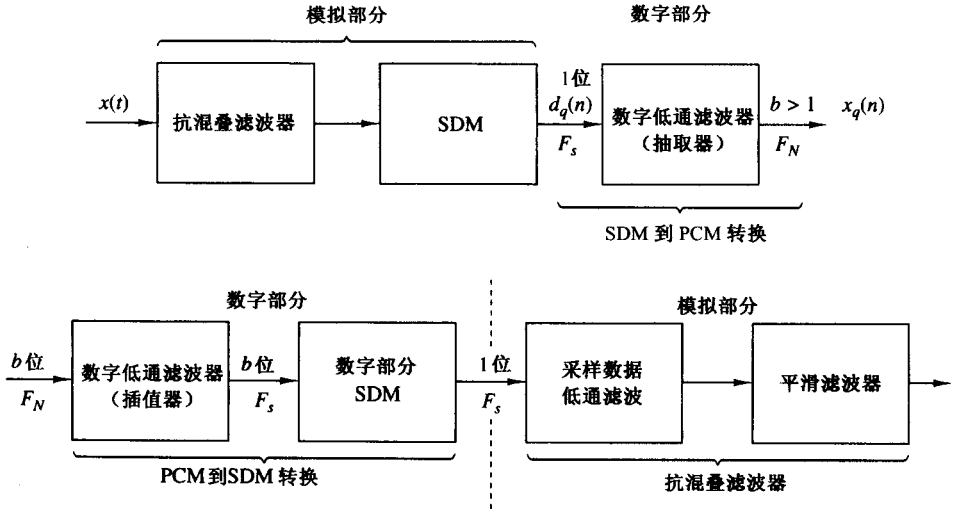


图 6.6.6 过采样 A/D 转换器的基本组成

6.6.2 过采样 D/A 转换器

图 6.6.7 画出了过采样 D/A 转换器的组成部分。从图上可以看到,过采样 D/A 转换器分为数字前置以及其后的模拟部分。数字部分包括一个插值器,它接于 SDM 之后,作用是通过因子 I 增加采样率。插值器只不过是在连续的低速率样本之间插入 $I-1$ 个零以提高采样率。插值后的信号然后再通过截止频率为 $F_c = B/F_s$ 的数字滤波器进行处理,以抑制输入信号频谱的映像(复制)。这种高速的信号输入到 SDM,产生类似于噪声分布的 1 位样本,每个 1 位样本再输入到 1 位 D/A 转换器,这个 D/A 提供了抗混叠滤波器和平滑滤波器之间的模拟接口。输出模拟滤波器的通频带为 $0 \leqslant F \leqslant B$ Hz,作用是平滑信号并去除频带 $B \leqslant F \leqslant F_s/2$ 内的量化噪声。与 A/D 转换器中的相比,过采样 D/A 转换器使用的 SDM 的模拟与数字部分颠倒了。

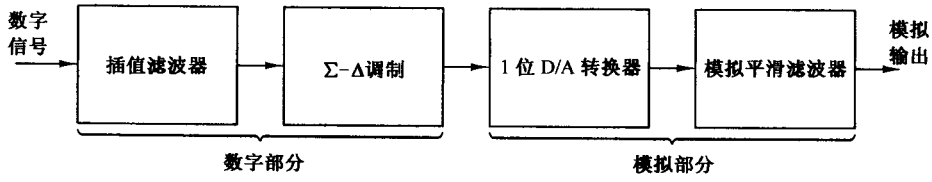


图 6.6.7 过采样 D/A 转换器的组成部分

实际上,与传统的 D/A(以及 A/D)相比,过采样 D/A(以及 A/D)转换器具有许多优点。首先,高的采样率及后续的数字滤波器,使得对复数和指数模拟抗混叠滤波器的需求降到最低或者去除;而且,在转换阶段引入的任何模拟噪声都会被滤除;此外,也不需要 S/N 电路。过采样 SDM A/D 和 D/A 转换器对模拟电路参数的变化具有健壮性,并且是线性的,同时价格也便宜。

以上总结了我们讨论的基于简单插值技术的信号重建,前面讨论的插值技术可以很容易地用来设计实际的 D/A 转换器,以从数字信号重建模拟信号。在第 11 章中,就数字处理系统中改变采样率的内容,我们还将再一次讨论插值技术。

6.7　小结与参考文献

本章主要集中讲述了信号的采样与重建。特别介绍了连续时间信号的采样及后续的 A/D 转换操作。无论是用通用计算机还是定制的数字信号处理器对模拟信号进行数字处理，都需要一些必要的操作。我们还讲述了与 D/A 转换有关的话题。除了传统的 A/D 和 D/A 转换技术外，我们还介绍了基于过采样和一种称为 Σ-Δ 调制的波形编码的 A/D 和 D/A 转换。Σ-Δ 变换技术特别适用于音频信号，这是因为音频具有相对较小的带宽（小于 20 kHz），并且在某些应用中要求较高的保真度。

奈奎斯特于 1928 年提出了采样定理，后来香农在他的经典论文（1949）中使采样定理通俗化。Sheingold 的书中（1986）专门讲述了 D/A 和 A/D 转换技术。在许多技术文献中，都已经介绍过 D/A 和 A/D 转换。特别地，我们引用了 Candy（1986）、Candy 等（1981）和 Gray（1990）的工作。

习题

6.1　给定一个连续时间信号 $x_a(t)$，当 $|F| > B$ 时，$X_a(F) = 0$。计算由以下式子确定的信号 $y_a(t)$ 的最小采样率 F_s。(a) $\mathrm{d}x_a(t)/\mathrm{d}t$；(b) $x_a^2(t)$；(c) $x_a(2t)$；(d) $x_a(t)\cos 6\pi Bt$；(e) $x_a(t)\cos 7\pi Bt$。

6.2　利用理想 D/A 转换器来重建采样后的序列 $x_a(nT)$，产生的连续时间信号为 $\hat{x}a(t)$。当 $|F| < F_c$ 时，D/A 的插值函数 $g_a(t) = A$，而其他地方的值为零。

(a) 如果当 $|F| > B$ 时，原始信号 $x_a(t)$ 的频谱满足 $X_a(F) = 0$，找出满足 $\hat{x}_a(t) = x_a(t)$ 的 T，F_c 以及 A 的最大值。

(b) 如果当 $|F| > B$ 时，$X_1(F) = 0$，当 $|F| > 2B$ 时，$X_2(F) = 0$，并且 $x_a(t) = x_1(t)x_2(t)$，找出满足 $\hat{x}_a(t) = x_a(t)$ 的 T，F_c 以及 A 的最大值。

(c) 对于 $x_a(t) = x_1(t)x_2(t/2)$，重做(b)部分。

6.3　一个连续时间周期信号，其傅里叶级数系数为 $c_k = (1/2)^{|k|}$，周期为 $T_p = 0.1$ s，该信号通过一个截止频率为 $F_c = 102.5$ Hz 的理想低通滤波器。输出信号 $y_a(t)$ 以 $T = 0.005$ s 为间隔进行周期采样。计算序列 $y(n) = y_a(nT)$ 的频谱。

6.4　对于信号 $x_a(t) = te^{-t}u_a(t)$ 重做例 6.1.2。

6.5　考虑图 6.2.1 中的系统，如果当 $|F| > F_s/2$ 时，$X_a(F) = 0$，求解离散时间系统 $y_a(t) = \int_{-\infty}^{t} x_a(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的频率响应 $H(\omega)$。

6.6　已知信号 $x_a(t)$ 在 $0 < F_1 \leqslant |F| \leqslant F_2 < \infty$ 时，频谱 $X_a(F) \neq 0$，而其他情况 $X_a(F) = 0$。

(a) 要采样 $x_a(t)$，计算不出现混叠所需要的最小采样率。

(b) 推导出从样本 $x_a(nT)$，$-\infty < n < \infty$ 重建 $x_a(t)$ 的公式。

6.7　证明式(6.4.47)至式(6.4.49)所描述的非均匀二阶采样插值公式。

6.8　一个离散时间采样保持插值器，通过因子 I，重复最近输入样本 $(I-1)$ 次。

(a) 计算插值函数 $g_{SH}(n)$。

(b) 计算 $g_{SH}(n)$ 的傅里叶变换 $G_{SH}(\omega)$。

(c) 画出理想插值器、线性插值器以及 $I = 5$ 的采样保持插值器的幅度和相位响应图。

6.9　时域采样已知连续时间信号

$$x_a(t) = \begin{cases} e^{-j2\pi F_0 t}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

(a) 解析计算 $x_a(t)$ 的频谱 $X_a(F)$。

(b) 解析计算信号 $x(n)=x_a(nT)$的频谱,其中 $T=1/F_s$。

(c) 画出 $F_0=10$ Hz 的幅度谱$|X_a(F)|$。

(d) 画出 $F_s=10$ Hz,20 Hz,40 Hz 以及 100 Hz 的幅度谱$|X(F)|$。

(e) 就混叠效应,解释(d)部分得到的结果。

6.10 已知一个带通信号,它的频谱如图 P6.10 所示。对它进行采样,计算不出现混叠的最小采样率 F_s。

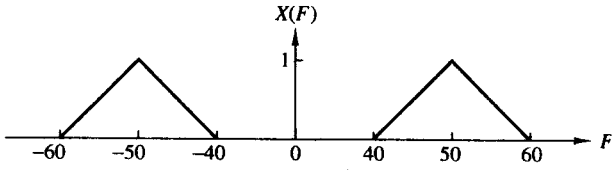


图 P6.10

6.11 已知一个带通信号,它的频谱如图 P6.11 所示。对它进行采样,计算不出现混叠的最小采样率 F_s。

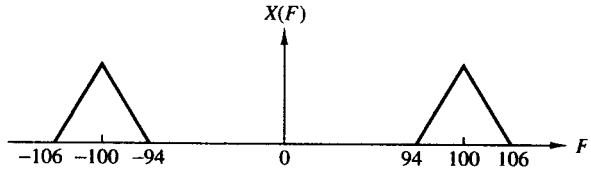


图 P6.11

6.12 考虑如图 P6.12 所示的两个系统。

(a) 如果 $x_a(t)$的傅里叶变换如图 P6.12(b)所示,并且 $F_s=2B$,画出不同信号的频谱。$y_1(t)$和 $y_2(t)$与 $x_a(t)$的关系如何?

(b) 如果 $x_a(t)=\cos 2\pi F_0 t$, $F_0=20$ Hz,并且 $F_s=50$ Hz 或者 $F_s=30$ Hz,计算 $y_1(t)$和 $y_2(t)$。

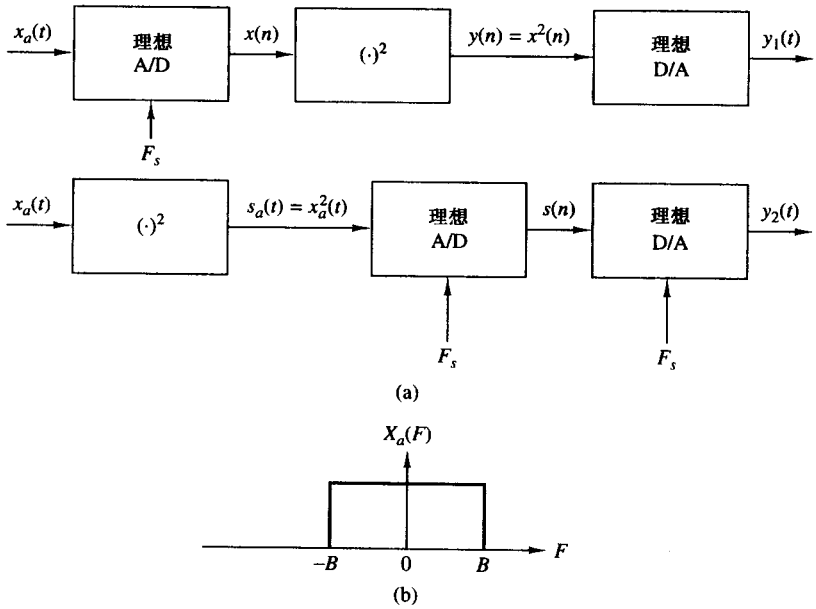


图 P6.12

6.13 一个连续时间信号 $x_a(t)$的带宽为 B,它的回波 $x_a(t-\tau)$和它同时传到一台电视接收机。接收的模拟信号

$$s_a(t) = x_a(t) + \alpha x_a(t-\tau), \qquad |\alpha| < 1$$

经过图 P6.13 所示的系统进行处理。能否确定 F_s 和 $H(z)$使得 $y_a(t) = x_a(t)$[即从接收的信号中去除"重影"$x_a(t-\tau)$]。

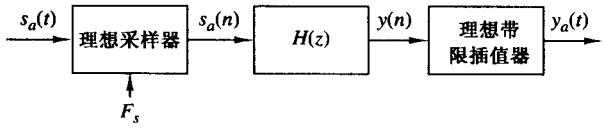


图 P6.13

6.14 一个带限连续时间信号 $x_a(t)$以频率 $F_s \geqslant 2B$ 被采样,采样周期为 $T = 1/F_s$,计算采样后的离散时间信号 $x(n)$的能量 E_d,结果以模拟信号能量 E_a 的函数形式进行表示。

6.15 在线性插值器中,连续样本点连接成一条直线段,因此插值后的信号 $\hat{x}(t)$可以表示为

$$\hat{x}(t) = x(nT-T) + \frac{x(nT) - x(nT-T)}{T}(t - nT), \quad nT \leqslant t \leqslant (n+1)T$$

我们观察到,在 $t = nT$ 时,$\hat{x}(nT) = x(nT-T)$,并且在 $t = nT + T$ 时,$\hat{x}(nT+T) = x(nT)$。因此,在对实际信号 $x(t)$进行插值时,$x(t)$有一个 T s 的固有延迟。图 P6.15 画出了这种线性插值技术。

(a) 把线性插值器视为线性滤波器,证明具有 T s 延迟的线性插值器的冲激响应为

$$h(t) = \begin{cases} t/T, & 0 \leqslant t < T \\ 2 - t/T, & T \leqslant t < 2T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

推导相应的频率响应 $H(F)$。

(b) 画出$|H(F)|$的响应图,并且与用于低通带限信号的理想重建滤波器的响应图进行比较。

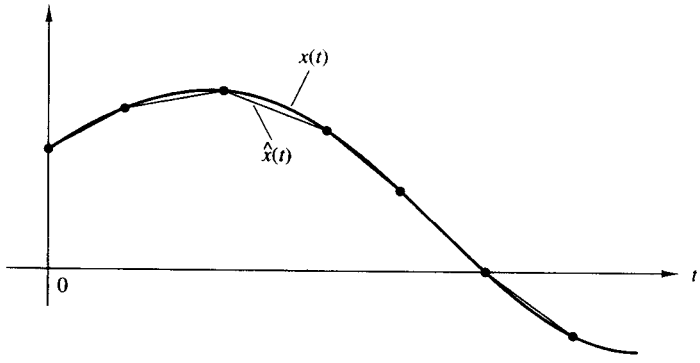


图 P6.15

6.16 令 $x(n)$是一个零均值、方差为 σ_x^2、自相关序列为 $\gamma_x(l)$的静态过程。

(a) 证明一阶预测误差

$$d(n) = x(n) - ax(n-1)$$

的方差 σ_d^2 为

$$\sigma_d^2 = \sigma_x^2[1 + a^2 - 2a\rho_x(1)]$$

其中,$\rho_x(1) = \gamma_x(1)/\gamma_x(0)$是归一化的自相关序列。

(b) 证明当 $a = \gamma_x(1)/\gamma_x(0) = \rho_x(1)$时,$\sigma_d^2$ 取得最小值

$$\sigma_d^2 = \sigma_x^2[1 - \rho_x^2(1)]$$

(c) 在什么条件下，$\sigma_d^2 < \sigma_x^2$？

(d) 对于二次预测误差

$$d(n) = x(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2)$$

重复做(a)到(c)部分。

6.17 已知一个 DM 编码器，它的输入 $x(n) = A\cos(2\pi nF/F_s)$，请问不出现斜率过载的条件是什么？以图形方法画出这个条件。

6.18 令 $x_a(t)$是一个带限信号，具有固定的带宽为 B，方差为 σ_x^2。

(a) 假设 6.3.3 节讨论的量化噪声有效，证明每次将采样率提高一倍，信号与量化噪声比 SQNR = $10\lg(\sigma_x^2/\sigma_e^2)$就会增加 3 dB。

(b) 如果我们想通过加倍采样率的方法来增加 SQNR，那么最有效的方法是什么？选择一个线性多位 A/D 转换器，还是过采样 A/D 转换器？

6.19 已知一阶 SDM 模型如图 6.6.4 所示。

(a) 证明信号频带$(-B, B)$内的量化噪声功率为

$$\sigma_n^2 = \frac{2\sigma_e^2}{\pi}\left[\frac{2\pi B}{F_s} - \sin\left(2\pi\frac{B}{F_s}\right)\right]$$

(b) 假设 $F_s >> B$，利用 sin 函数的二阶泰勒级数扩展，证明

$$\sigma_n^2 \approx \frac{1}{3}\pi 2\sigma_e^2\left(\frac{2B}{F_s}\right)^3$$

6.20 已知一个二阶 SDM 模型，如图 P6.20 所示。

(a) 分别计算信号和噪声的系统函数 $H_s(z)$和 $H_n(z)$。

(b) 画出噪声系统函数的幅度响应图，并与一阶 SDM 的噪声系统函数的幅度响应图进行比较。你能否解释这两条曲线的间的 6 dB 差值？

(c) 证明带内量化噪声功率 σ_n^2 近似为

$$\sigma_n^2 \approx \frac{\pi\sigma_e^2}{5}\left(\frac{2B}{F_s}\right)^5$$

这意味着采样率每提高一倍，信噪比就会增加 15 dB。

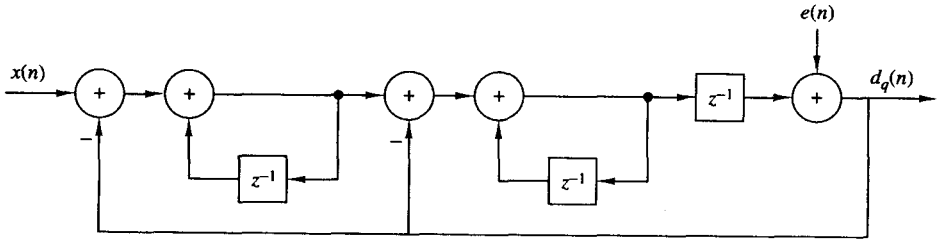


图 P6.20

6.21 图 P6.21 画出了基于查找表的正弦信号发生器的基本思想。信号一个周期的样本

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right), \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

存储于内存中。在表中逐步移动，当角度超过 2π 到达表尾时，再回到表头，这样就可以产生数字正弦信号。通过求 N 的余数进行寻址，就可以实现循环(即利用“环形”缓冲器)。每隔 T s，$x(n)$的样本就输入到理想 D/A 转换器。

(a) 证明通过选择 F_s 就可以调整输出模拟正弦信号的频率 F_0。

(b) 现在假设 $F_s = 1/T$ 是固定的，利用这个给定的查找表，可以产生多少条不同的模拟正弦信号？请解释说明。

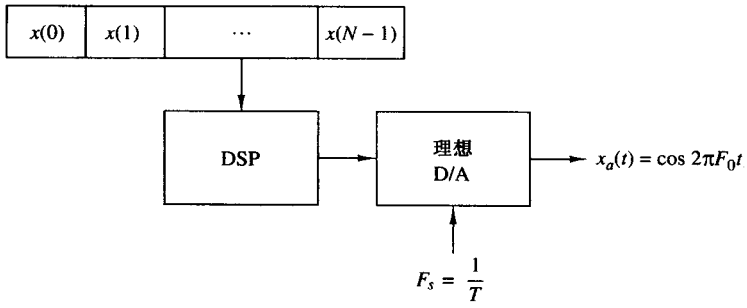


图 P6.21

6.22 假设利用频率响应

$$H(F) = C(F - F_c) + C^*(-F - F_c)$$

来表示一个模拟带通滤波器，其中 $C(f)$ 是对应的低通滤波器的频率响应，如图 P6.22 所示。

(a) 证明带通滤波器的冲激响应 $h(t)$ 与对应的低通滤波器的冲激响应 $c(t)$ 具有如下关系：

$$h(t) = 2\Re[c(t)e^{j2\pi F_c t}]$$

(b) 假设这个频率响应为 $H(F)$ 的带通系统，受到一带通信号

$$x(t) = \Re[u(t)e^{j2\pi F_c t}]$$

的激励，其中 $u(t)$ 是对应的低通信号，证明滤波器的输出可以表示为

$$y(t) = \Re[v(t)e^{j2\pi F_c t}]$$

其中，

$$v(t) = \int^{\omega} c(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

(提示：在频域进行证明。)

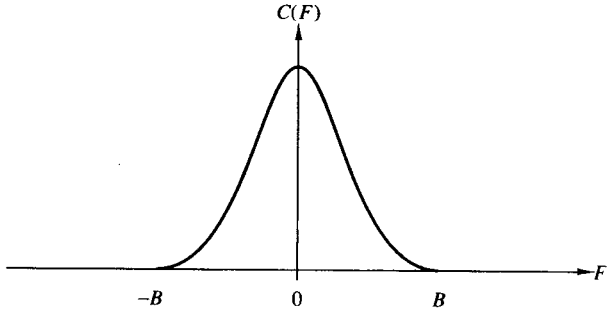


图 P6.22

6.23 图 P6.23 画出了一个正弦信号发生器，其存储的正弦数据

$$x(n) = \cos\left(\frac{2A}{N}n\right), \qquad 0 \leqslant n \leqslant N - 1$$

及采样率 $F_s = 1/T$ 都是固定的。某一工程师想产生周期为 $2N$ 的正弦信号,他提示我们用零阶或一阶(线性)插值器,以使原始的正弦信号在一个周期内的样本数就会加倍,如图 P6.23(a)所示。

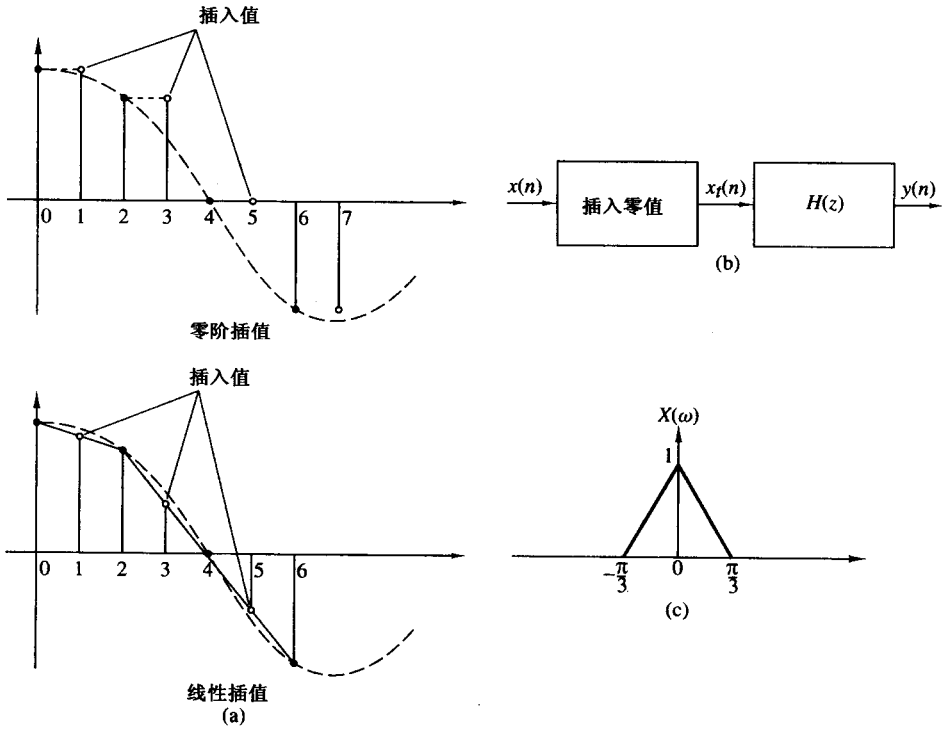


图 P6.23

(a) 求解用零阶插值器和线性插值器产生的信号序列 $y(n)$,并计算 $N = 32, 63, 128$ 时的总谐波失真。

(b) 假如所有的样本值都量化成 8 位,重做(a)部分。

(c) 证明插值后的信号序列 $y(n)$可以由图 P6.23(b)中的系统得出。第一模块会在 $x(n)$的连续样本之间插入一个零值样本。求解系统 $H(z)$并画出它用于零阶插值和线性插值时的幅度响应图。你能否就频率响应函数来解释它们的性能差别?

(d) 对于所有情况,用分析[利用(c)部分的结果]及计算 DFT 值的方法求解输出正弦信号的频谱,并作图。

(e) 如果 $x(n)$的频谱如图 P6.23(c)所示,对于零阶和线性插值器,画出 $x_i(n)$和 $y(n)$的频谱。你能否选择一个较好的 $H(z)$?

6.24 令 $x_a(t)$是一个时间有限信号,即当 $|t| > \tau$ 时,$x_a(t) = 0$,它的傅里叶变换为 $X_a(F)$。以间隔 $\delta F = 1/T_s$对函数 $X_a(F)$进行采样。

(a) 证明函数

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t - nT_s)$$

可以表示成系数为

$$c_k = \frac{1}{T_s} X_a(k\delta F)$$

的傅里叶级数。

(b) 证明 $X_a(F)$可以从样本 $X_a(k\delta F)$中进行恢复，$-\infty < k < \infty$，假设 $T_s \geqslant 2\tau$。

(c) 证明如果 $T_s < 2\tau$，就会存在时域混叠，以至于无法准确重建 $X_a(F)$。

(d) 证明如果 $T_s \geqslant 2\tau$，利用插值公式

$$X_a(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(k\delta F) \frac{\sin[(\pi/\delta F)(F - k\delta F)]}{(\pi/\delta F)(F - k\delta F)}$$

可以从样本 $X_a(k\delta F)$中很好地重建 $X_a(F)$。

第 7 章　离散傅里叶变换的特性及应用

离散时间信号的频率分析经常而且最方便用于数字信号处理器，这可以是通用的数字计算机或者是特殊设计的数字器件。为了对离散时间信号$\{x(n)\}$进行频率分析，要将时域序列转换成等价的频域表达式，我们知道这种表达式是由序列$\{x(n)\}$的傅里叶变换 $X(\omega)$给出的。然而，$X(\omega)$是频率的连续函数，所以这并不是便于计算的序列$\{x(n)\}$的表达式。

在本章中，我们通过采样序列$\{x(n)\}$的频谱 $X(\omega)$来研究它的表示形式。这种频域表示就引入了离散傅里叶变换(DFT)，DFT 是一种对离散时间信号进行频率分析的有力计算工具。

7.1　频域采样：离散傅里叶变换

在介绍 DFT 之前，先考虑非周期离散时间序列傅里叶变换的采样问题，因而，我们要建立采样后的傅里叶变换与 DFT 的关系。

7.1.1　离散时间信号的频域采样和重建

回忆可知，非周期能量有限信号具有连续谱。现在我们来考虑这样一个非周期离散时间信号 $x(n)$，其傅里叶变换为

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{7.1.1}$$

假如对 $X(\omega)$的频率进行周期采样，连续样本的间隔为$\delta\omega$rad。因为 $X(\omega)$是周期为 2π 的周期性函数，所以只有基本频率区间内的样本是必需的。为方便起见，我们只取区间 $0\leqslant\omega<2\pi$ 内的 N 个等距离样本，间隔 $\delta\omega=2\pi/N$，如图 7.1.1 所示。首先，考虑 N 的选择，即频域的样本数。

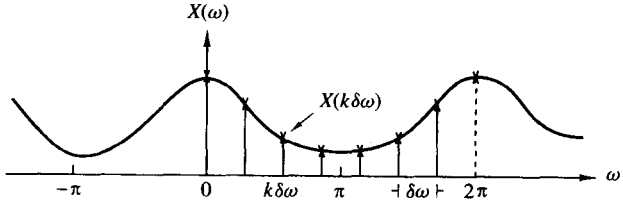


图 7.1.1　傅里叶变换的频域采样

计算式(7.1.1)在 $\omega=2\pi k/N$ 处的值，得到

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N},\qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.1.2}$$

式(7.1.2)中的求和可以分成无限个求和的连加，其中每个求和包括 N 项。因此，

$$\begin{aligned}X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)&=\cdots+\sum_{n=-N}^{-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}+\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}+\sum_{n=N}^{2N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}+\cdots\\&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=lN}^{lN+N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}\end{aligned}$$

如果将上式内求和变量从 n 改变为 $n-lN$，并交换内、外求和的次序，则得到结果

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(n-lN)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N} \tag{7.1.3}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,N-1$。

通过将 $x(n)$每隔 N 个样本进行周期性重复，就可得到信号

$$x_p(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(n-lN) \tag{7.1.4}$$

很明显，该信号也是周期性的，其基本周期为 N。因此，它可以展开成傅里叶级数的形式

$$x_p(n)=\sum_{k=0}^{N-1}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N},\qquad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.1.5}$$

其中，傅里叶系数

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N},\qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.1.6}$$

比较式(7.1.3)和式(7.1.6)，可以得出结论

$$c_k=\frac{1}{N}X\left(\frac{2\pi}{N}k\right),\qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.1.7}$$

因此，

$$x_p(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N},\qquad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.1.8}$$

关系式(7.1.8)提供了从频谱 $X(\omega)$样本重建周期性信号 $x_p(n)$的方法。然而，这并不意味着可以从样本恢复 $X(\omega)$或者 $x(n)$。为了达到这个目的，需要考虑 $x_p(n)$和 $x(n)$之间的关系。

因为 $x_p(n)$是由 $x(n)$按式(7.1.4)进行周期延拓得到的，所以很明显，如果时域上没有混叠，也就是说，若 $x(n)$是时间有限并且短于 $x_p(n)$的周期，那么就可以从 $x_p(n)$恢复出 $x(n)$。图 7.1.2画出了这种情况，不失一般性，我们只考虑有限长序列 $x(n)$，它在区间 $0\leqslant n\leqslant L-1$ 内的值不等于零。我们注意到，当 $N\geqslant L$ 时，

$$x(n)=x_p(n),\qquad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

这样 $x(n)$才可以从 $x_p(n)$恢复而不会出现模糊现象。另一方面，如果 $N<L$，那么由于时域混叠，就不可能从 $x(n)$的周期延拓中恢复出它。由此得出结论：对于长为 L 的有限长非周期离散时间信号，如果 $N\geqslant L$，那么它的频谱就可以从它在频率 $\omega_k=2\pi k/N$ 处的样本中恢复出来。这个步骤为：首先，由式(7.1.8)计算 $x_p(n)$，$n=0,1,\cdots,N-1$，然后令

$$x(n)=\begin{cases}x_p(n), & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{7.1.9}$$

最后，由式(7.1.1)就可计算出 $X(\omega)$。

在连续时间信号情况下，$X(\omega)$的频谱有可能直接以它的样本 $X(2\pi k/N)$的形式进行表示，$k=0,1,\cdots,N-1$。为了推导用于 $X(\omega)$的插值公式，假设 $N\geqslant L$，并从式(7.1.8)开始着手。因为当 $0\leqslant n\leqslant N-1$时，$x(n)=x_p(n)$，所以

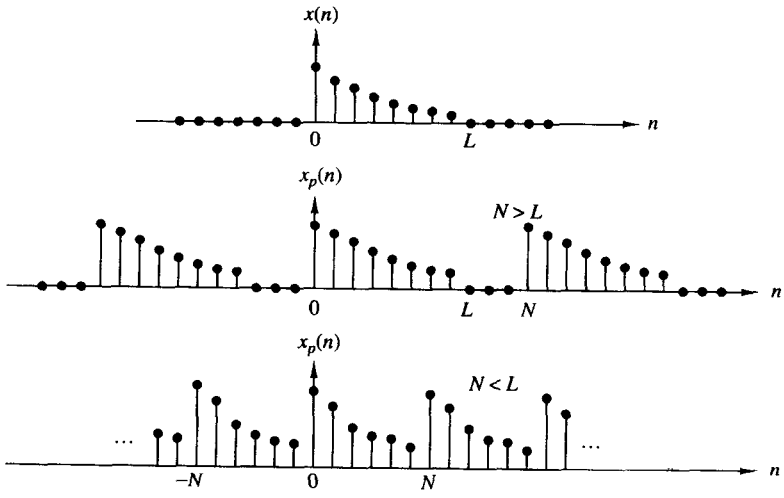


图 7.1.2 长为 N 的非周期序列 $x(n)$及它的周期延拓,$N \geqslant L$ 时没有混叠;$N < L$ 时存在混叠

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{7.1.10}$$

如果利用 $x(n)$并代入式(7.1.1),那么就得出

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}\right] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega-2\pi k/N)n}\right] \end{aligned} \tag{7.1.11}$$

式(7.1.11)中方括号里内的求和项表示了频移 $2\pi k/N$ 后的基本插值函数。当然,如果定义

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} \\ &= \frac{\sin(\omega N/2)}{N\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2} \end{aligned} \tag{7.1.12}$$

那么式(7.1.11)就可表示为

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) P\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right), \qquad N \geqslant L \tag{7.1.13}$$

插值函数 $P(\omega)$并不是我们熟悉的 $\sin\theta/\theta$,而是它的周期性形式,这是由于 $X(\omega)$的周期特性。式(7.1.12)中的相移反映出 $x(n)$是长为 N 的因果有限长信号这一事实。图 7.1.3 画出了 $N=5$ 时的 $\sin(\omega N/2)/(N\sin(\omega/2))$函数图。我们注意到,函数 $P(\omega)$具有特性

$$P\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \cdots, N-1 \end{cases} \tag{7.1.14}$$

因此,插值公式(7.1.13)准确地给出了在 $\omega = 2\pi k/N$ 处的样本值 $X(2\pi k/N)$。在其他所有频率,公式提供了一个合适的原始频谱样本的加权线性组合。

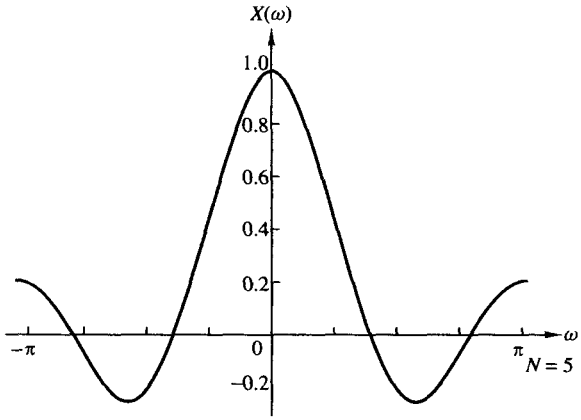


图 7.1.3　[sin(ωN/2)]/[Nsin(ω/2)]函数图

下面的例子说明了离散时间信号的频谱采样以及引起的时域混叠。

例 7.1.1　已知信号

$$x(n)=a^n u(n),\qquad 0<a<1$$

在频率 $\omega_k=2\pi k/N$ 处，$k=0,1,\cdots,N-1$，采样该信号的频谱，对于 $a=0.8$，计算当 $N=5$ 及 $N=50$ 时的重建频谱。

解：序列 $x(n)$的傅里叶变换为

$$X(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

假设在 N 个等频率间隔 $\omega_k=2\pi k/N$ 处采样 $X(\omega)$，$k=0,1,\cdots,N-1$，那么就可以得到频谱样本

$$X(\omega k)\equiv X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)=\frac{1}{1-ae^{-j2\pi k/N}},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

从式(7.1.4)或式(7.1.8)可以得到对应于频率样本 $X(2\pi k/N)$的周期序列 $x_p(n)$，$k=0,1,\cdots,N-1$。因此，

$$x_p(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(n-lN)=\sum_{l=-\infty}^{0}a^{n-lN}$$

$$=a^n\sum_{l=0}^{\infty}a^{lN}=\frac{a^n}{1-a^N},\qquad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

其中，因子 $1/(1-a^N)$表示混叠带来的影响，因为 $0<a<1$，所以当 $N\to\infty$ 时混叠误差趋于零。

对于 $a=0.8$，图 7.1.4(a)和图 7.1.4(b)分别画出了序列 $x(n)$及它的频谱 $X(\omega)$。$N=5$ 和 $N=50$ 时的混叠序列 $x_p(n)$及对应的频谱样本分别如图 7.1.4(c)和图 7.1.4(d)所示。我们注意到，当 $N=50$ 时，混叠的影响可以忽略不计。

如果把混叠的有限长序列 $x(n)$定义为

$$\hat{x}(n)=\begin{cases}x_p(n), & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

那么，它的傅里叶变换为

$$\hat{X}(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}\hat{x}(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\omega N}$$

$$=\frac{1}{1-a^N}\cdot\frac{1-a^N e^{-j\omega n}}{1-ae^{-j\omega}}$$

注意,虽然 $\hat{X}(\omega)\neq X(\omega)$,但是样本在 $\omega_k=2\pi k/N$ 处的值是相等的,即

$$\hat{X}\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=\frac{1}{1-a^N}\cdot\frac{1-a^N}{1-ae^{-j2\pi k/N}}=X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

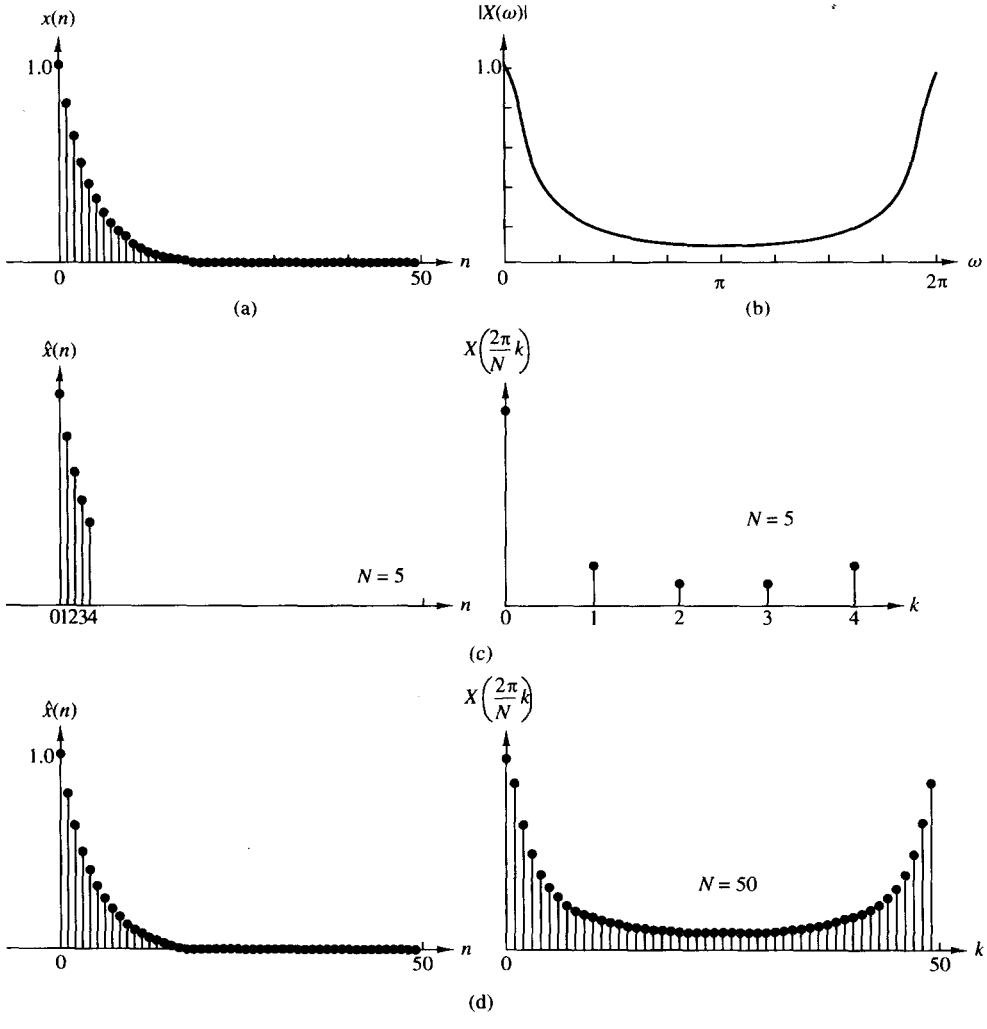


图 7.1.4 (a)$x(n)=0.8^nu(n)$序列图;(b)它的傅里叶变换(仅幅度);(c)$N=5$时的混叠影响;(d)$N=50$时的混叠影响

7.1.2 离散傅里叶变换

在前一节中,讲述了对非周期能量有限序列 $x(n)$的频域采样。通常,当 $x(n)$无限长时,等间隔频率样本 $X(2\pi k/N)$,$k=0,1,\cdots,N-1$ 并不能唯一表示原始序列 $x(n)$。其实,频率样本 $X(2\pi k/N),k=0,1,\cdots,N-1$ 对应于周期为 N 的周期序列 $x_p(n)$,其中 $x_p(n)$是 $x(n)$的混叠形式,它们的关系见式(7.1.4),即

$$x_p(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(n-lN) \tag{7.1.15}$$

$x(n)$是长为 $L\leqslant N$ 的有限长序列时,$x_p(n)$仅仅是 $x(n)$的周期重复,其中 $x_p(n)$的一个单周

期的值为

$$x_p(n)=\begin{cases}x(n), & 0\leqslant n\leqslant L-1\\ 0, & L\leqslant n\leqslant N-1\end{cases} \tag{7.1.16}$$

因此，频率样本 $X(2\pi k/N)$，$k=0,1,\cdots,N-1$ 唯一表示了有限长序列 $x(n)$。因为在一个单周期内，$x(n)\equiv x_p(n)$（补了 $N-L$ 个零），所以利用式(7.1.8)就可以从频率样本 $\{X(2\pi k/N)\}$ 中得出原始的有限长序列 $x(n)$。

非常重要一点是，补零并没有提供序列 $\{x(n)\}$ 的频谱 $X(\omega)$ 的额外信息。利用重建式(7.1.13)，$X(\omega)$ 的 L 个等间隔样本就已足够重建 $X(\omega)$。然而，在序列 $\{x(n)\}$ 后补上 $N-L$ 个零，并计算 N 点 DFT，将会得出傅里叶变换 $X(\omega)$ 的“完整图形”。

综上所述，长为 L 的有限长序列 $x(n)$[即当 $n<0$ 及 $n\geqslant L$ 时，$x(n)=0$]的傅里叶变换为

$$X(\omega)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n},\qquad 0\leqslant\omega\leqslant 2\pi \tag{7.1.17}$$

其中，求和的上下限反映出在区间 $0\leqslant n\leqslant L-1$ 外 $x(n)=0$ 这一事实。当我们以等间隔频率 $\omega_k=2\pi k/N$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$ 对 $X(\omega)$ 进行采样时，其中 $N\geqslant L$，得到的样本为

$$\begin{aligned}X(k)\equiv X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)&=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}\\ X(k)&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N},\qquad k=0,1,2,\cdots,N-1\end{aligned} \tag{7.1.18}$$

因为当 $n\geqslant L$ 时，$x(n)=0$，所以为了方便起见，将求和的上限由 $L-1$ 增加到 $N-1$。

关系式(7.1.18)是用于将长为 $L\leqslant N$ 的序列 $\{x(n)\}$ 转变成长度为 N 的频率样本序列 $\{X(k)\}$ 的公式。因为频率样本是通过计算傅里叶变换 $X(\omega)$ 的一组 N 个离散频率的值得到的，所以关系式(7.1.18)也称为 $x(n)$ 的离散傅里叶变换(DFT)。反过来，关系式(7.1.10)让我们可以从频率样本

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N},\qquad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.1.19}$$

中恢复出序列 $x(n)$，这被称为离散傅里叶逆变换(IDFT)。显而易见，当 $x(n)$ 的长度 $L<N$ 时，N 点 IDFT 得出 $x(n)=0$，其中 $L\leqslant n\leqslant N-1$。作为总结，下面列出了 DFT 和 IDFT 的公式：

$$\text{DFT:}\quad X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N},\qquad k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{7.1.20}$$

$$\text{IDFT:}\quad x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N},\qquad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{7.1.21}$$

例 7.1.2　长为 L 的有限长序列为

$$x(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant L-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

计算该序列的 N 点 DFT，其中 $N\geqslant L$。

解：该序列的傅里叶变换为

$$X(\omega)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{L-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega L}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}=\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(L-1)/2}$$

$X(\omega)$的幅度和相位如图 7.1.5 所示,其中 $L=10$。$x(n)$的 N 点 DFT 仅仅是 $X(\omega)$在一组等间隔频率 $\omega_k=2\pi k/N$处的值,$k=0,1,\cdots,N-1$。因此,

$$X(k)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kL/N}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/N}},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

$$=\frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k(L-1)/N}$$

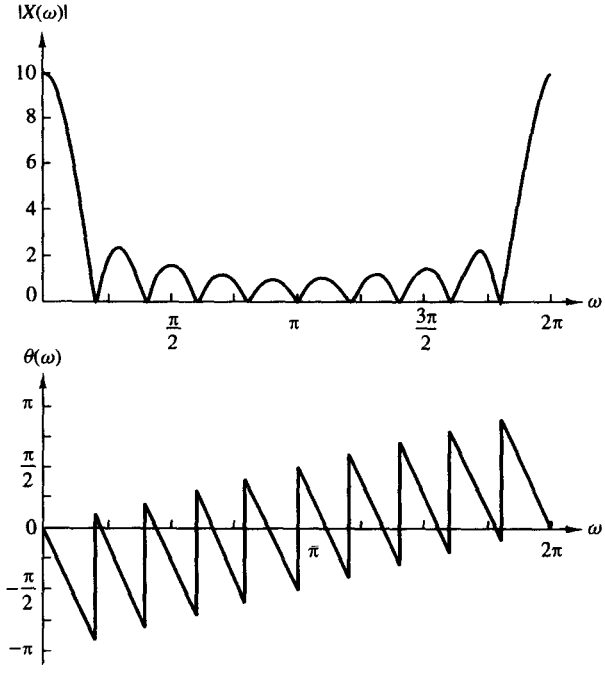


图 7.1.5 例 7.1.2 中信号的傅里叶变换的幅度和相位特性

如果选择 $N=L$,则 DFT 变为

$$X(k)=\begin{cases}L, & k=0\\ 0, & k=1,2,\cdots,L-1\end{cases}$$

因此,在 DFT 中只有一个非零值,观察 $X(\omega)$就可以很明显地得到这一点,这是因为在频率 $\omega_k=2\pi k/L$ 处,$X(\omega)=0$,其中 $k\neq 0$。读者可以验证,通过进行 L 点 IDFT,可以从 $X(k)$中恢复出 $x(n)$。

虽然在频域 L 点 DFT 已经足够唯一表示序列 $x(n)$,但是很明显,这并不能提供生成 $x(n)$的完整频谱特性图的充分信息。如果我们想得到一个更佳的特性图,那么就必须计算(插值)$X(\omega)$在更窄频率间隔处的值,比如说 $\omega_k=2\pi k/N$,其中 $N>L$。实际上,这种计算可以视为通过对序列 $x(n)$追加 $N-L$ 个零,即补零,使得序列 $x(n)$的长度从 L 点扩展到 N 点。

图 7.1.6 画出了 N 点 DFT 的幅度和相位图,其中 $L=10$,$N=50$ 和 $N=100$。与连续谱 $X(\omega)$相比较,现在序列的频谱特性更加明显了。

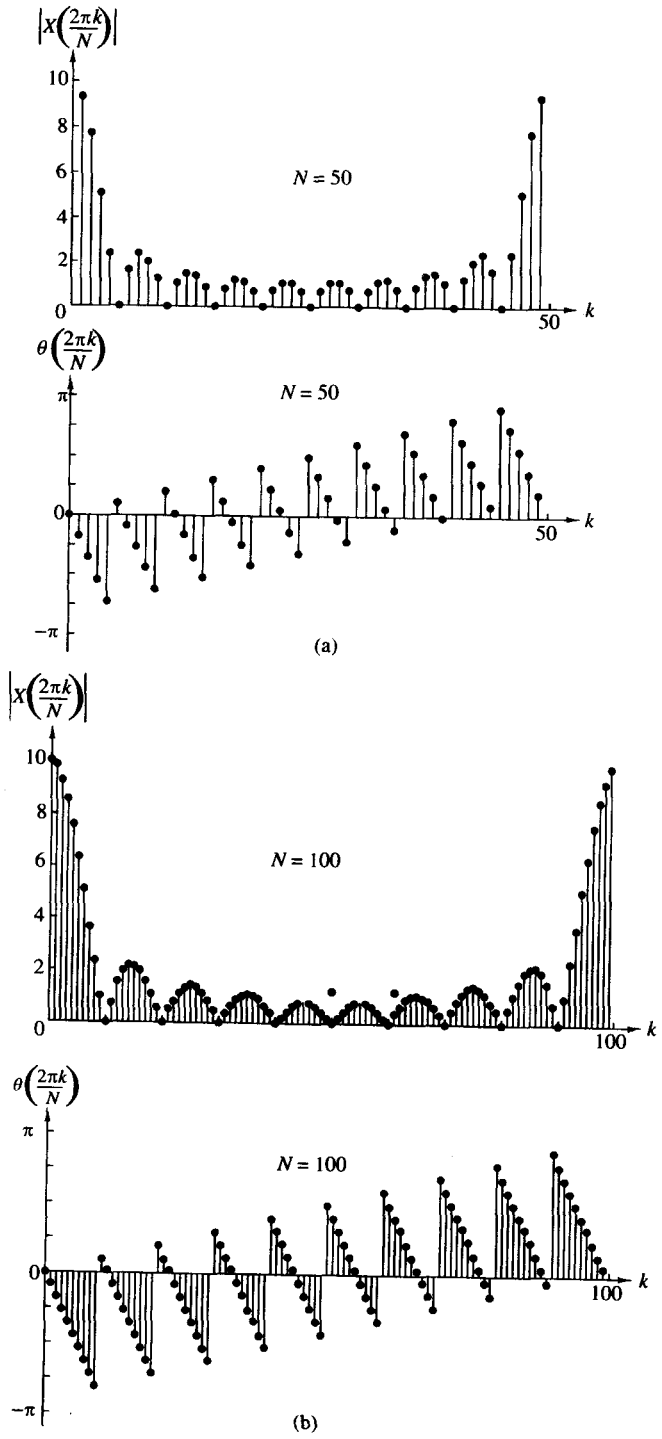


图 7.1.6　例 7.1.2 中的 N 点 DFT 的幅度和相位响应；(a) $L=10, N=50$；(b) $L=10, N=100$

7.1.3　DFT 是线性变换

式(7.1.18)和式(7.1.19)给出的 DFT 和 IDFT 公式可以表示为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.1.22}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn},\qquad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.1.23}$$

其中,定义

$$W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N} \tag{7.1.24}$$

它是单位1的 N 次根。

我们注意到,DFT的每点值的计算可以通过 N 个复数乘积与$(N-1)$个复数加法来实现。因此,N 点 DFT的值的计算可以通过总共 N^2 个复数乘积与 $N(N-1)$个复数加法得到。

将 DFT和 IDFT分别视为对序列$\{x(n)\}$和$\{X(k)\}$的线性变换,这是非常有用的。我们定义信号序列 $x(n)$的 N 点矢量$\boldsymbol{x}_N$,$n=0,1,\cdots,N-1$,以及频率样本的 N 点矢量$\boldsymbol{X}_N$ 和$N\times N$矩阵$\boldsymbol{W}_N$,

$$\boldsymbol{x}_N=\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\\vdots\\x(N-1)\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{X}_N=\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\\vdots\\X(N-1)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{W}_N=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&W_N&W_N^2&\cdots&W_N^{N-1}\\&W_N^2&W_N^4&\cdots&W_N^{2(N-1)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\!\vdots&\vdots\\1&W_N^{N-1}&W_N^{2(N-1)}&\cdots&W_N^{(N-1)(N-1)}\end{bmatrix} \tag{7.1.25}$$

利用这些定义,N 点 DFT可以表示成矩阵的形式

$$\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{x}_N \tag{7.1.26}$$

其中,$\boldsymbol{W}_N$ 是线性变换矩阵,它是对称矩阵。如果假设 $\boldsymbol{W}_N$的逆存在,那么将式(7.1.26)两边左乘$\boldsymbol{W}_N^{-1}$,就可以将该式反转表示为

$$\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{W}_N^{-1}\boldsymbol{X}_N \tag{7.1.27}$$

但这只是 IDFT的一种表达形式。

实际上,式(7.1.23)给出的 IDFT可以表示成矩阵的形式

$$\boldsymbol{x}_N=\frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N^*\boldsymbol{X}_N \tag{7.1.28}$$

其中,$\boldsymbol{W}_N^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{W}_N$ 的复共轭。比较式(7.1.27)和式(7.1.28),可以得出结论

$$\boldsymbol{W}_N^{-1}=\frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N^* \tag{7.1.29}$$

反过来,这意味着

$$\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{W}_N^*=N\boldsymbol{I}_N \tag{7.1.30}$$

其中,$\boldsymbol{I}_N$ 是$N\times N$的单位矩阵。因此,变换中的矩阵 $\boldsymbol{W}_N$ 是一个正交矩阵(酉矩阵),而且它的逆存在,值为 $\boldsymbol{W}_N^*/N$。当然,$\boldsymbol{W}_N$ 逆的存在是建立在先前推导 IDFT的基础上的。

例 7.1.3 计算四点序列

$$x(n)=(0\quad 1\quad 2\quad 3)$$

的 DFT。

解：第一步是计算矩阵 $\boldsymbol{W}_4$。利用 $\boldsymbol{W}_4$ 的周期特性及对称特性

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

矩阵 $\boldsymbol{W}_4$ 可以表示为

$$\boldsymbol{W}_4 = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j} \end{bmatrix}$$

然后

$$\boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{W}_4 \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2+2\mathrm{j} \\ -2 \\ -2-2\mathrm{j} \end{bmatrix}$$

通过对 $\boldsymbol{W}_4$ 中的元素做共轭处理得到 $\boldsymbol{W}_4^*$，并应用公式(7.1.28)，就可以计算出 $\boldsymbol{X}_4$ 的 IDFT。

DFT 和 IDFT 是一种有力计算工具，在许多数字信号处理应用中具有举足轻重的作用，例如，信号频率分析(频谱分析)、功率谱估计和线性滤波。DFT 和 IDFT 在实际应用中的重要性是由于在很大程度上存在高效的计算算法。众所周知，用于计算 DFT 和 IDFT 的算法有快速傅里叶变换(FFT)，这类算法将在第 8 章讲述。

7.1.4　DFT 与其他变换的关系

在上面的讨论中，我们已经指出了 DFT 是一种用于在数字信号处理器上进行信号频率分析的重要计算工具。在考虑已经介绍的其他频率分析工具及变换时，建立 DFT 和其他这些变换之间的关系是非常重要的。

与周期序列傅里叶级数系数的关系。一个基本周期为 N 的周期信号序列 $\{x_p(n)\}$，可以表示成傅里叶级数的形式

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/N}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{7.1.31}$$

其中，傅里叶级数系数表示为

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{7.1.32}$$

将式(7.1.31)、式(7.1.32)与式(7.1.18)、式(7.1.19)相比较，我们看到，傅里叶级数系数的公式与 DFT 的形式一样。实际上，如果定义序列 $x(n) = x_p(n)$，$0 \leqslant n \leqslant N-1$，则该序列的 DFT 仅仅为

$$X(k) = Nc_k \tag{7.1.33}$$

此外，式(7.1.31)与 IDFT 的形式也一样。因此，N 点 DFT 给出了基本周期为 N 的周期序列的准确的线谱。

与非周期序列傅里叶变换的关系。我们已经证明，如果 $x(n)$是一个非周期有限能量序列，它

的傅里叶变换 $X(\omega)$在 N 个等间隔频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处被采样，$k = 0,1,\cdots,N-1$，那么频谱分量

$$X(k) = X(\omega)|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N}, \qquad k = 0,1,\cdots,N-1 \tag{7.1.34}$$

就是周期为 N 的周期序列

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \tag{7.1.35}$$

的 DFT 系数。因此，在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 上混叠$\{x(n)\}$，就确定了 $x_p(n)$。有限长序列

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} x_p(n), & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{7.1.36}$$

与原始序列$\{x(n)\}$已经没什么相似之处了，除非 $x(n)$也是有限长且长度 $L \leqslant N$，此时

$$x(n) = \hat{x}(n), \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{7.1.37}$$

只有在这种情况下，$\{X(k)\}$的 IDFT 才会得到原始序列$\{x(n)\}$。

与 z 变换的关系。现在考虑序列 $x(n)$的 z 变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{7.1.38}$$

它的收敛域包括单位圆。如果 $X(z)$在单位圆上的 N 个等间隔点 $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/N}$被采样，$k = 0,1,2,\cdots,N-1$，那么就得到

$$\begin{aligned} X(k) &\equiv X(z)|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/N}}, \qquad k = 0,1,\cdots,N-1 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N} \end{aligned} \tag{7.1.39}$$

在 N 个等间隔频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处，$k = 0,1,\cdots,N-1$，表达式(7.1.39)与傅里叶变换 $X(\omega)$的值相同，傅里叶变换在 7.1.1 节已经介绍过。

如果序列 $x(n)$是一个有限长序列，长为 N 或者更短，那么从它的 N 点 DFT 就可以恢复出该序列。因此，它的 N 点 DFT 唯一决定了它的 z 变换。所以，$X(z)$可以表示成如下的 DFT$\{X(k)\}$的函数：

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \\ X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N}\right]z^{-n} \\ X(z) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\sum_{n=0}^{N-1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/N}z^{-1}\right)^n \\ X(z) &= \frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/N}z^{-1}} \end{aligned} \tag{7.1.40}$$

在单位圆上计算式(7.1.40)的值时，就得到有限长序列的 DFT 形式的傅里叶变换，其形式为

$$X(\omega)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-2\pi k/N)}} \tag{7.1.41}$$

这个傅里叶变换的表达式是一个 $X(\omega)$的多项式(拉格朗日)插值公式,它是以多项式$\{X(k)\}$在一组等间隔离散频率 $\omega_k=2\pi k/N$ 处值的形式进行表示的,$k=0,1,\cdots,N-1$。经过一些代数运算,就可能将式(7.1.41)简化为先前式(7.1.13)给出的插值公式。

与连续时间信号傅里叶级数系数的关系。假设 $x_a(t)$是连续时间周期信号,其基本周期 $T_p=1/F_0$。该信号可以表示成傅里叶级数

$$x_a(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ktF_0} \tag{7.1.42}$$

其中,$\{c_k\}$是傅里叶系数。如果以均匀速率 $F_s=N/T_p=1/T$ 采样 $x_a(t)$,那么就得到离散时间序列

$$\begin{aligned}x(n)\equiv x_a(nT)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kF_0nT}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N}\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_{k-lN}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N}\end{aligned} \tag{7.1.43}$$

显然,式(7.1.43)是一种 IDFT 公式的表达形式,其中

$$X(k)=N\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_{k-lN}\equiv N\tilde{c}_k \tag{7.1.44}$$

并且

$$\tilde{c}_k=\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_{k-lN} \tag{7.1.45}$$

因此,序列$\{\tilde{c}_k\}$是序列$\{c_k\}$的混叠形式。

7.2　DFT 的性质

在 7.1.2 节,我们是以长为 $L\leqslant N$ 的有限长序列$\{x(n)\}$的傅里叶变换 $X(\omega)$的一组 N 个样本$\{X(k)\}$来介绍 DFT 的,在 N 个等间隔频率$\omega_k=2\pi k/N$ 处采样 $X(\omega)$,$k=0,1,2,\cdots,N-1$。我们证明了 N 个样本$\{X(k)\}$在频域唯一表示了序列$\{x(n)\}$。回忆可知,N 点序列$\{x(n)\}$的 DFT 和逆 DFT(IDFT)为

$$\text{DFT:}\quad X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.2.1}$$

$$\text{IDFT:}\quad x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn},\qquad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.2.2}$$

其中,W_N 定义为

$$W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N} \tag{7.2.3}$$

在这一节,我们将介绍 DFT 的重要性质。考虑到在 7.1.4 节建立的 DFT 与离散时间信号的傅里叶

级数、傅里叶变换、z 变换的关系,我们希望 DFT 的性质能与其他这些变换和级数的性质类似。然而,会存在一些重要的差别,其中之一就是在下一节中推导的圆周卷积特性。很好地理解这些性质,这在实际问题中应用 DFT 是极其有帮助的。

下面用到的符号用来表示 N 点 DFT 对 $x(n)$和 $X(k)$:

$$x(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

7.2.1 周期性、线性和对称性

周期性。如果 $x(n)$和 $X(k)$是 N 点 DFT 对,那么

$$x(n+N) = x(n) \qquad \text{对所有 } n \tag{7.2.4}$$

$$X(k+N) = X(k) \qquad \text{对所有 } n \tag{7.2.5}$$

这些 $x(n)$和 $X(k)$的周期性分别是从用于计算 DFT 和 IDFT 的式(7.2.1)和式(7.2.2)中直接得到的。

我们在前面讲述了对于给定 DFT 的序列 $x(n)$的周期特性,然而,前面并没有把 DFT $X(k)$视为周期序列。在某些应用中,这样做是非常有利的。

线性。如果

$$x_1(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_1(k)$$

并且

$$x_2(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_2(k)$$

那么,对于任何实值或复值常数 a_1 和 a_2,

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} a_1X_1(k) + a_2X_2(k) \tag{7.2.6}$$

这个性质由式(7.2.1)给出的 DFT 定义可以直接得到。

序列的圆周对称特性。我们已经看到,长度为 $L \leqslant N$ 的有限长序列 $x(n)$的 N 点 DFT 等于周期为 N 的周期序列 $x_p(n)$的 N 点 DFT,其中 $x_p(n)$是 $x(n)$的周期延拓,即

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \tag{7.2.7}$$

现在假设将周期序列 $x_p(n)$向右移位 k 个单位,得到另一个周期序列

$$x_p'(n) = x_p(n-k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-k-lN) \tag{7.2.8}$$

有限长序列

$$x'(n) = \begin{cases} x_p'(n), & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{7.2.9}$$

是原始序列 $x(n)$在圆周上的移位。这个关系如图 7.2.1 所示,其中 $N=4$。

通常,序列的圆周移位可以表示为序号对 N 求余,因此可以写成

$$\begin{aligned} x'(n) &= x(n-k, \text{ 对 } N \text{ 求余}) \\ &\equiv x((n-k))_N \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

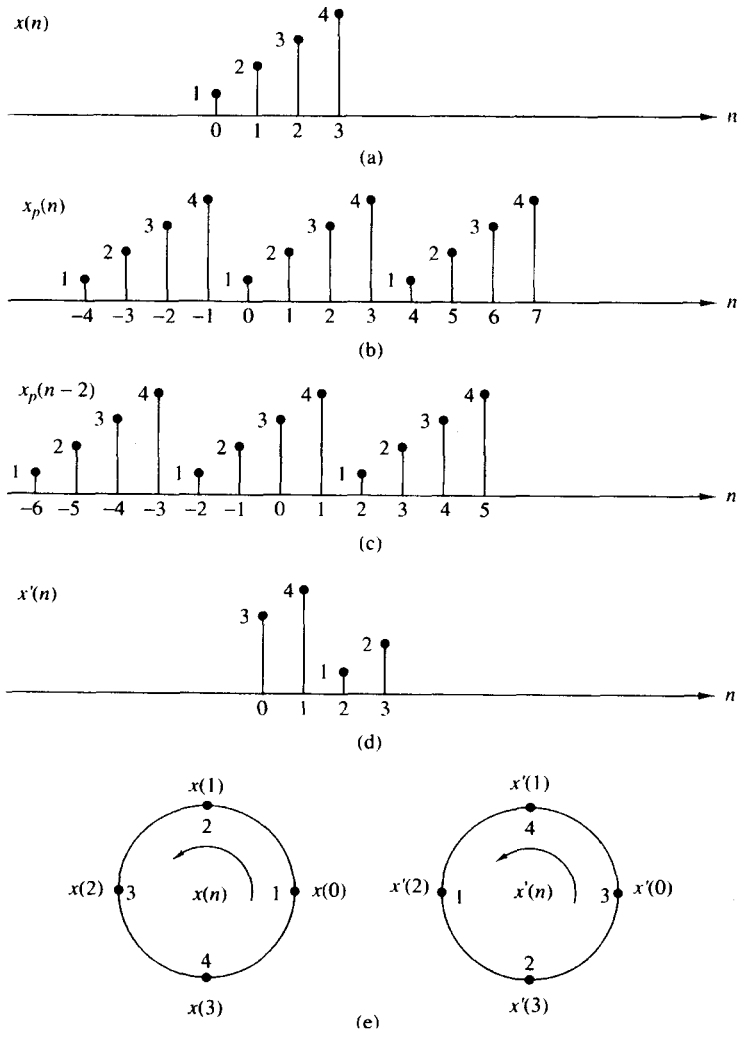


图 7.2.1　序列的圆周移位

例如，如果 $k=2, N=4$，那么

$$x'(n) = x((n-2))_4$$

这意味着

$$x'(0) = x((-2))_4 = x(2)$$

$$x'(1) = x((-1))_4 = x(3)$$

$$x'(2) = x((0))_4 = x(0)$$

$$x'(3) = x((1))_4 = x(1)$$

因此，$x'(n)$仅仅是 $x(n)$在圆周上移位了两个单位时间，其中选择逆时针方向为正方向。所以，得出结论，N 点序列的圆周移位等价于它的周期延拓的线性移位，反之亦然。

这个固有的周期特性源于该 N 点序列在圆周上的分布，并引出了偶对称、奇对称以及序列的时序反转等不同定义。

如果一个 N 点序列是关于圆周上的零点对称,那么它就称为圆周偶序列,这意味着

$$x(N-n)=x(n), \qquad 1\leqslant n\leqslant N-1 \tag{7.2.11}$$

如果一个 N 点序列是关于圆周上的零点反对称,那么它就称为圆周奇序列,这意味着

$$x(N-n)=-x(n), \qquad 1\leqslant n\leqslant N-1 \tag{7.2.12}$$

将圆周上的样本关于零点进行反转,就得到 N 点序列的时序反转。因此序列 $x((-n))_N$ 只不过是

$$x((-n))_N=x(N-n), \qquad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{7.2.13}$$

这种时序反转就等于在圆周上以顺时针方向画 $x(n)$。

与周期序列 $x_p(n)$有关的奇、偶序列的等价定义为

$$\begin{aligned}&\textbf{偶:}\quad x_p(n)=x_p(-n)=x_p(N-n)\\&\textbf{奇:}\quad x_p(n)=-x_p(-n)=-x_p(N-n)\end{aligned} \tag{7.2.14}$$

如果周期序列是复数值,那么得到

$$\begin{aligned}&\textbf{共轭偶:}\quad x_p(n)=x_p^*(N-n)\\&\textbf{共轭奇:}\quad x_p(n)=-x_p^*(N-n)\end{aligned} \tag{7.2.15}$$

这些关系说明序列 $x_p(n)$可以分解为

$$x_p(n)=x_{pe}(n)+x_{po}(n) \tag{7.2.16}$$

其中,

$$\begin{aligned}x_{pe}(n)&=\frac{1}{2}[x_p(n)+x_p^*(N-n)]\\x_{po}(n)&=\frac{1}{2}[x_p(n)-x_p^*(N-n)]\end{aligned} \tag{7.2.17}$$

DFT 的对称性。应用前面傅里叶变换的方法,可以得出 DFT 的对称特性。假设一个 N 点序列 $x(n)$和它的 DFT 都是复数,则该序列可以表示为

$$x(n)=x_R(n)+\mathrm{j}x_I(n), \qquad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{7.2.18}$$

$$X(k)=X_R(k)+\mathrm{j}X_I(k), \qquad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{7.2.19}$$

将式(7.2.18)代入式(7.2.1)给出的 DFT 的表达式中,得出

$$X_R(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_R(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}+x_I(n)\sin\frac{2\pi kn}{N}\right] \tag{7.2.20}$$

$$X_I(k)=-\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_R(n)\sin\frac{2\pi kn}{N}-x_I(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}\right] \tag{7.2.21}$$

类似地,将式(7.2.19)代入式(7.2.2)给出的 IDFT 表达式中,得出

$$x_R(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X_R(k)\cos\frac{2\pi kn}{N}-X_I(k)\sin\frac{2\pi kn}{N}\right] \tag{7.2.22}$$

$$x_I(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X_R(k)\sin\frac{2\pi kn}{N}+X_I(k)\cos\frac{2\pi kn}{N}\right] \tag{7.2.23}$$

实值序列。如果序列 $x(n)$是实数,那么从式(7.2.1)可以直接得出

$$X(N-k)=X^*(k)=X(-k) \tag{7.2.24}$$

因此，$|X(N-k)=|X(k)|$并且$\angle X(N-k)=-\angle X(k)$，此外 $x_I(n)=0$。因此，$x(n)$可由式(7.2.22)确定，该式也是 IDFT 的另一种形式。

实值偶序列。如果 $x(n)$是实值且是偶数，即

$$x(n)=x(N-n), \qquad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

那么由式(7.2.21)算出的 $X_I(k)=0$。故 DFT 简化为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}, \qquad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{7.2.25}$$

它本身就是实值偶数。此外，因为 $X_I(k)=0$，所以 IDFT 简化为

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\cos\frac{2\pi kn}{N}, \qquad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{7.2.26}$$

实值奇序列。如果 $x(n)$是实值且是奇数，即

$$x(n)=-x(N-n), \qquad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

那么由式(7.2.20)算出的 $X_R(k)=0$。故

$$X(k)=-\mathrm{j}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\sin\frac{2\pi kn}{N}, \qquad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{7.2.27}$$

它是纯虚数且是奇数。因为 $X_R(k)=0$，所以 IDFT 简化为

$$x(n)=\mathrm{j}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sin\frac{2\pi kn}{N}, \qquad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{7.2.28}$$

纯虚数序列。在这种情况下，$x(n)=\mathrm{j}x_I(n)$。因此，式(7.2.20)和式(7.2.21)简化为

$$X_R(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_I(n)\sin\frac{2\pi kn}{N} \tag{7.2.29}$$

$$X_I(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_I(n)\cos\frac{2\pi kn}{N} \tag{7.2.30}$$

我们注意到，$X_R(k)$是奇数，$X_I(k)$是偶数。

如果 $x_I(n)$是奇数，那么 $X_I(k)=0$，因而 $X(k)$是纯实数。另一方面，如果 $x_I(n)$是偶数，那么 $X_R(k)=0$，因而 $X(k)$是纯虚数。

上述的对称特性可以总结如下：

$$\begin{array}{l} x(n)=x_R^e(n)+x_R^o(n)+\mathrm{j}x_I^e(n)+\mathrm{j}x_I^o(n) \\ \qquad\quad\updownarrow \qquad\quad\searrow\swarrow \qquad\quad\updownarrow \\ X(k)=X_R^e(k)+X_R^o(k)+\mathrm{j}X_I^e(k)+\mathrm{j}X_I^o(k) \end{array} \tag{7.2.31}$$

DFT 的所有对称特性都可以很容易地从式(7.2.31)进行推导。例如，序列

$$x_{pe}(n)=\tfrac{1}{2}[x_p(n)+x_p^*(N-n)]$$

的 DFT 为

$$X_R(k) = X_R^e(k) + X_R^o(k)$$

DFT的对称特性总结于表7.1。对一些特殊序列的DFT,我们利用这些对称特性以探索有效的计算方法,这将在本章的最后进行讨论。

表7.1 DFT的对称特性

N点序列$x(n)$, $0 \leqslant n \leqslant N-1$	N点DFT
$x(n)$	$X(k)$
$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
$x^*(N-n)$	$X^*(k)$
$x_R(n)$	$X_{ce}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$
$\mathrm{j}X_I(n)$	$X_{co}(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)]$
$x_{ce}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$	$X_R(k)$
$x_{co}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$	$\mathrm{j}X_I(k)$
实信号	
任何实信号	$X(k) = X^*(N-k)$
$x(n)$	$X_R(k) = X_R(N-k)$
	$X_I(k) = -X_I(N-k)$
	$\lvert X(k)\rvert = \lvert X(N-k)\rvert$
	$\angle X(k) = -\angle X(N-k)$
$x_{ce}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(N-n)]$	$X_R(k)$
$x_{co}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(N-n)]$	$\mathrm{j}X_I(k)$

7.2.2 两个DFT的乘法和圆周卷积

假设有两个长为N的有限长序列$x_1(n)$和$x_2(n)$,它们的N点DFT分别为

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{7.2.32}$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{7.2.33}$$

如果把这两个DFT乘在一起,那么结果也是一个DFT,比如说$X_3(k)$,它是长为N的序列$x_3(n)$的DFT。现在让我们来找出$x_3(n)$和序列$x_1(n)$,$x_2(n)$之间的关系。

已知

$$X_3(k) = X_1(k)X_2(k), \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{7.2.34}$$

$\{X_3(k)\}$的IDFT为

$$\begin{aligned} x_3(m) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_3(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi km/N} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1(k)X_2(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi km/N} \end{aligned} \tag{7.2.35}$$

将式(7.2.32)和式(7.2.33)中的DFT表达式代入式(7.2.35)中的$X_1(k)$和$X_2(k)$,得出

$$x_3(m)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}\right]\left[\sum_{l=0}^{N-1}x_2(l)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kl/N}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi km/N}$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)\sum_{l=0}^{N-1}x_2(l)\left[\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k(m-n-l)/N}\right] \tag{7.2.36}$$

式(7.2.36)中方括号内的求和的形式为

$$\sum_{k=0}^{N-1}a^k=\begin{cases}N, & a=1\\ \dfrac{1-a^N}{1-a}, & a\neq 1\end{cases} \tag{7.2.37}$$

其中，a 定义为

$$a=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(m-n-l)/N}$$

我们看到，当 $m-n-l$ 是 N 的倍数时，$a=1$。另一方面，对任何 $a\neq 0$ 的值，$a^N=1$。因此，式(7.2.37)简化为

$$\sum_{k=0}^{N-1}a^k=\begin{cases}N, & l=m-n+pN=((m-n))_N,\quad p\text{为整数}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{7.2.38}$$

如果将式(7.2.38)中的结果代入式(7.2.36)，那么就得到我们想要的 $x_3(m)$的表达式，其形式为

$$x_3(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)x_2((m-n))_N,\qquad m=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.2.39}$$

表达式(7.2.39)是一个卷积和的形式。然而，这并不是第 2 章介绍的普通线性卷积。普通卷积将线性系统的输出序列 $y(n)$与输入序列 $x(n)$和冲激响应 $h(n)$联系起来了。而式(7.2.39)中的卷积中包含了序号$((m-n))_N$，称为圆周卷积。因此得出结论，两个序列 DFT 的乘积等于这两个序列在时域上的圆周卷积。

下面的例子说明了包含圆周卷积的运算。

例 7.2.1　对下面的两个序列进行圆周卷积：

$$x_1(n)=\{\underset{\uparrow}{2},1,2,1\}$$

$$x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$$

解：每个序列包含 4 个非零点。为了画出圆周卷积运算图，就需要在圆周上以点的形式标出每个序列。图 7.2.2(a)画出了序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$，注意序列是以逆时针方向画在圆周上的，这在旋转序列时就建立了一个相对于其他序列的参考方向。

现在，按式(7.2.39)计算 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的圆周卷积，就得到了 $x_3(m)$。先从 $m=0$ 开始，

$$x_3(0)=\sum_{n=0}^{3}x_1(n)x_2((-n))N$$

$x_2((-n))_4$ 只是反转的序列 $x_2(n)$，图 7.2.2(b)在圆周上画出了它的图形。换言之，反转序列仅仅是以顺时针方向画出 $x_2(n)$。

将 $x_1(n)$与 $x_2((-n))_4$ 进行点对点相乘，就得到了乘积序列，它也画在图 7.2.2(b)中。最后，将乘积序列上各点的值相加，就得出

$$x_3(0)=14$$

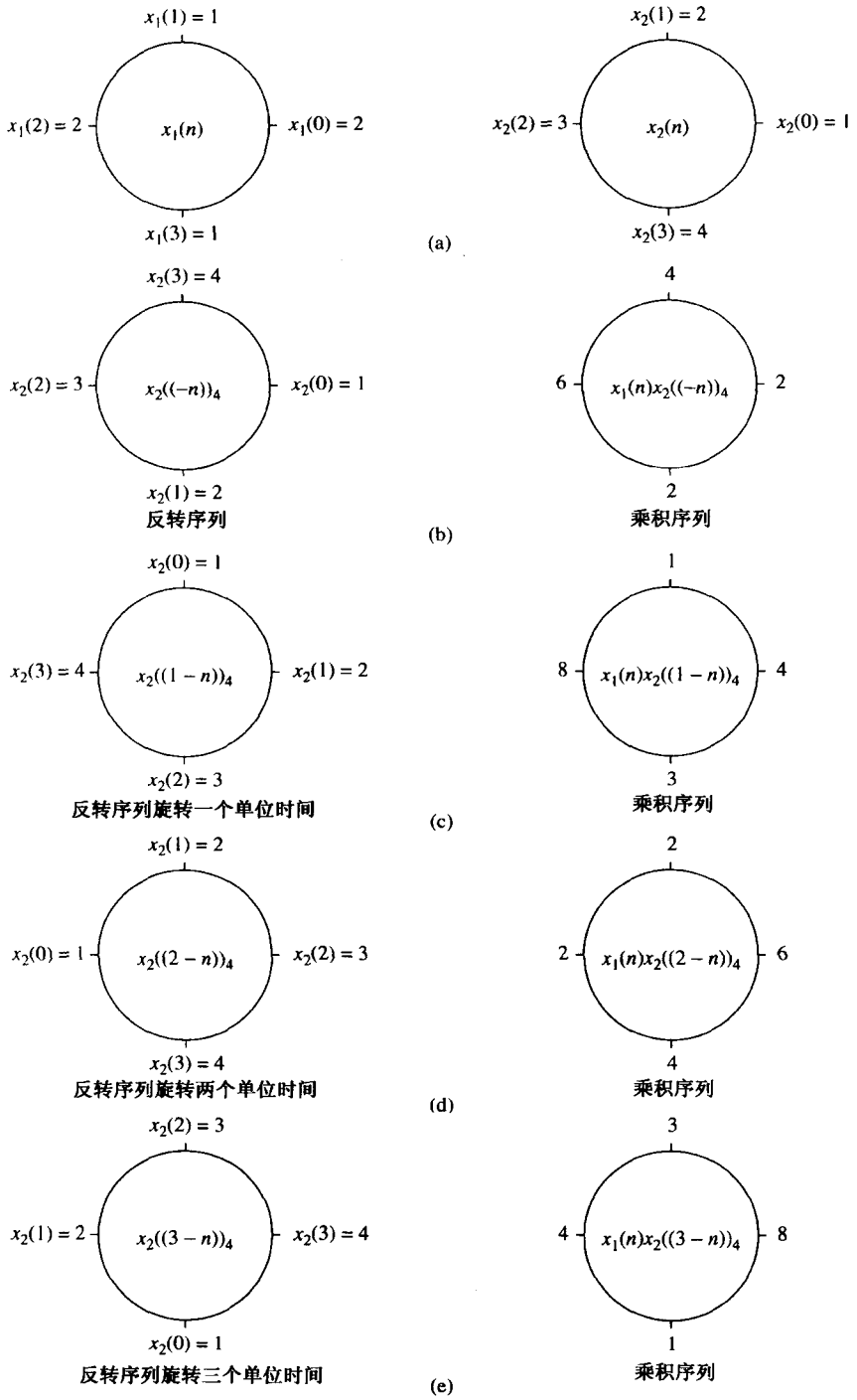


图 7.2.2 两个序列的圆周卷积

对于 $m=1$,

$$x_3(1)=\sum_{n=0}^{3}x_1(n)x_2((1-n))_4$$

很容易验证，$x_2((1-n))_4$ 仅仅是序列 $x_2((-n))_4$ 在圆周上逆时针旋转一个单位时间，如图 7.2.2(c)所示。这个旋转序列与 $x_1(n)$相乘就得出乘积序列，同样也画在 7.2.2(c)中。最后，将乘积序列上各点的值相加，就得出 $x_3(1)$。故

$$x_3(1)=16$$

对于 $m=2$，

$$x_3(2)=\sum_{n=0}^{3}x_1(n)x_2((2-n))_4$$

现在 $x_2((2-n))_4$ 是图 7.2.2(b)中的反转序列在圆周上以逆时针方向旋转两个单位时间后得到的。图 7.2.2(d)画出了旋转后的序列及乘积序列 $x_1(n)x_2((2-n))_4$。通过将乘积序列上四项相加，就得出

$$x_3(2)=14$$

对于 $m=3$，

$$x_3(3)=\sum_{n=0}^{3}x_1(n)x_2((3-n))_4$$

反转序列 $x_2((-n))_4$ 现在要旋转三个单位时间才能得出 $x_2((3-n))_4$，将它与 $x_1(n)$相乘，就得出乘积序列，如图 7.2.2(e)所示。乘积序列的和为

$$x_3(3)=16$$

我们看到，如果继续上面的计算，超过了 $m=3$，那么我们只要重复上面得出的四个值的序列。因此，两个序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的圆周卷积得到的序列为

$$x_3(n)=\{\underset{\uparrow}{14},16,14,16\}$$

从上面的例子可以看出，圆周卷积基本上类似于第 2 章介绍的普通线性卷积，包括相同的四个步骤：反转(时域对换)序列；移位反转序列；将两个序列相乘得出乘积序列；最后将乘积序列的各值相加。这两种卷积的主要的不同在于，圆周卷积在反转和移位操作(旋转)时，是在圆周上进行的，这需要将序号对 N 求余，而线性卷积中没有对 N 进行求余运算。

读者可以很容易证明，先前介绍的两个序列中任何一个反转及旋转并不会改变圆周卷积的结果。因此，

$$x_3(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n)x_1((m-n))_N,\qquad m=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.2.40}$$

下面的例子用来说明利用 DFT 和 IDFT 计算 $x_3(n)$。

例 7.2.2　通过 DFT 和 IDFT，计算例 7.2.1 中的序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的对应圆周卷积序列 $x_3(n)$。

解：首先计算序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的 DFT。$x_1(n)$的四点 DFT 为

$$X_1(k)=\sum_{n=0}^{3}x_1(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/4},\qquad k=0,1,2,3$$

$$=2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/2}+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi k/2}$$

因此，

$$X_1(0)=6,\qquad X_1(1)=0,\qquad X_1(2)=2,\qquad X_1(3)=0$$

$x_2(n)$的 DFT 为

$$X_2(k)=\sum_{n=0}^{3}x_2(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/4},\qquad k=0,1,2,3$$

$$=1+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/2}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k}+4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi k/2}$$

因此,

$$X_2(0)=10,\qquad X_2(1)=-2+\mathrm{j}2,\qquad X_2(2)=-2,\qquad X_2(3)=-2-\mathrm{j}2$$

将这两个 DFT 相乘,得到乘积为

$$X_3(k)=X_1(k)X_2(k)$$

或等价地,

$$X_3(0)=60,\qquad X_3(1)=0,\qquad X_3(2)=-4,\qquad X_3(3)=0$$

现在,$X_3(k)$的 IDFT 为

$$x_3(n)=\sum_{k=0}^{3}X_3(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/4},\qquad n=0,1,2,3$$

$$=\frac{1}{4}(60-4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi n})$$

因此,

$$x_3(0)=14,\qquad x_3(1)=16,\qquad x_3(2)=14,\qquad x_3(3)=16$$

这也是例 7.2.1 中圆周卷积得到的结果。

下面在结束这一节之前,正式介绍 DFT 的一个重要性质。

圆周卷积。如果

$$x_1(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X_1(k)$$

并且

$$x_2(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X_2(k)$$

那么

$$x_1(n)\textcircled{N}x_2(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X_1(k)X_2(k)\tag{7.2.41}$$

其中 $x_1(n)\textcircled{N}x_2(n)$表示序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的圆周卷积。

7.2.3 DFT 的其他性质

序列时域反转。如果

$$x(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X(k)$$

那么

$$x((-n))_N=x(N-n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X((-k))_N=X(N-k)\tag{7.2.42}$$

因此,N 点序列的时域反转等价于 DFT 值的反转。图 7.2.3 画出了序列 $x(n)$的时域反转。

证明:由式(7.2.1)的 DFT 定义,得出

$$\text{DFT}\{x(N-n)\}=\sum_{n=0}^{N-1}x(N-n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}$$

如果将求和变量从 n 变为 $m=N-n$，那么

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}\{x(N-n)\}&=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k(N-m)/N}\\&=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi km/N}\\&=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m(N-k)/N}=X(N-k)\end{aligned}$$

我们注意到，$X(N-k)=X((-k))_N$，$0\leqslant k\leqslant N-1$。

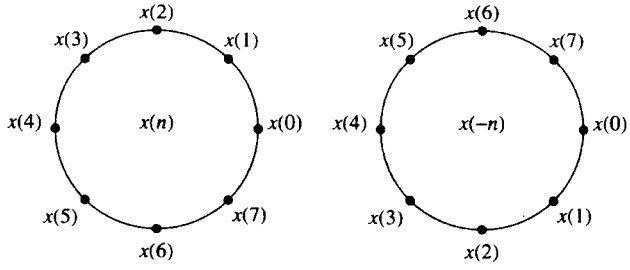


图 7.2.3　序列的时域反转

序列的圆周时域移位。如果

$$x(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X(k)$$

那么

$$x((n-l))_N\overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kl/N}\tag{7.2.43}$$

证明：由 DFT 的定义，得出

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}\{x((n-l))_N\}&=\sum_{n=0}^{N-1}x((n-l))_N\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}\\&=\sum_{n=0}^{l-1}x((n-l))_N\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}\\&\quad+\sum_{n=l}^{N-1}x(n-l)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi kn/N}\end{aligned}$$

但是 $x((n-l))_N=x(N-l+n)$，所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{l-1}x((n-l))_N\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}&=\sum_{n=0}^{l-1}x(N-l+n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}\\&=\sum_{m=N-l}^{N-1}x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k(m+l)/N}\end{aligned}$$

此外,

$$\sum_{n=l}^{N-1} x(n-l)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N} = \sum_{m=0}^{N-1-l} x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k(m+l)/N}$$

因而

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}\{x((n-l))\} &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k(m+l)/N} \\ &= X(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kl/N}\end{aligned}$$

圆周频域移位。如果

$$x(n) \overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

那么

$$x(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ln/N} \overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X((k-l))_N \tag{7.2.44}$$

因此,序列 $x(n)$与复指数序列 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ln/N}$乘积就等于 DFT 在圆周频域移位 l 个单位,这是由于圆周时域移位特性,它的证明与圆周时域移位特性的证明类似。

复共轭特性。如果

$$x(n) \overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

那么

$$x^*(n) \overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X^*((-k))_N = X^*(N-k) \tag{7.2.45}$$

这个特性留给读者作为练习来证明。$X^*(k)$的 IDFT 为

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N} = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k(N-n)/N}\right]$$

因此,

$$x^*((-n))_N = x^*(N-n) \overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X^*(k) \tag{7.2.46}$$

圆周相关性。通常,对于复值序列 $x(n)$和 $y(n)$,如果

$$x(n) \overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

并且

$$y(n) \overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} Y(k)$$

那么

$$\tilde{r}_{xy}(l) \overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} \tilde{R}_{xy}(k) = X(k)Y^*(k) \tag{7.2.47}$$

其中,$\tilde{r}_{xy}(l)$是(非归一化)圆周相关序列,定义为

$$\tilde{r}xy(l) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-l))N$$

证明：将 $\tilde{r}_{xy}(l)$写成 $x(n)$和 $y^*(-n)$的圆周卷积形式，即

$$\tilde{r}_{xy}(l) = x(l) \textcircled{N} y^*(-l)$$

于是，利用式(7.2.41)和式(7.2.46)中的特性，得出 $\tilde{r}_{xy}(l)$的 N 点 DFT 为

$$\tilde{R}_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$$

对于 $y(n) = x(n)$的特殊情况，$x(n)$对应的圆周相关表达式为

$$\tilde{r}_{xx}(l) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} \tilde{R}_{xx}(k) = |X(k)|^2 \tag{7.2.48}$$

两个序列的乘积。如果

$$x_1(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_1(k)$$

并且

$$x_2(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_2(k)$$

那么

$$x_1(n)x_2(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{N} X_1(k) \textcircled{N} X_2(k) \tag{7.2.49}$$

这个性质和式(7.2.41)是圆周卷积的双重特性。它的证明非常简单，只要交换两个序列的圆周卷积表达式的时间和频率，即可得证。

帕塞瓦定理。通常对于复值序列 $x(n)$和 $y(n)$，如果

$$x(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

并且

$$y(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} Y(k)$$

那么

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \tag{7.2.50}$$

证明：从式(7.2.47)的圆周相关特性，可以直接得到该性质

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \tilde{r}_{xy}(0)$$

并且

$$\tilde{r}_{xy}(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{R}_{xy}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kl/N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kl/N}$$

因此，通过计算 $l = 0$ 处的 IDFT 值，就可以得出式(7.2.50)。

表达式(7.2.50)就是帕塞瓦定理的一般形式。对于 $y(n) = x(n)$的特殊情况，式(7.2.50)简化为

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2 \tag{7.2.51}$$

这个表达式将有限长序列 $x(n)$的能量以频率分量$|X(k)|$的形式进行表示。

上面介绍的 DFT性质总结于表 7.2。

表 7.2 DFT 的性质

性质	时域	频域
符号	$x(n), y(n)$	$X(k), Y(k)$
周期性	$x(n)=x(n+N)$	$X(k)=X(k+N)$
线性	$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k)+a_2X_2(k)$
时域反转	$x(N-n)$	$X(N-k)$
圆周时域移位	$x((n-l))_N$	$X(k)e^{-j2\pi kl/N}$
圆周频域移位	$x(n)e^{j2\pi ln/N}$	$X((k-l))_N$
复共轭	$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
圆周卷积	$x_1(n)\textcircled{N}x_2(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
圆周相关	$x(n)\textcircled{N}y^*(-n)$	$X(k)Y^*(k)$
两序列的乘积	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N}X_1(k)\textcircled{N}X_2(k)$
帕塞瓦定理	$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^*(n)$	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)Y^*(k)$

7.3 基于 DFT 的线性滤波算法

因为 DFT在频域给出了有限长序列的离散频率表达式,所以可以利用它作为线性系统分析,特别是线性滤波的有力计算工具。我们已经建立了这样的概念,一个频率响应为 $H(\omega)$的系统,当受到频谱为 $X(\omega)$的输入信号激励时,输出的频谱为 $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$。通过傅里叶逆变换,就可以从频谱 $Y(\omega)$求解出输出序列 $y(n)$。这种频域计算方法存在的问题是 $X(\omega)$、$H(\omega)$以及 $Y(\omega)$是连续变量 ω 的函数。因此,这种计算不能在数字计算机上完成,这是因为计算机只能存储和计算离散频率点上的量化值。

另一方面,DFT确实适用于在数字计算机上进行计算。在下面的讨论中,我们将讲述如何利用 DFT在频域进行线性滤波。特别地,这种计算程序可以视为另一种时域卷积。实际上,基于 DFT的频域方法比时域卷积更加有效,这是因为存在计算 DFT的有效算法。我们将在第 8 章介绍这些算法,这些算法统称为快速傅里叶变换(FFT)算法。

7.3.1 在线性滤波中使用 DFT

在前一节中,我们证明了两个 DFT的乘积等于对应时域序列在圆周上的卷积。可惜的是,如果要计算线性滤波器对于给定输入序列的输出,那么圆周卷积并没有什么作用。在这种情况下,就要寻找一种等同于线性卷积的频域方法。

假如一个长为 L 的有限长序列$x(n)$,激励于一个长为 M 的 FIR 滤波器。不失一般性,令

$$x(n)=0,\qquad n<0\text{和}n\geqslant L$$

$$h(n)=0,\qquad n<0\text{和}n\geqslant M$$

其中,$h(n)$是 FIR 滤波器的冲激响应。

FIR 滤波器的输出序列 $y(n)$在时域可以表示为 $x(n)$和 $h(n)$的卷积，即

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M-1}h(k)x(n-k) \tag{7.3.1}$$

因为 $h(n)$和 $x(n)$是有限长序列，所以它们的卷积也是有限长的。实际上，$y(n)$的长度为 $L+M-1$。

等价于式(7.3.1)的频域表达式为

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega) \tag{7.3.2}$$

如果序列 $y(n)$能通过其频谱 $Y(\omega)$的一组离散频率处的样本在频域进行唯一表示，那么不同的样本数目必须等于或大于 $L+M-1$。因此，要在频域表示$\{y(n)\}$，需要 $N\geqslant L+M-1$ 点的 DFT。

现在，如果

$$\begin{aligned}Y(k)&\equiv Y(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}, &k=0,1,\cdots,N-1\\&=X(\omega)H(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}, &k=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}$$

那么

$$Y(k)=X(k)H(k), \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{7.3.3}$$

其中，$\{X(k)\}$和$\{H(k)\}$分别是对应序列 $x(n)$和 $h(n)$的 N 点 DFT。因为序列 $x(n)$和 $h(n)$的长度小于 N，所以只要在这些序列后面补零以使得长度增加到 N。因为序列是周期性的，所以序列的长度增加并不会改变它们的连续谱 $X(\omega)$和 $H(\omega)$。另外，通过在 N 个等间隔的频率点采样频谱(计算 N 点 DFT)，已经增加了这些序列的频域表示的样本数量，超过了要求的最小数目(分别为 L 或 M)。

因为输出序列 $y(n)$的 $N(N=L+M-1)$点 DFT 足以在频域表示 $y(n)$，所以根据式(7.3.3)将 N 点 DFT 变换 $X(k)$和 $H(k)$相乘，然后再计算 N 点 IDFT，就必定得出序列$\{y(n)\}$。反过来，这意味着 $x(n)$和 $h(n)$的 N 点圆周卷积一定等于 $x(n)$和 $h(n)$的线性卷积。换言之，将序列 $x(n)$和 $h(n)$的长度增加到 N 点(通过补零)，然后计算它们的圆周卷积，得到的结果和计算线性卷积相同。因此，通过补零，DFT 可以用来进行线性滤波。

下面的例子说明了在线性滤波中使用 DFT 的方法。

例 7.3.1　已知一个 FIR 滤波器的冲激响应为

$$h(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3\}$$

利用 DFT 和 IDFT，来计算它对输入序列

$$x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,2,1\}$$

的响应。

解：输入序列的长度为 $L=4$，冲激响应的长度为 $M=3$，这两个序列的线性卷积产生了一个长度为 $N=6$ 的序列。因此，DFT 的大小至少为 6。

为简化起见，我们计算 8 点 DFT。同样需要指出的是，对于长度 N 为 2 的幂的序列，DFT 的有效计算是通过快速傅里叶变换算法实现的。因此，$x(n)$的 8 点 DFT 为

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{n=0}^{7}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/8}\\&=1+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/4}+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi k/4}, \qquad k=0,1,\cdots,7\end{aligned}$$

计算得出

$$X(0)=6,\qquad X(1)=\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\mathrm{j}\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$X(2)=-1-\mathrm{j},\qquad X(3)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$X(4)=0,\qquad X(5)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}-\mathrm{j}\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$X(6)=-1+\mathrm{j},\qquad X(7)=\frac{2+\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$h(n)$的 8 点 DFT 为

$$\begin{aligned}H(k)&=\sum_{n=0}^{7}h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/8}\\&=1+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/4}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/2}\end{aligned}$$

故

$$H(0)=6,\qquad H(1)=1+\sqrt{2}-\mathrm{j}\left(3+\sqrt{2}\right),\qquad H(2)=-2-\mathrm{j}2$$

$$H(3)=1-\sqrt{2}+\mathrm{j}\left(3-\sqrt{2}\right),\qquad H(4)=2$$

$$H(5)=1-\sqrt{2}-\mathrm{j}\left(3-\sqrt{2}\right),\qquad H(6)=-2+\mathrm{j}2$$

$$H(7)=1+\sqrt{2}+\mathrm{j}\left(3+\sqrt{2}\right)$$

这两个 DFT 相乘就得到 $Y(k)$,即

$$Y(0)=36,\quad Y(1)=-14.07-\mathrm{j}17.48,\quad Y(2)=\mathrm{j}4,\quad Y(3)=0.07+\mathrm{j}0.515$$

$$Y(4)=0,\quad Y(5)=0.07-\mathrm{j}0.515,\quad Y(6)=-\mathrm{j}4,\quad Y(7)=-14.07+\mathrm{j}17.48$$

最后,8 点 IDFT 为

$$y(n)=\sum_{k=0}^{7}Y(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/8},\qquad n=0,1,\cdots,7$$

计算得出结果

$$y(n)=\{\underset{\uparrow}{1},4,9,11,8,3,0,0\}$$

我们看到,$y(n)$的前 6 个值构成了我们想求解的一组输出值,最后两个值为零,是由于我们使用了 8 点 DFT 和 IDFT。实际上,需要的最小点数为 6。

虽然两个 DFT 的乘积对应于时域的圆周卷积,但是我们已经注意到,在序列 $x(n)$和 $h(n)$后面补上足够数目的零,就使得圆周卷积得到的输出序列与线性卷积相同。在例 7.3.1 中的线性滤波问题的情况下,很容易证明,序列

$$h(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,0,0,0\}\tag{7.3.4}$$

$$x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,2,1,0,0\}\tag{7.3.5}$$

的 6 点圆周卷积的输出序列为

$$y(n)=\{\underset{\uparrow}{1},4,9,11,8,3\} \tag{7.3.6}$$

这和线性卷积得到的序列相同。

当 DFT 的长度小于 $L+M-1$ 时，会导致时域出现混叠，对我们来说，理解这一点非常重要。下面的例子将集中说明混叠问题。

例 7.3.2　利用 4 点 DFT，求解例 7.3.1 中的序列 $y(n)$。

解：$h(n)$的 4 点 DFT 为

$$H(k)=\sum_{n=0}^{3}h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/4}$$

$$H(k)=1+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/2}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi},\qquad k=0,1,2,3$$

因此，

$$H(0)=6,\qquad H(1)=-2-\mathrm{j}2,\qquad H(2)=2,\qquad H(3)=-2+\mathrm{j}2$$

$x(n)$的 4 点 DFT 为

$$X(k)=1+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/2}+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k}+1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi k/2},\qquad k=0,1,2,3$$

因此，

$$X(0)=6,\qquad X(1)=-1-\mathrm{j},\qquad X(2)=0,\qquad X(3)=-1+\mathrm{j}$$

这两个 4 点 DFT 的乘积为

$$\hat{Y}(0)=36,\qquad \hat{Y}(1)=\mathrm{j}4,\qquad \hat{Y}(2)=0,\qquad \hat{Y}(3)=-\mathrm{j}4$$

4 点 IDFT 得出

$$\hat{y}(n)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\hat{Y}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/4},\qquad n=0,1,2,3$$

$$=\frac{1}{4}(36+\mathrm{j}4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi n/2}-\mathrm{j}4\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\pi n/2})$$

所以，

$$\hat{y}(n)=\{\underset{\uparrow}{9},7,9,11\}$$

读者可以验证 $h(n)$和 $x(n)$的 4 点圆周卷积会得到相同的序列 $\hat{y}(n)$。

如果将利用 4 点 DFT 得到的结果 $\hat{y}(n)$和利用 8 点(或 6 点)DFT 得到的序列 $y(n)$进行比较，那么就会发现 7.2.2 节推导的时域混叠效应非常明显。特别地，可以看出 $y(4)$混叠到 $y(0)$中，得到

$$\hat{y}(0)=y(0)+y(4)=9$$

类似地，$y(5)$混叠到 $y(1)$中，得到

$$\hat{y}(1)=y(1)+y(5)=7$$

因为当 $n\geqslant 6$ 时 $y(n)=0$，所以其他序列都没有混叠影响。因此得到

$$\hat{y}(2)=y(2)=9$$

$$\hat{y}(3)=y(3)=11$$

所以，$\hat{y}(n)$只有前两点受到混叠的破坏，[即 $\hat{y}(0)\neq y(0)$且 $\hat{y}(1)\neq y(1)$]。在下一节关于长序列滤波的讨论中，这种观察将具有重要的作用。

7.3.2 长数据序列滤波

在信号线性滤波等实际应用中,输入序列 $x(n)$通常是一个很长的序列。特别是在涉及到信号监测和分析的实时信号处理应用中,这种情况经常出现。

因为通过 DFT 进行线性滤波要对大量数据进行运算,然而由于数字计算机存储容量的限制,必须限制数据块的大小,所以一个长输入信号序列在处理之前,必须分割成固定尺寸的数据块。因为滤波是线性的,通过 DFT,连续的数据块一次只处理一个,输出数据块组合在一起就形成了总输出信号序列。

我们现在来介绍利用 DFT 对长序列进行逐块地线性 FIR 滤波的两种方法,输入序列被分割成块,每个块经过 DFT 和 IDFT 处理,产生一个输出数据块。输出块组合在一起就形成了总输出序列,这与长序列进行时域卷积得到的序列相同。

这两种方法称为重叠保留法和重叠相加算法。对于这两种方法,我们均假设 FIR 滤波器的长度为 M。输入数据序列分割成 L 点的数据块,不失一般性,假设 $L >> M$。

重叠保留法。对于这种方法,输入数据块的大小为 $N = L + M - 1$,DFT 和 IDFT 的长度为 N。每个数据块包含 $M-1$ 个前一数据块的数据点,后接 L 个新数据点以组成一个长为 $N = L + M - 1$ 的数据序列。对每个数据块计算 N 点 DFT。通过补 $L-1$ 个零以增加 FIR 滤波器的冲激响应长度,序列的 N 点 DFT 是一次性计算并存储。对于第 m 个数据块,将两个 N 点的 DFT 变换$\{H(k)\}$和$\{X_m(k)\}$相乘,得出

$$\hat{Y}_m(k) = H(k)X_m(k), \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{7.3.7}$$

于是 N 点 IDFT 得到的结果为

$$\hat{Y}_m(n) = \{\hat{y}_m(0)\hat{y}_m(1)\cdots\hat{y}_m(M-1)\hat{y}_m(M)\cdots\hat{y}_m(N-1)\} \tag{7.3.8}$$

因为数据记录的长度为 N,$y_m(n)$的前 $M-1$ 个点因混叠遭到破坏,所以必须去除。$y_m(n)$的后 L 个点与线性卷积得到的结果完全一样,这 L 点序列为

$$\hat{y}_m(n) = y_m(n), n = M, M+1, \cdots, N-1 \tag{7.3.9}$$

为了避免由于混叠而丢失数据,每个数据记录的后 $M-1$ 点被保留起来。正如上面所述,这些点将成为后续记录的前 $M-1$ 个数据点。在开始处理时,第 1 个记录的前 $M-1$ 个点被置为零。因此,序列的数据块为

$$x_1(n) = \{\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{M-1\text{个点}}, x(0), x(1), \cdots, x(L-1)\} \tag{7.3.10}$$

$$x_2(n) = \{\underbrace{x(L-M+1), \cdots, x(L-1)}_{\text{来自}x_1(n)\text{的}M-1\text{个数据点}}, \underbrace{x(L), \cdots, x(2L-1)}_{L\text{个新数据点}}\} \tag{7.3.11}$$

$$x_3(n) = \{\underbrace{x(2L-M+1), \cdots, x(2L-1)}_{\text{来自}x_2(n)\text{的}M-1\text{个数据点}}, \underbrace{x(2L), \cdots, x(3L-1)}_{L\text{个新数据点}}\} \tag{7.3.12}$$

并且依次类推。由式(7.3.8)给出的 IDFT,就可得到最终的数据序列,其中前 $M-1$ 点因为混叠需要丢弃,保留 L 点构成了期望的线性卷积的结果。图 7.3.1 以图形化方式说明了输入数据的分割及输出数据块的组合以形成输出序列。

重叠相加法。对于这种方法,输入数据块的大小为 L 点,DFT 和 IDFT 的长度为 $N = L + M - 1$。对每个数据块,补 $M-1$ 个零并计算 N 点 DFT。因此,数据块可以表示为

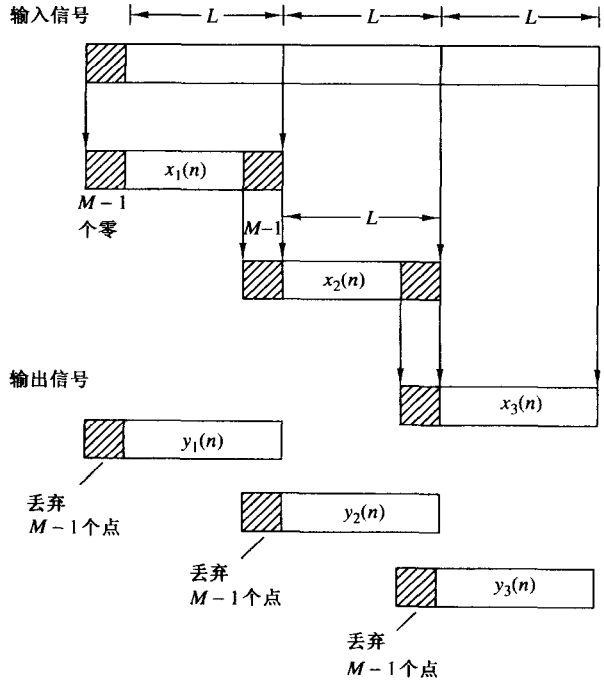


图 7.3.1　利用重叠保留法进行线性 FIR 滤波

$$x_1(n) = \{x(0), x(1), \cdots, x(L-1), \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{M-1\text{个零}}\} \tag{7.3.13}$$

$$x_2(n) = \{x(L), x(L+1), \cdots, x(2L-1), \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{M-1\text{个零}}\} \tag{7.3.14}$$

$$x_3(n) = \{x(2L), \cdots, x(3L-1), \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{M-1\text{个零}}\} \tag{7.3.15}$$

并且依次类推。两个 N 点 DFT 乘在一起就构成了

$$Y_m(k) = H(k)X_m(k), \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{7.3.16}$$

因为 DFT 和 IDFT 的长为 $N = L + M - 1$，并且通过对每个块补零以使序列长度增加到 N 点，所以 IDFT 得到的数据块的长度也是 N，而且不存在混叠。

因为每个数据块以 $M-1$ 个零作为结尾，所以每个输出块的后 $M-1$ 个点必须要重叠并加到随后数据块的前 $M-1$ 个点上。因此，这种方法称为重叠相加法。这种重叠和相加产生的输出序列为

$$\begin{aligned} y(n) = \{&y_1(0), y_1(1), \cdots, y_1(L-1), y_1(L) + y_2(0), y_1(L+1) \\ &+ y_2(1), \cdots, y_1(N-1) + y_2(M-1), y_2(M), \cdots\} \end{aligned} \tag{7.3.17}$$

图 7.3.2 以图形化方式说明了输入数据的块分割及输出数据块的组合以形成输出序列。

到目前为止，可能有读者会认为，在线性滤波中使用 DFT，不仅不是计算 FIR 滤波器输出的直接方法，而且可能计算量非常大，这是因为输入数据必须首先通过 DFT 转换到频域，然后乘以 FIR 滤波器的 DFT，最后再通过 IDFT 转回到时域。然而正相反，利用快速傅里叶变换算法，与 FIR 滤波器在时域直接实现相比，DFT 和 IDFT 只要很少的运算就可计算出输出序列。快速傅里叶变换算法将在第 8 章介绍。这种计算效率正是利用 DFT 来计算 FIR 滤波器输出的基本优势。

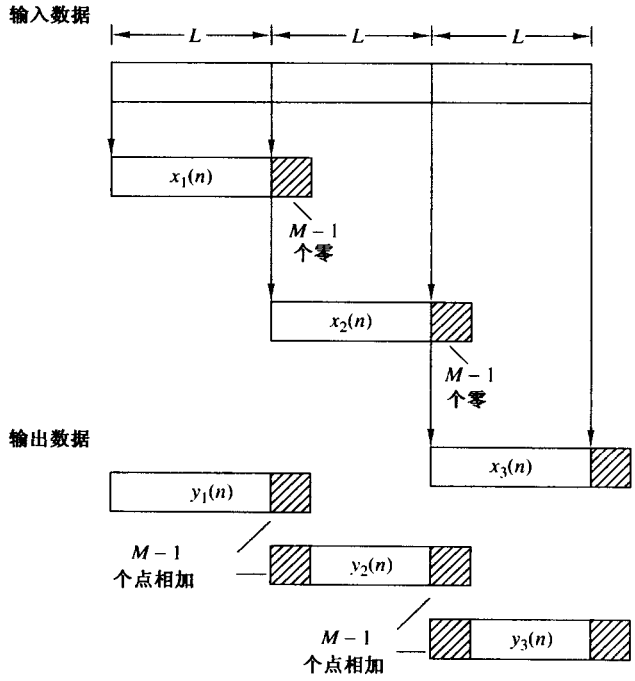


图 7.3.2 利用重叠相加法进行线性 FIR 滤波

7.4 利用 DFT 对信号进行频率分析

为了计算连续时间和离散时间信号的频谱,需要信号所有时间的值。然而实际上,我们观察到的信号只是有限长的。因此,从有限的数据记录,只能近似表达信号的频谱。在这一节中,我们将研究利用有限数据记录的 DFT 进行频率分析。

如果分析的信号是模拟信号,那么首先要将它通过一个抗混叠滤波器,然后以速率 $F_s \geqslant 2B$ 进行采样,其中 B 是滤波信号的带宽。因此,在采样信号中包含的最高频率为 $F_s/2$。最后,为了达到实际应用目的,我们要把信号的长度限制在时间段 $T_0 = LT$,其中 L 是样本数量,T 是采样间隔。在下面的讨论中,我们将看到,对信号的有限观察区间限制了频率分辨率,也就是说,使我们无法分辨频率间隔小于 $1/T_0 = 1/LT$ 的两个频率分量。

令 $\{x(n)\}$ 表示待分析的序列,将信号的长度限制为区间 $0 \leqslant n \leqslant L-1$ 上的 L 个样本,这相当于将 $\{x(n)\}$ 乘上了一个长为 L 的矩形窗 $w(n)$,即

$$\hat{x}(n) = x(n)w(n) \tag{7.4.1}$$

其中,

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant L-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{7.4.2}$$

现在假设序列 $x(n)$ 是由单正弦信号组成的,即

$$x(n) = \cos \omega_0 n \tag{7.4.3}$$

于是有限长序列 $x(n)$ 的傅里叶变换可以表示为

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2}[W(\omega - \omega_0) + W(\omega + \omega_0)] \tag{7.4.4}$$

其中，$W(\omega)$是窗序列的傅里叶变换，(对于矩形窗)表示为

$$W(\omega)=\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(L-1)/2} \tag{7.4.5}$$

为了计算 $\hat{X}(\omega)$，我们要利用 DFT。在序列$x(n)$后补 $N-L$ 个零，就可以计算截断(L 点)序列$\{x(n)\}$的 N 点 DFT。图 7.4.1 画出了 $L=25$，$N=2048$时的幅度谱 $|\hat{X}(k)|=|\hat{X}(\omega_k)|$，其中 $\omega_k=2\pi k/N, k=0,1,\cdots,N$。我们注意到，加窗频谱$\hat{X}(\omega)$并不是局限于单一频率，而是扩散到整个频率区间上。因此，聚积在一个单一频率处的原始信号序列$\{x(n)\}$的功率，经过窗的作用后，功率扩散到整个频率区间上了。我们称功率已经"泄漏"到整个频率区间。因而，这种对信号加窗带来的现象，称为泄漏。

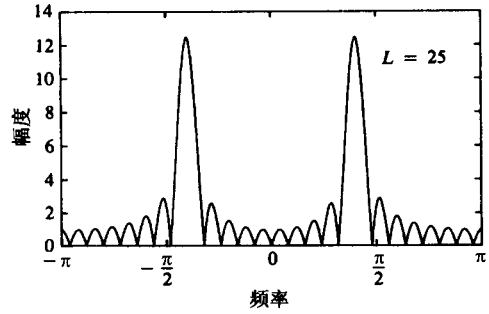


图 7.4.1　$L=25, N=2048$ 时的幅度谱，出现泄漏

加窗不仅由于泄漏的影响而使谱估计失真，而且它还会降低频谱分辨率。为了说明这个问题，我们现在来考虑一个包含两个频率分量的信号序列，

$$x(n)=\cos\omega_1 n+\cos\omega_2 n \tag{7.4.6}$$

当该序列被截断为区间 $0\leqslant n\leqslant L-1$ 上的 L 个样本时，加窗后的频谱为

$$\hat{X}(\omega)=\frac{1}{2}[W(\omega-\omega_1)+W(\omega-\omega_2)+W(\omega+\omega_1)+W(\omega+\omega_2)] \tag{7.4.7}$$

矩形窗序列的频谱 $W(\omega)$在 $\omega=2\pi/L$ 处存在第一个零点。现在假设$|\omega_1-\omega_2|<2\pi/L$，那么两个窗函数 $W(\omega-\omega_1)$和 $W(\omega-\omega_2)$就会重叠，因此，$x(n)$的两条谱线将无法区分。只有当$(\omega_1-\omega_2)>2\pi/L$ 时，我们才能看到频谱 $\hat{X}(\omega)$中分开的两瓣。因此，我们分辨不同频率谱线的能力受到窗口主瓣宽度的限制。对于序列

$$x(n)=\cos\omega_0 n+\cos\omega_1 n+\cos\omega_2 n \tag{7.4.8}$$

其中，$\omega_0=0.2\pi, \omega_1=0.22\pi, \omega_2=0.6\pi$。通过计算 DFT，图 7.4.2 画出它的幅度谱$|\hat{X}(\omega)|$。窗口的长度选择为 $L=25$，50 和 100。我们注意到，对于 $L=25$ 和 50，ω_0 和 ω_1 是不可分辨的，但对于 $L=100$，它们却是可分辨的。

为了降低泄漏，我们可以选择一个与矩形窗相比在频域上具有较低旁瓣的数据窗口 $w(n)$。然而，窗口 $W(\omega)$旁瓣的降低是以增加 $W(\omega)$主瓣宽度为代价的，因而会降低分辨率，这部分内容将在第 10 章详细介绍。为了说明这一点，我们现在来考虑汉宁窗，它定义为

$$w(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{L-1}n), & 0\leqslant n\leqslant L-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{7.4.9}$$

图 7.4.3 画出了式(7.4.4)给出的信号频谱经过式(7.4.9)的窗口后的幅度谱$|\hat{X}(\omega)|$。它的旁瓣与矩形窗相比明显减小了，但是它的主瓣宽度近似为矩形窗的两倍。图 7.4.4 画出了式(7.4.8)中信号加了汉宁窗后的频谱，其中 $L=50$，75 和 100。与矩形窗相比，旁瓣的降低与分辨率的下降是非常明显的。

对于一般信号序列$\{x(n)\}$，加窗序列 $x(n)$与原始序列 $x(n)$之间的频域关系由下面的卷积公式给出：

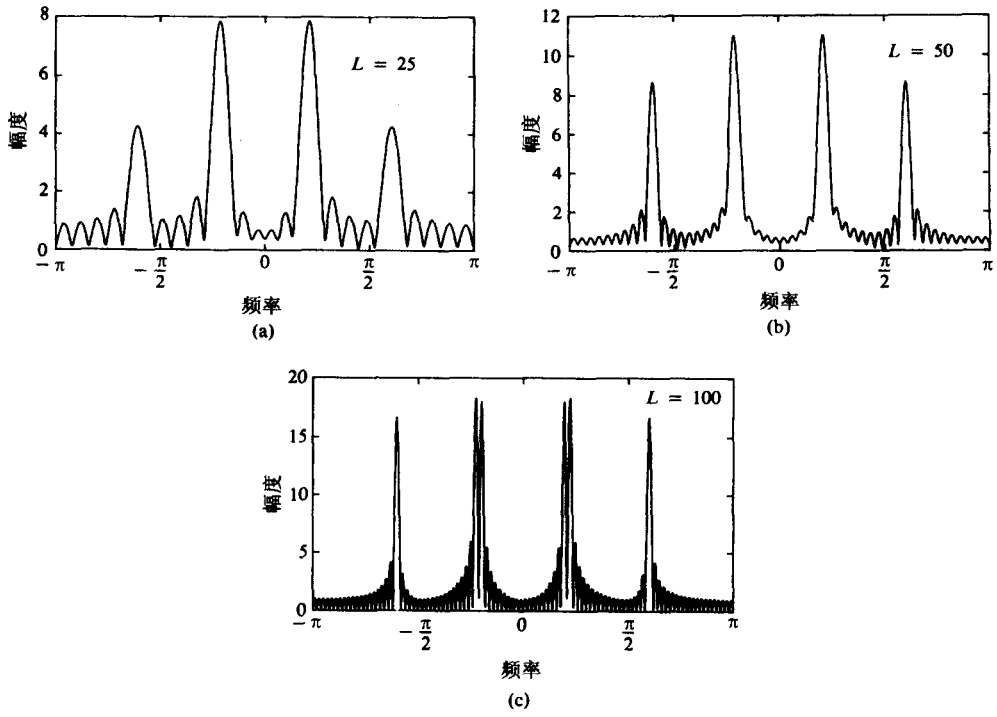


图 7.4.2 通过矩形窗观察到的式(7.4.8)给出的信号幅度谱

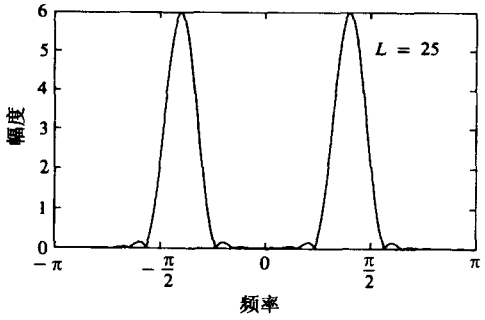


图 7.4.3 汉宁窗的幅度谱

$$\hat{X}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\theta)W(\omega-\theta)\mathrm{d}\theta \tag{7.4.10}$$

加窗序列 $x(n)$的 DFT 是频谱 $\hat{X}(\omega)$的采样形式,因此得出

$$\begin{aligned}\hat{X}(k)&\equiv\hat{X}(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\theta)W\left(\frac{2\pi k}{N}-\theta\right)\mathrm{d}\theta,\qquad k=0,1,\cdots,N-1\end{aligned} \tag{7.4.11}$$

正如正弦序列的情况,如果窗口频谱的宽度比信号频谱 $X(\omega)$相对较窄,那么窗函数对频谱 $X(\omega)$的(平滑)作用就很小。另一方面,如果窗函数与 $X(\omega)$的宽度相比,具有较宽的频谱,类似于样本数量 L 很小的情况,那么窗口频谱就会屏蔽掉信号频谱,所以数据的 DFT 会反映出窗函数的频谱特性。当然,这种情况应当尽量避免。

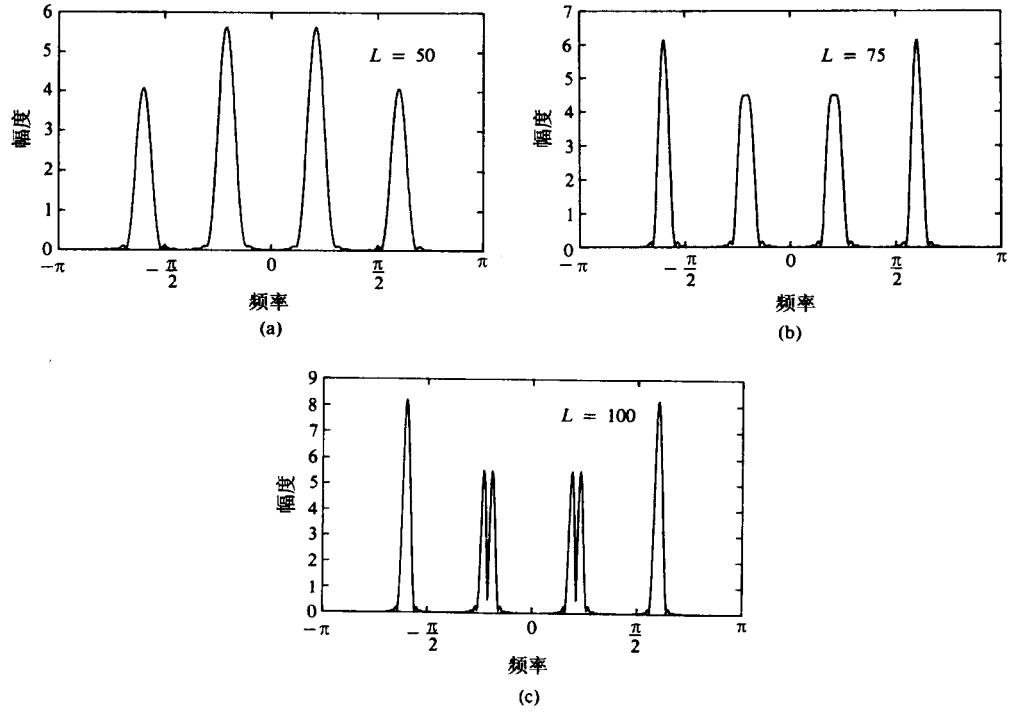


图 7.4.4　通过汉宁窗观察到的式(7.4.8)中信号的幅度谱

例 7.4.1　指数信号

$$x_a(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

以 $F_s=20$ 个样本/s 的速率被采样，用它的 100 个样本的数据块来估计它的频谱。通过计算有限长序列的 *DFT* 来求解信号 $x_a(t)$ 的谱特性，并将截断后的离散时间信号的频谱与模拟信号的频谱进行比较。

解：模拟信号的频谱为

$$X_a(F)=\frac{1}{1+\mathrm{j}2\pi F}$$

该指数模拟信号以 20 个样本/s 的速率被采样后得到的序列为

$$x(n)=\mathrm{e}^{-nT}=\mathrm{e}^{-n/20}, \qquad n\geqslant 0$$
$$=(\mathrm{e}^{-1/20})^n=(0.95)^n, \quad n\geqslant 0$$

现在令

$$x(n)=\begin{cases}(0.95)^n, & 0\leqslant n\leqslant 99\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

这个 $L=100$ 点的序列的 N 点 DFT 为

$$\hat{X}(k)=\sum_{k=0}^{99}\hat{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/N}, \qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

为了获得足够的频谱细节，选择 $N=200$。这等于在序列 $x(n)$ 后面补 100 个零。

模拟信号 $x_a(t)$ 及其幅度谱 $|X_a(F)|$ 分别如图 7.4.5(a)和图 7.4.5(b)所示。截断序列 $x(n)$ 及其 $N=200$ 点的 DFT(幅度)分别如图 7.4.5(c)和图 7.4.5(d)所示。在这种情况下，DFT 变换 $\{|X(k)|\}$ 和模拟信号频谱非常相似，窗函数的作用相对较小。

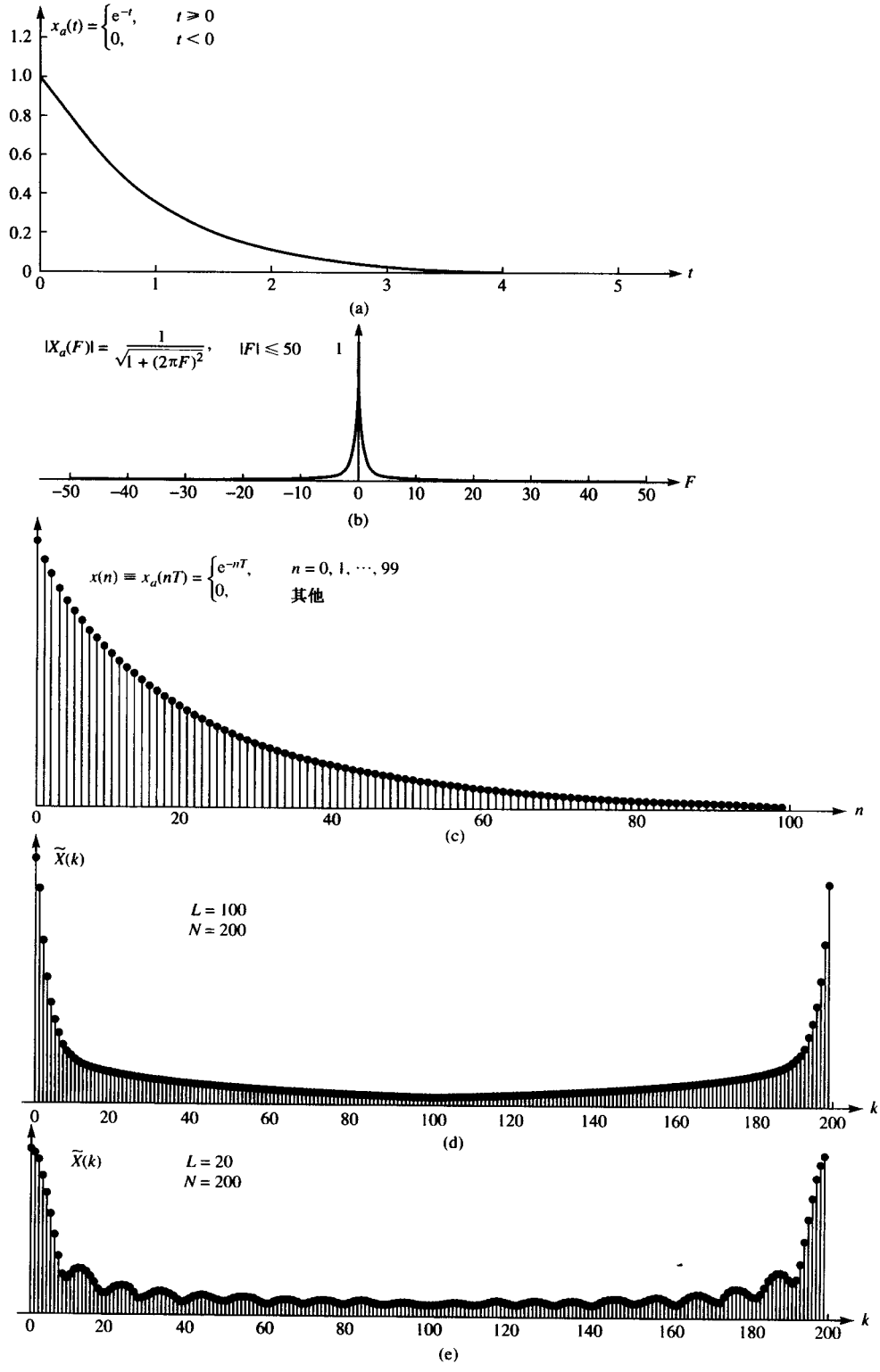


图 7.4.5 例 7.4.1 中模拟信号样本的加窗(截断)影响

另一方面，假设窗函数的长度选择为 $L=20$，那么截断序列 $x(n)$ 为

$$\hat{x}(n)=\begin{cases}(0.95)^n, & 0\leqslant n\leqslant 19\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

它的 $N=200$ 点的 DFT 如图 7.4.5(e)所示。现在可以看出，宽频谱窗函数的效果是很明显的。首先，由于宽频谱窗函数的作用，它的主峰非常宽。其次，在频域上远离主峰的正弦包络变化是由矩形窗频谱的较大旁瓣引起的。因此，该 DFT 就不再是对模拟信号频谱一种很好的近似了。

7.5　离散余弦变换

用 DFT 表示一个 N 点序列 $x(n)$，$0\leqslant n\leqslant N-1$，其形式是复指数的线性组合。所以即使 $x(n)$ 是实数，DFT 系数也通常是复数。假如我们想找一个 $N\times N$ 的正交变换，以余弦序列线性组合的形式来表示一个实序列 $x(n)$。从式(7.2.25)和式(7.2.26)看出，如果 N 点序列 $x(n)$ 是实偶数，即 $x(n)=x(N-n)$，$0\leqslant n\leqslant N-1$，那么这是完全可能的，最后的 DFT，即 $X(k)$ 本身也是实偶数。这使我们可以推导出适用任何 N 点实序列的离散余弦变换，即通过对序列进行偶延拓再计算 $2N$ 点 DFT。因为有 8 种偶延拓的方法，所以存在许多 DCT 的定义(Wang 1984，Martucci 1994)。我们将讨论一种在各种标准的语音和图像压缩中广泛实际应用的 DCT-II(Rao 和 Huang，1996)。为了简单起见，我们用术语 DCT 来表示 DCT-II。

7.5.1　FDCT

令 $s(n)$ 是 $2N$ 点的 $x(n)$ 的偶对称延拓，定义为

$$s(n)=\begin{cases}x(n), & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ x(2N-n-1), & N\leqslant n\leqslant 2N-1\end{cases}\tag{7.5.1}$$

序列 $s(n)$ 关于半采样点 $n=N-\frac{1}{2}$ 偶对称(见图 7.5.1)。$s(n)$ 的 $2N$ 点 DFT 为

$$S(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}s(n)W_{2N}^{nk},\quad 0\leqslant k\leqslant 2N-1\tag{7.5.2}$$

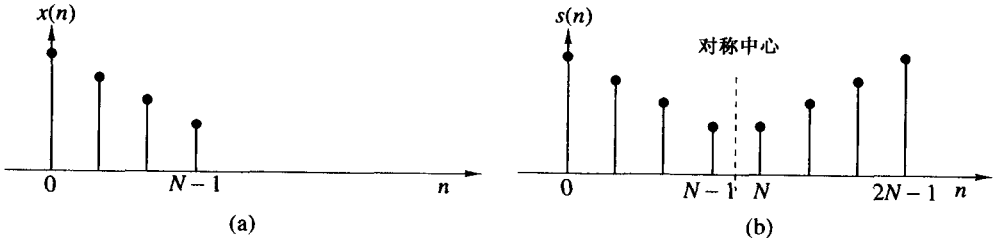


图 7.5.1　原始序列 $x(n)$，$0\leqslant n\leqslant N-1$ 以及它的 $2N$ 点偶延拓 $s(n)$，$0\leqslant n\leqslant 2N-1$

将式(7.5.1)代入式(7.5.2)中，得出

$$S(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{2N}^{nk}+\sum_{n=N}^{2N-1}x(2N-n-1)W_{2N}^{nk}\tag{7.5.3}$$

将第二个求和变量换成 $n=2N-1-m$，回忆可知，对于整数 m，$W_{2N}^{2mN}=1$，提出公因子 $W_{2N}^{-k/2}$，得出

$$S(k)=W_{2N}^{-k/2}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[W_{2N}^{nk}W_{2N}^{k/2}+W_{2N}^{-nk}W_{2N}^{-k/2}\right],\quad 0\leqslant k\leqslant 2N-1\tag{7.5.4}$$

最后一个表达式可以写成

$$S(k)=W_{2N}^{-k/2}2\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right],\quad 0\leqslant k\leqslant 2N-1 \tag{7.5.5}$$

或等价的

$$S(k)=W_{2N}^{-k/2}2\Re\left[W_{2N}^{k/2}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{2N}^{kn}\right],\quad 0\leqslant k\leqslant 2N-1 \tag{7.5.6}$$

如果定义 DCT 为

$$V(k)=2\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right],\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{7.5.7}$$

那么很容易证明

$$V(k)=W_{2N}^{k/2}S(k)\text{ or }S(k)=W_{2N}^{-k/2}V(k),\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{7.5.8}$$

并且

$$V(k)=2\Re\left[W_{2N}^{k/2}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{2N}^{kn}\right],\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{7.5.9}$$

我们注意到，$V(k)$是实数，而 $S(k)$是复数。因为实序列 $s(n)$满足对称关系 $s(2N-1-n)=s(n)$，而不是 $s(2N-n)=s(n)$，所以 $S(k)$是复数。

按照式(7.5.2)，计算 $s(n)$的 $2N$ 点 DFT，并且根据式(7.5.8)将结果与 $W_{2N}^{k/2}$相乘，这样也可以计算 $x(n)$的 DCT。另一种方法是利用式(7.5.9)，先对补 N 个零后的原始序列 $x(n)$进行 $2N$ 点 DFT，然后再乘以 $W_{2N}^{k/2}$，最后再取实部的两倍。

7.5.2 IDCT

我们需要从偶延拓序列 $s(n)$的逆 DFT 推导出逆 DCT。$S(k)$的逆 DFT 为

$$s(n)=\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1}S(k)W_{2N}^{-nk} \tag{7.5.10}$$

因为 $s(n)$是实数，所以 $S(k)$是厄密(Hermitian)对称的，即

$$S(2N-k)=S^*(k) \tag{7.5.11}$$

此外，由式(7.5.7)很容易证明

$$S(N)=0 \tag{7.5.12}$$

利用式(7.5.11)、式(7.5.12)和式(7.5.10)，得出

$$\begin{aligned}s(n)&=\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}S(k)W_{2N}^{-kn}+\frac{1}{2N}\sum_{k=N}^{2N-1}S(k)W_{2N}^{-kn}\\&=\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}S(k)W_{2N}^{-kn}+\frac{1}{2N}\sum_{m=1}^{N}S(2N-m)W_{2N}^{-(2N-m)n}\\&=\frac{1}{2N}S(0)+\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N-1}S(k)W_{2N}^{-kn}+\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N-1}S^*(k)W_{2N}^{kn}\end{aligned}$$

因为 $S(0)$是实数,所以

$$s(n)=\frac{1}{N}\Re\left[\frac{S(0)}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}S(k)W_{2N}^{-kn}\right],\quad 0\leqslant n\leqslant 2N-1 \tag{7.5.13}$$

将式(7.5.8)代入式(7.5.13),并利用式(7.5.1)就可以得出期望的逆 DCT 为

$$x(n)=\frac{1}{N}\left\{\frac{V(0)}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}V(k)\cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right]\right\},\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{7.5.14}$$

给定 $V(k)$,首先利用式(7.5.8)计算 $S(k)$。下一步,再利用式(7.5.13)进行 $2N$ 点逆 DFT 变换。由逆 DFT 的实部就得到 $s(n)$,从而求得 $x(n)$。

Makhoul(1980)讨论了一种用 N 点 DFT 来计算 DCT 和逆 DCT 的方法。Rao 和 Yip(1990)讨论了许多适用于硬件和软件实现的特殊 DCT 算法。

7.5.3　DCT 是正交变换

等式(7.5.7)和(7.5.14)组成了 DCT 变换对。然而,由于以下原因,我们经常要在正、逆变换之间重新对称地分配归一化因子。因此,对于 $0\leqslant n\leqslant N-1$,序列 $x(n)$的 DCT 和 IDCT 定义为

$$C(k)=\alpha(k)\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left[\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right],\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{7.5.15}$$

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\alpha(k)C(k)\cos\left[\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right],\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{7.5.16}$$

其中,

$$\alpha(0)=\sqrt{\frac{1}{N}},\quad \alpha(k)=\sqrt{\frac{2}{N}}\quad 1\leqslant k\leqslant N-1 \tag{7.5.17}$$

正如 7.1.3 节的 DFT,利用 $N\times N$ 的 DCT 矩阵 C_N,DCT 公式(7.5.15)和式(7.5.16)可以表示成矩阵的形式,矩阵 $\boldsymbol{C}_N$ 的元素为

$$c_{kn}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{N}}, & k=0,0\leqslant n\leqslant N-1\\ \sqrt{\dfrac{2}{N}}\cos\dfrac{\pi(2n+1)k}{2N}, & 1\leqslant k\leqslant N-1,0\leqslant n\leqslant N-1\end{cases} \tag{7.5.18}$$

如果定义下列信号和系数矢量:

$$\boldsymbol{x}_N=[x(0)\quad x(1)\quad\cdots\quad x(N-1)]^T \tag{7.5.19}$$

$$\boldsymbol{c}_N=[C(0)\quad C(1)\quad\cdots\quad C(N-1)]^T \tag{7.5.20}$$

那么,DCT 式(7.5.15)和逆 DCT 式(7.5.16)就可以写成矩阵的形式

$$\boldsymbol{c}_N=\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{x}_N \tag{7.5.21}$$

$$\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{C}_N^T\boldsymbol{c}_N \tag{7.5.22}$$

由式(7.5.19)和式(7.5.20)可以得出,$\boldsymbol{C}_N$ 是实正数交矩阵,即它满足

$$\boldsymbol{C}_N^{-1}=\boldsymbol{C}_N^T \tag{7.5.23}$$

因为正交矩阵的逆矩阵就是它的转置矩阵,所以正交性简化了逆变换的计算。

如果用 $\boldsymbol{C}_N(k)$来表示 $\boldsymbol{C}_N{}^T$ 的列,那么逆 DCT 就可以写成

$$\boldsymbol{x}_N = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{c}_N(k) \tag{7.5.24}$$

这就将信号表示成了 DCT 余弦基序列的线性组合。系数 $C(k)$的值度量了信号与第 k 个基矢量的相似性。

例 7.5.1 已知离散时间正弦信号

$$x(n) = \cos(2\pi k_0 n/N), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

图 7.5.2 画出了 $k_0 = 5, N = 32$ 时的序列 $x(n)$, N 点 DFT 变换 $X(k)$系数的绝对值,以及 N 点 DCT 系数。与 DFT 相比,DCT 虽然在 $2k_0$ 处有一个明显的峰值,但是它在其他频率处也呈现了大量的纹波。由于这个原因,DCT 对信号与系统的频率分析并没有什么用途。

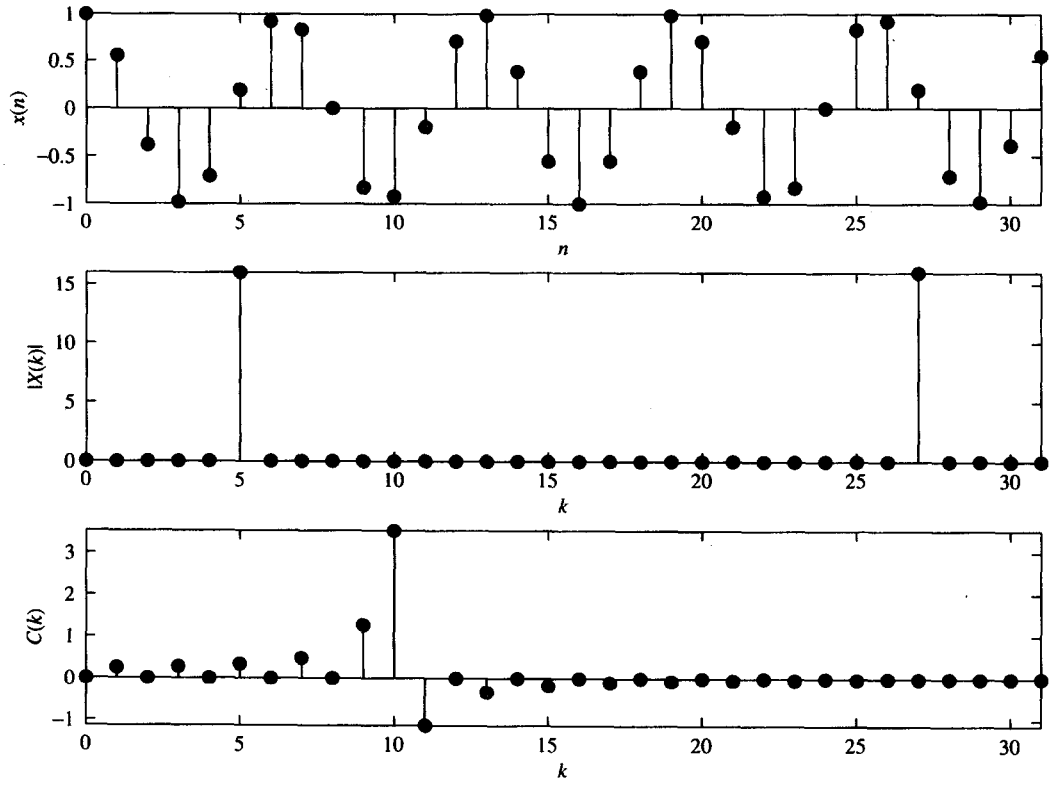


图 7.5.2 离散时间正弦信号及其 DFT 和 DCT 表示

利用式(7.5.23)的正交特性,可以很容易证明

$$\sum_{k=0}^{N-1} |C(k)|^2 = \boldsymbol{c}_N^T \boldsymbol{c}_N = \boldsymbol{x}_N^T \boldsymbol{C}_N^T \boldsymbol{C}_N \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{x}_N^T \boldsymbol{x}_N = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = E_x \tag{7.5.25}$$

因此,正交变换保存了信号的能量,或者等价地,N 维矢量空间中的矢量 $\boldsymbol{x}$ 的长度(广义帕塞瓦定理)。这意味着所有正交变换都只是矢量 $\boldsymbol{x}$ 在 N 维矢量空间中的旋转。

大多数正交变换都趋向将平均能量的大部分转移到相对较少的变换系数分量上(能量积聚特性)。因为总能量被保存了,所以大量的变换系数只包含很小的能量。此外,不同的变换具有不同的能量积聚性能,这将在下面的例子中进行介绍。

例 7.5.2　我们将用斜升序列 $x(n)=n, 0\leqslant n\leqslant N-1$，来比较 DFT 和 DCT 的能量积聚性能，图 7.5.3(a)画出了 $N=32$ 的 $x(n)$。图 7.5.3(d)和图 7.5.3(f)分别画出了 DFT 系数的绝对值和 DCT 系数值。很明显，DCT 系数展示出比 DFT 系数更好的“能量积聚”，这意味着我们可以用更少数目的 DCT 系数来表示序列 $x(n)$。

将 DCT 中最后 k_0 个系数置为零并进行逆 DCT 变换，就得到原始序列的近似 $x_{DCT}(n)$。可是，因为实序列的 DFT 是复数，所以前 $N/2$ 个 DFT 值携带了信息(为简化起见，假设 N 是偶数)。因而，我们可以去除 DFT 的系数，要保持复共轭对称的操作方法是：首先去除系数 $X(N/2)$，然后是系数 $X(N/2-1)$及 $X(N/2+1)$，依次类推。很明显，我们只能去除奇数个 DFT 系数，即 $k_0=1,3,\cdots,N-1$。利用 IDFT 重建后的序列表示为 $x_{DFT}(n)$。

DCT 重建误差是 k_0 的函数，定义为

$$E_{DCT}(k_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)-x_{DCT}(n)|^2$$

类似的定义也可用于 DFT。图 7.5.3(b)画出了 DFT 和 DCT 的重建误差，它们都是省略系数个数 k_0 的函数。图 7.5.3(c)和图 7.5.3(e)画出保留 $N-k_0=5$ 个系数后的重建后信号。我们看到，跟 DFT 系数相比，只要很少的 DCT 系数就可以很好地近似原始信号。在这个例子中，DFT(由于它的固有周期特性)试图建立一个锯齿波模型，因而，必须用许多高频系数来近似末尾的不连续。相反，DCT 是在 $x(n)$的偶延拓上进行操作的，这样就是一个三角波，不存在断点。所以，DCT 可以很好地近似首尾样本具有明显差异的信号块。

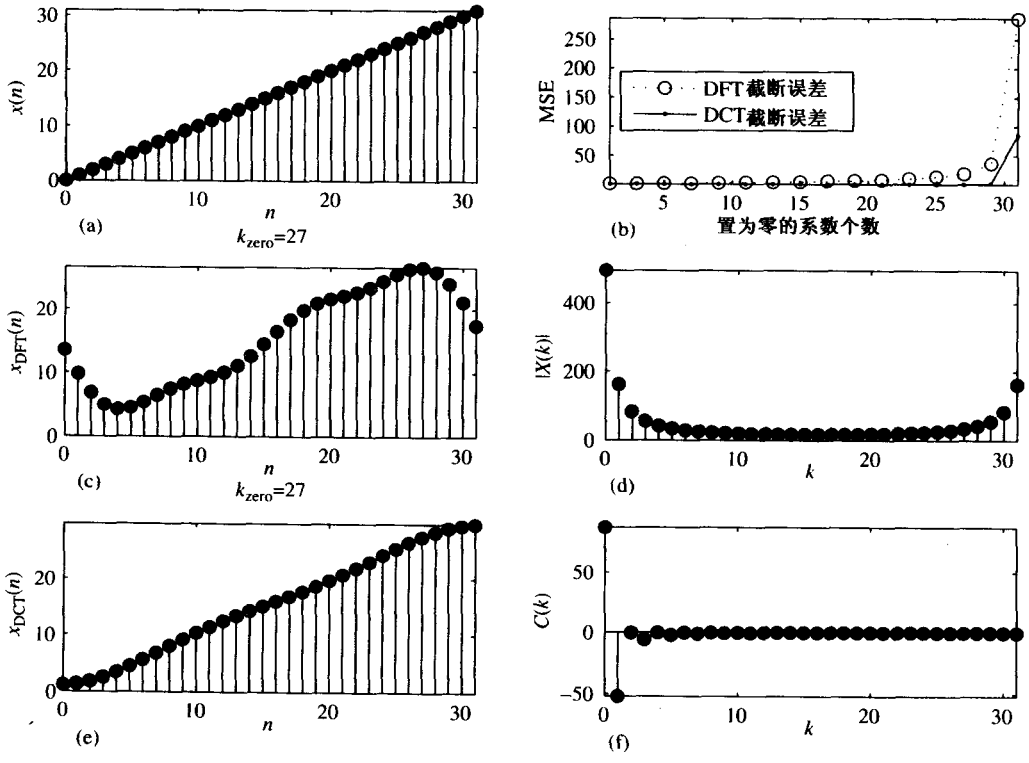


图 7.5.3　离散时间斜升信号及其 DFT 和 DCT 表示

从统计角度来看，用于信号压缩的最优正交变换是 Karhunen-Loeve(KL)变换和 Hotelling 变换(Jayant 和 Noll，1984)。KL 变换有两个最优特点：(a)它可使任何数目的保留系数的重建误差达到

最小;(b)它会产生一组不相关的变换系数。KL变换是由输入序列的协方差矩阵的特征矢量定义的。对于符合差分方程 $x(n)=ax(n-1)+w(n)$的信号,DCT提供了该信号KL变换的很好近似,其中 $w(n)$是白噪声序列,$a(0<a<1)$是接近于1的常系数。许多信号包括自然图像都具有这个特点。有关正交变换及其应用的详细介绍可以在 Jayant 和 Noll(1984)、Clarke(1985)、Rao 和 Yip(1990)以及 Goyal(2001)等人的文章中找到。

7.6 小结与参考文献

本章集中介绍了离散傅里叶变换及其性质与应用。我们是通过采样序列 $x(n)$的频谱 $X(\omega)$来探讨DFT的。

离散时间信号频谱的频域采样在数字信号处理中非常重要。特别重要的是DFT,它可以在频域唯一表示有限长序列。DFT高计算效率算法的存在才使得在频域处理数字信号可以比在时域处理更快,在第8章将介绍这些算法。特别适用DFT的处理方法包括:本章介绍的线性滤波,以及第8章和第4章介绍的相关性和频谱分析。Brigham(1988)在他的书中对DFT及其频率分析应用进行了特别通俗易懂和简洁的介绍。

在本章中,我们还介绍了离散余弦变换(DCT)。Strang(1999)在他的论文中从线性代数的角度对DCT进行了专门研究。

习题

7.1 一个实序列的8点DFT的前5点为$\{0.25,0.125-j0.3018,0,0.125-j0.0518,0\}$,求其余的3点。

7.2 计算以下序列的8点圆周卷积。

(a) $x_1(n)=\{1,1,1,1,0,0,0,0\}$

$$x_2(n)=\sin\frac{3\pi}{8}n,\qquad 0\leqslant n\leqslant 7$$

(b) $x_1(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n,\qquad 0\leqslant n\leqslant 7$

$$x_2(n)=\cos\frac{3\pi}{8}n,\qquad 0\leqslant n\leqslant 7$$

(c) 利用 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的DFT,计算两个圆周卷积序列的DFT。

7.3 令 $X(k),0\leqslant k\leqslant N-1$是序列 $x(n)$的 N 点DFT,$0\leqslant n\leqslant N-1$。定义

$$\hat{X}(k)=\begin{cases}X(k), & 0\leqslant k\leqslant k_c,\ N-k_c\leqslant k\leqslant N-1\\ 0, & k_c<k<N-k_c\end{cases}$$

计算 $\hat{X}(k)$的 N 点逆DFT变换,$0\leqslant k\leqslant N-1$。这个操作对序列 $x(n)$会产生什么影响?解释原因。

7.4 对序列

$$x_1(n)=\cos\frac{2\pi}{N}n,\qquad x_2(n)=\sin\frac{2\pi}{N}n,\qquad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

计算 N 点:

(a) 圆周卷积 $x_1(n)\textcircled{N}x_2(n)$。

(b) $x_1(n)$和 $x_2(n)$的圆周互相关。

(c) $x_1(n)$的圆周自相关。

(d) $x_2(n)$的圆周自相关。

7.5 计算以下序列对的值

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n)$$

(a) $x_1(n)=x_2(n)=\cos\frac{2\pi}{N}n, \quad 0\leqslant n\leqslant N-1$

(b) $x_1(n)=\cos\frac{2\pi}{N}n, x_1(n)=\sin\frac{2\pi}{N}n, \quad 0\leqslant n\leqslant N-1$

(c) $x_1(n)=\delta(n)+\delta(n-8), x_2(n)=u(n)-u(n-N)$

7.6 计算布莱克曼窗的 N 点 DFT。

$$w(n)=0.42-0.5\cos\frac{2\pi n}{N-1}+0.08\cos\frac{4\pi n}{N-1}, \quad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

7.7 如果 $X(k)$是序列 $x(n)$的 DFT,那么计算序列

$$x_c(n)=x(n)\cos\frac{2\pi k_0 n}{N}, \quad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

和

$$x_s(n)=x(n)\sin\frac{2\pi k_0 n}{N}, \quad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

的 N 点 DFT,结果以 $X(k)$的形式进行表示。

7.8 用时域公式(7.2.39)计算序列

$$x_1(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,1\}$$

$$x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{4},3,2,2\}$$

的圆周卷积。

7.9 利用 4 点 DFT 和 IDFT 计算序列

$$x_3(n)=x_1(n)\ \textcircled{N}\ x_2(n)$$

其中,$x_1(n)$和 $x_2(n)$是习题 7.8 中给出的序列。

7.10 计算 N 点序列的能量

$$x(n)=\cos\frac{2\pi k_0 n}{N}, \quad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

7.11 给定序列

$$x(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 3\\ 0, & 4\leqslant n\leqslant 7\end{cases}$$

的 8 点 DFT,计算以下序列的 DFT。

(a) $x_1(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & 1\leqslant n\leqslant 4\\ 1, & 5\leqslant n\leqslant 7\end{cases}$

(b) $x_2(n)=\begin{cases}0, & 0\leqslant n\leqslant 1\\ 1, & 2\leqslant n\leqslant 5\\ 0, & 6\leqslant n\leqslant 7\end{cases}$

7.12 已知有限长序列

$$x(n)=\{\underset{\uparrow}{0},1,2,3,4\}$$

(a) 画出序列 $s(n)$的图形,以及它的 6 点 DFT

$$S(k) = W_2^* X(k), \qquad k = 0, 1, \cdots, 6$$

(b) 计算序列 $y(n)$,它的 6 点 DFT 变换 $Y(k) = \Re[X(k)]$。

(c) 计算序列 $v(n)$,它的 6 点 DFT 变换 $V(k) = \Im[X(k)]$。

7.13 令 $x_p(n)$是基本周期为 N 的周期序列。考虑如下的 DFT:

$$x_p(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_1(k)$$

$$x_p(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{3N}{\longleftrightarrow}} X_3(k)$$

(a) $X_1(k)$和 $X_3(k)$是什么关系?

(b) 利用序列

$$x_p(n) = \{\cdots 1, 2, 1, \underset{\uparrow}{2}, 1, 2, 1, 2 \cdots\}$$

验证(a)部分的结果。

7.14 已知序列

$$x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\}, \qquad x_2(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 0, 0, 0\}, \qquad s(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, 0, 0, 0\}$$

及它们的 5 点 DFT。

(a) 计算序列 $y(n)$,使得 $Y(K) = X_1(k)X_2(k)$。

(b) 是否存在序列 $x_3(n)$,使得 $S(k) = X_1(k)X_3(k)$?

7.15 一个因果 LTI 系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

对于 $0 \leqslant n \leqslant 63$,系统的输出 $y(n)$是已知的。假设 $H(z)$是可用的,你能否找出一种 64 点 DFT 方法来恢复序列 $x(n)$,$0 \leqslant n \leqslant 63$? 能否恢复出这个区间内所有 $x(n)$的值?

7.16 一个 LTI 系统的冲激响应为 $h(n) = \delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n - k_0)$。为了计算它的逆系统的冲激响应 $g(n)$,一个工程师计算了 $h(n)$的 N 点 DFT 变换 $H(k)$,$N = 4k_0$,然后定义 $g(n)$为 $G(k) = 1/H(k)$的逆 DFT,$k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$。计算 $g(n)$及卷积 $h(n) \times g(n)$,解释冲激响应为 $g(n)$的系统是否是冲激响应为 $h(n)$的系统的逆系统。

7.17 计算信号

$$x(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$$

的 8 点 DFT 并画出幅度和相位图。

7.18 一个频率响应为 $H(\omega)$的线性时不变系统,受到周期输入信号

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$$

的激励,假设我们计算了输出序列样本 $y(n)$的 N 点 DFT 变换 $Y(k)$,$0 \leqslant n \leqslant N-1$,请问 $Y(k)$和 $H(\omega)$的关系如何?

7.19 特殊对称实序列的 DFT

(a) 利用 7.2 节的对称特性(特别是分解特性),解释如何仅用 N 点 DFT,就可以同时计算两个实对称(偶)序列和两个实反对称(奇)序列的 DFT。

(b) 假设现在给出四个实序列 $x_i(n)$,$i = 1, 2, 3, 4$,它们都是对称的[即 $x_i(n) = x_i(N - n)$,$0 \leqslant n \leqslant N-1$]。证明序列

$$s_i(n) = x_i(n + 1) - x_i(n - 1)$$

是反对称的[即 $s_i(n) = -s_i(N - n)$且 $s_i(0) = 0$]。

(c) 利用 $x_1(n)$, $x_2(n)$, $s_3(n)$和 $s_4(n)$构建序列 $x(n)$,说明如何从 $x(n)$的 N 点 DFT 变换 $X(k)$ 计算 $x_i(n)$的 DFT 变换 $X_i(k)$, $i=1,2,3,4$。

(d) 是否有 $X_i(k)$的样本无法从 $X(k)$中恢复? 说明理由。

7.20 只有奇次谐波的实序列的 DFT。令 $x(n)$是 N 点实序列,它的 N 点 DFT 为 $X(k)$(N 为偶数)。此外, $x(n)$满足下列对称特性:

$$x\left(n+\frac{N}{2}\right)=-x(n), \qquad n=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

即序列的上半部分是下半部分的负数。

(a) 证明

$$X(k)=0, \qquad k \text{ 为偶数}$$

即序列的频谱只有奇次谐波。

(b) 证明:通过计算原始序列 $x(n)$的复数调制形式的 $N/2$ 点 DFT,就可以计算该奇次谐波频谱的值。

7.21 令 $x_a(t)$是带宽 $B=3$ kHz 的模拟信号。我们希望利用 $N=2^m$ 点 DFT 来计算该信号的频谱,且分辨率小于等于 50 Hz。计算(a)最小采样率,(b)需要的最少样本数,以及(c)模拟信号记录的最小长度。

7.22 已知周期序列

$$x_p(n)=\cos\frac{2\pi}{10}n, \qquad -\infty<n<\infty$$

它的频率 $f_0=1/10$,基本周期 $N=10$。计算序列 $x(n)=x_p(n)$的 10 点 DFT,$0\leqslant n\leqslant N-1$。

7.23 计算下列信号的 N 点 DFT:

(a) $x(n)=\delta(n)$

(b) $x(n)=\delta(n-n_0)$, $\quad 0<n_0<N$

(c) $x(n)=a^n$, $\quad 0\leqslant n\leqslant N-1$

(d) $x(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N/2-1 \quad (N \text{ 为偶})\\ 0, & N/2\leqslant n\leqslant N-1\end{cases}$

(e) $x(n)=e^{j(2\pi/N)k_0 n}$, $\quad 0\leqslant n\leqslant N-1$

(f) $x(n)=\cos\frac{2\pi}{N}k_0 n$, $\quad 0\leqslant n\leqslant N-1$

(g) $x(n)=\sin\frac{2n}{N}k_0 n$, $\quad 0\leqslant n\leqslant N-1$

(h) $x(n)=\begin{cases}1, & n \text{ 为偶}\\ 0, & n \text{ 为奇}, \quad 0\leqslant n\leqslant N-1\end{cases}$

7.24 已知有限长信号

$$x(n)=\{1,2,3,1\}$$

(a) 通过求解逆 DFT 公式中的 4×4 线性方程组,计算该信号的 4 点 DFT。

(b) 利用定义计算 4 点 DFT,以检查(a)部分答案的正确性。

7.25 (a) 计算如下信号的傅里叶变换 $X(\omega)$:

$$x(n)=\{1,2,\underset{\uparrow}{3},2,1,0\}$$

(b) 计算如下信号的 6 点 DFT 变换 $V(k)$:

$$v(n)=\{3,2,1,0,1,2\}$$

(c) $X(\omega)$和 $V(k)$是否存在关系? 说明理由。

7.26 证明恒等式

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(n+lN)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/N)kn}$$

提示:求解等式左边周期信号的 DFT。

7.27 利用 DFT 计算奇偶谐波。令 $x(n)$是 N 点序列,它的 $N(N$ 为偶)点 DFT 为 $X(k)$。

(a) 考虑时域混叠序列

$$y(n)=\begin{cases}\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}x(n+lM), & 0\leqslant n\leqslant M-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$y(n)$的 M 点 DFT 变换 $Y(k)$和 $x(n)$的傅里叶变换 $X(\omega)$的关系如何?

(b) 令

$$y(n)=\begin{cases}x(n)+x\left(n+\dfrac{N}{2}\right), & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

并且

$$y(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N/2}{\longleftrightarrow}}Y(k)$$

证明 $X(k)=Y(k/2),k=2,4,\cdots,N-2$。

(c) 利用(a)和(b)部分的结果,推导出用 $N/2$ 点 DFT 计算 $X(k)$的奇次谐波的步骤。

7.28 频域采样。已知离散时间信号

$$x(n)=\begin{cases}a^{|n|}, & |n|\leqslant L\\ 0, & |n|>L\end{cases}$$

其中,$a=0.95,L=10$。

(a) 计算信号 $x(n)$并画图。

(b) 证明

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=x(0)+2\sum_{n-1}^{L}x(n)\cos\omega n$$

计算 $X(\omega)$在 $\omega=\pi k/100$ 处的值并画图,$k=0,1,\cdots,100$。

(c) 计算

$$c_k=\frac{1}{N}X\left(\frac{2\pi}{N}K\right),\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

其中,$N=30$。

(d) 计算信号

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}ck\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/N)kn}$$

并画图。信号 $x(n)$和 $\tilde{x}(n)$是什么关系?说明理由。

(e) 计算信号 $\tilde{x}_1(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(n-lN)$,其中 $-L\leqslant n\leqslant L,N=30$。画出该信号的图形,并与 $\tilde{x}(n)$和 $\tilde{x}_1(n)$进行比较。

(f) 对于 $N=15$,重做(c)到(e)部分。

7.29 频域采样。信号 $x(n)=a^{|n|}$，$-1<a<1$ 的傅里叶变换为

$$X(\omega)=\frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2}$$

(a) 画出 $X(\omega)$的图形，其中 $0\leqslant\omega\leqslant2\pi$，$a=0.8$。从样本 $X(2\pi k/N)$中重建 $X(\omega)$并画图，其中 $0\leqslant k\leqslant N-1$，$N$ 为

(b) $N=20$

(c) $N=100$

(d) 将(b)和(c)部分得到的频谱与原始频谱 $X(\omega)$进行比较，解释存在的差异。

(e) 画图说明 $N=20$ 时的时域混叠。

7.30 离散时间调幅信号的频率分析。离散时间信号

$$x(n)=\cos2\pi f_1 n+\cos2\pi f_2 n$$

其中，$f_1=\frac{1}{18}$，$f_2=\frac{5}{128}$，用它对载波

$$x_c(n)=\cos2\pi f_c n$$

进行调幅，其中 $f_c=\frac{50}{128}$。最后的调幅信号为

$$x_{\mathrm{am}}(n)=x(n)\cos2\pi f_c n$$

(a) 画出信号 $x(n)$、$x_c(n)$和 $x_{\mathrm{am}}(n)$的图形，$0\leqslant n\leqslant255$。

(b) 计算信号 $x_{\mathrm{am}}(n)$的 128 点 DFT 并画图，$0\leqslant n\leqslant127$。

(c) 计算信号 $x_{\mathrm{am}}(n)$的 128 点 DFT 并画图，$0\leqslant n\leqslant99$。

(d) 计算信号 $x_{\mathrm{am}}(n)$的 256 点 DFT 并画图，$0\leqslant n\leqslant179$。

(e) 通过推导调幅信号的频谱并将它与实验结果做比较，来解释(b)到(d)部分得到的结果。

7.31 图 P7.31 中的锯齿波可以表示成傅里叶级数的形式

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\left(\sin\pi t-\frac{1}{2}\sin2\pi t+\frac{1}{3}\sin3\pi t-\frac{1}{4}\sin4\pi t\cdots\right)$$

(a) 求解傅里叶级数的系数 c_k。

(b) 利用扩展级数的前 6 项产生该信号的时域 N 点样本，其中 $N=64$ 及 $N=128$。画出信号 $x(t)$及产生的样本图形，并解释结果。

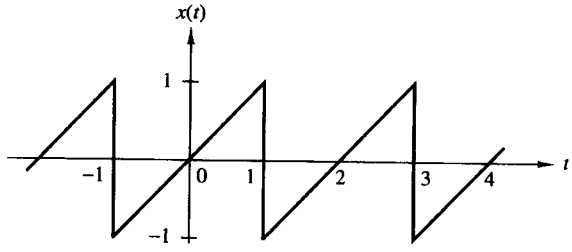


图 P7.31

7.32 已知 $x(t)=e^{j\Omega_0 t}$的傅里叶变换为 $X(j\Omega)=2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$，并且

$$p(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant T_0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的傅里叶变换为

$$P(j\Omega)=T_0\frac{\sin\Omega T_0/2}{\Omega T_0/2}e^{-j\Omega T_0/2}$$

(a) 计算

$$y(t) = p(t)e^{j\Omega_0 t}$$

的傅里叶变换 $Y(j\Omega)$,并画出 $|Y(j\Omega)|$ 对应于 Ω 的略图。

(b) 现在来考虑指数序列

$$x(n) = e^{j\omega_0 n}$$

其中 ω_0 是在区间 $0 < \omega_0 < \pi$ 弧度内的任意频率。求解 ω_0 必须满足的最一般的条件,使得 $x(n)$是一个周期为 P 的周期序列(P 为正整数)。

(c) 令 $y(n)$是有限长序列

$$y(n) = x(n)w_N(n) = e^{j\omega_0 n}w_N(n)$$

其中,$w_N(n)$是长为 N 的有限长矩形序列,而 $x(n)$无须是周期性序列。计算 $Y(\omega)$并画出 $|Y(\omega)|$的略图,$0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$。请问 N 对 $|Y(\omega)|$有什么影响? 简述 $|Y(\omega)|$和 $|Y(j\Omega)|$的异同点。

(d) 假设

$$x(n) = e^{j(2\pi/P)n}, \qquad P \text{ 为正整数}$$

并且

$$y(n) = w_N(n)x(n)$$

其中,$N = lP$,l 是正整数。计算 $y(n)$的 N 点 DFT 并画图。将你的答案与 $|Y(\omega)|$的特性进行联系比较。

(e) (d)部分 DFT 的频率采样是否已经足够从 DFT 序列的幅度 $|Y(k)|$直接获得 $|Y(\omega)|$的大致近似? 如果不可以,简述如何增加采样才有可能从适当的序列 $|Y(k)|$中获得 $|Y(\omega)|$的粗略近似。

7.33 找出一种算法,正如例 7.5.1 和例 7.5.2 介绍的,可以利用 DFT 来计算 DCT。

7.34 利用题 7.33 找出的算法重做例 7.5.2.

7.35 用信号 $x(n) = a^n\cos(2\pi f_0 n + \phi)$重做例 7.5.2,其中 $a = 0.8, f_0 = 0.05, N = 32$。

第 8 章　DFT 的有效计算：快速傅里叶变换算法

正如我们在前一章中所观察到的那样，离散傅里叶变换(DFT)在包括线性滤波、相关分析和谱分析等数字信号处理中起着重要作用。DFT 如此重要的主要原因是由于存在有效计算 DFT 的算法。

本章主要介绍计算 DFT 的有效算法，包括两种不同的方法。一种是分而治之的方法，其中 N 点 DFT(N 是复合数)被分解为计算更小的 DFT。我们还将介绍快速傅里叶变换(FFT)的算法，该算法适用于计算 N 为 2 或 4 的幂次的 DFT。

另一种方法是将 DFT 的公式视为对输入数据进行线性滤波。这种方式产生了两种算法，即 Goertzel 算法和调频 z 变换算法，它们都通过对数据序列线性滤波来进行 DFT。

8.1　DFT 的有效计算：FFT 算法

本节将介绍几种 DFT 的有效算法。由于 DFT 在各种数字信号处理应用中的重要作用，如线性滤波、相关分析和谱分析，其有效计算这一课题受到了数学家、工程师以及应用科学家相当程度的关注。

计算 DFT 的基本问题就是根据式(8.1.1)，由长为 N 的数据序列$\{x(n)\}$计算长度为 N 的复序列$\{X(k)\}$的过程：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\qquad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{8.1.1}$$

其中，

$$W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N} \tag{8.1.2}$$

通常，假设数据序列$\{x(n)\}$为一个复序列。

类似地，IDFT 成为

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk},\qquad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{8.13}$$

因为 DFT 和 IDFT 基本上涉及相同类型的计算，所以我们讨论的有效计算 DFT 系数的方法同样适用于 IDFT。

我们观察到对于每一个 k 值，直接计算 $X(k)$会涉及 N 次复数乘法($4N$ 次实数乘法)和 $N-1$ 次复数加法($4N-2$ 次实数加法)。从而，计算长度为 N 的 DFT 要求 N^2 次复数乘法和 N^2-N 次复数加法。

直接计算 DFT 不是一种有效算法，因为它没有利用相位因子 W_N 的对称性和周期性。这两种性质用公式可表示为

$$\text{对称性：}\quad W_N^{k+N/2}=-W_N^k \tag{8.1.4}$$

$$\text{周期性：}\quad W_N^{k+N}=W_N^k \tag{8.1.5}$$

而本节讨论的有效计算算法——众所周知的快速傅里叶变换(FFT)算法正好利用了这两个性质。

8.1.1 直接计算 DFT

对于一个 N 点复序列 $x(n)$,其 DFT 可以表示为

$$X_R(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_R(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}+x_I(n)\sin\frac{2\pi kn}{N}\right] \tag{8.1.6}$$

$$X_I(k)=-\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_R(n)\sin\frac{2\pi kn}{N}-x_I(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}\right] \tag{8.1.7}$$

直接计算式(8.1.6)和式(8.1.7)需要:

1. $2N^2$ 次三角函数计算。
2. $4N^2$ 实数乘法。
3. $4N(N-1)$实数加法。
4. 许多索引和寻址操作。

这些操作是 DFT 计算算法的典型操作。第 2 项和第 3 项中的操作计算得到 DFT 值 $X_R(k)$和 $X_I(k)$。需要索引和寻址操作来获取数据 $x(n)(0\leqslant n\leqslant N-1)$、相位因子以及存储结果。不同的 DFT 算法用不同的方法来优化这些计算过程。

8.1.2 用分而治之的方法计算 DFT

采用分而治之的方法可以得到有效计算 DFT 的算法。这种方法将 N 点 DFT 递归地分解为更短的 DFT 来计算,从而导致了众所周知的 FFT 算法。

为了说明基本符号,我们首先考虑 N 点 DFT 的计算问题,其中 N 可以被分解为两个整数的乘积,即

$$N=LM \tag{8.1.8}$$

这里假设 N 不是质数并不过于严格,因为我们可以通过对任何序列加零来满足式(8.1.8)中的分解。

序列 $x(n),0\leqslant n\leqslant N-1$ 可被存储在用 n 索引的一维数组中,或是可被存储在如图 8.1.1 所示的被 l 和 m 索引的二维数组中,其中 $0\leqslant l\leqslant L-1,0\leqslant m\leqslant M-1$。注意,$l$ 是行索引,m 是列索引。因此,序列 $x(n)$可以按不同的方法存储在矩形数组中,具体的方法取决于索引 n 到索引 (l,m)的映射。

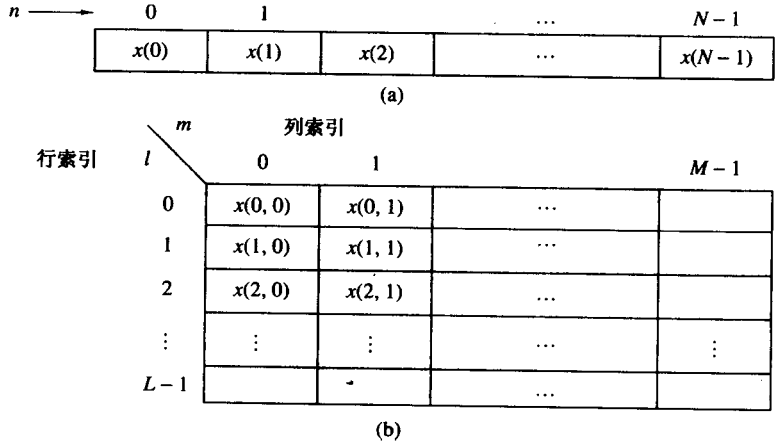


图 8.1.1 存储序列 $x(n),0\leqslant n\leqslant N-1$ 的二维数据数组

例如，假设我们选择映射

$$n = Ml + m \tag{8.1.9}$$

则前 $x(n)$的前 M 个元素被存储到第一行，$x(n)$的后 M 个元素被存储到第二行，依次类推，如图 8.1.2(a) 所示。另一方面，映射

$$n = l + mL \tag{8.1.10}$$

会将 $x(n)$的前 L 个元素存储到第一列，$x(n)$的后 L 个元素存储到第二列，依次类推，如图 8.1.2(b) 所示。

按行排列　　$n = Ml + m$

l \ m	0	1	2	…	$M-1$
0	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	…	$x(M-1)$
1	$x(M)$	$x(M+1)$	$x(M+2)$	…	$x(2M-1)$
2	$x(2M)$	$x(2M+1)$	$x(2M+2)$	…	$x(3M-1)$
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮
$L-1$	$x((L-1)M)$	$x((L-1)M+1)$	$x((L-1)M+2)$	…	$x(LM-1)$

(a)

按列排列　　$n = l + mL$

l \ m	0	1	2	…	$M-1$
0	$x(0)$	$x(L)$	$x(2L)$	…	$x((M-1)L)$
1	$x(1)$	$x(L+1)$	$x(2L+1)$	…	$x((M-1)L+1)$
2	$x(2)$	$x(L+2)$	$x(2L+2)$	…	$x((M-1)L+2)$
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮
$L-1$	$x(L-1)$	$x(2L-1)$	$x(3L-1)$	…	$x(LM-1)$

(b)

图 8.1.2　数据数组的两种排列方式

同样的排列可以用来存储计算的 DFT 值。特别地，映射是从索引 k 到索引对(p,q)，其中 $0 \leqslant p \leqslant L-1, 0 \leqslant q \leqslant M-1$。如果我们选择映射

$$k = Mp + q \tag{8.1.11}$$

则 DFT 的结果会按行存储，其中第一行包含 DFT $X(k)$的前 M 个元素，第二行包含后 M 个元素，依次类推。另一方面，映射

$$k = qL + p \tag{8.1.12}$$

会将结果 $X(k)$按列存储，其中前 L 个元素存储在第一列中，后 L 个元素存储在第二列中，依次类推。

现在假设 $x(n)$被映射为矩形数组 $x(l,m)$,而 $X(k)$被映射为相应的矩形数组 $X(p,q)$,则 DFT 可以表示为矩阵元素和相应的相位因子乘积的两次求和后的结果。为了更有针对性,我们对$x(n)$采用式(8.1.10)的按列映射的方式,而对 DFT 的结果采用式(8.1.11)按行映射的方式。从而有

$$X(p,q)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{L-1}x(l,m)W_N^{(Mp+q)(mL+l)} \tag{8.1.13}$$

但

$$W_N^{(Mp+q)(mL+l)}=W_N^{MLmp}W_N^{mLq}W_N^{Mpl}W_N^{lq} \tag{8.1.14}$$

然而,$W_N^{Nmp}=1$,$W_N^{mqL}=W_{N/L}^{mq}=W_M^{mq}$和 $W_N^{Mpl}=W_{N/M}^{pl}=W_L^{pl}$。

通过这些简化,式(8.1.13)可以表示为

$$X(p,q)=\sum_{l=0}^{L-1}\left\{W_N^{lq}\left[\sum_{m=0}^{M-1}x(l,m)W_M^{mq}\right]\right\}W_L^{lp} \tag{8.1.15}$$

表达式(8.1.15)涉及到长度为 M 和 L 的 DFT 的计算。为了详细说明,我们将其细分为三个步骤:

1. 首先,我们计算 M 点 DFT

$$F(l,q)\equiv\sum_{m=0}^{M-1}x(l,m)W_M^{mq},\qquad 0\leqslant q\leqslant M-1 \tag{8.1.16}$$

按行计算有 $l=0,1,\cdots,L-1$。

2. 然后,我们计算新的矩形数组 $G(l,q)$,定义如下:

$$G(l,q)=W_N^{lq}F(l,q),\qquad \begin{matrix}0\leqslant l\leqslant L-1\\ 0\leqslant q\leqslant M-1\end{matrix} \tag{8.1.17}$$

3. 计算 L 点 DFT

$$X(p,q)=\sum_{l=0}^{L-1}G(l,q)W_L^{lp} \tag{8.1.18}$$

对数组 $G(l,q)$,按列计算有 $q=0,1,\cdots,M-1$。

表面上看上述计算过程比直接计算 DFT 更加复杂。但是,让我们分析一下式(8.1.15)的计算复杂度。第一步包括计算 L 个 M 点 DFT,因此,这一步要求 LM^2 次复数乘法以及 $LM(M-1)$次复数加法。第二步要求 LM 次复数乘法。最后,第三步要求 ML^2 次复数乘法和 $ML(L-1)$次复数加法。所以,计算复杂度为

$$\begin{matrix}\text{复数乘法:}\ N(M+L+1)\\ \text{复数加法:}\ N(M+L-2)\end{matrix} \tag{8.1.19}$$

其中 $N=ML$。所以乘法的次数从 N^2 次减少为 $N(M+L+1)$次,而且加法的次数从 $N(N-1)$次减少为 $N(M+L-2)$次。

例如,假设 $N=1000$ 且我们选择 $L=2$ 和 $M=500$。该算法使乘法次数由直接计算 DFT 的 10^6 次复数乘法变成了 503 000 次复数乘法,基本上将乘法次数减少了接近 1/2。加法次数也会减少近 1/2。

当 N 为复合数时,N 能够被分解为素数乘积的形式

$$N=r_1r_2\cdots r_v \tag{8.1.20}$$

从而上面的分解就会重复$(v-1)$次。这个过程会导致许多更小的 DFT,从而产生更有效的计算 DFT 的算法。

实际过程中，首先将序列 $x(n)$ 分段成为一个 M 列 L 行的矩形数组，从而可以计算 L 点 DFT 和 M 点 DFT。数据的进一步分解涉及到将每行（或者列）分段成可用更短的 DFT 计算的矩形数组。这个过程在 N 被分解为其素数因子时终止。

例 8.1.1

为了说明计算过程，让我们计算一个 $N=15$ 点的 DFT。因为 $N=5\times3=15$，所以我们选择 $L=5$ 和 $M=3$。换言之，我们将 15 点序列 $x(n)$ 按列存储如下：

$$
\begin{array}{llll}
\text{行1:} & x(0,0)=x(0) & x(0,1)=x(5) & x(0,2)=x(10)\\
\text{行2:} & x(1,0)=x(1) & x(1,1)=x(6) & x(1,2)=x(11)\\
\text{行3:} & x(2,0)=x(2) & x(2,1)=x(7) & x(2,2)=x(12)\\
\text{行4:} & x(3,0)=x(3) & x(3,1)=x(8) & x(3,2)=x(13)\\
\text{行5:} & x(4,0)=x(4) & x(4,1)=x(9) & x(4,2)=x(14)
\end{array}
$$

现在我们计算 5 行中每一行的 3 点 DFT。这会产生下面的 5×3 数组：

$$
\begin{array}{lll}
F(0,0) & F(0,1) & F(0,2)\\
F(1,0) & F(1,1) & F(1,2)\\
F(2,0) & F(2,1) & F(2,2)\\
F(3,0) & F(3,1) & F(3,2)\\
F(4,0) & F(4,1) & F(4,2)
\end{array}
$$

下一步是将 $F(l,q)$ 的每一项乘以相位因子 $W_N^{lq}=W_{15}^{lq}$，$0\leqslant l\leqslant4$，$0\leqslant q\leqslant2$。计算得到 5×3 数组：

列1	列2	列3
$G(0,0)$	$G(0,1)$	$G(0,2)$
$G(1,0)$	$G(1,1)$	$G(1,2)$
$G(2,0)$	$G(2,1)$	$G(2,2)$
$G(3,0)$	$G(3,1)$	$G(3,2)$
$G(4,0)$	$G(4,1)$	$G(4,2)$

最后一步是对 3 列中的每一列计算 5 点 DFT。此计算的结果就是所求的 DFT：

$$
\begin{array}{lll}
X(0,0)=X(0) & X(0,1)=X(1) & X(0,2)=X(2)\\
X(1,0)=X(3) & X(1,1)=X(4) & X(1,2)=X(5)\\
X(2,0)=X(6) & X(2,1)=X(7) & X(2,2)=X(8)\\
X(3,0)=X(9) & X(3,1)=X(10) & X(3,2)=X(11)\\
X(4,0)=X(12) & X(4,1)=X(13) & X(4,2)=X(14)
\end{array}
$$

图 8.1.3 说明了计算的步骤。

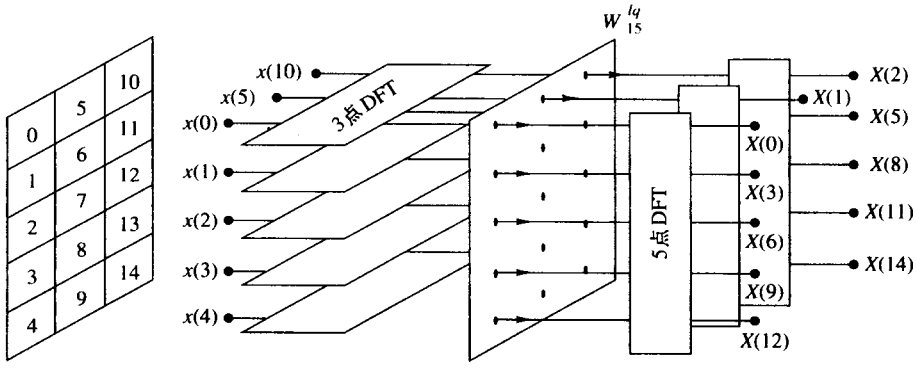


图 8.1.3　通过 3 点和 5 点 DFT 计算 $N=15$ 点 DFT

我们将输入和输出都展开成为一维数组的形式。当数据序列 $x(n)$和输出 DFT $X(k)$按第 1 行至第 5 行的顺序从二维数组中读出时,我们得到如下序列:

输入数组

$$x(0)\ x(5)\ x(10)\ x(1)\ x(6)\ x(11)\ x(2)\ x(7)\ x(12)\ x(3)\ x(8)\ x(13)\ x(4)\ x(9)\ x(14)$$

输出数组

$$X(0)\ X(1)\ X(2)\ X(3)\ X(4)\ X(5)\ X(6)\ X(7)\ X(8)\ X(9)\ X(10)\ X(11)\ X(12)\ X(13)\ X(14)$$

我们观察到在计算 DFT 的过程中,输入数据序列被打乱了顺序。另一方面,输出序列顺序正常,而输入序列被重新排列。这种情况下对输入数据的重新排列是由于将一维数组分割为长方形数组以及 DFT 计算的顺序共同导致的。这种对数据序列的重新排列是多数 FFT 算法的共同特点。

把上面描述的算法总结一下,它包括以下计算步骤:

算法 1

1. 将信号按列存储。
2. 对每行计算 M 点 DFT。
3. 将矩阵数组的每一项乘以相位因子 W_N^{lq}。
4. 对每列计算 L 点 DFT。
5. 将结果数组按行读出。

如果将输入信号按行存储而将结果数组按列存储,则可以得到一个类似的算法。在这种情况下,我们选择

$$\begin{aligned} n &= Ml + m \\ k &= qL + p \end{aligned} \tag{8.1.21}$$

这种选择会导致 DFT 的公式的形式变为

$$\begin{aligned} X(p,q) &= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{L-1} x(l,m) W_N^{pm} W_L^{pl} W_M^{qm} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} W_M^{mq} \left[\sum_{l=0}^{L-1} x(l,m) W_L^{lp}\right] W_N^{mp} \end{aligned} \tag{8.1.22}$$

因此,我们得到了第二个算法。

算法 2

1. 将信号按行存储。
2. 对每列计算 L 点 DFT。
3. 将矩阵数组的每一项乘以相位因子 W_N^{pm}。
4. 对每列计算 M 点 DFT。
5. 将结果数组按列读出。

两种算法的计算复杂度是完全一样的,不同的是运算被安排的顺序。在下面几节中,我们将利用"分而治之"的方法来推导当 DFT 的长度被限制为 2 或 4 的幂时的快速算法。

8.1.3 基 2 FFT 算法

在上一节我们描述了使用"分而治之"的方法得到的 4 个有效计算 DFT 的算法。这种方法可

以在数据点数 N 不是质数时使用。特别地，当 N 为多个因子乘积时，即 N 可以被分解为 $N = r_1 r_2 r_3 \cdots r_v$ 时，其中 $\{r_j\}$ 是质数，这种方法非常有效。

特别重要的一种情况是当 $r_1 = r_2 = \cdots = r_v \equiv r$ 时，此时 $N = r^v$。这种情况下 DFT 的长度为 r，所以计算 N 点 DFT 有一种一般模式。数字 r 被称为 FFT 算法的基数。

在这一节中，我们描述目前使用得最为广泛的基 2 算法。基 4 算法将在下一节介绍。

让我们借助于式(8.1.16)至式(8.1.18)给出的“分而治之”的方法来考虑 $N = 2^v$ 点 DFT 的计算。我们选择 $M = N/2$ 和 $L = 2$。这种选择会导致 N 点数据序列被分成两个长度为 $N/2$ 的子序列 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$，分别对应于 $x(n)$ 中奇数下标和偶数下标的子序列，即

$$\begin{aligned} f_1(n) &= x(2n) \\ f_2(n) &= x(2n+1), \qquad n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \tag{8.1.24}$$

所以，$f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 是以 2 为因子从 $x(n)$ 中抽取出来的。因此，这种 FFT 算法被称为按时间抽取算法。

现在，N 点 DFT 算法用抽取序列的 DFT 可表示为

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \\ &= \sum_{n\text{为偶数}} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n\text{为奇数}} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m) W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1) W_N^{k(2m+1)} \end{aligned} \tag{8.1.24}$$

但 $W_N^2 = W_{N/2}$。使用这种替换后，式(8.1.24)可以表示为

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_1(m) W_{N/2}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_2(m) W_{N/2}^{km} \\ &= F_1(k) + W_N^k F_2(k), \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \end{aligned} \tag{8.1.25}$$

其中，$F_1(k)$ 和 $F_2(k)$ 分别是序列 $f_1(m)$ 和 $f_2(m)$ 的长度为 $N/2$ 的 DFT。

因为 $F_1(k)$ 和 $F_2(k)$ 是周期性的，周期为 $N/2$，所以我们有 $F_1(k + N/2) = F_1(k)$ 和 $F_2(k + N/2) = F_2(k)$。此外，由于因子 $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$，所以式(8.1.25)可以表示为

$$X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k), \qquad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \tag{8.1.26}$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = F_1(k) - W_N^k F_2(k), \qquad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \tag{8.1.27}$$

我们观察到直接计算 $F_1(k)$ 需要 $(N/2)^2$ 次复数乘法。直接计算 $F_2(k)$ 也需要同样次数的复数乘法。此外，计算 $W_N^k F_2(k)$ 还需要 $N/2$ 次复数乘法。所以，计算 $X(k)$ 需要 $2(N/2)^2 + N/2 = N^2/2 + N/2$ 次复数乘法。第一步就将算法中乘法的次数由 N^2 降为 $N^2/2 + N/2$。

根据前面的记法，我们定义

$$\begin{aligned} G_1(k) &= F_1(k), \qquad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \\ G_2(k) &= W_N^k F_2(k), \quad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

DFT的结果 $X(k)$可以表示为

$$\begin{aligned} X(k) &= G_1(k) + G_2(k), \quad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \\ X(k + \frac{N}{2}) &= G_1(k) - G_2(k), \quad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \tag{8.1.28}$$

图 8.1.4 说明了这个算法。

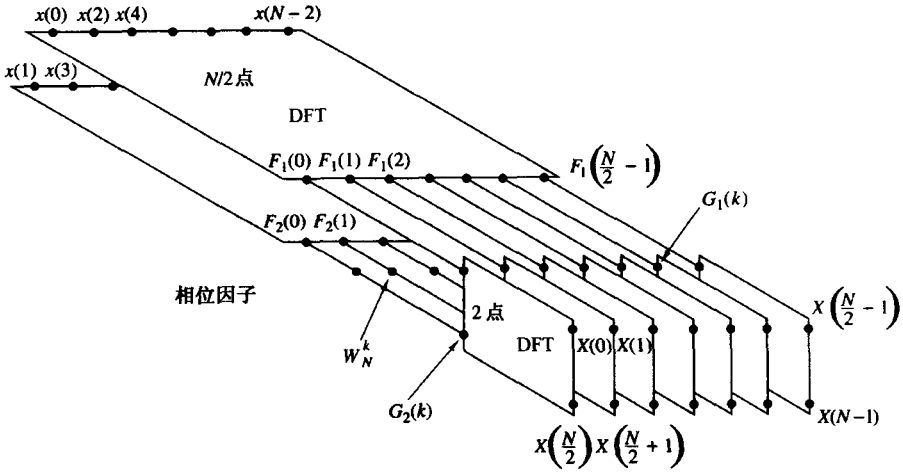


图 8.1.4 按时间抽取算法的第一步

使用按时间抽取算法一次后,我们分别对 $f_1(n)$和 $f_2(n)$重复这个过程。从而 $f_1(n)$将会导致如下两个长度为 $N/4$ 的序列:

$$\begin{aligned} v_{11}(n) &= f_1(2n), \qquad n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{4} - 1 \\ v_{12}(n) &= f_1(2n + 1), \quad n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \tag{8.1.29}$$

而 $f_2(n)$将产生

$$\begin{aligned} v_{21}(n) &= f_2(2n), \qquad n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{4} - 1 \\ v_{22}(n) &= f_2(2n + 1), \quad n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \tag{8.1.30}$$

通过计算 $N/4$ 点 DFT,我们可以从以下关系得到 $N/2$ 点 DFT $F_1(k)$和 $F_2(k)$:

$$\begin{aligned} F_1(k) &= V_{11}(k) + W_{N/2}^k V_{12}(k), \quad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{4} - 1 \\ F_1\left(k + \frac{N}{4}\right) &= V_{11}(k) - W_{N/2}^k V_{12}(k), \quad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \tag{8.1.31}$$

$$\begin{aligned} F_2(k) &= V_{21}(k) + W_{N/2}^k V_{22}(k), \quad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{4} - 1 \\ F_2\left(k + \frac{N}{4}\right) &= V_{21}(k) - W_{N/2}^k V_{22}(k), \quad k = 0, \cdots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \tag{8.1.32}$$

其中,$\{V_{ij}(k)\}$是$\{v_{ij}(n)\}$的 $N/4$ 点 DFT。

我们观察到 $\{V_{ij}(k)\}$ 需要 $4(N/4)^2$ 次乘法，所以 $F_1(k)$ 和 $F_2(k)$ 的计算可以使用 $N^2/4 + N/2$ 次复数乘法来完成。利用 $F_1(k)$ 和 $F_2(k)$ 计算 $X(k)$ 还需要额外的 $N/2$ 次复数乘法。从而，总乘法次数被减少了接近一半，即只需要 $N^2/4 + N$ 次乘法。

数据序列的抽取可以不断重复，直到导致的序列简化为 1 点序列。对于 $N = 2^v$，这种抽取可执行 $v = \text{lb}\ N$ 次，所以复数乘法的总次数减少为 $(N/2)\ \text{lb}\ N$。复数加法的次数为 $N\ \text{lb}\ N$。表 8.1 对比了 FFT 和直接计算 DFT 的复数乘法的次数。

表 8.1　直接计算 DFT 与 FFT 算法的计算复杂度比较

点数，N	直接计算中的复数乘法次数，N^2	FFT 算法中的复数乘法次数，$(N/2)\ \text{lb}\ N$	加速因子
4	16	4	4.0
8	64	12	5.3
16	256	32	8.0
32	1024	80	12.8
64	4096	192	21.3
128	16 384	448	36.6
256	65 536	1024	64.0
512	262 144	2304	113.8
1024	1 048 576	5120	204.8

为演示起见，图 8.1.5 描述了一个 $N = 8$ 点 DFT 的计算。我们观察到计算由三阶段完成，开始计算 4 次 2 点 DFT，然后计算 2 次 4 点 DFT，最后计算 1 次 8 点 DFT。图 8.1.6 说明了 $N = 8$ 时，较小的 DFT 的组合是如何形成较大的 DFT 的。

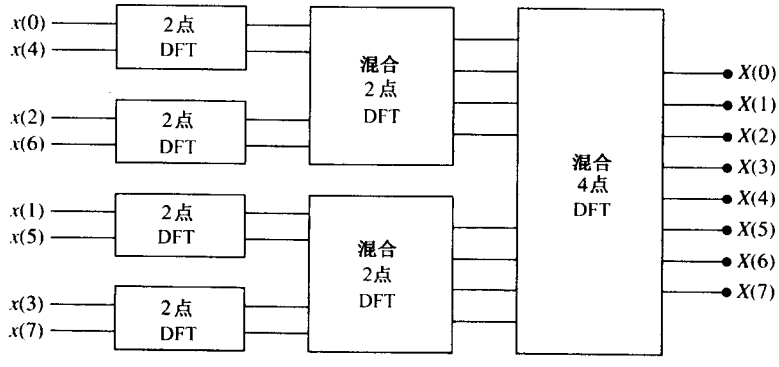


图 8.1.5　计算 $N = 8$ 点 DFT 的三个阶段

观察到每一阶段执行的基本运算，如图 8.1.6 中所示，是将一对复数 (a, b)，将 b 乘以 W_N^r，然后 a 加上或者减去其积，得到新的一对复数 (A, B)。图 8.1.7 中说明了这种基本运算，这种运算称为蝶形运算，因为它的流图看起来像是一只蝴蝶。

一般来说，每次蝶形运算包括一次复数乘法和两次复数加法。对于 $N = 2^v$，每一个阶段有 $N/2$ 次蝶形运算，共有 $\text{lb}\ N$ 个阶段。所以，正如上面指出的那样，共需 $(N/2)\text{lb}\ N$ 次复数乘法以及 $N\text{lb}\ N$ 次复数加法。

一旦对一对复数 (a, b) 执行了产生 (A, B) 的蝶形运算，就无须再保存 (a, b)。所以，我们可以将结果 (A, B) 保存在与 (a, b) 相同的位置。从而，为了存储每个阶段的计算结果（N 个复数），

我们需要一个固定大小的存储空间,如 $2N$ 个寄存器。因为在计算 N 点 DFT 的过程中均使用了相同的 $2N$ 个存储位置,所以我们说计算在原位进行。

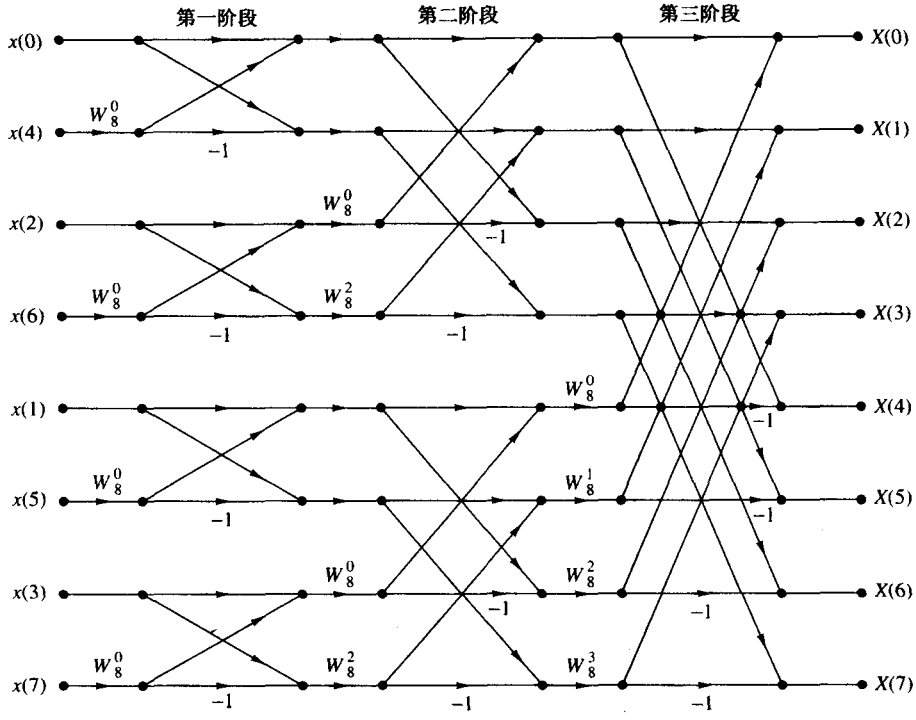


图 8.1.6 8 点按时间抽取 FFT 算法

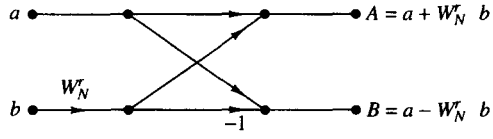


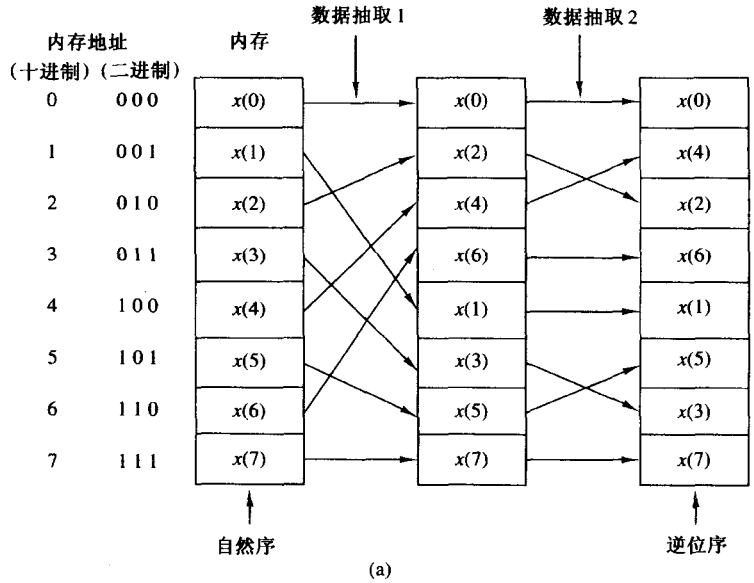
图 8.1.7 按时间抽取算法中的基本蝶形运算

第二个重要观察是输入数据序列被抽取了 $(v-1)$次后的顺序。例如,我们考察 $N=8$ 时的情况,大家知道第一次抽取得到序列 $x(0),x(2),x(4),x(6),x(1),x(3),x(5),x(7)$,第二次抽取得到序列 $x(0),x(4),x(2),x(6),x(1),x(5),x(3),x(7)$。观察图 8.1.8 可以知道这种顺序的变化是有规律的。当序列 $x(n)$的下标 n 被表示为二进制的形式时,我们注意到抽取序列的顺序可以由逆向读取上述二进制表示得到。所以,数据点 $x(3)\equiv x(011)$被存储在抽取数组中的位置 $m=110$ 或者 $m=6$ 处。从而,我们说数组 $x(n)$在被抽取后按逆位序存储。

如果将输入数据序列按逆位序存储并使用蝶形算法进行原位计算 DFT,那么得到的 DFT 序列 $X(k)$是按自然序(即 $k=0,1,2,\cdots,N-1$)获得的。另一方面,我们应指出排列 FFT 算法使其输入按自然序排列而得到的输出 DFT 按逆位序出现是可能的。进一步来说,如果我们要求输入 $x(n)$和输出序列 $x(k)$都按自然序排列,则可以得到一个 FFT 算法,它的计算不能在原位进行,而需要额外的存储空间。

另一个重要的称为按频率抽取算法的基 2 FFT 算法,是使用 8.1.2 节中叙述的"分而治之"的方法得到的,其中 $M=2$ 和 $L=N/2$。这种参数选择需要输入数据序列按列存储。为了得到这个算法,我们首先将 DFT 公式分为两个求和公式,一个为前 $N/2$ 个数据点的求和,另一个为后 $N/2$ 个数据点的求和。所以,我们得到

$$X(k)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$
$$=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x(n)W_N^{kn}+W_N^{Nk/2}\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x\left(n+\frac{N}{2}\right)W_N^{kn} \tag{8.1.33}$$



(a)

$(n_2n_1n_0)$	→	$(n_1n_0n_2)$	→	$(n_0n_1n_2)$
(0 0 0)	→	(0 0 0)	→	(0 0 0)
(0 0 1)	→	(0 1 0)	→	(1 0 0)
(0 1 0)	→	(1 0 0)	→	(0 1 0)
(0 1 1)	→	(1 1 0)	→	(1 1 0)
(1 0 0)	→	(0 0 1)	→	(0 0 1)
(1 0 1)	→	(0 1 1)	→	(1 0 1)
(1 1 0)	→	(1 0 1)	→	(0 1 1)
(1 1 1)	→	(1 1 1)	→	(1 1 1)

(b)

图 8.1.8　将数据按逆位序重新排列

因为 $W_N^{kN/2}=(-1)^k$，式(8.1.33)可以被重写为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\left[x(n)+(-1)^k x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^{kn} \tag{8.1.34}$$

现在，我们将 $X(k)$分拆(抽取)为偶数和基数样本。从而得到

$$X(2k)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\left[x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_{N/2}^{kn},\qquad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{8.1.35}$$

和

$$X(2k+1)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\left\{\left[x(n)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^n\right\}W_{N/2}^{kn},\quad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{8.1.36}$$

其中，用到了 $W_N^2=W_{N/2}$。

如果我们将 $N/2$ 点序列 $g_1(n)$和 $g_2(n)$定义为

$$g_1(n)=x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)$$
$$g_2(n)=\left[x(n)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^n,\qquad n=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{8.1.37}$$

则有

$$X(2k)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}g_1(n)W_{N/2}^{kn}$$
$$X(2k+1)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}g_2(n)W_{N/2}^{kn} \tag{8.1.38}$$

根据式(8.1.37)计算 $g_1(n)$和 $g_2(n)$,以及后续使用这些序列来计算 $N/2$ 点的 DFT,参见图 8.1.9。我们观察到图中的基本计算涉及到了图 8.1.10 中提到的蝶形运算。

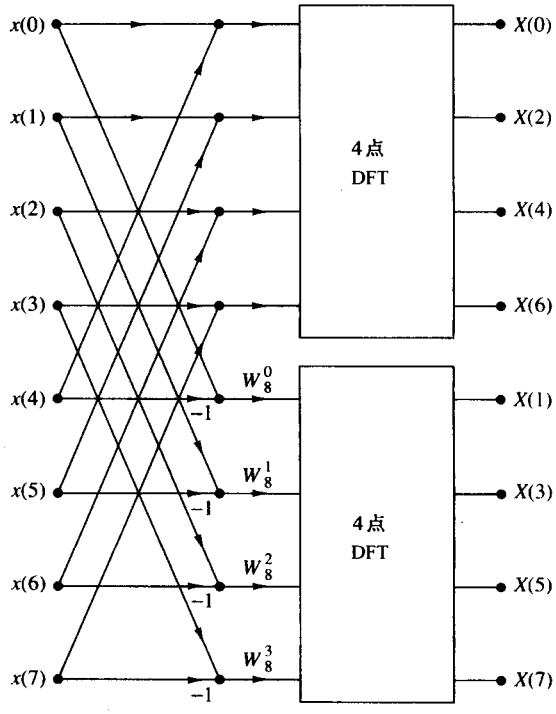


图 8.1.9 按频率抽取 FFT 算法的第一阶段

该计算过程可以通过重复对 $N/2$ 点 DFT 进行抽取得到 $X(2k)$和 $X(2k+1)$。整个计算过程包括 $v=\text{lb}\,N$ 次抽取,每次抽取包括 $N/2$ 个图 8.1.10 中说明的蝶形运算。最终按频率抽取算法需要 $(N/2)\,\text{lb}\,N$ 次复数乘法和 $N\,\text{lb}\,N$ 次复数加法,这和按时间抽取算法完全一样。图 8.1.11 给出了计算一个 8 点 DFT 的过程。

我们从图 8.1.11 观察到输入数据 $x(n)$以自然序出现,但是输出 DFT 以逆位序出现。计算是在原位进行的。但是,我们可以修改按频率抽取算法,以使输入以逆位序出现而输出以自然序出现。如果我们放弃原位计算的要求,则输入和输出都可以以自然序出现。

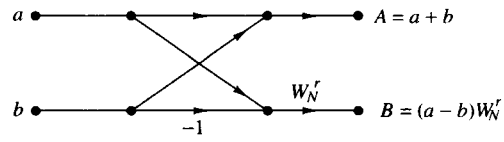


图 8.1.10　按频率抽取 FFT 算法中的基本蝶形运算

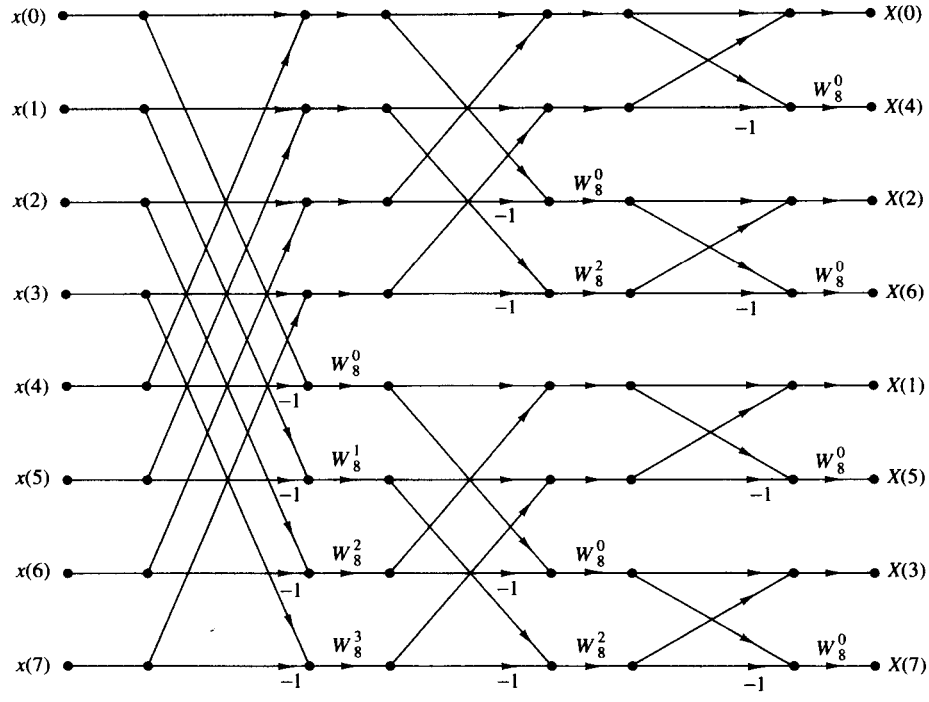


图 8.1.11　$N=8$ 点按频率抽取 FFT 算法

8.1.4　基 4 FFT 算法

当 DFT 中数据序列的长度 N 是 4 的幂($N=4^v$)时,我们当然也可以使用以 2 为基数的算法进行计算,但是在这种情况下使用以 4 为基数的算法将更加有效。

我们通过描述基 4 按时间抽取 FFT 算法开始。该算法是在 8.1.2 节中所描述的"分而治之"的方法中通过选择 $L=4$ $M=N/4$ 得到的。对于 L 和 M 的这种选择,我们有 $l,p=0,1,2,3$; $m,q=0,1,\cdots,N/4-1$; $n=4m+l$ 和 $k=(N/4)p+q$。所以,我们将 N 点输入序列抽取成 4 个子序列:$x(4n),x(4n+1),x(4n+2),x(4n+3),n=0,1,\cdots,N/4-1$。

使用式(8.1.15)我们得到

$$X(p,q)=\sum_{l=0}^{3}\left[W_N^{lq}F(l,q)\right]W_4^{lp},\qquad p=0,1,2,3 \tag{8.1.39}$$

其中,$F(l,q)$由式(8.1.16)给出,即

$$F(l,q)=\sum_{m=0}^{(N/4)-1}x(l,m)W_{N/4}^{mq},\qquad \begin{matrix} l=0,1,2,3,\\ q=0,1,2,\cdots,\dfrac{N}{4}-1 \end{matrix} \tag{8.1.40}$$

和

$$x(l,m)=x(4m+l) \tag{8.1.41}$$

$$X(p,q)=X\left(\frac{N}{4}p+q\right) \tag{8.1.42}$$

所以,由式(8.1.40)得到的 4 个 $N/4$ 点 DFT 根据式(8.1.39)结合得到了 N 点 DFT。结合 $N/4$ 点 DFT 的式(8.1.39)定义了基 4 按时间抽取算法的蝶形运算,用矩阵形式可以表示为

$$\begin{bmatrix}X(0,q)\\X(1,q)\\X(2,q)\\X(3,q)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-\mathrm{j}&-1&\mathrm{j}\\1&-1&1&-1\\1&\mathrm{j}&-1&-\mathrm{j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_N^0F(0,q)\\W_N^qF(1,q)\\W_N^{2q}F(2,q)\\W_N^{3q}F(3,q)\end{bmatrix} \tag{8.1.43}$$

图 8.1.12(a) 说明了基 4 蝶形运算,图 8.1.12(b)是一种更紧凑的形式。注意到因为 $W_N^0=1$,所以每一个蝶形运算均包括 3 次复数乘法和 12 次复数加法。

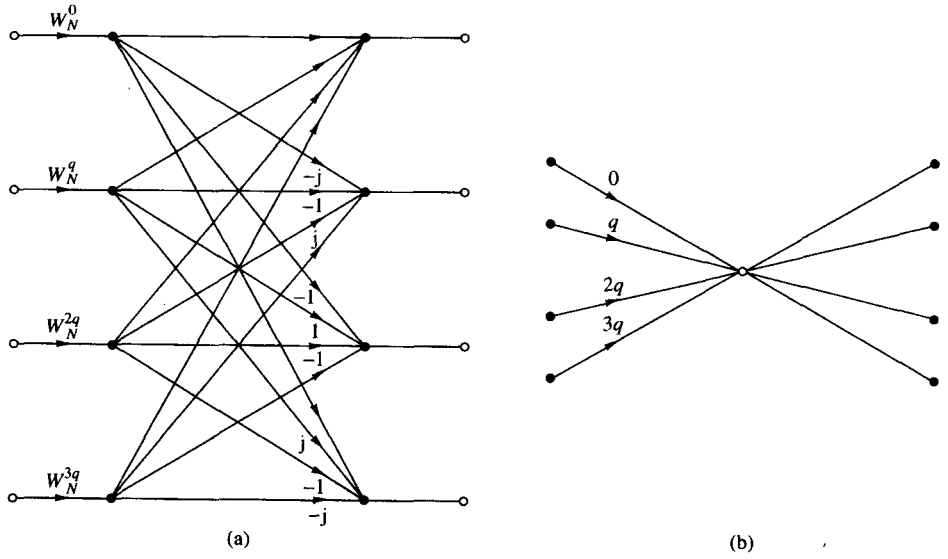


图 8.1.12 基 4 FFT 算法中的基本蝶形运算

该按时间抽取过程可以递归重复执行 v 次,所以得到的 FFT 算法包括了 v 个阶段,每个阶段包括 $N/4$ 个蝶形运算。最终的运算量是 $3vN/4=(3N/8)\ \mathrm{lb}\ N$ 次复数乘法和$(3N/2)\ \mathrm{lb}\ N$ 次复数加法。我们注意到复数乘法的次数减少了 25%,但同时复数加法的次数增加了 50%,即从 $N\ \mathrm{lb}\ N$ 次增加到了$(3N/2)\ \mathrm{lb}\ N$ 次。

一个很有趣的现象是,如果将蝶形运算的加法分两步执行,则每次蝶形运算的加法次数可以由 12 减少到 8。这可以通过将式(8.1.43)中的线性变换矩阵转换为如下的两个矩阵相乘来实现:

$$\begin{bmatrix}X(0,q)\\X(1,q)\\X(2,q)\\X(3,q)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&-\mathrm{j}\\1&0&-1&0\\0&1&0&\mathrm{j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_N^0F(0,q)\\W_N^qF(1,q)\\W_N^{2q}F(2,q)\\W_N^{3q}F(3,q)\end{bmatrix} \tag{8.1.44}$$

现在每个矩阵相乘包括 4 次加法,总共 8 次加法。所以复数加法的总数减少到 $N\ \mathrm{lb}\ N$,这与基 2 FFT 算法完全相同。同时算法将复数乘法的次数减少了 25%。

图 8.1.13 说明了基 4 按时间抽取 FFT 算法,其中数据长度 $N=16$。注意在该算法中,输入序

列以自然序出现,而输出 DFT 则已被打乱。在基 4 FFT 算法中,以 4 为因子进行抽取,抽取的序列的顺序可以通过逆向读取下标 n 的四进制表示得到(基于数字 0,1,2,3 的数制)。

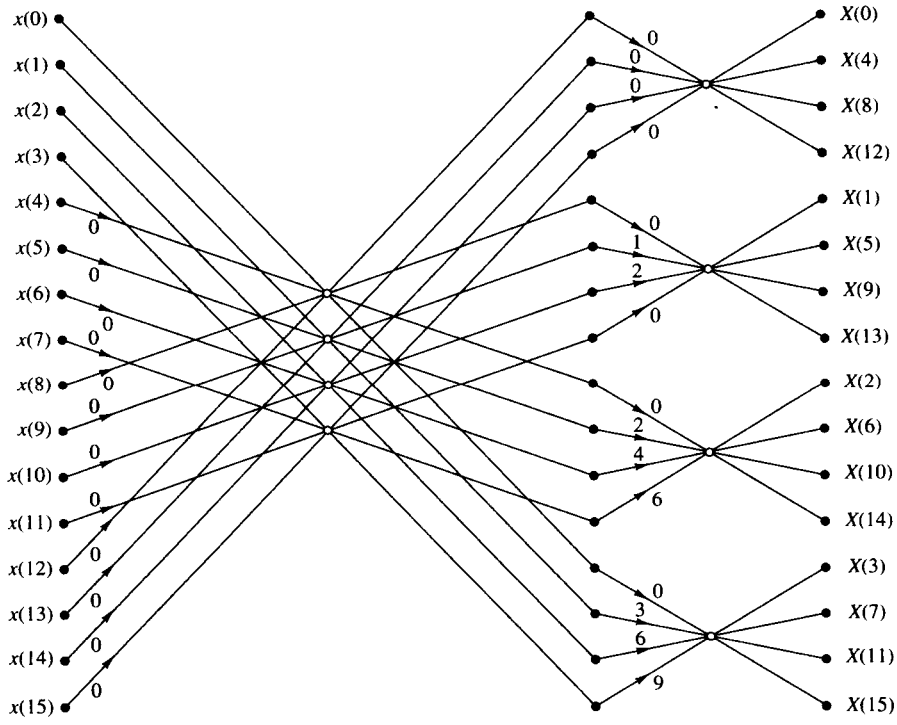


图 8.1.13　16 点基 4 按时间抽取算法,其中输入为自然序,输出为逆数字序。图中的整数乘法器表示 W_{16} 的幂

通过选择 $L = N/4, M = 4; l, p = 0,1,\cdots,N/4-1; m, q = 0,1,2,3; n = (N/4)m + l$ 和 $k = 4p + q$,可以得到基 4 按频率抽取 FFT 算法。使用这些选择的参数,由式(8.1.15)给出的通用议程可表示为

$$X(p,q) = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} G(l,q)W_{N/4}^{lp} \tag{8.1.45}$$

其中,

$$G(l,q) = W_N^{lq}F(l,q), \qquad \begin{matrix} q = 0,1,2,3 \\ l = 0,1,\cdots,\dfrac{N}{4}-1 \end{matrix} \tag{8.1.46}$$

和

$$F(l,q) = \sum_{m=0}^{3} x(l,m)W_4^{mq}, \qquad \begin{matrix} q = 0,1,2,3 \\ l = 0,1,2,3,\cdots,\dfrac{N}{4}-1 \end{matrix} \tag{8.1.47}$$

我们注意到 $X(p,q) = X(4p+q), q = 0,1,2,3$。结果是 N 点 DFT 被抽取为 4 个 $N/4$ 点 DFT,从而得到一个按频率抽取 FFT 算法。式(8.1.46)和式(8.1.47)中的运算定义了按频率抽取算法的基本基 4 蝶形运算。注意,乘以因子 W_N^{lq} 是在数据点 $x(l,m)$ 合并之后,这和基 2 按频率抽取算法的情形是一致的。

图 8.1.14 给出了一个 16 点基 4 按频率抽取 FFT 算法。其输入为自然序,而输出为逆数字序。它的计算复杂度与按时间抽取基 4 FFT 算法完全一样。

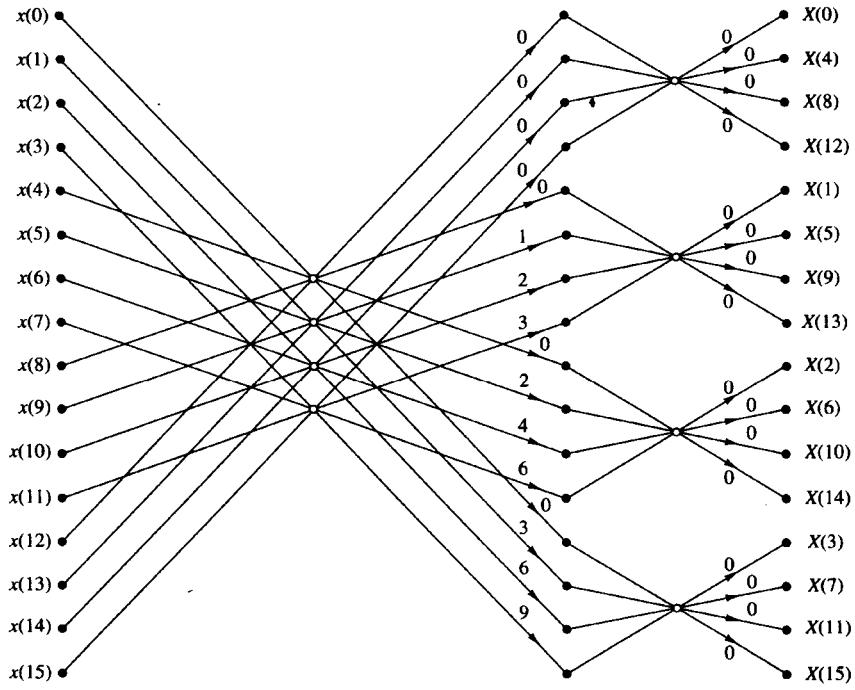


图 8.1.14 16 点基 4 按频率抽取算法,输入为自然序,输出为逆数字序

为了演示起见,我们通过将 N 点 DFT 公式拆分为 4 个较短的 DFT 公式来重新推导基 4 按频率抽取算法。我们有

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/4-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/4}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{3N/4-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=3N/4}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/4-1} x(n) W_N^{kn} + W_N^{Nk/4} \sum_{n=0}^{N/4-1} x\left(n+\frac{N}{4}\right) W_N^{kn} \\ &\quad + W_N^{kN/2} \sum_{n=0}^{N/4-1} x\left(n+\frac{N}{2}\right) W_N^{nk} + W_N^{3kN/4} \sum_{n=0}^{N/4-1} x\left(n+\frac{3N}{4}\right) W_N^{kn} \end{aligned} \tag{8.1.48}$$

根据相位因子的定义,我们有

$$W_N^{kN/4} = (-\mathrm{j})^k, \qquad W_N^{Nk/2} = (-1)^k, \qquad W_N^{3Nk/4} = (\mathrm{j})^k \tag{8.1.49}$$

将式(8.1.49)代入式(8.1.48)后,我们得到

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/4-1} \left[x(n) + (-\mathrm{j})^k x\left(n+\frac{N}{4}\right) \right.$$

$$+(-1)^k x\left(n+\frac{N}{4}\right)+(\mathrm{j})^k x\left(n+\frac{3N}{4}\right)\Bigg] W_N^{nk} \tag{8.1.50}$$

式(8.1.50)中的关系还不是 $N/4$ 点 DFT,因为相位因子依赖于 N 而不是 N/4。为了将其变成 $N/4$ 点 DFT,我们将 DFT 序列分成 4 个 $N/4$ 点子序列,即 $X(4k)$, $X(4k+1)$, $X(4k+2)$和 $X(4k+3)$, $k=0,1,\cdots,N/4-1$。从而,基 4 按频率抽取 DFT 为

$$X(4k)=\sum_{n=0}^{N/4-1}\left[x(n)+x\left(n+\frac{N}{4}\right)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)+x\left(n+\frac{3N}{4}\right)\right] W_N^{0} W_{N/4}^{kn} \tag{8.1.51}$$

$$X(4k+1)=\sum_{n=0}^{N/4-1}\left[x(n)-\mathrm{j}x\left(n+\frac{N}{4}\right)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)+\mathrm{j}x\left(n+\frac{3N}{4}\right)\right] W_N^{n} W_{N/4}^{kn} \tag{8.1.52}$$

$$X(4k+2)=\sum_{n=0}^{N/4-1}\left[x(n)-x\left(n+\frac{N}{4}\right)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)-x\left(n+\frac{3N}{4}\right)\right] W_N^{2n} W_{N/4}^{kn} \tag{8.1.53}$$

$$X(4k+3)=\sum_{n=0}^{N/4-1}\left[x(n)+\mathrm{j}x\left(n+\frac{N}{4}\right)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)-\mathrm{j}x\left(n+\frac{3N}{4}\right)\right] W_N^{3n} W_{N/4}^{kn} \tag{8.1.54}$$

其中,用到了性质 $W_n^{4kn}=W_{N/4}^{kn}$。注意,每一个 $N/4$ 点 DFT 输入是 4 个信号样本与相位因子的线性组合。该过程重复了 v 次,其中 $v=\log_4 N$。

8.1.5　分裂基 FFT 算法

观察基 2 按频率抽取算法的流图 8.1.11 可知,偶数点的 DFT 的计算和奇数点的计算无关。因此我们可以采用不同的计算方法来达到减少计算次数的目的。通过在一次 FFT 运算中混合使用基 2 分解和基 4 分解,分裂基快速傅里叶变换(SRFFT)可以实现此目的。

我们使用 Duhamel(1986)给出的按频率抽取 SRFFT 算法来演示这种方法。首先,回想一下基 2 按频率抽取 FFT 算法,偶数样本点的 N 点 DFT 为

$$X(2k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] W_{N/2}^{nk},\qquad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{8.1.55}$$

注意到这些 DFT 点可以从 $N/2$ 点 DFT 得到,而不使用任何额外的乘法。因此,一个基 2 的算法就可以满足这种计算的需要。

奇数点$\{X(2k+1)\}$的 DFT 运算要求先乘以相位因子 W_N^n。对于这些样本点,使用基 4 分解方法可以提高效率,因为 4 点 DFT 的蝶形运算的乘法次数最少。实际上,使用比 4 更大的基数并不会明显地降低运算量。

如果我们使用基4按频率抽取FFT算法来计算奇数样本的 N 点DFT,则可得到如下 $N/4$ 点DFT:

$$X(4k+1)=\sum_{n=0}^{N/4-1}\{[x(n)-x(n+N/2)] - \mathrm{j}[x(n+N/4)-x(n+3N/4)]\}W_N^n W_{N/4}^{kn} \tag{8.1.56}$$

$$X(4k+3)=\sum_{n=0}^{N/4-1}\{[x(n)-x(n+N/2)] + \mathrm{j}[x(n+N/4)-x(n+3N/4)]\}W_N^{3n} W_{N/4}^{kn} \tag{8.1.57}$$

所以,N 点DFT分解成一个没有附加相位因子的 $N/2$ 点DFT和两个带相位因子的 $N/4$ 点DFT。反复使用此分解策略直到不能再分解,最终可得到 N 点DFT。从而,我们就得到了按频率抽取SRFFT算法。

图8.1.15给出了原位32点按频率抽取SRFFT算法的信号流图。在计算的A阶段 $N=32$,上半部分的16点组成序列

$$g_0(n)=x(n)+x(n+N/2), \qquad 0\leqslant n\leqslant 15 \tag{8.1.58}$$

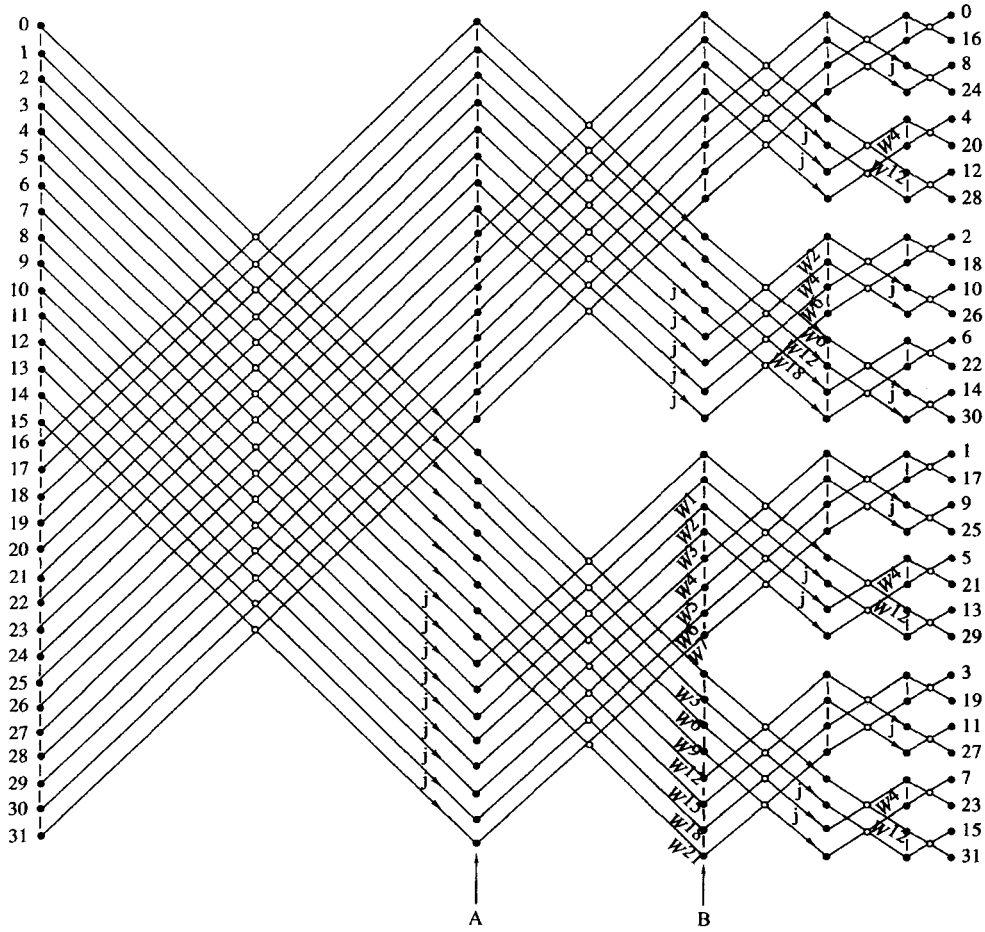


图8.1.15 长度为32的分裂基FFT算法,引自Duhamel(1986);经IEEE允许重印

此序列需要计算 $X(2k)$。接下来的 8 点组成序列

$$g_1(n) = x(n) - x(n + N/2), \qquad 0 \leqslant n \leqslant 7 \tag{8.1.59}$$

最底下的 8 点组成序列 $jg_2(n)$，其中

$$g_2(n) = x(n + N/4) - x(n + 3N/4), \qquad 0 \leqslant n \leqslant 7 \tag{8.1.60}$$

序列 $g_1(n)$和 $g_2(n)$被用于计算 $X(4k+1)$和 $X(4k+3)$。所以，在 A 阶段我们对第一部分使用基 2 抽取算法。在 B 阶段，最下方的 8 点计算$[g_1(n) + jg_2(n)]W_{32}^{3n}$，$0 \leqslant n \leqslant 7$，它用来计算 $X(4k+3)$，$0 \leqslant k \leqslant 7$。由其往上，接下来的 8 点计算$[g_1(n) - jg_2(n)]W_{32}^{n}$，$0 \leqslant n \leqslant 7$，从而得到 $X(4k+1)$，$0 \leqslant k \leqslant 7$。所以在 B 阶段，我们完成了基 4 算法的第一次抽取。所以 SRFFT 的基本蝶形运算单元为“L 型”，如图 8.1.16 所示。

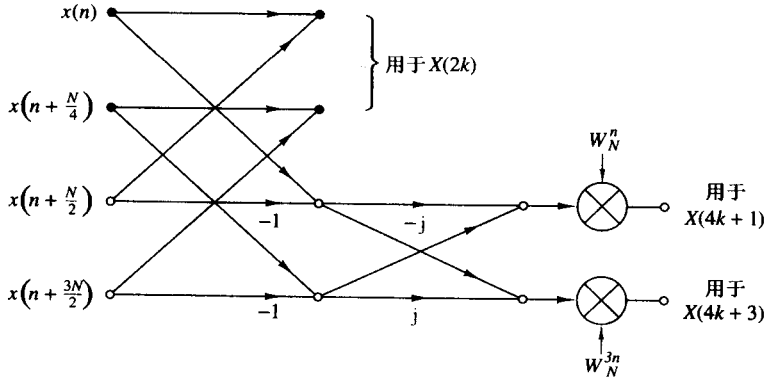


图 8.1.16　SRFFT 算法的蝶形运算单元

现在我们重复上述的计算过程。从 A 阶段顶部的 16 点开始，我们对此 16 点 DFT 重复上述分解。换言之，我们将把该计算分解为一个 8 点基 2 DFT 和两个 4 点基 4 DFT。所以在 B 阶段，顶部的 8 点组成序列($N = 16$)

$$g_0'(n) = g_0(n) + g_0(n + N/2), \qquad 0 \leqslant n \leqslant 7 \tag{8.1.61}$$

而余下的 8 点组成两个 4 点序列 $g_1'(n)$和 $jg_2'(n)$，其中

$$\begin{aligned} g_1'(n) &= g_0(n) - g_0(n + N/2), \qquad 0 \leqslant n \leqslant 3 \\ g_2'(n) &= g_0(n + N/4) - g_0(n + 3N/4), \qquad 0 \leqslant n \leqslant 3 \end{aligned} \tag{8.1.62}$$

B 阶段底部 16 点的运算为两个 8 点 DFT，所以每个 8 点 DFT 被分解为一个 4 点基 2 DFT 和一个 4 点基 4 DFT。在最后阶段，计算将结合所有两点序列。

表 8.2 比较了分别使用基 2、基 4、基 8 以及分裂基情况下，N 点复数 DFT 所需要的非平凡实数乘法和加法次数。可以看出 SRFFT 的次数是最少的，也正由于这种原因它被很多实际应用所采用。

另一种 SRFFT 算法由 Price(1990)开发。它和 Duhamel 的算法的关系是，基 4 DFT 算法中 $X(4k+1)$和 $X(4k+3)$分别涉及到序列$[g_1(n) - jg_2(n)]W_N^n$ 和$[g_1(n) + jg_2(n)]W_N^{3n}$ 的 $N/4$ 点 DFT。实际上，上述表达式中 $X(4k+1)$可以视为序列 $g_1(n)$和 $g_2(n)$乘以因子(矢量)$(1, -j) = (1, W_{32}^{8})$和 W_N^n，相应的 $X(4k+3)$可以视为乘以$(1, j) = (1, W_{32}^{-8})$和 W_N^{3n}。事实上，可以重新排列运算以使 $X(4k+3)$的因子为$(-j, -1) = -(W_{32}^{-8}, 1)$。使用这种相位旋转后，$X(4k+3)$的相位因子和 $X(4k+1)$的相位

因子互为镜像。例如,在图 8.1.15 的 B 阶段,相位因子 $W^{21}, W^{18}, \cdots, W^{3}$ 被 $W^{1}, W^{2}, \cdots, W^{7}$ 取代。这种镜像对称出现在算法的每一个阶段。相比于 Duhamel 的算法,这种算法必须计算的相位因子的个数及存储空间均可以减少一半。这种算法被称为"镜像"FFT(MFFT)算法。

表 8.2 计算 N 点复数 DFT 的非平凡实数乘法与加法次数

	实数乘法				实数加法			
N	基数为 2	基数为 4	基数为 8	分裂基	基数为 2	基数为 4	基数为 8	分裂基
16	24	20		20	152	148		148
32	88			68	408			388
64	264	208	204	196	1032	976	972	964
128	712			516	2504			2308
256	1800	1392		1284	5896	5488		5380
512	4360		3204	3076	13 566		12 420	12 292
1024	10 248	7856		7172	30 728	28 336		27 652

来源:摘自 Duhamel(1986)。

另外一种可以将存储的相位因子减少一半的方法是将相位因子数组从中点相移 90°,在 SRFFT 计算的输出处如有必要可以再去除其影响。这种方法和 SRFFT 算法相结合就得到了另一种算法——"相位"FFT(PFFT)算法(Prince 1990)。

8.1.6 FFT 算法的实现

现在我们已经描述了基 2、基 4 FFT 算法,是时候考虑一下实现的问题了。我们只讨论基 2 算法,因为对以大于等于 4 为基数的方法有相似的结论。

一般来说,基 2 FFT 算法由如下步骤组成:一次将两个数从内存中取出,进行蝶形运算,然后再将结果放回到内存中去。这个过程在计算 N 点 DFT 的情况下重复了(N lb N)/2 次。

在算法的每个阶段,蝶形运算都需要以自然序或者逆位序排列的相位因子{W_N^k}。有效的实现方式是一次性地将所有相位因子计算好,然后存储在一个表中,存储的顺序是以自然序还是以逆位序由算法的需求决定。

存储容量是另外一个需要考虑的问题。如果算法进行原位计算,则需要 $2N$ 个存储空间,因为数字是复数。但是,我们也会将存储空间扩大到 $4N$,从而简化 FFT 运算的索引过程。每一阶段完成后,将输入输出的存储空间对换。使用两倍的存储空间的另一个好处是,可以使输入/输出序列都以自然序方式存储。

和索引相关的还有一些其他的问题,即逆位序和算法并行度。从更广泛的意义上来说,这个问题是特定算法和其相应实现(软件和硬件实现)间的一个函数。在使用定点运算或者浮点运算的小机器上,舍入误差也是必须要考虑的一个问题。这个问题将在 8.4 节中讨论。

虽然上面讨论的 FFT 算法是用来有效计算 DFT 的,但它们也同样能够用于计算 IDFT,形如

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk} \tag{8.1.63}$$

两者间的区别只是 IDFT 的归一化因子 $1/N$ 和相位因子 W_N。所以,只要改变相位因子 W 右上角系数的符号并将输出结果除以 N,计算 DFT 的 FFT 算法就变成了计算 IDFT 的 FFT 算法。

实际上,如果我们改变 8.1.3 节中按时间抽取算法的流图,改变相位因子的符号,对调输入输出,并将输出除以 N,则我们就得到了按时间抽取的 IDFT 算法。换种情况,如果从 8.1.3 节中按频

率抽取的 FFT 的流图出发，重复上面的步骤，也能得到按频率抽取的 IDFT 算法。所以从 FFT 算法得到 IDFT 算法是很简单的事。

最后，我们注意到我们的讨论中只强调了基 2、基 4 以及分裂基 FFT 算法。它们也是目前实践中最广泛使用的算法。当数据点的长度不是 2 或 4 的幂时，只需要向数据后简单加 0，使得 $N=2^v$ 或 $N=4^v$ 就可以了。

对于 FFT 算法复杂性的度量，我们只强调了运算次数(乘法和加法)。虽然对计算复杂度而言这是很重要的测试标准，但在其他实际 FFT 算法的实现中还有其他问题需要考虑。这包括处理器架构，可用的指令集，储存相位因子的数据结构，以及其他一些考虑。

对于一般目的计算而言，数值的运算量占主要因素，基 2、基 4 和分裂基 FFT 算法是很好的候选者。但对于有特殊目的的数字信号处理来说，DSP 处理器通常有单步乘加操作、逆位序索引，以及高度的并行性的特点，这就使得算法的结构规整性和计算量具有同样重要的地位。所以，基 2、基 4 按频率抽取 FFT 算法通常在速度和精确度上更有优势。结构不规整导致了 SRFFT 算法并不适合在数字信号处理器上实现。结构的规整性对于在矢量处理器、多处理器和大规模集成电路上实现 FFT 算法同样是很重要的。处理器间通信同样是并行处理器实现的一个重要考量。

综上所述，我们介绍了 FFT 算法实现的几个重要考量。数字信号处理技术的进步将会继续影响实际应用中对 FFT 算法的选择。

8.2　FFT 算法的应用

上一节描述的 FFT 算法可以在众多的领域中找到应用。包括线性滤波、相关计算、谱分析。基本上，FFT 算法被用做计算 DFT 和 IDFT 的有效途径。

在这一节中，我们将考察如何使用 FFT 算法进行线性滤波以及计算两个序列的互相关系数。使用 FFT 算法进行谱估计将在第 14 章中介绍。我们还会介绍如何将两个实序列组成一个复序列来进一步提高 FFT 算法的效率。

8.2.1　有效计算两个实序列的 DFT

上面提到的 FFT 算法被设计用来计算复数乘法和加法，然而输入数据有可能是实数。这样做的原因是相位因子是复数，所以在第一阶段之后算法基本上都是复数。

考虑到算法可以接收复数输入，我们可以利用这一潜力来计算两个实序列的 DFT。

假设 $x_1(n)$和 $x_2(n)$是长度为 N 的实值序列，则复序列 $x(n)$可被定义为

$$x(n)=x_1(n)+\mathrm{j}x_2(n),\qquad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{8.1.21}$$

DFT 是线性的，所以 $x(n)$的 DFT 可以表示为

$$X(k)=X_1(k)+\mathrm{j}X_2(k) \tag{8.2.2}$$

序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$可以用 $x(n)$表示为

$$x_1(n)=\frac{x(n)+x^*(n)}{2} \tag{8.2.3}$$

$$x_2(n)=\frac{x(n)-x^*(n)}{2\mathrm{j}} \tag{8.2.4}$$

所以 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的 DFT 为

$$X_1(k)=\frac{1}{2}\{\mathrm{DFT}[x(n)]+\mathrm{DFT}[x^*(n)]\} \tag{8.2.5}$$

$$X_2(k)=\frac{1}{2\mathrm{j}}\{\mathrm{DFT}[x(n)]-\mathrm{DFT}[x^*(n)]\} \tag{8.2.6}$$

回忆 $x^*(n)$的 DFT 是 $X^*(N-k)$,所以

$$X_1(k)=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)] \tag{8.2.7}$$

$$X_2(k)=\frac{1}{\mathrm{j}2}[X(k)-X^*(N-k)] \tag{8.2.8}$$

所以,对复序列 $x(n)$使用单次 DFT,我们能够计算两个实序列的 DFT,只是在使用式(8.2.7)和式(8.2.8)从 $x(k)$计算 $x_1(k)$和 $x_2(k)$时,引入了少量的额外运算。

8.2.2 有效计算 2N 点实序列的 DFT

假设 $g(n)$是一个 $2N$ 点实序列。我们现在说明如何使用 N 点 DFT 来得到 $g(n)$的 $2N$ 点 DFT。首先,我们定义

$$\begin{aligned}x_1(n)&=g(2n)\\x_2(n)&=g(2n+1)\end{aligned} \tag{8.2.9}$$

所以,我们将 $2N$ 点实序列分解为两个 N 点实序列。现在我们应用上一节描述的方法。

令 $x(n)$为 N 点复序列

$$x(n)=x_1(n)+\mathrm{j}x_2(n) \tag{8.2.10}$$

由上一节的结果,我们有

$$\begin{aligned}X_1(k)&=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]\\X_2(k)&=\frac{1}{2\mathrm{j}}[X(k)-X^*(N-k)]\end{aligned} \tag{8.2.11}$$

最后,我们用两个 N 点 DFT $X_1(k)$和 $X_2(k)$来表示 $2N$ 点 DFT。为完成这一步,我们使用按时间抽取 FFT 算法,即

$$\begin{aligned}G(k)&=\sum_{n=0}^{N-1}g(2n)W_{2N}^{2nk}+\sum_{n=0}^{N-1}g(2n+1)W_{2N}^{(2n+1)k}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)W_N^{nk}+W_{2N}^k\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n)W_N^{nk}\end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned}G(k)&=X_1(k)+W_2^kNX_2(k), &k=0,1,\cdots,N-1\\G(k+N)&=X_1(k)-W_2^kNX_2(k), &k=0,1,\cdots,N-1\end{aligned} \tag{8.2.12}$$

所以,我们根据式(8.2.11)和式(8.2.12)进行一些额外运算就可以从 N 点 DFT 得到 $2N$ 点实序列的 DFT。

8.2.3 FFT 算法在线性滤波与相关分析中的应用

FFT 算法的一个重要应用是对长序列进行 FIR 线性滤波。在第 7 章中我们描述了两种方法——重叠相加法和重叠存储法——来使用 DFT 对长序列进行 FIR 线性滤波。本节我们考虑使用这两种方法同时应用 FFT 算法进行 DFT 和 IDFT 的计算。

令 $h(n),0\leqslant n\leqslant M-1$ 是 FIR 滤波器的单位冲击响应函数,$x(n)$表示输入数据序列。FFT 算法的长度为 $N=L+M-1$,L 是滤波器正在处理的新数据个数。假设对任何 M,选择合适的 L 使得 N 为 2 的幂。为便于讨论,这里只考虑基 2 FFT 算法。

$h(n)$的 N 点 DFT 需要在后面补充 $L-1$ 个零,变换的结果记为 $H(k)$。该计算执行一次 FFT 运算,得到 N 个复数值。为了更明确,我们假设采用按频率抽取 FFT 算法计算 $H(k)$。这会导致 $H(k)$以逆位序方式存储在内存中。

在重叠存储法中,每个数据块的前 $M-1$ 个数据点同时也是上一个块的最后 $M-1$ 个数据点。每个数据块包括 L 个新数据,所以 $N=L+M-1$。每个数据块的 N 点 DFT 由 FFT 算法实现。如果使用了按频率抽取算法,那么输入数据不需要重排序而且 DFT 的结果按逆位序排列。因为这正和 $H(k)$的顺序相同,我们将数据 DFT 的结果 $X_m(k)$乘以 $H(k)$,就可得到结果

$$Y_m(k)=H(k)X_m(k)$$

同样,它也是逆位序排列的。

DFT 逆变换(IDFT)可以通过在使用 FFT 算法时以逆位序输入数据,产生的结果是自然序的。所以,整个计算过程中不需要进行数据重排列。

如果使用了重叠相加法来计算线性滤波,那么使用 FFT 算法的方式是相似的。唯一的区别是 N 点数据包括 L 个新数据和 $M-1$ 个 0。当对每个数据块使用 IDFT 后,N 点滤波后的结果是相互重叠的,如 7.3.2 节所示,相邻两段间重叠的 $M-1$ 个数据相加得到需要的输出。

让我们进一步考察使用 FFT 算法进行线性滤波算法的算法复杂度。为此目的,$H(k)$由于只计算一次且并不大,故其计算量可以忽略。每次 FFT 需要$(N/2)\ \mathrm{lb}\ N$ 次复数乘法和 $N\ \mathrm{lb}\ N$ 次复数加法。而且 FFT 执行了两次,一次用于 DFT,另一次用于 IDFT,相应有$(N/2)\ \mathrm{lb}\ N$ 次复数乘法和 $2N\ \mathrm{lb}\ N$ 次复数加法。此外,计算 $Y_m(k)$还需要 N 次复数乘法和 $N-1$ 次复数加法。所以,每输出一个数据点需要$(N\ \mathrm{lb}\ 2N)/L$ 次复数乘法和近$(2N\ \mathrm{lb}\ 2N)/L$ 次复数加法。重叠相加法还需要增加 $(M-1)/L$ 次加法。

相比之下,直接实现一个 FIR 滤波器的代价更大。每输出一个数据点,在非线性相位的情况下,需要 M 次实数乘法,在线性相位(对称)的情况下需要 $M/2$ 次。同样,加法的次数是每个输出点 $M-1$ 次(见 10.2 节)。

对比使用 FFT 算法和直接实现 FIR 滤波器的计算效率是一件有趣的事情。让我们把注意力放在乘法的次数上,因为它们比加法消耗更多的时间。假设 $M=128=2^7$,$N=2^v$。那么每输出一个数据,$N=2^v$ 点 FFT 中复数乘法的次数为

$$c(v)=\frac{N\ \mathrm{lb}\ 2N}{L}=\frac{2^v(v+1)}{N-M+1}$$

$$\approx\frac{2^v(v+1)}{2^v-2^7}$$

表 8.3 给出了不同 v 时的 $c(v)$值。我们观察到 $c(v)$有最优取值。对于 $M=128$ 的 FIR 滤波器,最优值出现在 $v=10$ 时。

我们必须强调 $c(v)$表示 FFT 方法时的复数乘法的次数。实际的乘法次数是这个数字的 4 倍。然而,即使滤波器是线性相位的(见 10.2 节),平均每个输出的计算量仍然比使用 FFT 算法要少。此外,可以将 FFT 法改进一下。根据上面的说法把两个相邻的数据块的 DFT 计算放到一起。最终的结论是,从计算复杂度的观点来看,对于实现滤波器较长的线性滤波,基于 FFT 的方法确实更有优势。

表 8.3 计算复杂度

FFT的大小 $\nu = \text{lb}N$	$c(\nu)$ 每个输出点需要的复数乘法的次数
9	13.3
10	12.6
11	12.8
12	13.4
14	15.1

用 FFT 算法来实现两个序列互相关的计算,和前面描述的 FIR 线性滤波类似。实际应用中,至少有一个序列的长度是有限的,可以类比为 FIR 滤波器的冲击响应函数。第二个序列可能是一个包含加性噪声的长序列。它可以类比为 FIR 滤波器的输入。计算时将第一个序列逆转并计算它的 DFT,我们将互相关简化为等价的卷积问题(同样也是一个 FIR 滤波问题)。因此,我们为线性滤波而发展的方法可以直接应用。

8.3 用线性滤波法计算 DFT

为了计算 N 点输入的 DFT,FFT 算法使用 N 点输入数据并产生 N 点输出。正如我们所说明的,以基 2 FFT 算法计算 N 点 DFT 需要 $(N/2)\ \text{lb}\ N$ 次乘法和 $N\text{lb}\ N$ 次加法。

但也存在一些应用只需要计算 DFT 中选定的若干点而并不需要计算整个 DFT 的情形。在这种情况下,FFT 算法不再比直接计算更有效。实际上,当需要计算的 DFT 的点数小于 $\text{lb}\ N$ 时,直接计算更为有效。

直接计算 DFT 可以被表示为对输入数据进行线性滤波。正如我们将演示的那样,线性滤波器以并联谐振器组的形式出现,每个谐振器根据 DFT 的 N 个频率分量,从 $\omega_k = 2\pi k/N, k = 0,1,\cdots N-1$ 中选择一个。

还有一些应用需要计算有限长序列在任意点的 z 变换,而不仅仅是在单位圆上。如果所求的点集在 z 平面上以一定的规律排列,那么也有可能被表示为线性滤波操作。根据这一联系,我们引入另一个算法,称为调频 z 算法。它可以计算 z 平面上不同等高线的 z 变换。该算法可以表示为一个线性滤波器。因而,调频 z 变换可以用于计算 z 平面上不同等高线的 z 变换,包括单位圆。

8.3.1 Goertzel 算法

Goertzel 算法利用了相位因子 $\{W_N^{kn}\}$ 的周期性,并且允许我们将 DFT 表示为线性滤波的形式。因为 $W_N^{-kN} = 1$,我们将 DFT 乘以这个因子,从而有

$$X(k) = W_N^{-kN}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{km} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{-k(N-m)} \tag{8.3.1}$$

注意到式(8.3.1)是卷积形式。实际上,如果我们将序列 $y_k(n)$ 定义为

$$y_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{-k(n-m)} \tag{8.3.2}$$

那么很清楚 $y_k(n)$ 是有限长输入序列 $x(n)$ 经过卷积得到的,$x(n)$ 的长度为 N,冲击响应函数为

$$h_k(n) = W_N^{-kn}u(n) \tag{8.3.3}$$

滤波器在 $n=N$ 点的输出是在频率 $\omega_k=2\pi k/N$ 处 DFT后的频率分量,即

$$X(k)=y_k(n)|_{n=N} \tag{8.3.4}$$

可以用式(8.3.1)和式(8.3.2)来印证其正确性。

冲击响应函数为 $h_k(n)$的滤波器的系统函数为

$$H_k(z)=\frac{1}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \tag{8.3.5}$$

该滤波器在频率 $\omega_k=2\pi k/N$ 处时,单位圆上有极点。所以,整个 DFT 可通过将数据块输入有 N 个单极点滤波器并联组成的滤波器组来计算,其中每一个滤波器在 DFT 的相应频率处均有极点。

我们并不使用式(8.3.2)中的卷积形式来计算 DFT,而是根据式(8.3.5)中得到的差分方程的形式递归地计算 $y_k(n)$。所以我们有

$$y_k(n)=W_N^{-k}y_k(n-1)+x(n),\qquad y_k(-1)=0 \tag{8.3.6}$$

期望输出是 $X(k)=y_k(N)$,其中 $k=0,1,\cdots,N-1$。为便于计算,我们可以一次性计算所有的相位因子 W_N^{-k} 并存储起来。

为了避免式(8.3.6)所蕴含的复数乘法和加法,可以合并拥有复共轭极点的谐振器对。这时,两极点滤波器的系统函数变为

$$H_k(z)=\frac{1-W_N^kz^{-1}}{1-2\cos(2\pi k/N)z^{-1}+z^{-2}} \tag{8.3.7}$$

图 8.3.1 显示了由如下差分方程描述的系统的直接 II 型实现:

$$v_k(n)=2\cos\frac{2\pi k}{N}v_k(n-1)-v_k(n-2)+x(n) \tag{8.3.8}$$

$$y_k(n)=v_k(n)-W_N^kv_k(n-1) \tag{8.3.9}$$

初始条件为 $v_k(-1)=v_k(-2)=0$。

式(8.3.8)中的递归关系共迭代了 $n=0,1,\cdots,N$ 次,但式(8.3.9)在 $n=N$ 时只被计算了一次。每次迭代需要一次实数乘法和两次加法。所以,对应实数输入序列 $x(n)$,算法需要 $N+1$ 次实数乘法来得到 $X(k)$以及对称的 $X(N-k)$。

Goertzel 算法在计算相对较小的数 M,$M\leqslant \mathrm{lb}\ N$ 的 DFT 时是很有吸引力的。否则,FFT算法是更有效的方法。

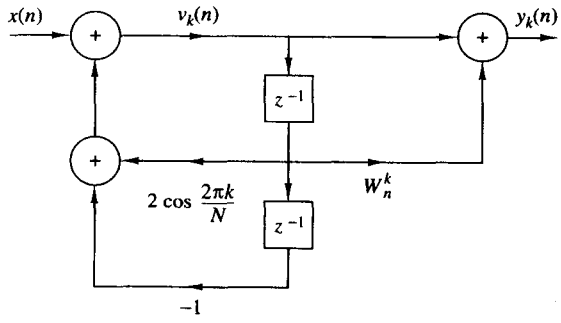


图 8.1.3　计算 DFT 的双极点谐振器的直接 II 型实现

8.3.2　调频 z 变换算法

N 点数据序列 $x(n)$的 DFT 可视为单位圆上均匀分布的 N 点的 z 变换。本节我们考虑 $X(z)$在 z 平面上包括单位圆在内的等高线上的求值问题。

假设我们希望计算 $x(n)$在点集$\{z_k\}$上的 z 变换,那么有

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z_k^{-n},\qquad k=0,1,\cdots,L-1 \tag{8.3.10}$$

例如,如果等高线是一个以 r 为半径的圆且 z_k 是 N 个等间距点,则有

$$z_k = re^{j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1}[x(n)r^{-n}]e^{-j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \tag{8.3.11}$$

在这种情况下,FFT算法可应用于修改过的序列 $x(n)r^{-n}$。

更一般地,假设 z 平面上的 z_k 点从一点开始以螺旋状排列,

$$z_0 = r_0 e^{j\theta_0}$$

而且螺旋的方向可以朝向原点也可以远离原点,那么点序列 $\{z_k\}$ 可以定义为

$$z_k = r_0 e^{j\theta_0}(R_0 e^{j\phi_0})^k, \qquad k = 0, 1, \cdots, L-1 \tag{8.3.12}$$

注意,如果 $R_0 < 1$,则等高线旋转的方向朝向原点;如果 $R_0 > 1$,则螺旋的方向远离原点。如果 $R_0 = 1$,则等高线是一段以 r_0 为半径的圆弧。如果 $r_0 = 1$ 且 $R_0 = 1$,则等高线就是单位圆的一段弧。后者使得我们可以在不计算较大 DFT 的情况下,得到序列 $x(n)$在弧线覆盖之下的 L 个频率分量。也就是不用在序列后添加许多 0 进行 DFT,来得到所需的频率分辨率。最后,如果 $r_0 = R_0 = 1, \theta_0 = 0, \theta_0 = 2\pi/N, L = N$,那么等高线成为整个单位圆,计算得到的结果就是 DFT 的结果。图 8.3.2 显示了各种不同的等高线。

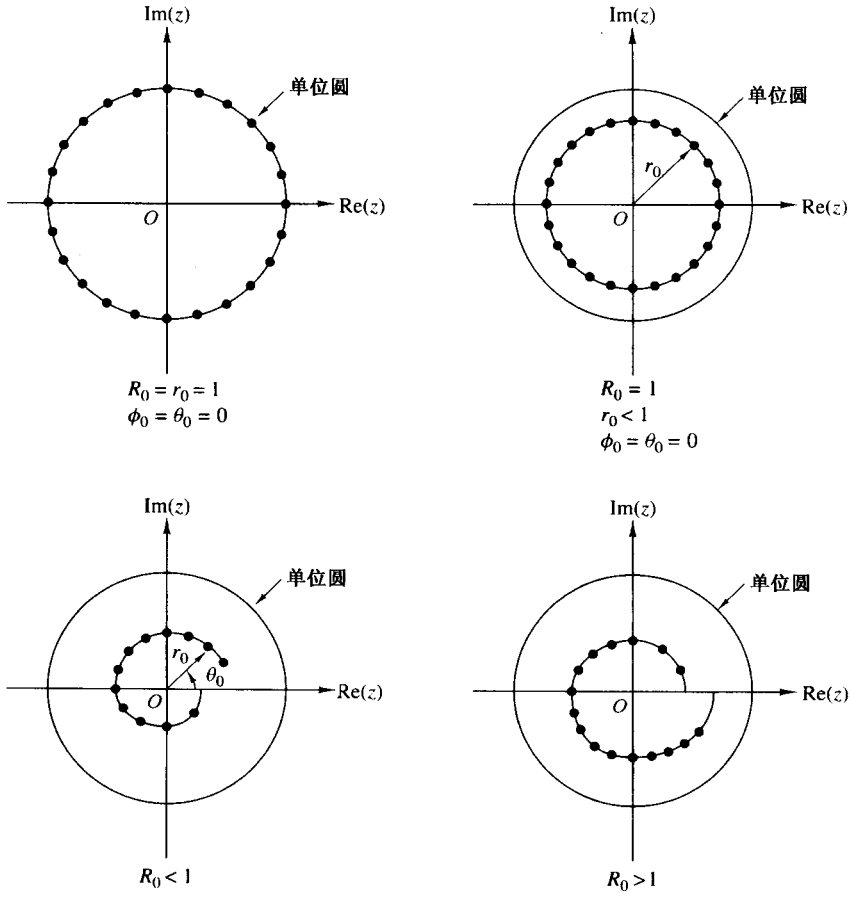


图 8.3.2 计算 z 变换的一些等高线示例

当把式(8.3.12)中的点$\{z_k\}$代入 z 变换的表达式时，我们得到

$$\begin{aligned} X(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)(r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0})^{-n} V^{-nk} \end{aligned} \tag{8.3.13}$$

由定义有

$$V = R_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_0} \tag{8.3.14}$$

我们可以使用卷积的形式来表示式(8.3.13)，因为注意到了

$$nk = \tfrac{1}{2}[n^2 + k^2 - (k-n)^2] \tag{8.3.15}$$

用式(8.3.15)代入式(8.3.13)得到

$$X(z_k) = V^{-k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n)(r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0})^{-n} V^{-n^2/2}] V^{(k-n)^2/2} \tag{8.3.16}$$

定义一个新序列 $g(n)$为

$$g(n) = x(n)(r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0})^{-n} V^{-n^2/2} \tag{8.3.17}$$

此时，式(8.3.16)就可以表示为

$$X(z_k) = V^{-k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) V^{(k-n)^2/2} \tag{8.3.18}$$

式(8.3.18)中的求和可以理解为使用 $h(n)$作为滤波器对序列 $g(n)$进行卷积。其中，

$$h(n) = V^{n^2/2} \tag{8.3.19}$$

从而，式(8.3.18)可以表示为

$$\begin{aligned} X(z_k) &= V^{-k^2/2} y(k) \\ &= \frac{y(k)}{h(k)}, \qquad k = 0, 1, \cdots, L-1 \end{aligned} \tag{8.3.20}$$

其中，$y(k)$是滤波器的输出：

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) h(k-n), \qquad k = 0, 1, \cdots, L-1 \tag{8.3.21}$$

观察可知 $h(n)$和 $g(n)$都是复值序列。

序列 $h(n)$在 $R_0 = 1$ 时的参数 $\omega n = n^2 \phi_0/2 = (n\phi_0/2)n$ 以复指数的形式出现。量 $n\phi_0/2$ 代表复指数信号的频率，它是随时间线性增长的。这样的信号通常用于雷达系统，被称为调频 z 信号。所以式(8.3.18)所求的 z 变换也被称为调频 z 变换。

式(8.3.21)中的线性卷积可以很有效地用 FFT 算法来计算。其中序列 $g(n)$的长度为 N，而 $h(n)$无限长。幸好计算 L 个 $X(z)$的值只需要 $h(n)$的一部分。

因为我们要用 FFT 算法计算式(8.3.21)中的卷积，所以先考虑 N 点序列 $g(n)$和 $h(n)$中长度为 M 点的一段进行圆周卷积，其中 $M < N$。在这种情况下，我们知道前 $N-1$ 个点包含混叠，而后 $M-N+1$ 个点的结果和 $h(n)$与 $g(n)$卷积得到的结果相同。由此，我们应该选择 DFT 的大小为

$$M = L + N - 1$$

它将得到 L 个有效数据和 $N-1$ 个混叠点。

观察式(8.3.21)可知,计算所用到的 $h(n)$部分为 $-(N-1) \leqslant N \leqslant (L-1)$,其中长度 $M = L + N - 1$。我们将长度为 M 的序列 $h_1(n)$定义为

$$h_1(n) = h(n - N + 1), \qquad n = 0, 1, \cdots, M - 1 \tag{8.3.22}$$

并用 FFT 算法来计算其 M 点 DFT 得到 $H_1(k)$。由式(8.3.17),我们从 $x(n)$计算得到 $g(n)$,向 $g(n)$追加 $L-1$ 个零并计算它的 M 点 DFT 得到 $G(k)$。积 $Y_1(k) = G(k)H_1(k)$的 IDFT 产生 M 点序列 $y_1(n), n = 0, 1, \cdots, M-1$。$y_1(n)$的前 $N-1$ 个点由于混叠而被丢弃。所求值为 $y_1(n)$,$N-1 \leqslant n \leqslant M-1$,这对应于式(8.3.21)中的 $0 \leqslant n \leqslant L-1$,即

$$y(n) = y_1(n + N - 1), \qquad n = 0, 1, \cdots, L - 1 \tag{8.3.23}$$

类似地,我们也可以选择将 $h_2(n)$定义为

$$h_2(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leqslant n \leqslant L-1 \\ h(n - N - L + 1), & L \leqslant n \leqslant M-1 \end{cases} \tag{8.3.24}$$

$h_2(n)$的 M 点 DFT 得到 $H_2(k)$,乘以 $G(k)$得到 $Y_2(k) = G(k)H_2(k)$。$Y_2(k)$的逆变换得到序列 $y_2(n)$,$0 \leqslant n \leqslant M-1$。所求值为 $y_2(n)$,$0 \leqslant n \leqslant L-1$。即

$$y(n) = y_2(n), \qquad n = 0, 1, \cdots, L - 1 \tag{8.3.25}$$

最后,用 $y(k)$除以 $h(k)$得到复数值 $X(z_k)$,$k = 0 = 1, \cdots, L-1$,如式(8.3.20)所示。

总之,调频 z 变换算法的乘法复杂度为 $M\text{lb}\ M$,$M = N + L - 1$。该数字和直接计算 z 变换需要的 $N \cdot L$ 次相比时,很明显,如果 L 很小,那么直接计算更有效;但如果 L 很大,那么调频 z 变换就更有效。

调频 z 变换已被硬件实现,以便计算信号的 DFT。为了计算 DFT,我们选择 $r_0 = R_0 = 1, \theta_0 = 0$,$\phi_0 = 2\pi/N$ 和 $L = N$。这种情况下,

$$\begin{aligned} V^{-n^2/2} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n^2/N} \\ &= \cos\frac{\pi n^2}{N} - \mathrm{j}\sin\frac{\pi n^2}{N} \end{aligned} \tag{8.3.26}$$

冲击响应为

$$\begin{aligned} h(n) &= V^{n^2/2} \\ &= \cos\frac{\pi n^2}{N} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi n^2}{N} \\ &= h_r(n) + \mathrm{j}h_i(n) \end{aligned} \tag{8.3.27}$$

的调频滤波器可以用一对系数为 $h_r(n)$和 $h_i(n)$的 FIR 滤波器实现。实际中,声表面波材料和电耦合器件都被用来实现这些 FIR 滤波器。式(8.3.26)给出的用于先乘和后乘的余弦和正弦序列通常存储在只读存储器(ROM)中。此外,如果只需要 DFT 的幅度,那么后乘是不需要的。这种情况下,

$$|X(z_k)| = |y(k)|, \qquad k = 0, 1, \cdots, N - 1 \tag{8.3.28}$$

如图 8.3.3 所示,所以线性 FIR 滤波器使用调频 z 变换的形式实现了对 DFT 的计算。

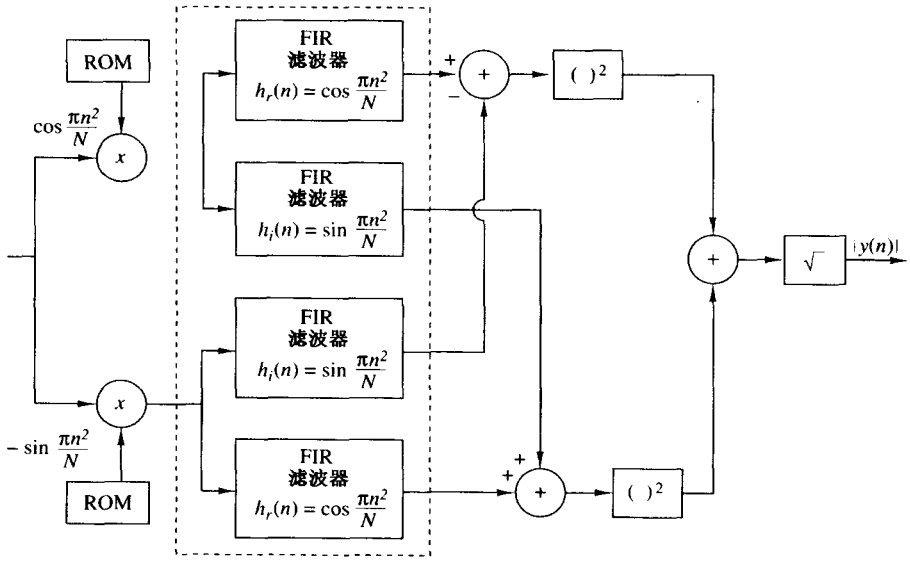


图 8.3.3　用 chirp-z 变换方式实现 DFT 计算的框图

8.4　DFT 计算中的量化效应①

如我们在前面的讨论中所观察到的，DFT 在数字信号处理的各种应用中扮演着重要角色，包括 FIR 线性滤波、计算信号的相关函数以及频谱分析。因此，我们有必要知道在计算过程中产生的量化误差的性质。特别地，我们将考虑在使用定点算术的 DFT 中计算乘法所带来的舍入误差的效应。

在对 FIR 和 IIR 滤波器中的舍入误差进行统计分析（见图 9.6.8）时，我们要使用加性白噪声来描述乘法中的舍入误差。虽然这种统计分析是针对四舍五入的，但也可以很容易地修改为 2 的补数的截取算法（见 9.4.3 节）。

特别有意义的是用 FFT 算法计算 DFT 中的舍入误差，但我们首先应该求得 DFT 的直接计算中的舍入误差，以便建立一个对比数据集。

8.4.1　直接计算 DFT 的量化误差

给出一个时域有限的序列 $\{x(n)\}$，$0\leqslant n\leqslant N-1$，其 DFT 定义为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{8.4.1}$$

其中 $W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N}$。我们假设 $\{x(n)\}$ 一般为一个复序列。我们同样假设 $\{x(n)\}$ 与 $\{W_N^{kn}\}$ 的实部和虚部由 b 比特表示。从而，计算 $x(n)W_N^{kn}$ 需要 4 次实数乘法。每次乘法的结果由 $2b$ 比特四舍五入为 b 比特，所以每次复数乘法有 4 次量化误差。

在直接计算 DFT 的情况下，DFT 结果中的每一点需要 N 次复数乘法。所以直接计算 DFT 的每一点需要 $4N$ 次实数乘法，即有 $4N$ 次量化误差。

我们先来求定点计算 DFT 中的量化误差的方差。首先，假设量化误差有如下性质：

1. 四舍五入带来的量化误差是在区间 $(-\Delta/2,\Delta/2)$ 内服从均匀分布的随机变量，其中 $\Delta=2^{-b}$。

① 建议读者在看此节前复习 9.5 节。

2. $4N$ 个量化误差不相关。

3. $4N$ 个量化误差和序列$\{x(n)\}$不相关。

因此,对每一个量化误差有

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12} \tag{8.4.2}$$

$4N$ 个乘法的量化误差为

$$\begin{aligned}\sigma_q^2 &= 4N\sigma_e^2 \\ &= \frac{N}{3}\cdot 2^{-2b}\end{aligned} \tag{8.4.3}$$

所以方差和 DFT 的大小成正比。如果 N 是 2 的幂($N=2^v$),则方差可以表示为

$$\sigma_q^2 = \frac{2^{-2(b-v/2)}}{3} \tag{8.4.4}$$

该表达式表明为了保持精度不变,DFT 的长度 N 每翻 4 翻,就要将 b 增加一位。

为防止上溢,DFT 的输入需要先进行尺度变换。很明显,$|X(k)|$的上界是

$$|X(k)| \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)| \tag{8.4.5}$$

如果加法容忍的动态范围是$(-1,1)$,那么$|X(k)|<1$要求

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)| < 1 \tag{8.4.6}$$

如果$|x(n)|$已经过了尺度变换,即对所有的 n,序列的每一点都有$|x(n)|<1$时,那么可以对序列中的每一点除以 N 来保证满足式(8.4.6)。

式(8.4.6)所隐含的尺度变换对计算有着极其重要的影响。例如,假设信号序列$\{x(n)\}$是白色的,而且在$(-1/N,1/N)$之间均匀分布,那么信号序列的方差为

$$\sigma_x^2 = \frac{(2/N)^2}{12} = \frac{1}{3N^2} \tag{8.4.7}$$

而 DFT 的输出$|X(k)|$的系数的方差为

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= N\sigma_x^2 \\ &= \frac{1}{3N}\end{aligned} \tag{8.4.8}$$

所以信噪比为

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_q^2} = \frac{2^{2b}}{N^2} \tag{8.4.9}$$

我们观察到尺度变换将 SNR 降低了 N 倍,而尺度变换和量化误差的共同影响导致 SNR 总共降低了 N^2 倍,所以根据式(8.4.6)对输入序列$\{x(n)\}$的尺度变换导致了信噪比的严重降低。

例 8.4.1

计算当输出 SNR 要求为 30 dB 时,,利用式(8.4.9)来求 1024 点序列的 DFT 所需要的字长。

解：序列长为 $N=2^{10}$。所以 SNR 为

$$10\lg\frac{\sigma_X^2}{\sigma_q^2}=10\lg 2^{2b-20}$$

当 SNR 为 30 dB 时，我们有

$$3(2b-20)=30$$

$$b=15 \text{ 比特}$$

注意，15 比特是乘法也是加法使用的计算字长。

在输入序列$\{x(n)\}$未经过尺度变换的情形下，假设我们只是要求$|x(n)|<1$。此时$|X(k)|<N$，我们必须为加法提供足够大的动态范围。在这种情况下，序列$\{|x(n)|\}$的方差是 $\sigma_x^2=\frac{1}{3}$，而$|X(k)|$的方差是

$$\sigma_X^2=N\sigma_x^2=\frac{N}{3} \tag{8.4.10}$$

所以，SNR 为

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_q^2}=2^{2b} \tag{8.4.11}$$

如果我们重复例 8.4.1 中的计算，那么可得出在 SNR 为 30 dB 时，计算字长为 $b=5$ 比特。然而，我们需要 10 位额外的字长给累加器（加法器）来满足增长了的加法动态范围。虽然我们不能减少任何加法的动态范围，但却成功地将乘法的表示计算字长由 15 比特减少到 5 比特，这种减少很明显。

8.4.2　FFT 算法的量化误差

如前所示，FFT 算法所需的乘法次数明显少于直接计算 DFT 的乘法次数。根据该观察，我们似乎可以得出这样的结论，即使用 FFT 算法，也比直接计算 DFT 的量化误差更小。但遗憾的是，实际上不是这样，我们将说明这一点。

我们考虑在基 2 FFT 算法的计算中使用定点算术。具体地，我们选择图 8.4.1 所示的基 2 按时间抽取算法，其中 $N=8$。从它得到的量化误差可以作为其他基 2 FFT 算法的一个典型代表。

我们首先观察到每个蝶形运算包括一次复数乘法，或等价的四次实数乘法。我们忽略某些蝶形单元中包含的乘以 ±1 的乘法。如果我们考虑 DFT 每输出一点所需要的蝶形单元的数目，则会发现阶段 1 包括 $N/2$ 个，阶段 2 包括 $N/4$ 个，阶段 3 包括 $N/8$ 个，依次类推，直到最后一个阶段只有 1 个为止。每个输出点所包括的蝶形单元数为

$$\begin{aligned}2^{v-1}+2^{v-2}+\cdots+2+1&=2^{v-1}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{v-1}\right]\\&=2^v\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^v\right]=N-1\end{aligned} \tag{8.4.12}$$

例如，在图 8.4.2 中说明了在图 8.4.1 给出的 8 点 FFT 算法中，影响 $X(3)$的计算结果的蝶形运算单元。

每次蝶形运算的误差都被传播到最后的输出。其中，阶段 1 中的量化误差传播到以后的$(v-1)$个阶段，阶段 2 中的蝶形运算的量化误差传播到以后的$(v-2)$个阶段，依次类推。在传播过程中，用相位因子 W_N^m 对其进行相移（相位旋转）。这些相位旋转不会改变量化误差的统计特性，特别是误差的方差会保持不变。

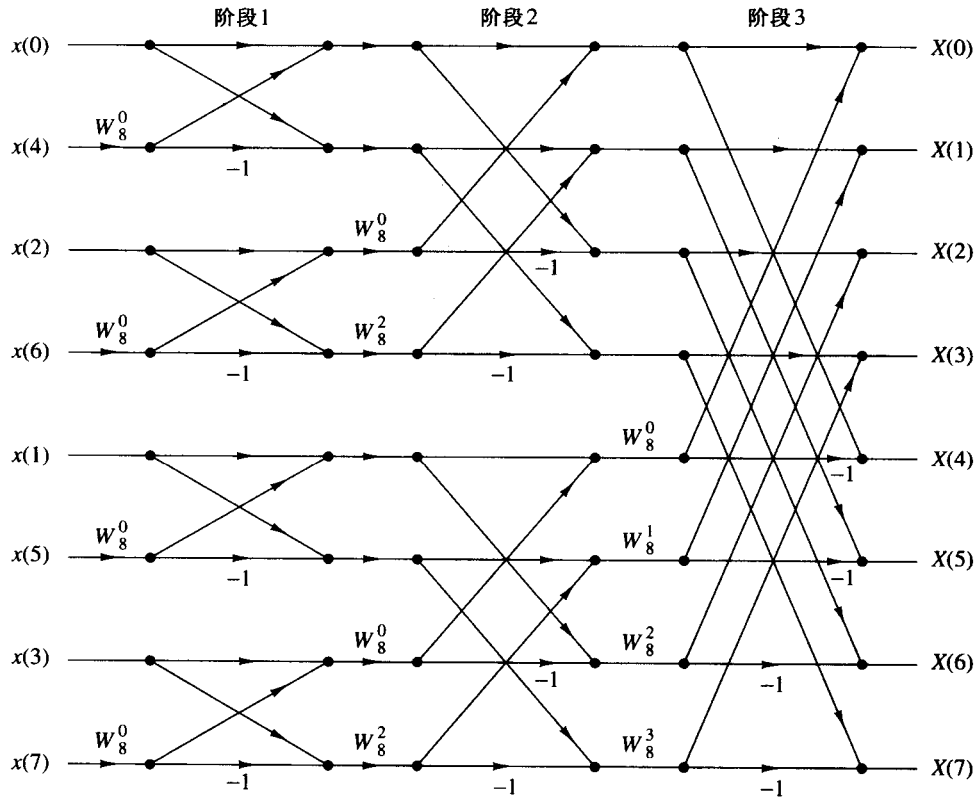


图 8.4.1 按时间抽取 FFT 算法

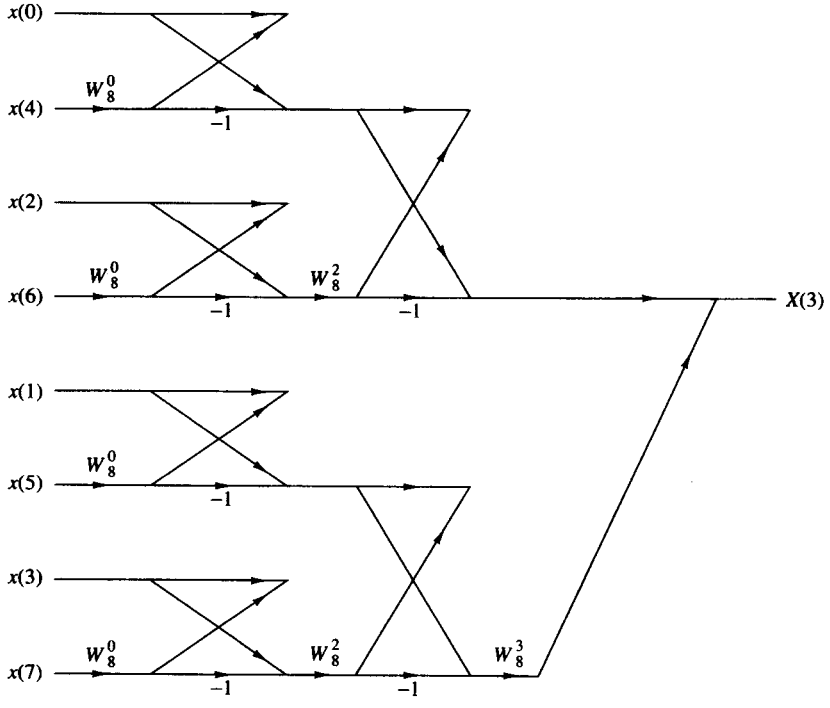


图 8.4.2 影响 $X(3)$的蝶形运算单元

如果我们假设每个蝶形运算单元的量化误差和其他单元的量化误差无关，那么共有 $4(N-1)$ 个误差变量影响到 FFT 输出的每一点。从而最终输出的量化误差的方差为

$$\sigma_q^2 = 4(N-1)\frac{\Delta^2}{12} \approx \frac{N\Delta^2}{3} \tag{8.4.13}$$

其中 $\Delta = 2^{-b}$。所以

$$\sigma_q^2 = \frac{N}{3} \cdot 2^{-2b} \tag{8.4.14}$$

这和我们直接计算 DFT 得到的结果一样。

式(8.4.14)中的结果并不令人惊讶。实际上，FFT 算法并没有减少 DFT 中产生每一点所需的乘法次数。它实际上只是利用 W_N^{kn} 的周期性减少了计算 N 点 DFT 的总体乘法次数。

就像直接计算 DFT 时那样，我们也需要将输入序列进行尺度变换以防止上溢。回忆可知，如果 $|x(n)| < 1/N, 0 \leqslant n \leqslant N-1$，那么有 $|X(k)| < 1, 0 \leqslant k \leqslant N-1$，所以可以避免上溢。使用这种尺度变换时，直接计算 DFT 时得到的式(8.4.7)、式(8.4.8)和式(8.4.9)同样适用于 FFT 算法。从而，FFT 算法的 SNR 相同。

因为 FFT 算法由多个阶段组成，其中每一个阶段均包括两点的蝶形运算，所以可以考虑使用一种不同的尺度变换策略，使得不必产生像对每个输入点除以 N 那样严重地影响 SNR。这种可变尺度变换的思想可以从对 FFT 算法的每个阶段的中间值 $|X_n(k)|, n = 1, 2, \cdots, v$ 的观察中得到(见习题 8.35)：

$$\begin{aligned} &\max[|X_{n+1}(k)|, |X_{n+1}(l)|] \geqslant \max[|X_n(k)|, |X_n(l)|] \\ &\max[|X_{n+1}(k)|, |X_{n+1}(l)|] \leqslant 2\max[|X_n(k)|, |X_n(l)|] \end{aligned} \tag{8.4.15}$$

观察到这种关系，我们可将 $1/N$ 的尺度变换分配到 FFT 算法的每一阶段中。以 $|x(n)| < 1$ 为例，我们在阶段 1 使用 $\frac{1}{2}$ 作为缩放因子，令 $|x(n)| < \frac{1}{2}$。依次类推，每个阶段的 FFT 算法中都缩放了 $\frac{1}{2}$。所以，经过 v 个阶段之后，得到了总体缩放 $(\frac{1}{2})^v = 1/N$。于是，避免了 DFT 的上溢。

这种尺度变换过程没有改变输出值的大小，但却令量化误差极大减小。具体地说，每次以 1/2 为缩放因子的尺度变换将量化误差的方差减小到原来的 1/4。所以，阶段 1 中 $4(N/2)$ 个量化误差的方差减小到原先的 $(1/4)^{v-1}$，阶段 2 中 $4(N/4)$ 量化误差的方差进一步减小为 $(1/4)^{v-2}$，等等。从而 FFT 算法的整体量化误差为

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &= \frac{\Delta^2}{12}\left\{4\left(\frac{N}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{v-1} + 4\left(\frac{N}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{v-2} + 4\left(\frac{N}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{v-3} + \cdots + 4\right\} \\ &= \frac{\Delta^2}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{v-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{v-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right\} \\ &= \frac{2\Delta^2}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^v\right] \approx \frac{2}{3} \cdot 2^{-2b} \end{aligned} \tag{8.4.16}$$

其中，$(\frac{1}{2})^v$ 项可以忽略。

我们现在观察到式(8.4.16)不再和 N 成比例了。另外，原信号的方差为 $\sigma_x^2 = 1/3N$，如式(8.4.8)所示。所得 SNR 为

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} &= \frac{1}{2N} \cdot 2^{2b} \\ &= 2^{2b-v-1} \end{aligned} \tag{8.4.17}$$

所以,通过将 $1/N$ 的尺度变换均匀地分配到整个 FFT 算法中,我们可令 SNR 与 N 成反比,而不是原先的与 N^2 成反比。

例 8.4.2

求使用 FFT 算法计算 1024 点且输出 SNR 为 30 dB 时所需的字长。

解:FFT 的大小为 $N=2^{10}$。所以根据式(8.4.17),SNR 为

$$10\lg 2^{2b-\nu-1}=30$$

$$3(2b-11)=30$$

$$b=\frac{21}{2}(11\text{ 比特})$$

它的性能可以与原先使用的在阶段 1 完成尺度变换的 15 比特算法相比。

8.5 小结与参考文献

本章的重点是如何有效计算 DFT。我们展示了如何利用指数因子 W_N^{kn} 的对称性和周期性,将复数乘法的次数从 N^2 减少为 $N\text{lb}\,N$,其中 N 为 2 的幂。正如我们前面指出的,任何序列都可以通过添零以达到 $N=2^{\nu}$ 的要求。

近几十年来,FFT 类算法一直只是希望用手工计算傅里叶变换的数学家们的研究兴趣。自 Cooley 和 Tukey(1965)发表了他们的著名文章后,才为 DFT 的有效计算研究带来巨大的冲击,并且使人们意识到它的重要性。此后,Cooley-Tukey 的 FFT 算法及其各种不同形式,比如 Singleton 算法(1967,1969),对卷积、相关和谱分析产生了巨大的影响。要回顾 FFT 算法的历史,请参阅 Cooley 等人(1967)的文章。

8.1.5 节中介绍的分裂基 FFT(SRFFT)算法是由 Duhamel 和 Hollmann(1984,1986)给出的。R. Price 提出了"镜像"FFT(MFFT)和"相位"FFT(PFFT)算法。Swarztrauber(1986)的论文中解释了如何利用数据的对称性来减少计算时间。

近年来,许多关于 FFT 算法的介绍性的文章陆续出版。我们引用了 Brigham 和 Morrow(1967)、Cochran 等人(1967)、Bergland(1969)和 Cooley 等人(1967,1969)的文章。

Goertzel(1968)指出可以使用线性滤波器计算 DFT,尽管我们知道使用这种方法减少的计算量是微乎其微的。更有意义的是,Bluestein(1970)展示了使用调频线性滤波操作来计算 DFT。这项工作也导致了 Rabiner 等人(1969)发展的调频 z 变换算法。

除了本章介绍的 FFT 算法,还有其他有效计算 DFT 的算法。其中一些算法进一步减少了乘法的次数,但往往会导致更多的加法次数。其中,特别重要的是 Rader 和 Brenner(1976)的质因子类算法,例如 Good 算法(1971)和 Winograd(1976,1978)算法。对于这些相关的算法,读者可以参阅 Blahut(1985)的教材。

习题

8.1 证明每个数

$$e^{j(2\pi/N)k},\qquad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

对应于 1 的第 N 个根。在复平面上画出这些根并说明其正交性

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(2\pi/N)kn}e^{-j(2\pi/N)ln}=\begin{cases}N, & \text{若 } k=l\\ 0, & \text{若 } k\neq l\end{cases}$$

8.2 (a) 证明相位因子可以递归计算为

$$W_N^{ql} = W_N^q W_N^{q(l-1)}$$

(b) 执行上述计算，一次采用单精度浮点运算，另一次采用 4 位有效数字。注意后者由于舍入误差累积会导致结果恶化。

(c) 证明(b)部分中的结果可以通过将 $ql = N/4$ 时的结果重设为正确值 $-\mathrm{j}$ 而得到改善。

8.3 令 $x(n)$为实值 N 点序列，$N = 2^v$。找出一种方法只用 $N/2$ 点实数 DFT 计算 N 点 DFT $X'(k)$，令其只包括奇数谐波；即如果 k 为偶数，那么 $X'(k) = 0$。

8.4 某设计师有许多 8 点 FFT 芯片。详细画出如何连接这些芯片才能计算 24 点 DFT。

8.5 序列 $x(n) = u(n) - u(n-7)$的 z 变换在如下位于单位圆上的五点处采样：

$$x(k) = X(z)|_z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/5}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

求 $X(k)$的逆 DFT $x'(n)$。将其与 $x(n)$比较并解释结果。

8.6 考虑一个有限长序列 $x(n)$，$0 \leqslant n \leqslant 7$，其 z 变换为 $X(z)$。我们希望计算 $X(z)$在以下点处的值：

$$z_k = 0.8\mathrm{e}^{\mathrm{j}[(2\pi k/8)+(\pi/8)]}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant 7$$

(a) 画出$\{z_k\}$在复平面上的草图。

(b) 求序列 $s(n)$，令其 DFT 为所求 $X(z)$的样本点。

8.7 证明由式(8.1.26)至式(8.1.27)给出的基 2 按时间抽取 FFT 算法，是式(8.1.16)至式(8.1.18)给出的更一般算法的一种特例。

8.8 利用正文提到的按频率抽取 FFT 算法计算如下序列的 8 点 DFT：

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant 7 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

8.9 求 $N = 16$ 点基 4 按时间抽取 FFT 算法的信号流图，并令输入序列为自然序，计算为原位计算。

8.10 求 $N = 16$ 点基 4 按频率抽取 FFT 算法的信号流图，并令输入序列为逆数字序，DFT 的输出为自然序。

8.11 分别利用原位基 2 按时间抽取和基 2 按频率抽取算法，计算如下序列的 8 点 DFT：

$$x(n) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0\right\}$$

计算过程严格按照信号流图，并且跟踪框图中给出的所有中间量。

8.12 采用基 4 按时间抽取算法计算如下序列的 16 点 DFT：

$$x(n) = \cos\frac{\pi}{2}n, \qquad 0 \leqslant n \leqslant 15$$

8.13 考虑图 8.1.6 中的 8 点按时间抽取(DIT)流图。

(a) 从 $x(7)$到 $X(2)$的“信号路径”的增益是多少？

(b) 有多少条路径从输入到一个指定的输出？这对每一个输出都是一样的吗？

(c) 采用信号流图上标出的操作计算 $X(3)$。

8.14 画出 $N = 16$ 点按频率抽取(DIF) SRFFT 算法的信号流图。非平凡乘法器的个数是多少？

8.15 推导 DIT SRFFT 算法的过程并画出 $N = 8$ 点的网络流图。将你的信号流图与图 8.1.11 所示按频率抽取基 2 FFT 信号流图进行比较。

8.16 证明两个复数$(a + \mathrm{j}b)$与$(c + \mathrm{j}d)$之积可以通过三次实数乘法与五次实数加法实现，算法如下：

$$x_R = (a - b)d + (c - d)a$$

$$x_I = (a - b)d + (c + d)b$$

其中，

$$x = x_R + \mathrm{j}x_I = (a + \mathrm{j}b)(c + \mathrm{j}d)$$

8.17 解释 DFT 在半径为 r 的圆上,是如何计算 N 点序列 z 变换的 N 个等间距采样点的值的。

8.18 一个实值 N 点序列 $x(n)$被称为 DFT 带限的,如果其 DFT $X(k)=0, k_0 \leqslant k \leqslant N-k_0$。我们在 $X(k)$ 的中间插入 $(L-1)N$ 个 0 得到下面 LN 点 DFT:

$$X'(k)=\begin{cases} X(k), & 0 \leqslant k \leqslant k_0-1 \\ 0, & k_0 \leqslant k \leqslant LN-k_0 \\ X(k+N-LN), & LN-k_0+1 \leqslant k \leqslant LN-1 \end{cases}$$

证明

$$Lx'(Ln)=x(n), \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

其中,

$$x'(n) \overset{\underset{LN}{\text{DFT}}}{\longleftrightarrow} X'(k)$$

以 $N=4, L=1, X(k)=\{1,0,0,1\}$为例,解释这种处理的含义。

8.19 令 $X(k)$为序列 $x(n)$的 N 点 DFT,$0 \leqslant n \leqslant N-1$。序列 $s(n)=X(n), 0 \leqslant n \leqslant N-1$ 的 N 点 DFT 是什么?

8.20 令 $X(k)$为序列 $x(n)$的 N 点 DFT,$0 \leqslant n \leqslant N-1$。我们定义 $2N$ 点序列 $y(n)$为

$$y(n)=\begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & n\text{为偶数} \\ 0, & n\text{为奇数} \end{cases}$$

用 $X(k)$表示 $y(n)$的 $2N$ 点 DFT。

8.21 (a) 求汉宁窗 $w(n)=(1-\cos\frac{2\pi n}{N-1})/2$ 的 z 变换 $W(z)$。

(b) 求由信号 $x(n)$的 N 点 DFT $X(k)$来计算信号 $x_w(n)=w(n)x(n), 0 \leqslant n \leqslant N-1$ 的 N 点 DFT $X_w(k)$的公式。

8.22 建立一个 DFT 系数表,该表只使用 $N/4$ 的内存空间来存储正弦序列的第一象限的值(假设 N 为偶数)。

8.23 假设采用基 2 FFT 算法,求由式(8.2.12)给出的算法计算量,并与 $g(n)$的 $2N$ 点 DFT 的计算量进行比较。

8.24 考虑如下差分方差描述的 IIR 系统:

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

描述使用 FFT 算法计算频率响应 $H(\frac{2\pi}{N}k), k=0,1,\cdots,N-1$ 的步骤,其中 $N=2^v$。

8.25 开发一个基 3 按时间抽取 FFT 算法,其中 $N=3^v$,并且画出 $N=9$ 时的流图。需要多少次复数乘法? 其中的操作可以原位完成吗?

8.26 当算法为按频率抽取时,重做习题 8.25。

8.27 FFT 输入和输出的减枝。很多情况下,对于长为 L 的有限长序列的 N 点 DFT,我们仅仅计算其中的 M 点(如 $M \ll N$ 和 $L \ll N$)。

(a) 画出 $N=16$ 点基 2 DIF FFT 的流图,并去除(减枝)信号路径上从输入为 0 的点出发的所有输出,假设只有 $x(0)$和 $x(1)$非零。

(b) 针对基 2 DIT FFT 算法,重复(a) 中的过程

(c) 如果希望计算 DFT 的所有点,哪种方法更好? 如果只计算 $X(0), X(1), X(2), X(3)$,又会如何? 建立一种规则,以便可以根据 M 和 L 在 DIT 和 DIF 两种减枝方式中进行选择。

(d) 估计可以节省的运算量,用 M, L 和 N 表示。

8.28 DFT 的并行计算。假设我们希望使用 2^p 个数字信号处理器(DSP)来计算 $N=2^p2^v$ 点 DFT。为简单起见，我们假设 $p=v=2$。这种情况下，每个 DSP 均执行需要用来计算 2^v 点 DFT 的计算。

(a) 使用基 2 DIF 流图，证明为了避免数据重排，所有的输入数据都必须存入 DSP 内的存储空间。

(b) 指出并重画流图中 DSP 用来执行计算 $X(2)$，$X(10)$，$X(6)$和 $X(14)$的部分。

(c) 证明，如果使用 $M=2^p$ 个 DSP，那么计算加速比 S 的公式为

$$S=M\frac{\text{lb}N}{\text{lb}N-\text{lb}M+2(M-1)}$$

8.29 从定义开始推导基 2 逆 DIT FFT 变换算法。画出计算过程的流图并与直接计算 FFT 的流图相比较。IFFT 的流图可以从 FFT 算法的流图直接得到吗？

8.30 针对 DIF 的情况重做习题 8.29。

8.31 证明：具有埃尔米特(Hermitian)对称性的数据的 FFT 算法可以通过将输入数据的实部序列顺序逆转得到。

8.32 求计算 DFT 值 $X(N-k)$的 Goertzel 算法的差分方差和系统函数 $H(z)$。

8.33 (a) 假设 $x(n)$是长度为 $N=1024$ 的有限长。希望使用最有效的方法或算法求它在点

$$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/1024)k},\qquad k=0,100,200,\cdots,1000$$

处的 $X(k)$的值。描述能计算它的有效算法。通过给出可以使用的各种选择或算法，解释你是如何得到答案的。

(b) 如果是计算点

$$z_k=2(0.9)^k\mathrm{e}^{\mathrm{j}[(2\pi/5000)k+\pi/2]},\qquad k=0,1,2,\cdots,999$$

处的 $X(z)$的值，重复(a) 中的过程。

8.34 对于基 2 按频率抽取 FFT 算法，重复 8.4.2 节中的量化误差的分析过程。

8.35 基 2 按时间抽取 FFT 算法的蝶形单元为

$$X_{n+1}(k)=X_n(k)+W_N^mX_n(l)$$

$$X_{n+1}(l)=X_n(k)-W_N^mX_n(l)$$

(a) 如果我们要求$|X_n(k)|<\frac{1}{2}$和$|X_n(l)|<\frac{1}{2}$，证明

$$|\text{Re}[X_{n+1}(k)]|<1,\qquad |\text{Re}[X_{n+1}(l)]|<1$$

$$|\text{Im}[X_{n+1}(k)]|<1,\qquad |\text{Im}[X_{n+1}(l)]|<1$$

所以不会溢出。

(b) 证明

$$\max[|X_{n+1}(k)|,|X_{n+1}(l)|]\geqslant\max[|X_n(k)|,|X_n(l)|]$$

$$\max[|X_{n+1}(k)|,|X_{n+1}(l)|]\leqslant 2\max[|X_n(k)|,|X_n(l)|]$$

8.36 计算 DFT。使用 FFT 子程序计算下列 DFT 并画出 DFT 的幅度谱$|X(k)|$。

(a) 序列

$$x(n)=\begin{cases}1, & n=0,1,\cdots,15\quad(N_1=16)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的 64 点 DFT。

(b) 序列

$$x(n)=\begin{cases}1, & n=0,1,\cdots,7\quad(N_1=8)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的 64 点 DFT。

(c) (a) 部分中序列的 128 点 DFT。

(d) 序列

$$x(n)=\begin{cases}10\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/8)n}, & n=0,1,\cdots,63 \quad (N_1=64)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的 64 点 DFT。

回答下列问题。

1. (a) ,(b),(c)和(d)中相邻两点间的频率间隔是多少?
2. (a) ,(b),(c)和(d)中的零频率分量(dc 分量)的值是多少?

   由公式

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)nk}$$

   计算 dc 分量的理论值,并和计算机的结果进行比较。
3. 在(a),(b)和(c)的图形中,频谱中两个连接空值之间的频率间隔是多少? 序列 $x(n)$ 的 N_1 和上述间隔之间的关系是什么?
4. 解释(a)和(c)的图形之间的区别。

8.37 计算系统的极点位置。考察如下差分方程描述的系统:

$$y(n)=-r^2y(n-2)+x(n)$$

(a) 令 $r=0.9$ 和 $x(n)=\delta(n)$。产生范围 $0\leqslant n\leqslant 127$ 内的输出序列 $y(n)$。计算 $N=128$ 点 DFT $\{Y(k)\}$并画出$\{|Y(k)|\}$。

(b) 计算如下序列的 $N=128$ 点 DFT:

$$w(n)=(0.92)^{-n}y(n)$$

其中,$y(n)$是(a)部分产生的序列。画出 DFT 值$|W(k)|$。从(a)和(b)部分能够得出怎样的结论?

(c) 令 $r=0.5$,重复(a)部分。

(d) 对下面的序列重复(b)部分:

$$w(n)=(0.55)^{-n}y(n)$$

其中,$y(n)$是(c)部分产生的序列。从(c)和(d)部分能够得到怎样的结论?

(e) 现在假设(c)部分产生的序列被“测量”噪声序列污染(“测量”噪声序列是高斯分布的,其均值为 0,方差为 $\sigma^2=0.1$)。对含噪信号重复(c)和(d)部分。

第 9 章　离散时间系统的实现

本章将集中介绍时不变离散时间系统的软硬件实现。正如在第 2 章中提到的，任何 FIR 和 IIR 离散时间系统都有各种不同的配置和实现。在第 2 章中我们描述了最简单的结构，即直接型实现。然而，还有其他具有突出优点的实现应用于更实用的结构，特别是在考虑量化效应时。

特别重要的是级联、并联和格型结构。它们在有限字长的世界中展示了其鲁棒性。本章也描述了 FIR 系统的频域采样实现，它和其他 FIR 实现相比具有更好的计算效率。其他滤波器结构可通过采用线性时不变系统的状态空间公式来得到。由于篇幅有限，我们将不探讨状态空间结构。

除了描述各种结构的离散时间系统外，我们同样考察由使用有限精度运算实现数字滤波带来的量化效应所引起的各种问题。这些内容包括离散时间系统数字化实现中由系数量化与舍入误差导致的滤波器的频率响应特性。

9.1　离散时间系统的实现结构

让我们考虑一类重要的线性时不变系统——使用常系数线性差分方程

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{9.1.1}$$

描述的系统。通过 z 变换，这类线性时不变系统同样可以被有理系统函数描述为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{9.1.2}$$

它是两个 z^{-1} 的多项式之比。从后者，我们可以得到系统函数的零点与极点。它们依赖于决定系统频率响应的系统参数 $\{b_k\}$ 和 $\{a_k\}$。

本章的焦点是以硬件方式或者在可编程计算机上以软件方式来实现式(9.1.1)或式(9.1.2)。我们将展示通过式(9.1.1)或式(9.1.2)的不同组合产生的各种实现方式。

一般来说，我们可以将式(9.1.1)视为一个计算过程(一个算法)，它可以由输入序列 $x(n)$ 求得输出序列 $y(n)$。然而，计算式(9.1.1)的不同方法可以用不同的等价差分方程集合来表示。每种等价定义了系统实现的一个计算过程或算法。对每种公式集，我们可以画出由延迟单元、乘法器和加法器组成的流程图。在 2.5 节中，我们将这种流程图称为系统的一个实现，或系统的结构。

如果系统用软件实现，那么流程图或等价的通过重新排列式(9.1.1)得到的公式集，可以被转换为计算机上的程序，或者可以从流程图得到系统的硬件实现。

读者现在还不太清楚的一个问题是，为什么我们要考虑将式(9.1.1)和式(9.1.2)重新排列？如果它们被重新排列，相应的好处是什么呢？

这正是本章要回答的重要问题。在研发过程中，我们将简单地说明影响我们考虑的主要因素为计算复杂度、内存需求以及计算中的有限字长效应。

计算复杂度是指为了得到一个系统输出值 $y(n)$ 所需要的运算操作(乘法、除法和加法)的次数。

在过去,这些是度量计算复杂度的唯一标准。但是,近来随着设计和制造可编程数字芯片的高度成熟,其他如读内存次数,或对每个输出进行比较的次数,已经变成实现系统复杂度的重要评估依据。

内存需求是指用来存储系统参数、过去的输入、过去的输出和计算过程中的任意中间值的内存空间的数量。

有限字长效应或者有限精度效应是指任何系统在数字化实现中内在的量化效应,而无论是硬件还是软件。系统的参数必须被有限精度表示。计算得到的输出必须四舍五入或者截尾,以便符合计算机或硬件实现的有限精度。另外,计算是用定点还是浮点运算实现也是要考虑的问题。所有这些问题通常都称为有限字长效应,而且对于我们实现系统而言是极其重要的。所以,实践中选择一个对有限字长不敏感的算法是非常重要的。

虽然这三个因素是影响我们根据式(9.1.1)和式(9.1.2)选择系统实现类型的重要因素,但其他因素(如结构或实现方式能否进行并行处理,或者使用流水线计算)在特定实现中也扮演着重要的角色。这些附加因素在我们实现复杂信号处理算法中通常非常重要。

在讨论各种实现时,我们将专注于列出的三个主要因素。偶尔,我们也会包括一些对某些实现很重要的其他因素。

9.2 FIR 系统的结构

总体上说,一个 FIR 系统由差分方程

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M-1}b_k x(n-k) \tag{9.2.1}$$

描述,或由系统函数

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-1}b_k z^{-k} \tag{9.2.2}$$

描述。此外,该 FIR 系统的单位样本冲激响应与系数$\{b_k\}$是相等的,即

$$h(n)=\begin{cases}b_n, & 0\leqslant n\leqslant M-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{9.2.3}$$

为了和技术文献的记法一致,FIR 滤波器的长度设为 M。读者应当注意本章和后续章节中 FIR 记法的不同。

我们将从称为直接型的最单结构开始,给出 FIR 系统的多种实现。第二种结构是级联型实现。第三种结构是频域采样实现,最后我们给出 FIR 的格型实现。在本章中,我们采用科技文献中的常用记法,即使用$\{h(n)\}$来表示 FIR 系统的参数。

除了上述 4 种实现方式外,FIR 系统还可以使用 8.2 节中的 DFT 实现。从这一点来看,DFT 可以被视为 FIR 系统的一种计算过程而不是结构。然而,当计算过程用硬件实现时,便有相应的结构对应于 FIR 系统。特别指出,基于 DFT 变换使用快速傅里叶变换的硬件实现已经在第 8 章给出了。

9.2.1 直接型结构

直接型实现可以直接由非递归差分方程(9.2.1)得到,或由如下的卷积和得到:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M-1}h(k)x(n-k) \tag{9.2.4}$$

图 9.2.1 画出了其结构。

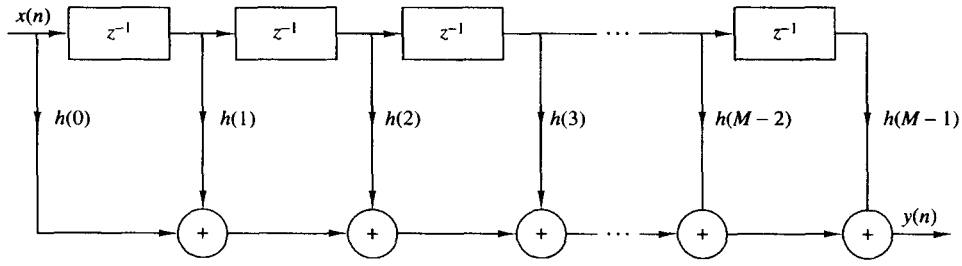


图 9.2.1　FIR 系统的直接型实现

我们观察到，该结构需要 $M-1$ 个存储空间来存放 $M-1$ 个输入，每个输出需要 M 次乘法和 $M-1$ 次加法。因为输出是输入的加权线性组合，故图 9.2.1 组成了一个抽头延迟线或一个横向系统。最后，直接型实现通常被称为横向或者抽头延迟线滤波器。

当 FIR 系统具有线性相位时，如 10.2 节中描述的那样，单位冲激响应函数服从下面的对称或不对称条件：

$$h(n) = \pm h(M-1-n) \tag{9.2.5}$$

对该系统而言，乘法从 M 次减为 $M/2$（M 为偶数）次或（$M-1$）/2 次（M 为奇数）。例如，图 9.2.2 给出了 M 为奇数时，利用对称性这一有利因素得到的结构。

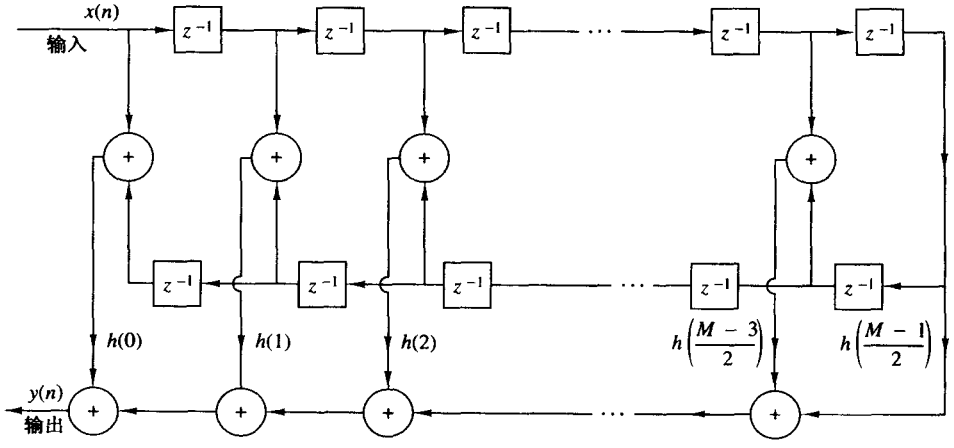


图 9.2.2　线性相位 FIR 系统（M 为奇数）的直接型实现

9.2.2　级联型结构

级联实现可以自然地从式(9.2.2)的系统函数中得到。将 $H(z)$分解为二阶 FIR 系统

$$H(z) = \prod_{k=1}^{K} H_k(z) \tag{9.2.6}$$

是很简单的，其中，

$$H_k(z) = b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}, \qquad k = 1, 2, \cdots, K \tag{9.2.7}$$

K 是$(M+1)/2$ 的整数部分。滤波器系数 b_0 可以均匀地分配到 K 个滤波器段中，即 $b_0 = b_{10}\, b_{20} \cdots b_{K0}$，或者它可以被指定到单个滤波器段。$H(z)$的零点可以成对匹配得到式(9.2.7)形式的二阶

FIR 滤波器。通常我们希望复共轭的根成对出现,这样式(9.2.7)中的系数$\{b_{ki}\}$就为实值。另一方面,实根可以以任意方式组对。这种采用基本二阶段的级联型实现如图 9.2.3 所示。

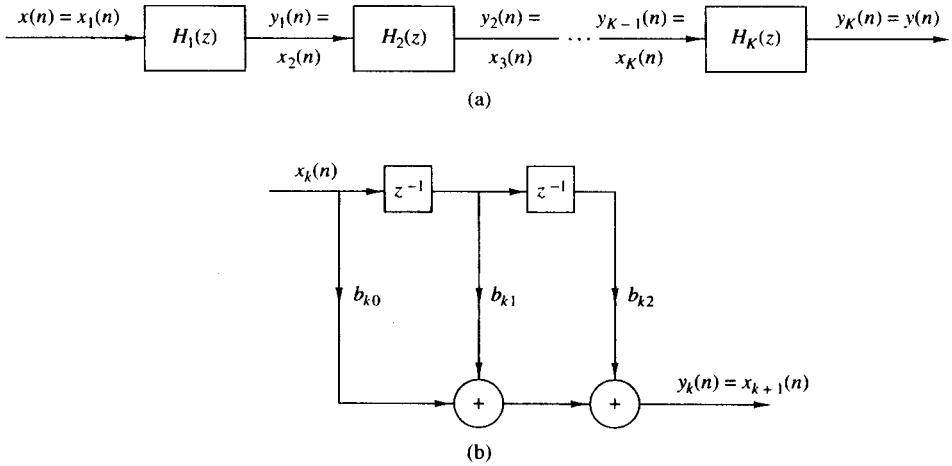


图 9.2.3 一个 FIR 系统的级联实现

在线性相位 FIR 滤波器中,$h(n)$的对称性暗示 $H(z)$的零点同样具有对称性。特别地,如果 z_k 和 z_k^* 为一对复共轭零点,那么 $1/z_k$ 与 $1/z_k^*$ 同样是一对复共轭零点(见 10.2 节)。从而,我们利用其简化的四阶滤波器段来实现 FIR 系统如下:

$$\begin{aligned} H_k(z) &= c_{k0}(1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1})(1 - z^{-1}/z_k)(1 - z^{-1}/z_k^*) \\ &= c_{k0} + c_{k1}z^{-1} + c_{k2}z^{-2} + c_{k1}z^{-3} + c_{k0}z^{-4} \end{aligned} \tag{9.2.8}$$

其中,系数$\{c_{k1}\}$与$\{c_{k2}\}$为 z_k 的函数。所以,通过结合两对极点来组成一个四阶滤波器段,我们可以将乘法的次数从 6 次减少为 3 次(减少了 50%)。图 9.2.4 显示了基本的四阶 FIR 滤波器结构。

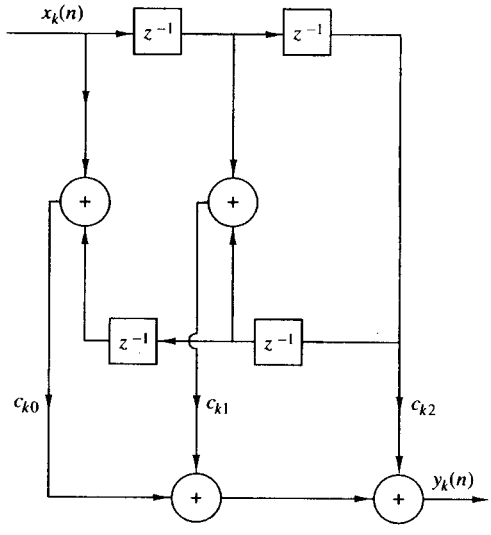


图 9.2.4 级联型 FIR 系统中的一个四阶滤波器段

9.2.3　频率采样结构[①]

频率采样实现是 FIR 滤波器的另一种结构方式，其中描述滤波器的参数为所求的频率响应的参数，而不是冲激响应 $h(n)$。为了得到频率采样结构，我们通过等间隔的频率采样指定需要的频率响应，即

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha), \quad k = 0, 1, \cdots, \frac{M-1}{2}, \quad M\text{为奇数}$$

$$k = 0, 1, \cdots, \frac{M}{2} - 1, \quad M\text{为偶数}$$

$$\alpha = 0 \text{ 或 } \frac{1}{2}$$

并从等间隔频率采样解单位冲激响应 $h(n)$。所以，我们将频率响应写为

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

并且 $H(\omega)$在频率 $\omega_k = (2\pi/M)(k+\alpha)$处的值为

$$\begin{aligned} H(k+\alpha) &= H\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(k+\alpha)n/M}, \qquad k = 0, 1, \cdots, M-1 \end{aligned} \tag{9.2.9}$$

值$\{H(k+\alpha)\}$的集合通常称为 $H(\omega)$的频率采样。当 $\alpha = 0$时，$\{H(k)\}$对应于$\{h(n)\}$的 M 点 DFT。

很容易对式(9.2.9)求逆，并将 $h(n)$用频率采样的方式表示。结果为

$$h(n) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(k+\alpha)n/M}, \qquad n = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{9.2.10}$$

当 $\alpha = 0$时，式(9.2.10)为$\{H(k)\}$的 IDFT。现在，如果我们采用式(9.2.10)替换 z 变换 $H(z)$中的 $h(n)$，则有

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{M-1} h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1}\left[\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(k+\alpha)n/M}\right]z^{-n} \end{aligned} \tag{9.2.11}$$

通过将式(9.2.11)中的求和顺序互换并对 n 求和，有

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)\left[\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(k+\alpha)/M}z^{-1})^n\right] \\ &= \frac{1-z^{-M}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\alpha}}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{H(k+\alpha)}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(k+\alpha)/M}z^{-1}} \end{aligned} \tag{9.2.12}$$

所以，系统函数 $H(z)$可以通过频率采样$\{H(k+\alpha)\}$而不是$\{h(n)\}$来描述。

---

① 读者可以参考 10.2.3 节中对频率采用 FIR 滤波器的进一步讨论。

我们将这种滤波器实现视为两个滤波器的级联[即 $H(z)=H_1(z)H_2(z)$]。其中之一是全零滤波器或梳状滤波器,系统函数为

$$H_1(z)=\frac{1}{M}(1-z^{-M}e^{j2\pi\alpha}) \tag{9.2.13}$$

它的零点等距地分布在单位圆上,

$$z_k=e^{j2\pi(k+\alpha)/M},\qquad k=0,1,\cdots,M-1$$

第二个滤波器的系统函数为

$$H_2(z)=\sum_{k=0}^{M-1}\frac{H(k+\alpha)}{1-e^{j2\pi(k+\alpha)/M}z^{-1}} \tag{9.2.14}$$

它由单极点并联滤波器组构成,其共振频率为

$$p_k=e^{j2\pi(k+\alpha)/M},\qquad k=0,1,\cdots,M-1$$

注意极点位置和零点位置相同,都位于 $\omega_k=2\pi(k+\alpha)/M$ 处,而这正是指定所需频率响应的频率。并联共振滤波器组的增益即为复参数$\{H(k+\alpha)\}$。该级联实现如图 9.2.5 所示。

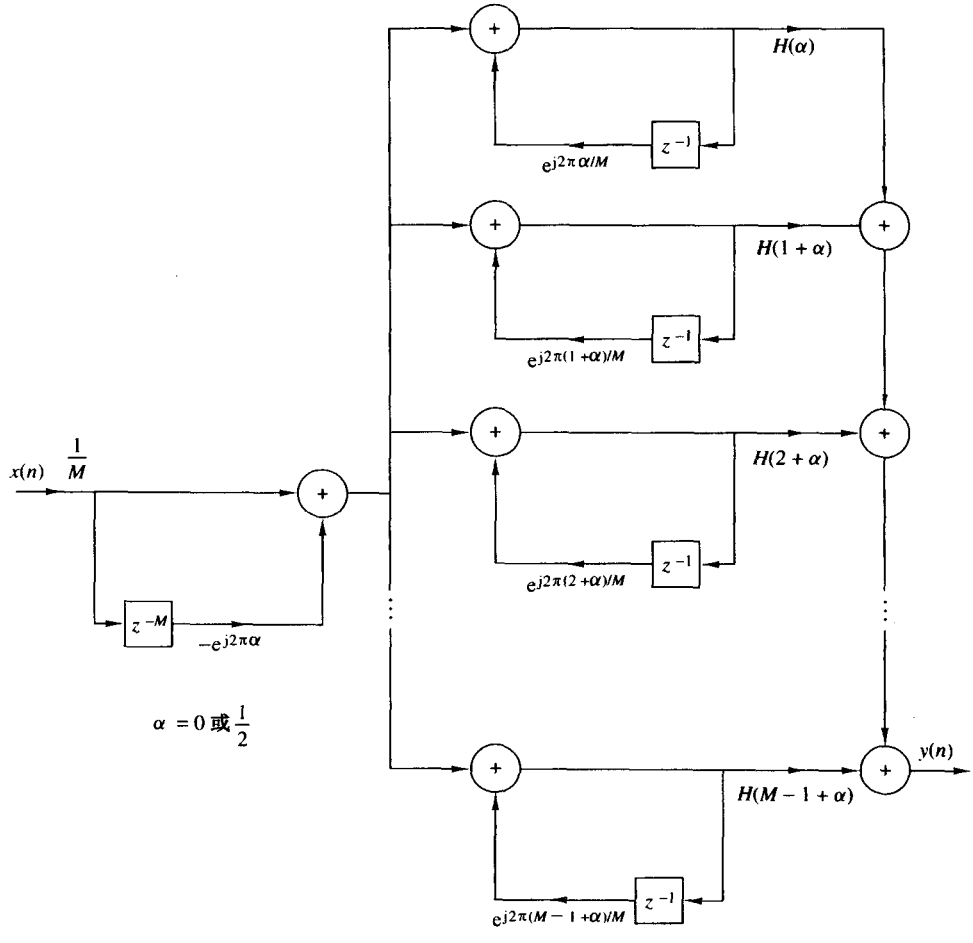


图 9.2.5 FIR 滤波器的频率采样实现

当所需 FIR 滤波器的频率响应特性为窄带时，增益参数 $|H(k+\alpha)|$ 的绝大多数系数为零。从而，对应的共振滤波器可以去掉，只有系数非零的滤波器被保留。最后结果是一个比直接型实现需要更少计算量的滤波器(乘法和加法)。所以，我们可获得更有效的实现。

频率采样滤波器结构可以利用 $H(k+\alpha)$ 的如下对称性进一步简化，即 $H(k)=H^*(M-k)$，$\alpha=0$ 和

$$H\left(k+\frac{1}{2}\right)=H\left(M-k-\frac{1}{2}\right), \qquad \alpha=\frac{1}{2}$$

这种关系可以简单地从式(9.2.9)导出。由于这种对称性，通过组合一对单极点滤波器可以获得一个实值双极点滤波器。所以，对 $\alpha=0$，系统函数 $H_2(z)$ 简化为

$$\begin{aligned} H_2(z)&=\frac{H(0)}{1-z^{-1}}+\sum_{k=1}^{(M-1)/2}\frac{A(k)+B(k)z^{-1}}{1-2\cos(2\pi k/M)z^{-1}+z^{-2}}, \qquad M\text{为奇数}\\ H_2(z)&=\frac{H(0)}{1-z^{-1}}+\frac{H(M/2)}{1+z^{-1}}+\sum_{k=1}^{(M/2)-1}\frac{A(k)+B(k)z^{-1}}{1-2\cos(2\pi k/M)z^{-1}+z^{-2}}, \qquad M\text{为偶数} \end{aligned} \tag{9.2.15}$$

其中，由定义有

$$\begin{aligned} A(k)&=H(k)+H(M-k)\\ B(k)&=H(k)e^{-j2\pi k/M}+H(M-k)e^{j2\pi k/M} \end{aligned} \tag{9.2.16}$$

对 $\alpha=\frac{1}{2}$，可以得到类似的结果。

例 9.2.1

对于具有频率样本

$$H\left(\frac{2\pi k}{32}\right)=\begin{cases}1, & k=0,1,2\\ \frac{1}{2}, & k=3\\ 0, & k=4,5,\cdots,15\end{cases}$$

的线性相位(对称)FIR 滤波器，画出 $M=32$ 和 $\alpha=0$ 时的直接型实现的框图以及频率采样实现的框图，并比较两种结构的计算复杂度。

解：因为滤波器对称，所以利用对称性可以将乘法次数减少一半。对直接型实现而言，可以将乘法次数从 32 次减少为 16 次。每个输出需要的加法次数为 31。图 9.2.6 显示了直接型实现的框图。

我们为频率采样实现使用式(9.2.13)和式(9.2.15)的形式，并抛弃所有具有零增益系数 $|H(k)|$ 的项。非零系数为 $H(k)$ 并且对应的对为 $H(M-k)$，$k=0,1,2,3$。结果的框图如图 9.2.7 所示。因为 $H(0)=1$，故单极点滤波器不需要乘法。三个双极点滤波器每个需 3 次乘法，共 9 次乘法。总加法次数为 13。所以，FIR 滤波器的频率采样实现与直接型实现相比，能够更有效地计算。

9.2.4　格型结构

本节我们解释另一个 FIR 滤波器结构，这种结构称为格型滤波器或格型实现。格型滤波器被广泛应用于语音处理和自适应滤波器的实现中。

我们先从一个 FIR 滤波器开始，其系统函数为

$$H_m(z)=A_m(z), \qquad m=0,1,2,\cdots,M-1 \tag{9.2.17}$$

其中，由定义可知，$A_m(z)$ 为多项式

$$A_m(z)=1+\sum_{k=1}^{m}\alpha_m(k)z^{-k}, \qquad m\geqslant 1 \tag{9.2.18}$$

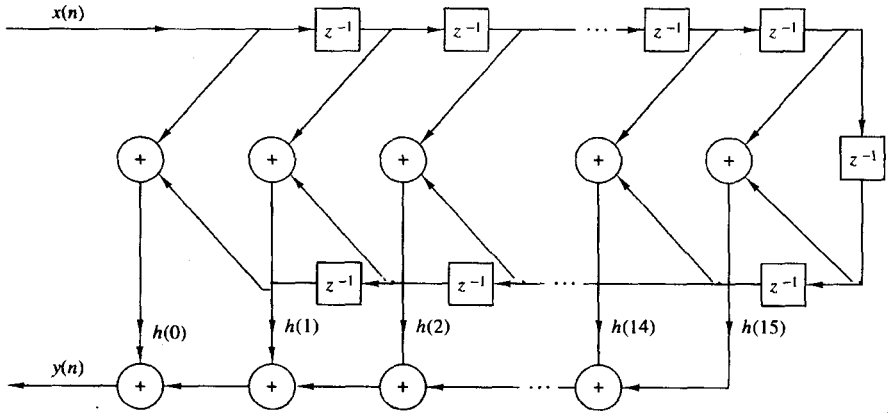


图 9.2.6 $M=32$ 的 FIR 滤波器的直接型实现

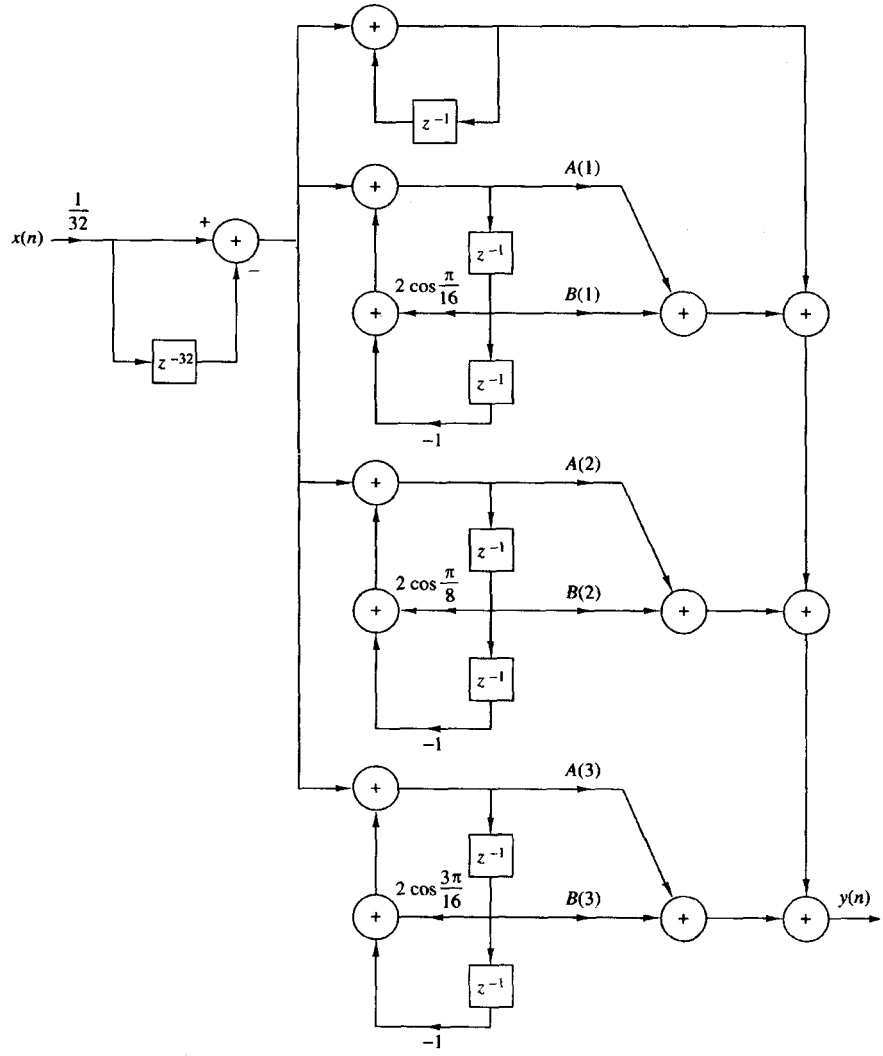


图 9.2.7 例 9.2.1 中 FIR 滤波器频率采样实现

并且 $A_0(z)=1$。第 m 个滤波器的单位冲激响应为 $h_m(0)=1$，且 $h_m(k)=\alpha_m(k)$，$k=1,2,\cdots,m$。多项式 $A_m(z)$的下标 m 表示多项式的阶数。为了数学上的便利，我们定义 $\alpha_m(0)=1$。

如果$\{x(n)\}$是滤波器 $A_m(z)$的输入序列，$\{y(n)\}$为输出序列，则有

$$y(n)=x(n)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_m(k)x(n-k) \tag{9.2.19}$$

FIR 滤波器的两种直接型结构如图 9.2.8所示。

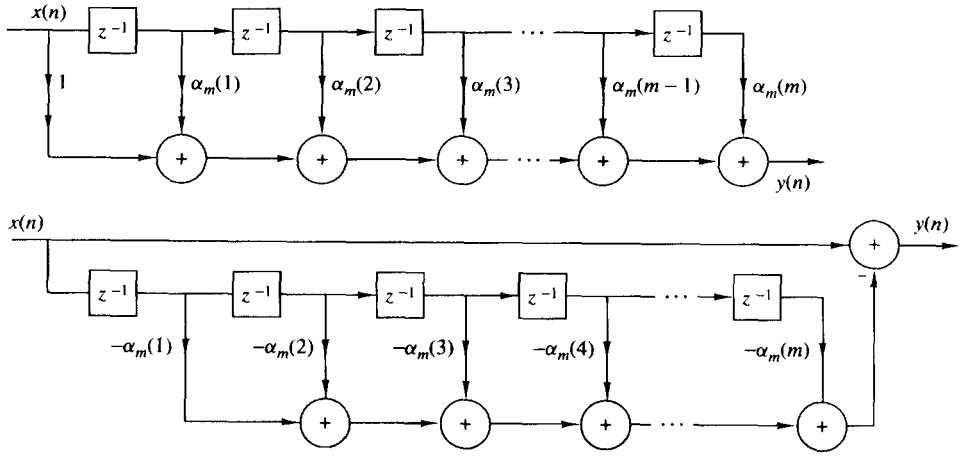


图 9.2.8　FIR 预测滤波器的直接型实现

在第 12 章中，我们将显示图 9.2.8 中的 FIR 滤波器结构和线性预测之间的紧密联系，其中

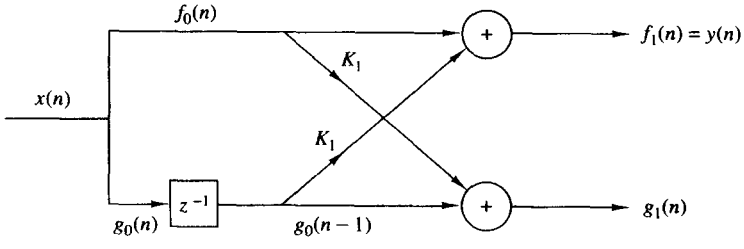
$$\hat{x}(n)=-\sum_{k=1}^{m}\alpha_m(k)x(n-k) \tag{9.2.20}$$

是基于过去 m 个值对$x(n)$的单步预测，并且式(9.2.19)给出的 $y(n)=x(n)-\hat{x}(n)$表示预测误差序列。在这种前提下，图 9.2.8 中的滤波器结构为预测误差滤波器。

现在假设我们有一个 $m=1$ 阶滤波器。此滤波器的输出为

$$y(n)=x(n)+\alpha_1(1)x(n-1) \tag{9.2.21}$$

这个结果同样可以从图 9.2.9 中的一阶或单段滤波器得到，两个输入都为 $x(n)$，选择上边的一支作为输出。如果我们选择 $K_1=\alpha_1(1)$，则输出恰好为式(9.2.21)。参数 K_1 被称为反射系数。



$$f_0(n)=g_0(n)=x(n)$$
$$f_1(n)=f_0(n)+K_1g_0(n-1)=x(n)+K_1x(n-1)$$
$$g_1(n)=K_1f_0(n)+g_0(n-1)=K_1x(n)+x(n-1)$$

图 9.2.9　单段格型滤波器

下面我们考虑 $m=2$ 的滤波器。在这种情况下直接型结构的输出为

$$y(n)=x(n)+\alpha_2(1)x(n-1)+\alpha_2(2)x(n-2) \tag{9.2.22}$$

通过将两个格型结构级联,如图 9.2.10 所示,得到与式(9.2.22)相同的结果是可能的。实际上,第 1 段的输出为

$$\begin{aligned} f_1(n)&=x(n)+K_1x(n-1)\\ g_1(n)&=K_1x(n)+x(n-1)\end{aligned} \tag{9.2.23}$$

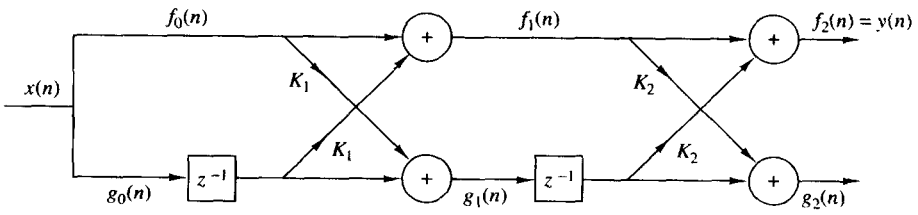


图 9.2.10 两段格型滤波器

第 2 段的输出为

$$\begin{aligned} f_2(n)&=f_1(n)+K_2g_1(n-1)\\ g_2(n)&=K_2f_1(n)+g_1(n-1)\end{aligned} \tag{9.2.24}$$

如果我们将注意力集中到 $f_2(n)$,并将式(9.2.23)中的 $f_1(n)$ 与 $g_1(n-1)$ 代入式(9.2.24),则我们得到

$$\begin{aligned} f_2(n)&=x(n)+K_1x(n-1)+K_2[K_1x(n-1)+x(n-2)]\\ &=x(n)+K_1(1+K_2)x(n-1)+K_2x(n-2)\end{aligned} \tag{9.2.25}$$

现在式(9.2.25)等价于式(9.2.22)中直接型 FIR 滤波器的输出。如果我们写出系数的方程,即

$$\alpha_2(2)=K_2,\qquad \alpha_2(1)=K_1(1+K_2) \tag{9.2.26}$$

或等价为

$$K_2=\alpha_2(2),\qquad K_1=\frac{\alpha_2(1)}{1+\alpha_2(2)} \tag{9.2.27}$$

所以,格型滤波器的反射系数 K_1 与 K_2 可以通过直接型的系数$\{\alpha_m(k)\}$得到。

继续这种过程,通过推导可以得到 m 阶直接型 FIR 滤波器与 m 阶或 m 段格型滤波器之间的等价关系。格型滤波器通常使用下列递归方程描述:

$$f_0(n)=g_0(n)=x(n) \tag{9.2.28}$$

$$f_m(n)=f_{m-1}(n)+K_mg_{m-1}(n-1),\qquad m=1,2,\cdots,M-1 \tag{9.2.29}$$

$$g_m(n)=K_mf_{m-1}(n)+g_{m-1}(n-1),\qquad m=1,2,\cdots,M-1 \tag{9.2.30}$$

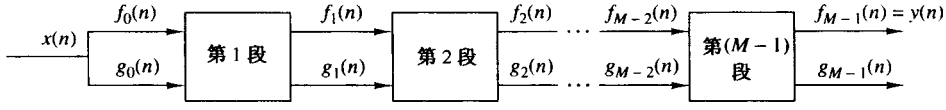
$M-1$ 段滤波器的输出对应于 $M-1$ 阶 FIR 滤波器的输出,即

$$y(n)=f_{M-1}(n)$$

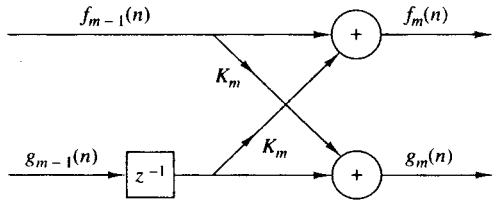
图 9.2.11 显示了 $M-1$ 段格型滤波器的框图,以及执行式(9.2.29)与式(9.2.30)中的运算的典型滤波器段。

由于 FIR 滤波器与格型滤波器的等价性,m 段格型滤波器的输出$f_m(n)$可以表示为

$$f_m(n)=\sum_{k=0}^{m}\alpha_m(k)x(n-k),\qquad \alpha_m(0)=1 \tag{9.2.31}$$



(a)



(b)

图 9.2.11　$M-1$ 段格型滤波器

由于式(9.2.31)是一个卷积和,它满足 z 变换关系

$$F_m(z)=A_m(z)X(z)$$

或等价为

$$A_m(z)=\frac{F_m(z)}{X(z)}=\frac{F_m(z)}{F_0(z)} \tag{9.2.32}$$

通过使用另外一组系数$\{\beta_m(k)\}$,格型滤波器的另外一个输出量 $g_m(n)$也能够用如式(9.2.31)给出的卷积和的形式表达。如果仔细观察式(9.2.23)和式(9.2.24),那么这其实是很显然的。从式(9.2.23)我们注意到格型滤波器的滤波器系数 $f_1(n)$为$\{1,K_1\}=\{1,\alpha_1(1)\}$,而滤波器系数 $g_1(n)$的系数为$\{K_1,1\}=\{\alpha_1(1),1\}$。我们注意到这两组系数顺序相反。如果考虑两段格型滤波器,其输出由式(9.2.24)定义,那么 $g_2(n)$可以表示为

$$\begin{aligned}g_2(n)&=K_2f_1(n)+g_1(n-1)\\&=K_2[x(n)+K_1x(n-1)]+K_1x(n-1)+x(n-2)\\&=K_2x(n)+K_1(1+K_2)x(n-1)+x(n-2)\\&=\alpha_2(2)x(n)+\alpha_2(1)x(n-1)+x(n-2)\end{aligned}$$

从而,滤波器系数为$\{\alpha_2(2),\alpha_2(1),1\}$,产生输出 $f_2(n)$的滤波器的系数为$\{1,\alpha_2(1),\alpha_2(2)\}$。这里,我们再一次看到两个滤波系数的顺序相反。

从这一点出发,一个 m 段格型滤波器的输出 $g_m(n)$可以表示为如下卷积和的形式:

$$g_m(n)=\sum_{k=0}^{m}\beta_m(k)x(n-k) \tag{9.2.33}$$

其中,滤波器系数$\{\beta_m(k)\}$与产生 $f_m(n)=y(n)$的滤波器有关,但顺序是相反的。从而有

$$\beta_m(k)=\alpha_m(m-k),\qquad k=0,1,\cdots,m \tag{9.2.34}$$

当 $k=m$ 时,$\beta_m(m)=1$。

在线性预测的情况下,通过使用系数为$\{-\beta_m(k)\}$的滤波器,假设用数据 $x(n),x(n-1),\cdots,$

$x(n-m+1)$来线性预测信号 $x(n-m)$的值。从而,预测值为

$$\hat{x}(n-m)=-\sum_{k=0}^{m-1}\beta_m(k)x(n-k) \tag{9.2.35}$$

因为数据反向通过预测器,所以式(9.2.35)中进行的预测被称为反向预测。相比之下,以 $A_m(z)$为系统函数的 FIR 滤波器被称为前向滤波器。

在 z 变换域中,式(9.2.33)变为

$$G_m(z)=B_m(z)X(z) \tag{9.2.36}$$

或等价为

$$B_m(z)=\frac{G_m(z)}{X(z)} \tag{9.2.37}$$

其中,$B_m(z)$表示系数为$\{\beta_m(k)\}$的 FIR 滤波器的系统函数,即

$$B_m(z)=\sum_{k=0}^{m}\beta_m(k)z^{-k} \tag{9.2.38}$$

因为 $\beta_m(k)=\alpha_m(m-k)$,式(9.2.38)可以表示为

$$\begin{aligned}B_m(z)&=\sum_{k=0}^{m}\alpha_m(m-k)z^{-k}\\&=\sum_{l=0}^{m}\alpha_m(l)z^{l-m}\\&=z^{-m}\sum_{l=0}^{m}\alpha_m(l)z^{l}\\&=z^{-m}A_m(z^{-1})\end{aligned} \tag{9.2.39}$$

式(9.2.39)中的关系表明以 $B_m(z)$为系数的 FIR 滤波器的零点和以 $A_m(z)$为系数的滤波器的零点互为倒数。所以 $B_m(z)$被称为 $A_m(z)$的倒数或者反多项式。

现在我们已经建立了直接型实现和格型滤波器之间的有趣关系,让我们回到式(9.2.28)至式(9.2.30)中描述的递归格型滤波器表达式并将其变换到 z 域。所以有

$$F_0(z)=G_0(z)=X(z) \tag{9.2.40}$$

$$F_m(z)=F_{m-1}(z)+K_mz^{-1}G_{m-1}(z),\qquad m=1,2,\cdots,M-1 \tag{9.2.41}$$

$$G_m(z)=K_mF_{m-1}(z)+z^{-1}G_{m-1}(z),\qquad m=1,2,\cdots,M-1 \tag{9.2.42}$$

如果我们将每个等式除以 $X(z)$,则得到如下结果:

$$A_0(z)=B_0(z)=1 \tag{9.2.43}$$

$$A_m(z)=A_{m-1}(z)+K_mz^{-1}B_{m-1}(z),\qquad m=1,2,\cdots,M-1 \tag{9.2.44}$$

$$B_m(z)=K_mA_{m-1}(z)+z^{-1}B_{m-1}(z),\qquad m=1,2,\cdots,M-1 \tag{9.2.45}$$

所以,格型段可以在 z 域中用矩阵描述为

$$\begin{bmatrix}A_m(z)\\B_m(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&K_m\\K_m&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{m-1}(z)\\z^{-1}B_{m-1}(z)\end{bmatrix} \tag{9.2.46}$$

在结束本节的讨论之前,我们期望得出格型滤波器参数$\{K_i\}$,即反射系数和直接型滤波器系数$\{\alpha_m(k)\}$的转换关系。

将格型滤波器的系数转换为直接型滤波器的系数。通过利用如下关系，直接型 FIR 滤波器系数$\{\alpha_m(k)\}$可以从格型滤波器系数中获得：

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \tag{9.2.47}$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \qquad m = 1, 2, \cdots, M-1 \tag{9.2.48}$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}), \qquad m = 1, 2, \cdots, M-1 \tag{9.2.49}$$

解可能通过递归得到，从 $m=1$ 开始。所以我们获得了 $M-1$ 个 FIR 滤波器的序列，每个波滤器对应于 m 的一个值。这个过程可以通过一个例子加以解释。

例 9.2.2

给出系数为 $K_1 = \frac{1}{4}, K_2 = \frac{1}{4}, K_3 = \frac{1}{3}$的一个三段格型滤波器，求直接型结构的 FIR 滤波器的系数。

解：我们对问题递归求解，从式(9.2.48)在 $m=1$ 时开始。所以有

$$\begin{aligned} A_1(z) &= A_0(z) + K_1 z^{-1} B_0(z) \\ &= 1 + K_1 z^{-1} = 1 + \tfrac{1}{4} z^{-1} \end{aligned}$$

所以，对应于单段格型的 FIR 的滤波器的系数为 $\alpha_1(0) = 1, \alpha_1(1) = K_1 = \frac{1}{4}$。因为 $B_m(z)$为 $A_m(z)$的逆多项式，所以有

$$B_1(z) = \tfrac{1}{4} + z^{-1}$$

下面我们为格型滤波器加上第 2 段。对于 $m=2$，从式(9.2.48)得到

$$\begin{aligned} A_2(z) &= A_1(z) + K_2 z^{-1} B_1(z) \\ &= 1 + \tfrac{3}{8} z^{-1} + \tfrac{1}{2} z^{-2} \end{aligned}$$

所以，对应于第 2 段格型的 FIR 滤波器的参数为 $\alpha_2(0) = 1, \alpha_2(1) = 3/8, \alpha_2(2) = \frac{1}{2}$。同样，

$$B_2(z) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8} z^{-1} + z^{-2}$$

最后，加上第 3 段的格型滤波器为多项式

$$\begin{aligned} A_3(z) &= A_2(z) + K_3 z^{-1} B_2(z) \\ &= 1 + \tfrac{13}{24} z^{-1} + \tfrac{5}{8} z^{-2} + \tfrac{1}{3} z^{-3} \end{aligned}$$

从而，所求的 FIR 滤波器系数为

$$\alpha_3(0) = 1, \qquad \alpha_3(1) = \tfrac{13}{24}, \qquad \alpha_3(2) = \tfrac{5}{8}, \qquad \alpha_3(3) = \tfrac{1}{3}$$

如此例所示，具有参数 $K_1, K_2, \cdots, K_m$ 的格型滤波器对应于具有系统函数 $A_1(z), A_2(z), \cdots, A_m(z)$的 m 类直接型 FIR 滤波器。有趣的是，m 类 FIR 滤波器的直接型需要 $m(m+1)/2$ 个滤波器系数。对比而言，格型只需要 m 个反射系数$\{K_i\}$。格型表示更加紧凑是因为后加的段并不影响之前段的系数。另一方面，如果在 $m-1$ 段格型滤波器的基础上增加第 m 段，那么得到的系统函数为$A_m(z)$的 FIR 滤波器的系数将与系统函数为 $A_{m-1}(z)$的低阶 FIR 滤波器的系数完全不同。

从式(9.2.47)至式(9.2.49)的多项式关系中，可以得到递归求解$\{\alpha_m(k)\}$的公式。从式(9.2.48)中的关系，我们有

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z)$$

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_m(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{m-1}(k) z^{-k} + K_m \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{m-1}(m-1-k) z^{-(k+1)} \tag{9.2.50}$$

通过使具有相同幂次的 z^{-1} 的系数相等,并且回忆 $\alpha_m(0)=1, m=1,2,\cdots,M-1$,我们得到所求的FIR滤波器系数的递归公式为

$$\alpha_m(0)=1 \tag{9.2.51}$$

$$\alpha_m(m)=K_m \tag{9.2.52}$$

$$\begin{aligned}\alpha_m(k)&=\alpha_{m-1}(k)+K_m\alpha_{m-1}(m-k)\\&=\alpha_{m-1}(k)+\alpha_m(m)\alpha_{m-1}(m-k),\end{aligned}\qquad \begin{matrix}1\leqslant k\leqslant m-1\\ m=1,2,\cdots,M-1\end{matrix} \tag{9.2.53}$$

我们注意到从式(9.2.51)到式(9.2.53)就是第12章中的Levinson-Durbin递归公式。

将直接型FIR滤波器的系数转换为格型滤波器的系数。假设给出了直接型FIR滤波器的系数,或等价地,给出了多项式 $A_m(z)$。我们希望确定对应的格型滤波器的系数 $\{K_i\}$。对于 m 段格型滤波器,我们一开始有 $K_m=\alpha_m(m)$。为了得到 K_{m-1},我们需要多项式 $A_{m-1}(z)$,因为 K_m 是通过多项式 $A_m(z), m=M-1,M-2,\cdots,1$ 得到的,从而我们需要计算从 $m=M-1$ 递减到 $m=1$ 的多项式 $A_m(z)$。

该多项式期望的递归关系可以通过式(9.2.44)和式(9.2.45)很容易地得到。我们有

$$\begin{aligned}A_m(z)&=A_{m-1}(z)+K_mz^{-1}B_{m-1}(z)\\&=A_{m-1}(z)+K_m[B_m(z)-K_mA_{m-1}(z)]\end{aligned}$$

如果对 $A_{m-1}(z)$ 进行求解,可得

$$A_{m-1}(z)=\frac{A_m(z)-K_mB_m(z)}{1-K_m^2},\qquad m=M-1,M-2,\cdots,1 \tag{9.2.54}$$

所以,我们可以计算所有从 $A_{m-1}(z)$ 开始的低阶多项式 $A_m(z)$,并且从关系式 $K_m=\alpha_m(m)$ 得到所求的格型滤波器系数。通过观察可以知道此过程在 $|K_m|\neq 1, m=1,2,\cdots,M-1$ 时是可行的。

例9.2.3

求对应于具有如下系统函数的FIR滤波器的格型滤波器系数:

$$H(z)=A_3(z)=1+\tfrac{13}{24}z^{-1}+\tfrac{5}{8}z^{-2}+\tfrac{1}{3}z^{-3}$$

解:首先我们注意到 $K_3=\alpha_3(3)=\frac{1}{3}$。进一步有

$$B_3(z)=\tfrac{1}{3}+\tfrac{5}{8}z^{-1}+\tfrac{13}{24}z^{-2}+z^{-3}$$

对 $m=3$,由式(9.2.54)中的递降关系有

$$\begin{aligned}A_2(z)&=\frac{A_3(z)-K_3B_3(z)}{1-K_3^2}\\&=1+\tfrac{3}{8}z^{-1}+\tfrac{1}{2}z^{-2}\end{aligned}$$

所以,$K_2=\alpha_2(2)=\frac{1}{2}$,$B_2(z)=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}z^{-1}+z^{-2}$。通过重复式(9.2.51)中的递降递归过程,我们得到

$$\begin{aligned}A_1(z)&=\frac{A_2(z)-K_2B_2(z)}{1-K_2^2}\\&=1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\end{aligned}$$

所以,$K_1=\alpha_1(1)=\frac{1}{4}$。

从式(9.2.54)给出的递降递归公式，可以很容易地得到从 $m = M-1$ 开始递降至 $m = 1$ 时递归计算 K_m 的公式。对于 $m = M-1, M-2, \cdots, 1$，我们有

$$K_m = \alpha_m(m), \qquad \alpha_{m-1}(0) = 1 \tag{9.2.55}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{m-1}(k) &= \frac{\alpha_m(k) - K_m\beta_m(k)}{1 - K_m^2} \\ &= \frac{\alpha_m(k) - \alpha_m(m)\alpha_m(m-k)}{1 - \alpha_m^2(m)}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m-1 \end{aligned} \tag{9.2.56}$$

如前面指出的，式(9.2.56)中的递归公式在 $|K_m| = 1$ 时不能工作。如果出现这种情况，则表明多项式 $A_{m-1}(z)$ 存在单位圆上的根。这种根可以自 $A_{m-1}(z)$ 中分解出来，且式(9.2.56)中的递归过程就可以对降阶后的系统执行。

9.3　IIR 系统的结构

本节我们讨论用式(9.1.1)中的差分方程或等价的式(9.1.2)中的系统函数描述的不同 IIR 系统的结构。像 FIR 系统的情形那样，IIR 系统也有多种不同的实现方式，包括直接型结构、级联型结构、格型结构和格型梯状结构。此外，IIR 系统还允许有一种并联型实现。我们先开始描述两种直接型实现。

9.3.1　直接型结构

由式(9.1.2)给出的有理系统函数表征了一个 IIR 系统，它可以被视为级联的两个系统，即

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \tag{9.3.1}$$

其中，$H_1(z)$ 包含 $H(z)$ 的零点，$H_2(z)$ 包含 $H(z)$ 的极点，

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \tag{9.3.2}$$

且

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{9.3.3}$$

在 2.5 节中，我们描述了两种不同的直接型实现，它们是通过将 $H_1(z)$ 紧挨着 $H_2(z)$ 或正好相反来实现的。因为 $H_1(z)$ 是一个 FIR 系统，它的直接型实现由图 9.2.1 给出。通过将全极点系统和 $H_1(z)$ 级联，我们得到了图 9.3.1 所示的直接 I 型实现。这种实现需要 $M+N+1$ 次乘法、$M+N$ 次加法和 $M+N+1$ 个存储空间。

如果全极点滤波器 $H_2(z)$ 位于全零点滤波器 $H_1(z)$ 之前，那么可得到一个更加紧凑的结构，如 2.5 节所示。回忆全极点滤波器的差分方程：

$$w(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k w(n-k) + x(n) \tag{9.3.4}$$

因为 $w(n)$ 是全零点系统的输入，其输出为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k w(n-k) \tag{9.3.5}$$

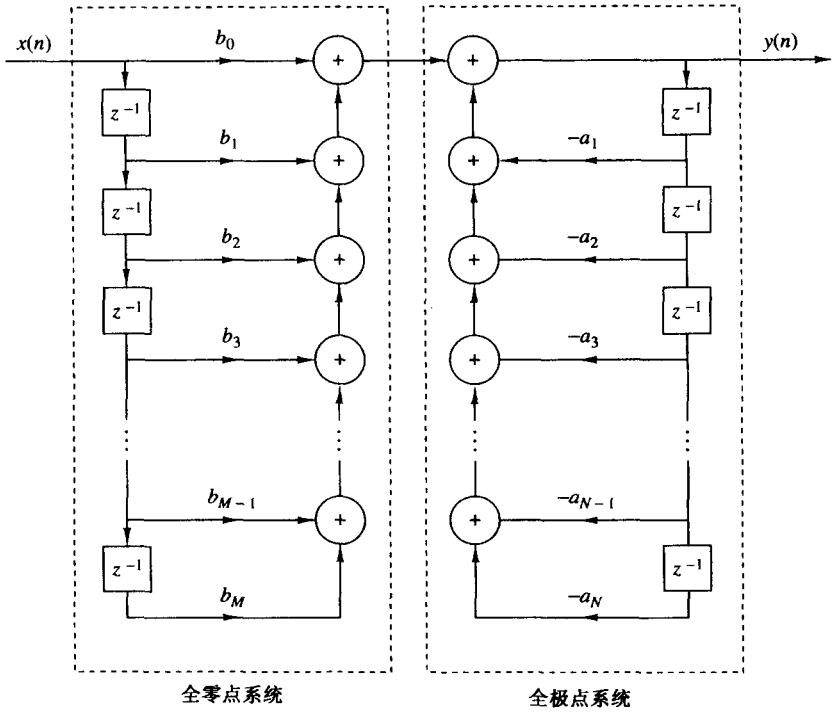


图 9.3.1 直接 *I* 型实现

我们注意到式(9.3.4)和式(9.3.5)都包括了序列$\{w(n)\}$的延迟形式。从而,只需要一条延迟线或者一组存储空间来存放$\{w(n)\}$的过去值。实现式(9.3.4)和式(9.3.5)的最终结构被称为直接 II 型实现,如图 9.3.2 所示。该结构需要 $M+N+1$ 次乘法、$M+N$ 次加法和最大$\{M,N\}$个存储空间。因为直接 II 型实现最小化了存储空间,所以被称为规范结构。然而,我们应指出其他 IIR 结构也具有此种性质,所以上述用词可能并不公允。

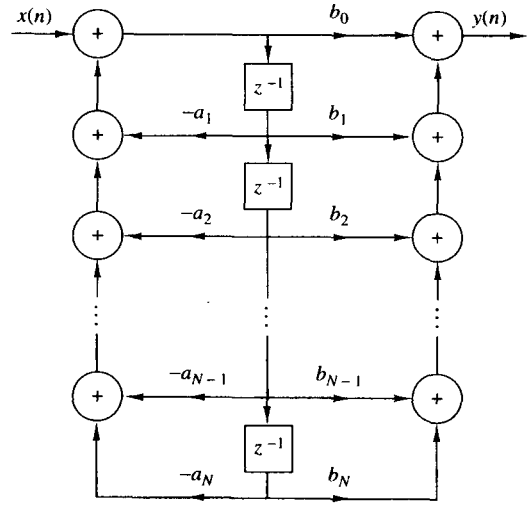


图 9.3.2 直接 II 型实现($N=M$)

图 9.3.1 和图 9.3.2 中的结构都被称为直接型实现,因为它们都直接从系统函数 $H(z)$得到,并没有经过任何重新排列。遗憾的是,这两种结构都对参数量化非常敏感,一般来说,在实际应用中并不推荐这两种结构。该主题将在 9.6 节中详细讨论,那时我们将会演示当 N 很大时,参数量化导致的滤波器系数的很小改变,也会导致系统的零点和极点的位置的很大改变。

9.3.2 信号流图和转置结构

信号流图提供了一种可以替代结构框图但与之等价的图形表示,我们可以用它来演示各种系统实现。信号流图的基本元素是支路和节点。由定义可知,信号流出一个支路等于该支路增益

(系统函数)乘以流入此支路的信号。此外,在信号流图节点处的信号等于所有和此节点相连的支路上的信号之和。

为了演示这些标准记法,让我们考虑图 9.3.3(a)中以框图形式表示的双极点和双零点 IIR 系统。该系统框图可以转换为图 9.3.3(b)所示的信号流图。我们注意到信号流图包含 5 个节点,分别用 1 至 5 表示。其中两个节点(1,3)为加性节点(它们包含加法器),其他 3 个节点表示支路节点。信号流图中标出了支路的透射率。注意,延迟用支路透射率 z^{-1} 表示。当支路透射率为单位 1 时,则不做任何标识。输入信号从系统的源节点输入,输出信号从汇节点输出。

我们观察到信号流图包含有与框图同样的基本信息。最明显的不同是,框图中的支路节点和加法器,在信号流图中均用节点表示。

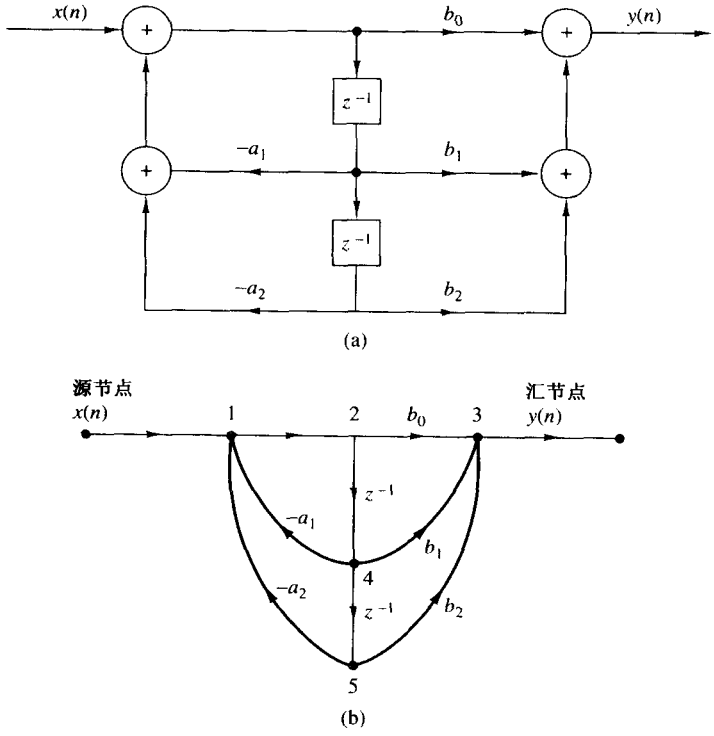


图 9.3.3　(a)二阶滤波器结构和(b)它的信号流图

线性信号流图在网络处理中具有重要地位,而且获得了很多有意义的结果。一种标准的记法包括将一个网络流图转换为另一个网络流图,而不改变基本的输入输出关系。其中一个用以产生新的 FIR 和 IIR 系统的有用方法源自转置定理或反转流图定理。简而言之,这个定理说如果我们将所有支路的传递方向逆转,并将输入和输出互换,那么系统函数是保持不变的。最终得到的结构称为转置结构或转置型。

例如,图 9.3.4(a)给出了图 9.3.3(b)的转置结构。对应的框图实现在图 9.3.4(b)中。我们注意到其中很有趣的一点是,支路节点变成了加法器节点,反之亦然。

让我们将转置定理应用到直接 II 型结构中。首先我们逆转图 9.3.2 中的所有信号流方向。其次,我们将支路节点变成加法器节点,而将加法器节点变成支路节点。最后,互换输入和输出。

这些操作导致了图 9.3.5 所示的转置直接 II 型结构。这种结构可以重画为图 9.3.6,它将输入放到左边,输出放到右边。

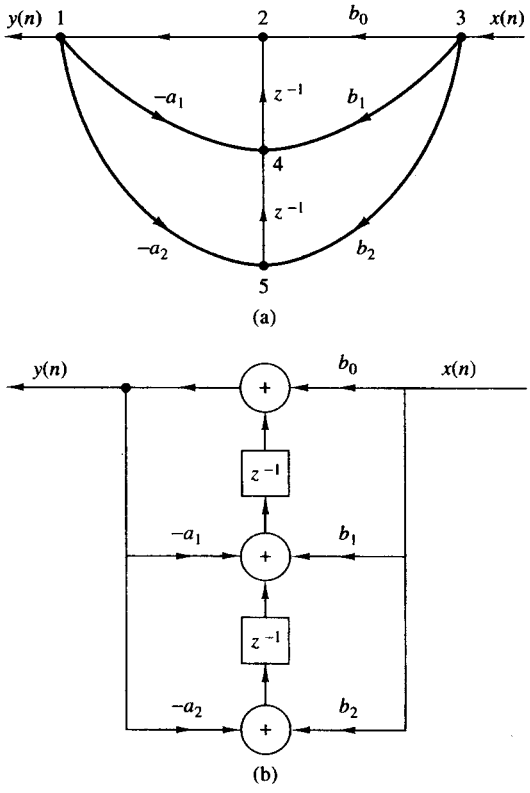


图 9.3.4 (a)转置结构的信号流图及(b)其实现

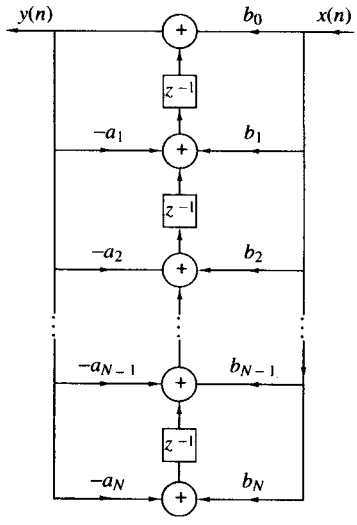


图 9.3.5 转置直接 II 型结构

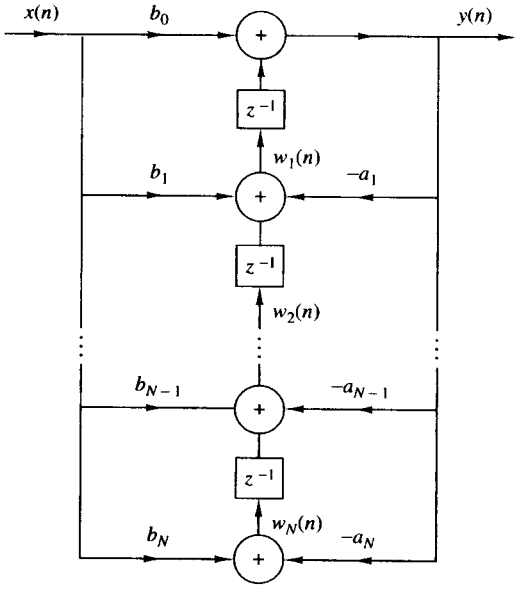


图 9.3.6 转置直接 II 型结构

我们得到的转置直接 II 型结构可以由以下差分方程描述:

$$y(n) = w_1(n-1) + b_0 x(n) \tag{9.3.6}$$

$$w_k(n) = w_{k+1}(n-1) - a_k y(n) + b_k x(n), \qquad k = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{9.3.7}$$

$$w_N(n) = b_N x(n) - a_N y(n) \tag{9.3.8}$$

不失一般性，我们在写上述公式时假设 $M = N$。从图 9.3.6 可以很清楚地观察到上述差分方程组可以用单个差分方程表示为

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{9.3.9}$$

最后，我们观察到转置直接 II 型结构和原先的直接 II 型结果需要同样数目的乘法、加法以及存储空间。

尽管我们对转置结构的讨论主要是想得到对 IIR 系统的一般形式，但需要注意的是，通过令 $a_k = 0, k = 1, 2, \cdots, N$ 从式(9.3.9)获得的 FIR 系统，同样有一个如图 9.3.7 所示的转置直接型结构。该结构可以通过设置 $a_k = 0, k = 1, 2, \cdots, N$ 从图 9.3.6 中简单地获得。这种转置型实现可以用下列差分方程组描述：

$$w_M(n) = b_M x(n) \tag{9.3.10}$$

$$w_k(n) = w_{k+1}(n-1) + b_k x(n), \qquad k = M-1, M-2, \cdots, 1 \tag{9.3.11}$$

$$y(n) = w_1(n-1) + b_0 x(n) \tag{9.3.12}$$

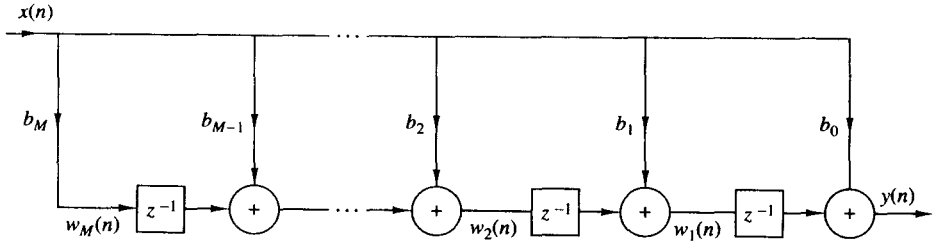


图 9.3.7　转置的 FIR 滤波器结构

综上所述，表 9.1 中给出了一个最基本的两极点和两零点 IIR 系统的直接型结构以及相应的差分方程，该系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{9.3.13}$$

这正是下面将要介绍的高阶 IIR 系统级联型实现的基础。在表 9.1 中给出的三种直接型结构中，直接 II 型结构因具有更小的存储空间而广受欢迎。

最后，我们注意到在 z 域中，描述线性信号流图的差分方程组成了一组线性公式。任何对这些公式的重新排列都等价于将信号流图重新排列得到新的结构，反之亦然。

9.3.3　级联型结构

让我们考虑式(9.1.2)给出的高阶 IIR 系统。不失一般性，我们假设 $N \geqslant M$。该系统可以被分解为二阶子系统的级联形式，所以 $H(z)$ 可以被表示为

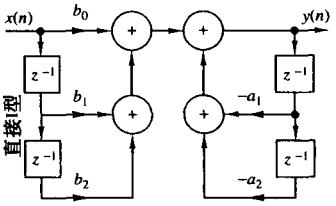
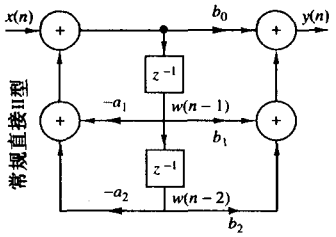
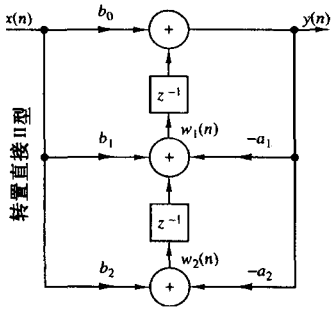
$$H(z) = \prod_{k=1}^{K} H_k(z) \tag{9.3.14}$$

其中，K 是 $(N+1)/2$ 的整数部分。$H_k(z)$ 具有一般形式

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1} z^{-1} + b_{k2} z^{-2}}{1 + a_{k1} z^{-1} + a_{k2} z^{-2}} \tag{9.3.15}$$

正如基于级联型实现的 FIR 系统的情形,系数 b_0 可以被均匀地分配到 K 个滤波器,所以 $b_0 = b_{10}\,b_{20}\cdots b_{K0}$。

表 9.1 一些二阶离散时间系统的结构

结构	实现公式	系统函数
	$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1)$ $+ b_2x(n-2)$ $- a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$	$\dfrac{H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$
	$w(n) = -a_1w(n-1) - a_2w(n-2)$ $+x(n)$ $y(n) = b_0w(n) + b_1w(n-1)$ $+b_2w(n-2)$	$\dfrac{H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$
	$y(n) = b_0x(n) + w_1(n-1)$ $w_1(n) = b_1x(n) - a_1y(n)$ $+w_2(n-1)$ $w_2(n) = b_2x(n) - a_2y(n)$	$\dfrac{H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$

系数$\{a_{ki}\}$和$\{b_{ki}\}$在二阶子系统中是实数。这也暗示着在产生式(9.3.15)中的二阶子系统或二次项时,我们应当将一对复共轭的极点分为一组,复共轭的零点分为一组。然而,构成子系统的复共轭极点和复共轭零点的配对可以是任意的。此外,任何两个实值零点可以配对组成一个二次项,同样任何两个实值极点也可以配对组成一个二次项。从而,在式(9.3.15)中分子部分的二次项可能由一对实根组成或者复共轭根组成。上述说法同样适用于式(9.3.15)中的分母。

如果 $N > M$,那么部分二阶子系统会出现分子系数为零的情况,即对于部分 k,要么 $b_{k2} = 0$ 或 $b_{k1} = 0$,要么 $b_{k2} = b_{k1} = 0$。此外,如果 N 为奇数,其中一个子系统,假设为 $H_k(z)$,必有 $a_{k2} = 0$,则此子系统为一阶子系统。为了保持在 $H(z)$的实现中的模块化,我们通常希望在级联结构中使用基本的二阶子系统,其中部分子系统的部分系数为 0。

具有如式(9.3.15)所示系统函数的每个二阶子系统均可以用直接 I 型、直接 II 型或转置直接 II 型实现。因为有许多不同的方法将 $H(z)$的零点和极点配对形成级联型中的一个二阶子系统,并且系统也可以有多种排列方式,所以将得到一系列不同的系统实现。虽然所有的级联型实现对于无限精度计算是等价的,但是对于有限精度计算,其性能差异可能会非常大。

级联结构的一般形式在图 9.3.8 中给出。如果我们为每个子系统使用直接 II 型结构,那么实现具有系统函数 $H(z)$的 IIR 系统的算法可以用如下方程描述:

$$y_0(n) = x(n) \tag{9.3.16}$$

$$w_k(n) = -a_{k1}w_k(n-1) - a_{k2}w_k(n-2) + y_{k-1}(n), \quad k = 1, 2, \cdots, K \tag{9.3.17}$$

$$y_k(n) = b_{k0}w_k(n) + b_{k1}w_k(n-1) + b_{k2}w_k(n-2), \quad k = 1, 2, \cdots, K \tag{9.3.18}$$

$$y(n) = y_K(n) \tag{9.3.19}$$

这组公式提供了对基于直接 II 型实现的级联结构的完整描述。

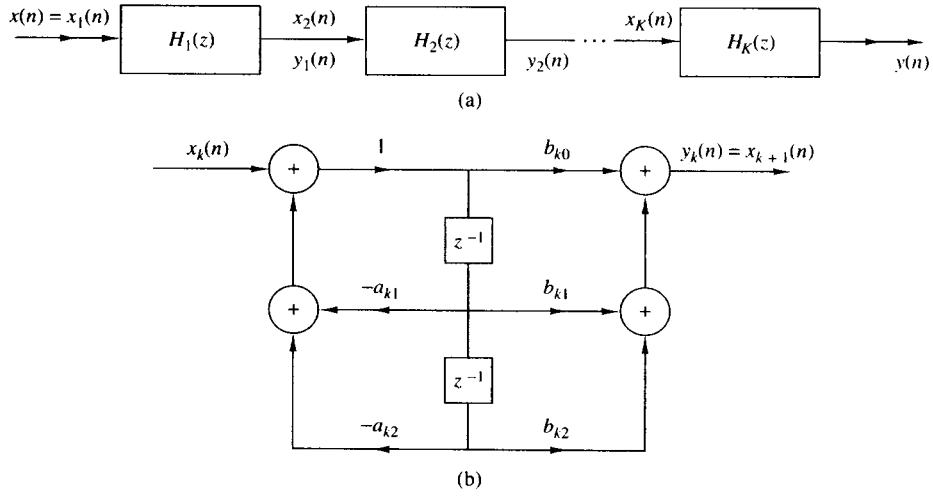


图 9.3.8　二阶系统的级联结构和其中一个二阶子系统的实现

9.3.4　并联型结构

IIR 系统的一种并联实现可以通过对 $H(z)$进行部分分式展开得到。不失一般性，我们再次假设 $N \geqslant M$ 并且极点是独立的。然后，对 $H(z)$使用部分分式展开得到

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} \tag{9.3.20}$$

其中，$\{p_k\}$是极点，$\{A_k\}$为部分分式展开的系数(余数)，常数 C 定义为 $C = b_N/a_N$。式(9.3.20)所蕴含的结构如图 9.3.9 所示。它包括一组单极点滤波器。

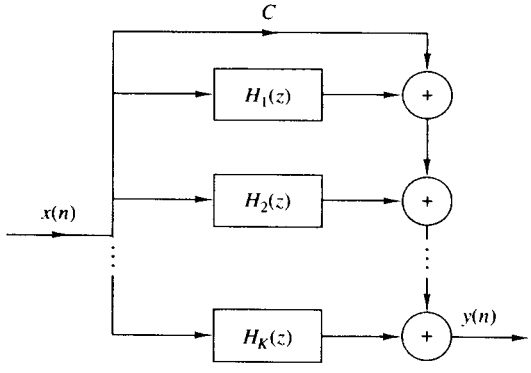


图 9.3.9　IIR 系统的并联结构

一般来说，$H(z)$的部分极点可能是复数。在这种情况下，对应的系数 A_k 同样为复数。为避免复数乘法，我们可以组合复共轭极点对以形成双极点子系统。另外，我们能够以任意方式组合实值极点对以形成双极点子系统。每个子系统具有如下形式：

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \tag{9.3.21}$$

其中，系数$\{b_{ki}\}$和$\{a_{ki}\}$为实值系统参数。整个函数可以表示为

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^{K} H_k(z) \tag{9.3.22}$$

其中，K 为$(N+1)/2$ 的整数部分。当 N 为奇数时，其中一个 $H_k(z)$是一个单极点系统(即 $b_{k1}=a_{k2}=0$)。

组成 $H(z)$的每个二阶子系统均可以用直接型或者转置直接型实现。直接 II 型结构如图 9.3.10所示。使用这种结构作为基本模块，FIR 系统的并联可以用如下公式描述：

$$w_k(n)=-a_{k1}w_k(n-1)-a_{k2}w_k(n-2)+x(n),\qquad k=1,2,\cdots,K \tag{9.3.23}$$

$$y_k(n)=b_{k0}w_k(n)+b_{k1}w_k(n-1),\qquad k=1,2,\cdots,K \tag{9.3.24}$$

$$y(n)=Cx(n)+\sum_{k=1}^{K}y_k(n) \tag{9.3.25}$$

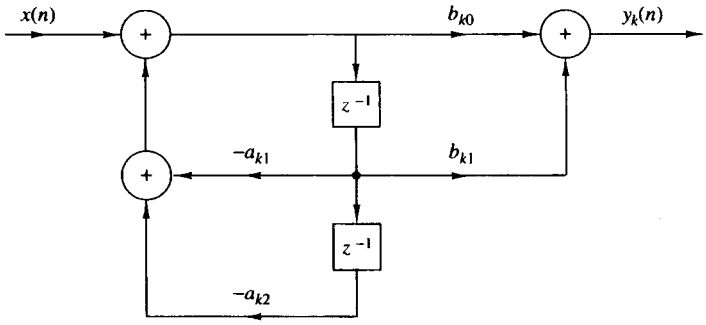


图 9.3.10 并联 IIR 系统实现中的二阶子系统的结构

例 9.3.1

求如下系统函数描述的系统的级联和并联实现：

$$H(z)=\frac{10(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{8}z^{-1})[1-(\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{2})z^{-1}][1-(\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{2})z^{-1}]}$$

解：级联实现形式可以简单地从上述形式得到。一种可行的极点、零点配对方法是

$$H_1(z)=\frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{1-\frac{7}{8}z^{-1}+\frac{3}{32}z^{-2}}$$

$$H_2(z)=\frac{1+\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

因此有

$$H(z)=10H_1(z)H_2(z)$$

级联型实现如图 9.3.11(a)所示。

为得到并联型实现，$H(z)$必须进行部分分式分解。所以有

$$H(z)=\frac{A_1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-\frac{1}{8}z^{-1}}+\frac{A_3}{1-(\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{2})z^{-1}}+\frac{A_3^*}{1-(\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{2})z^{-1}}$$

其中，A_1，A_2，A_3 和 A_3^* 为所求。经过计算得到

$$A_1=2.93,\quad A_2=-17.68,\quad A_3=12.25-\mathrm{j}14.57,\quad A_3^*=12.25+\mathrm{j}14.57$$

经过重新组合极点对，我们得到

$$H(z)=\frac{-14.75-12.90z^{-1}}{1-\frac{7}{8}z^{-1}+\frac{3}{32}z^{-2}}+\frac{24.50+26.82z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

并联型实现如图 9.3.11(b)所示。

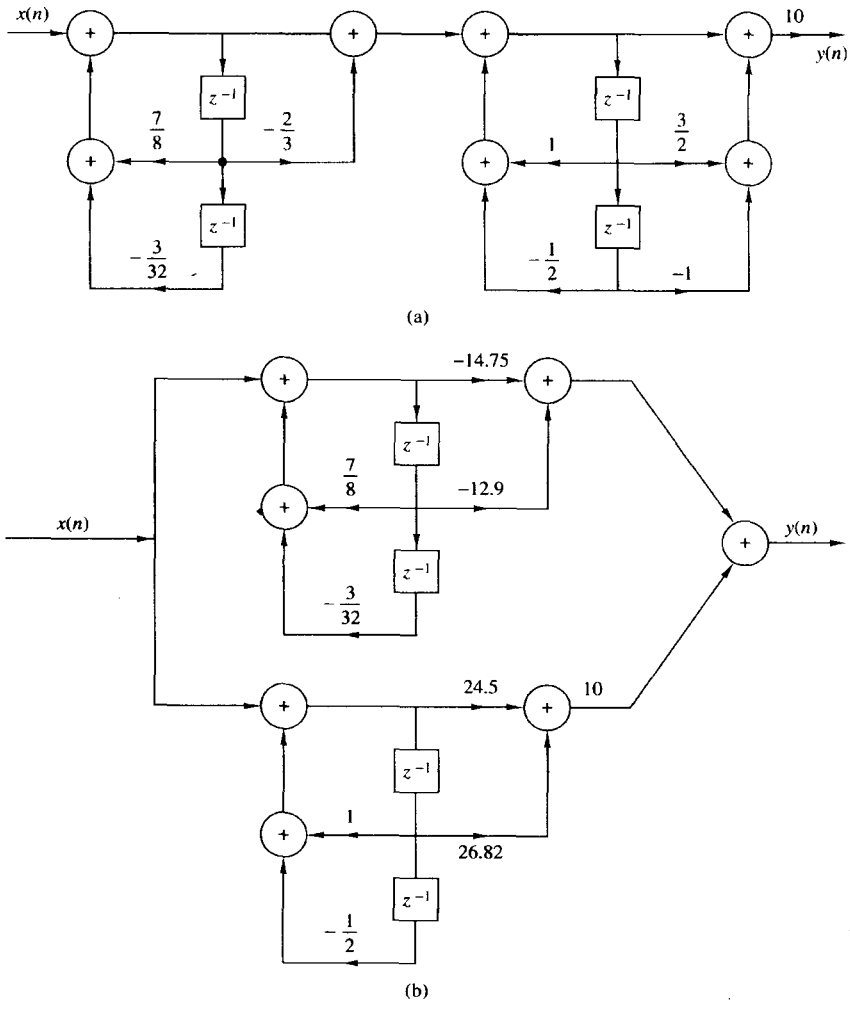


图 9.3.11　例 9.3.1 中系统的级联和并联实现

9.3.5　IIR 系统的格型结构和格型梯状结构

在 9.2.4 节中，我们得到了一种等价于 FIR 系统的格型滤波器结构。在本节中，我们将其扩展到 IIR 系统。

让我们从全极点系统开始，其系统函数为

$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N}a_N(k)z^{-k}}=\frac{1}{A_N(z)} \tag{9.3.26}$$

这个系统的直接型实现如图 9.3.12 所示。IIR 系统的差分方程为

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_N(k)y(n-k)+x(n) \tag{9.3.27}$$

如果我们将输入和输出互换[即将式(9.3.27)中的 $x(n)$和 $y(n)$互换]，那么可以得到

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_N(k)x(n-k) + y(n)$$

或等价为

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{N} a_N(k)x(n-k) \tag{9.3.28}$$

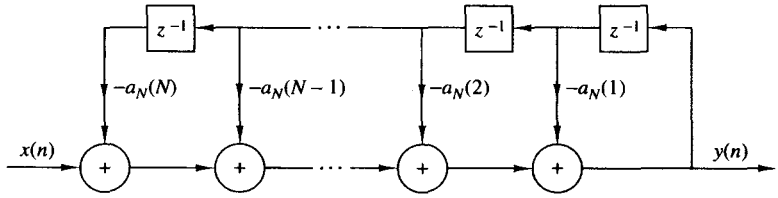


图 9.3.12 全极点系统的直接型实现

我们注意到式(9.3.28)中的公式描述了一个系统函数为 $H(z) = A_N(z)$的 FIR 系统,而由式(9.3.27)给出的差分方程所描述的系统则表示一个系统函数为 $H(z) = 1/A_N(z)$的 IIR 系统。只需要将输入与输出互换,就可以从一个系统得到另一个系统。

基于这种观察,我们将使用 9.2.4 节中描述的全零点(FIR)格型滤波器,通过互换输入与输出互换,来得到全极点 IIR 系统的格型结构。首先,我们采用图 9.2.11 所示的全零点格型滤波器,然后将输入重定义为

$$x(n) = f_N(n) \tag{9.3.29}$$

而将输出重定义为

$$y(n) = f_0(n) \tag{9.3.30}$$

它们正好和全零点格型滤波器的输入输出相反。这些定义要求量$\{f_m(n)\}$按降序计算[即 $f_N(n)$, $f_{N-1}(n)$,…]。这种计算可按如下方式实现:重新排列式(9.2.29)中的递归方程,根据 $f_m(n)$来求解 $f_{m-1}(n)$,即

$$f_{m-1}(n) = f_m(n) - K_m g_{m-1}(n-1), \qquad m = N, N-1, \cdots, 1$$

$g_m(n)$的公式(9.2.30)保持不变。

变化后的结果是如下一组方程:

$$f_N(n) = x(n) \tag{9.3.31}$$

$$f_{m-1}(n) = f_m(n) - K_m g_{m-1}(n-1), \qquad m = N, N-1, \cdots, 1 \tag{9.3.32}$$

$$g_m(n) = K_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1), \qquad m = N, N-1, \cdots, 1 \tag{9.3.33}$$

$$y(n) = f_0(n) = g_0(n) \tag{9.3.34}$$

其对应的结构如图 9.3.13 所示。

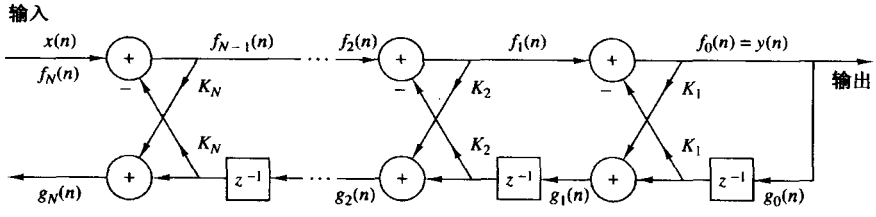


图 9.3.13 全零点 IIR 系统的格型结构

为说明式(9.3.31)至式(9.3.34)的方程组表示的是一个全零点 IIR 系统，让我们考虑 $N=1$ 的情况。方程可以简化为

$$\begin{aligned} x(n) &= f_1(n) \\ f_0(n) &= f_1(n) - K_1 g_0(n-1) \\ g_1(n) &= K_1 f_0(n) + g_0(n-1) \\ y(n) &= f_0(n) \\ &= x(n) - K_1 y(n-1) \end{aligned} \tag{9.3.35}$$

此外，$g_1(n)$的方程可以表达为

$$g_1(n) = K_1 y(n) + y(n-1) \tag{9.3.36}$$

我们观察到式(9.3.35)表示一个一阶全极点 IIR 系统，而式(9.3.36)表示一个一阶 FIR 系统。极点产生的原因是由于降序求解$\{f_m(n)\}$所引入的反馈。此反馈如图 9.3.14(a)所示。

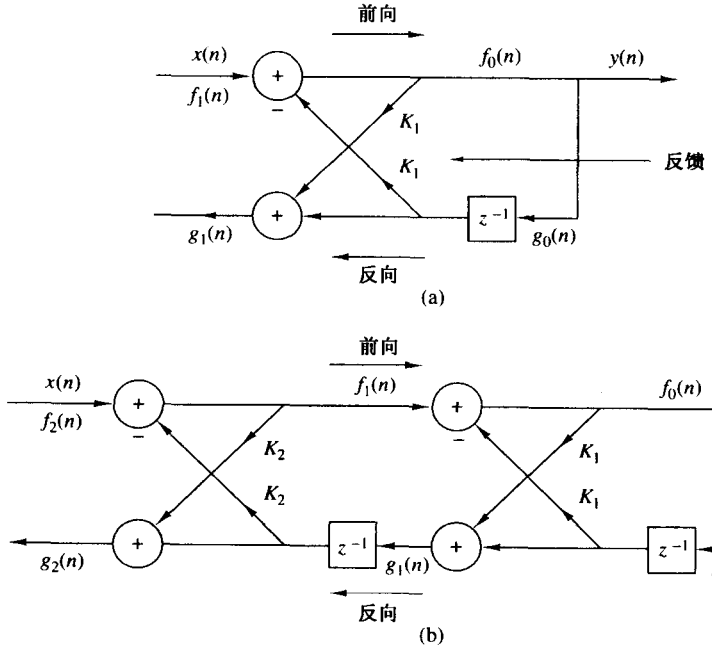


图 9.3.14　单极点和双极点格型系统

下面，让我们考虑 $N=2$ 的情况，其对应于图 9.3.14(b)。对应于这种结构的方程组为

$$\begin{aligned} f_2(n) &= x(n) \\ f_1(n) &= f_2(n) - K_2 g_1(n-1) \\ g_2(n) &= K_2 f_1(n) + g_1(n-1) \\ f_0(n) &= f_1(n) - K_1 g_0(n-1) \\ g_1(n) &= K_1 f_0(n) + g_0(n-1) \\ y(n) &= f_0(n) = g_0(n) \end{aligned} \tag{9.3.37}$$

经过简单的替换和操作后，得到

$$y(n) = -K_1(1 + K_2)y(n-1) - K_2y(n-2) + x(n) \tag{9.3.38}$$

$$g_2(n) = K_2y(n) + K_1(1 + K_2)y(n-1) + y(n-2) \tag{9.3.39}$$

很清楚,式(9.3.38)中的差分方程表示一个双极点 IIR 系统,并且式(9.3.39)中所示的关系是一个双零点 FIR 系统的输入-输出议程。注意到 FIR 系统的系数和 IIR 系统的系数相同,只是顺序相反而已。

一般来说,这些结论对任意 N 都成立。实际上,由式(9.2.32)给出的 $A_m(z)$的定义,全极点 IIR 系统的系统函数为

$$H_a(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{F_m(z)} = \frac{1}{A_m(z)}$$

同样,全零点 FIR 系统的系统函数为

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = \frac{G_m(z)}{G_0(z)} = B_m(z) = z^{-m}A_m(z^{-1}) \tag{9.3.41}$$

其中,我们使用了前面建立的式(9.2.36)至式(9.2.42)所示的关系。所以 FIR 系统 $H_b(z)$的系数等于系统 $A_m(z)$中的系数,只是顺序相反而已。

全极点格型结构拥有一条以 $g_0(n)$为输入、以 $g_N(n)$为输出的全零点路径,它与全零点格型滤波器中对应的全零点路径完全相同。表示两种格型结构的全零点路径的系统函数的多项式 $B_m(z)$,通常称为反向系统函数,因为它在全极点格型结构中提供了一条反向路径。

从这些讨论中读者应当观察到全零点和全极点格型结构由同样一组格型系数表征,即 K_1, $K_2,\cdots,K_N$。两种格型结构的区别仅在于信号流图的内部连接。从而,FIR 系统的直接型实现中的系统参数$\{\alpha_m(k)\}$和其对应的格型实现中的系统参数之间的转换算法,也同样适用于全极点结构。

回忆可知,多项式 $A_N(z)$的根全部位于单位圆内,当且仅当格型滤波器的系数$|K_m|<1$, $m=1,2,\cdots,N$。所以,全极点格型结构是稳定的,当且仅当其系数对于所有 m 有$|K_m|<1$。

实际应用中,全极点系统被用于语音跟踪和地球分层。在这种情况下,格型滤波器系数$\{K_m\}$具有物理意义,表示不同物理介质的反射系数。这就是格型滤波器系数常被称为反射系数的原因。在这种应用下,一个稳定的介质模型要求通过测量来自介质的输出信号所得到的反射系数小于 1。

全极点格型结构是实现包含极点和零点的 IIR 系统的格型结构的基础。为了得到合适的结构,让我们考虑具有如下系统函数的 IIR 系统:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} c_M(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_N(k)z^{-k}} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)} \tag{9.3.42}$$

其中,分子多项式的记法已被改变,以避免和前面的叙述相混淆。不失一般性,我们假设 $N \geqslant M$。

在直接 II 型结构中,式(9.3.42)描述的系统可以用如下差分方程表示:

$$w(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_N(k)w(n-k) + x(n) \tag{9.3.43}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} c_M(k)w(n-k) \tag{9.3.44}$$

注意到式(9.3.43)是全极点 IIR 系统的输入-输出，而式(9.3.44)是全零点系统的输入-输出。此外，我们观察到全零点系数的输出是来自全极点系统的延迟输出的线性组合。这可以从对直接 II 型结构的简单观察得到，如图 9.3.15 所示。

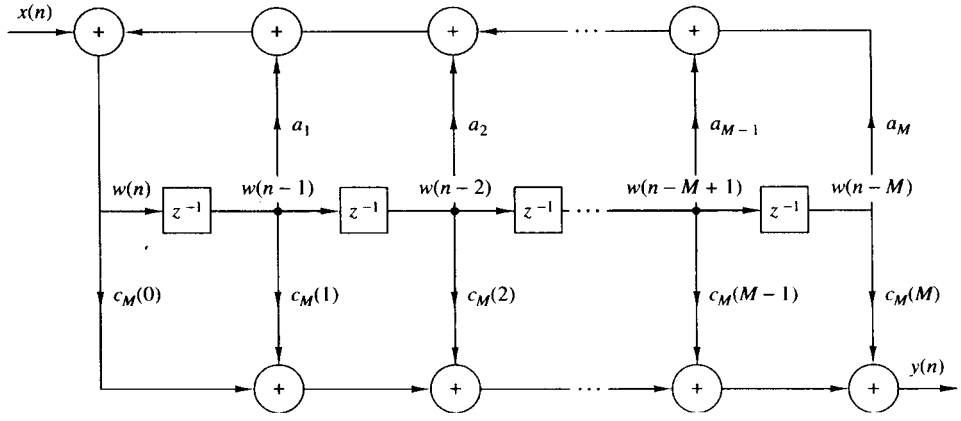


图 9.3.15　IIR 系统的直接 II 型实现

因为形成前面的输出的线性组合会导致零，所以我们可使用全极点格型结构作为基本构建块来构建极零系统。我们已经观察到 $g_m(n)$是当前和过去输出的线性组合。实际上，系统

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = B_m(z)$$

是一个全零点系统。所以$\{g_m(n)\}$的线性组合是一个全零点系统。

所以，我们从参数为 K_m，$1 \leqslant m \leqslant N$ 的一个全极点系统开始介绍，并且我们增加一个梯状部分，将其作为$\{g_m(n)\}$的加权线性组合的输出。结果是一个具有图 9.3.16 所示格型梯状结构的极零 IIR 系统，其中 $M = N$。它的输出是

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} v_m g_m(n) \tag{9.3.45}$$

其中，$\{v_m\}$是定义系统零点的参数。对应于式(9.3.45)的系统函数为

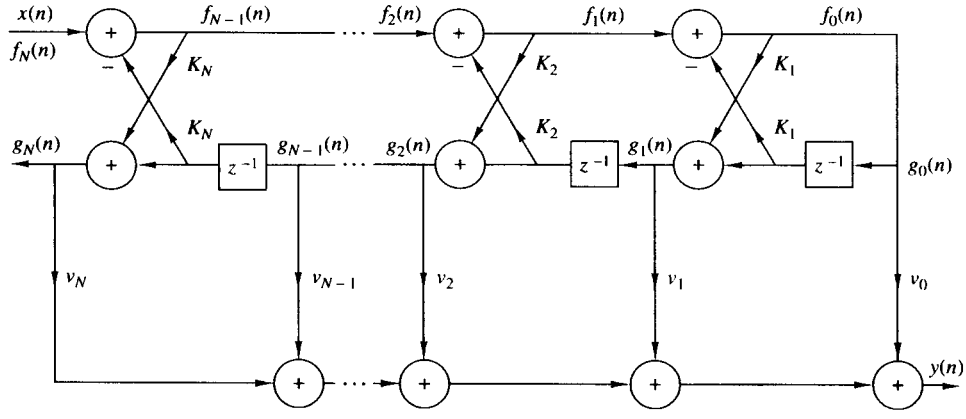


图 9.3.16　极零系统的格型梯状实现

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{m=0}^{M}v_m\frac{G_m(z)}{X(z)} \tag{9.3.46}$$

因为 $X(z)=F_N(z)$并且 $F_0(z)=G_0(z)$,所以式(9.3.46)可以被写为

$$H(z)=\sum_{m=0}^{M}v_m\frac{G_m(z)}{G_0(z)}\frac{F_0(z)}{F_N(z)}=\sum_{m=0}^{M}v_m\frac{B_m(z)}{A_N(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M}v_mB_m(z)}{A_N(z)} \tag{9.3.47}$$

比较式(9.3.41)和式(9.3.47),可以得出

$$C_M(z)=\sum_{m=0}^{M}v_mB_m(z) \tag{9.3.48}$$

这正是用于求解加权系数$\{v_m\}$的期望关系。从而,我们就演示了由分子多项式 $C_M(z)$的系数求解梯状参数$\{v_m\}$的方法,以及使用分母多项式 $A_N(z)$的系数求解格型参数$\{K_m\}$的方法。

给出多项式 $C_M(z)$和 $A_N(z)$,其中 $N\geqslant M$,首先确定全极点格型滤波器系数,用 9.2.4 节提到的转换算法将直接型滤波器的系数转换为格型滤波器的系数。通过式(9.2.54)给出的递降递归关系,我们得到格型滤波器系数$\{K_m\}$和多项式 $B_m(z)$,$m=1,2,\cdots,N$。

梯状参数由式(9.3.48)确定,可以表达为

$$C_m(z)=\sum_{k=0}^{m-1}v_kB_k(z)+v_mB_m(z) \tag{9.3.49}$$

或等价为

$$C_m(z)=C_{m-1}(z)+v_mB_m(z) \tag{9.3.50}$$

所以 $C_m(z)$可以从逆多项式 $B_m(z)$,$m=1,2,\cdots,M$ 递归计算得到。因为对全部 m 有 $\beta_m(m)=1$,所以参数 v_m,$m=0,1,\cdots,M$ 可以首先利用下式确定:

$$v_m=c_m(m),\qquad m=0,1,\cdots,M \tag{9.3.51}$$

然后,将式(9.3.50)重写为

$$C_{m-1}(z)=C_m(z)-v_mB_m(z) \tag{9.3.52}$$

并且对 m 反向(即 $m=M,M-1,\cdots,2$)执行这一递归关系,我们得到 $c_m(m)$,从而得到对应于式(9.3.51)的梯状参数。

我们介绍的格型梯状滤波器结构需要的存储空间是最少的,但乘法的次数并不是最少的。虽然存在每个格型段只需要一个乘法器的格型结构,但到目前为止我们介绍的每段两个乘法器的结构仍是使用得最为广泛的。总之,模块性、系数$\{K_m\}$所包含的内在稳定性,以及对有限字长效应

的鲁棒性，导致格型结构在实际应用中相当引人注目，包括语音处理系统、自适应滤波和地球物理信号处理等。

9.4　数的表示

到目前为止，我们已考虑了离散时间系统的实现，但并未考虑数字化实现（无论是软件还是硬件实现）内在的有限字长效应。实际上，我们分析的系统被建模为线性的，但实际上其数字实现的本质却是非线性的。

在本节和下面两节，我们考虑出现在数字信号处理中的各种形式的量化效应。虽然我们也会简要描述浮点运算，但重点仍然放在数字滤波器的定点实现上。

在本节我们考虑数字计算中数的表示方法。数字计算的主要特征就是用有限的二进制位来表示数。这种限制导致计算时的数字只有有限精度，从而引起数字滤波器的舍入误差和非线性效应。我们现在简要介绍一下数字计算。

9.4.1　数的定点表示

数的定点表示是我们熟悉的十进制表示（用一串数字和一个小数点）的一种推广。这种记法中，小数点左边的数字代表整数部分，右边的数字表示小数部分。所以一个实数可以表示为

$$\begin{aligned} X &= (b_{-A}, \cdots, b_{-1}, b_0, b_1, \cdots, b_B)_r \\ &= \sum_{i=-A}^{B} b_i r^{-i}, \qquad 0 \leqslant b_i \leqslant (r-1) \end{aligned} \tag{9.4.1}$$

其中，b_i 表示数字，r 表示基数或者基，A 是整数位数，B 是小数位数。例如，十进制数 $(123.45)_{10}$ 和二进制数 $(101.0)_2$ 表示下列和：

$$(123.45)_{10} = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

$$(101.01)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

让我们将注意力集中到二进制表示上，因为它对数字信号处理最为重要。当 $r=2$ 时，$\{b_i\}$ 被称为二进制数或者比特（位），它的取值为 $\{0,1\}$。二进制数 b_{-A} 被称为数字的最高有效位（MSB），二进制位 b_B 被称为最低有效位（LSB）。位于 b_0 和 b_1 之间的“二进制小数点”在计算机中实际上并不存在。简而言之，逻辑电路被设计成计算得到的数字刚好与这一点假设的位置完全对应。

使用一个 n 位整数格式（$A=n-1, B=0$），我们可以表示取值范围从 0 至 2^n-1 的无符号整数。偶尔我们也使用小数格式（$A=0, B=n-1$），二进制点位于 b_0 和 b_1 之间，可以表示从 0 至 $1-2^{-n}$ 之间的数字。注意到任何整数或者整数小数混合的数字可以通过从式（9.4.1）中提取出 r^A 表示成为小数格式。最后我们将注意力放在小数格式上，因为混合格式很难进行乘法操作，并且表示整数的比特很难进行截尾或舍入。

有三种方式表示负数。这导致表示有符号二进制小数的 3 种不同格式。正小数的表示方法在三种格式中都一样，即

$$X = 0.b_1 b_2 \cdots b_B = \sum_{i=1}^{B} b_i \cdot 2^{-i}, \qquad X \geqslant 0 \tag{9.4.2}$$

注意 MSB b_0 被置为 0，以表示正号。现在考虑负小数

$$X = -0.b_1b_2\cdots b_B = -\sum_{i=1}^{B} b_i \cdot 2^{-i} \tag{9.4.3}$$

这个数可以使用如下三种方法之一表示。

符号-幅度格式。这种格式中,MSB 被置为 1,以表示负号,

$$X_{SM} = 1.b_1b_2\cdots b_B, \qquad X \leqslant 0 \tag{9.4.4}$$

1 的补格式。这种格式中负数被表示为

$$X_{1C} = 1.\bar{b}_1\bar{b}_2\cdots\bar{b}_B, \qquad X \leqslant 0 \tag{9.4.5}$$

其中,$\bar{b}_i = 1 - b_i$ 是 b_i 关于 1 的补。所以如果 X 是一个正数,那么对应的负数可以通过对 X 的所有位求补(将 1 变为 0,0 变为 1)得到。另一种 X_{1C} 的定义为

$$X_{1C} = 1 \times 2^0 + \sum_{i=1}^{B}(1 - b_i)\cdot 2^{-i} = 2 - 2^{-B}|X| \tag{9.4.6}$$

2 的补格式。这种格式中负数表示为相应正数的 2 的补。换言之,负数可以通过从 2.0 中减去正数得到。更简单的说法是,2 的补格式可以通过对正数求补后对 LSB 位加 1 得到。所以

$$X_{2C} = 1.\bar{b}_1\bar{b}_2\cdots\bar{b}_B + 00\cdots01, \qquad X < 0 \tag{9.4.7}$$

其中,+ 表示模 2 加,它不进行进位。例如,数 $-\frac{3}{8}$ 可以通过将 0011($\frac{3}{8}$)求补得到 1100 再加上 0001。结果为 1101,这就是 $-\frac{3}{8}$ 在 2 的补格式中的表示。

从式(9.4.6)到式(9.4.7)很容易看出

$$X_{2C} = X_{1C} + 2^{-B} = 2 - |X| \tag{9.4.8}$$

为了说明式(9.4.7)真的表示一个负数,我们使用等式

$$1 = \sum_{i=1}^{B} 2^{-i} + 2^{-B} \tag{9.4.9}$$

式(9.4.3)中的负数 X 可以表示为

$$\begin{aligned} X_{2C} &= -\sum_{i=1}^{B} b_i \cdot 2^{-i} + 1 - 1 \\ &= -1 + \sum_{i=1}^{B}(1 - b_i)2^{-i} + 2^{-B} \\ &= -1 + \sum_{i=1}^{B}\bar{b}_i \cdot 2^{-1} + 2^{-B} \end{aligned}$$

它正好是式(9.4.7)的 2 的补表示。

综上所述,一个二进制串 $b_0b_1\cdots b_B$ 的值依赖于它采用的格式。对于正数 $b_0 = 0$,数字由式(9.4.2)给出。对于负数,我们可以采用上述三种格式中对应的格式。

例 9.41

将 $\frac{7}{8}$,$-\frac{7}{8}$ 用符号-幅度格式、2 的补格式以及 1 的补格式表示。

解:$X = \frac{7}{8}$ 表示为 $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$,所以 $X = 0.111$。在符号-幅度格式中,$X = -\frac{7}{8}$ 表示为 1.111。在 1 的补格式中,我们有

$$X_{1C} = 1.000$$

在 2 的补格式中，结果是

$$X_{2C} = 1.000 + 0.001 = 1.001$$

加法和乘法的基本算术运算和使用的格式有关。对于 1 的补格式和 2 的补格式，加法通过逐位相加实现。区别只在于进位如何影响 MSB。例如，$\frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$。对于 2 的补格式，我们有

$$0100 \oplus 1101 = 0001$$

其中⊕表示模 2 加。注意进位位，如果是对 MSB 进位则其被舍弃。另一方面，在 1 的补算术中，如果在 MSB 中有进位，则将其进位至 LSB。所以计算$\frac{4}{8} - \frac{3}{8}$就变成

$$0100 \oplus 1100 = 0000 \oplus 0001 = 0001$$

符号-幅度格式的加法更加复杂，它涉及到符号检查、求反以及进位的生成。另一方面，两个符号-幅度数的相乘相对比较直观，而 1 的补和 2 的补乘法通常需要特殊的算法。

多数定点数字信号处理使用 2 的补来计算。因此，$B+1$ 位数的值域是从 -1 到 $1-2^{-B}$。这些数可以用图 9.4.1 中的轮状图表示，其中 $B=2$。2 的补算术是基本的算术模 2^{B+1}[即值域之外的任何数(上溢或下溢)通过减去 2^{B+1}的一个合适倍数，可约减到该值域]。这种算术可以被视为使用图 9.4.1 中的轮盘的计算。2 的补的加法的一个很重要的属性就是如果最终的结果数字串 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 在一定的范围内，那么它就能够别正确计算，即使部分和导致了上溢。这一点和 2 的补算术的其他特性将在习题 9.29 中考虑。

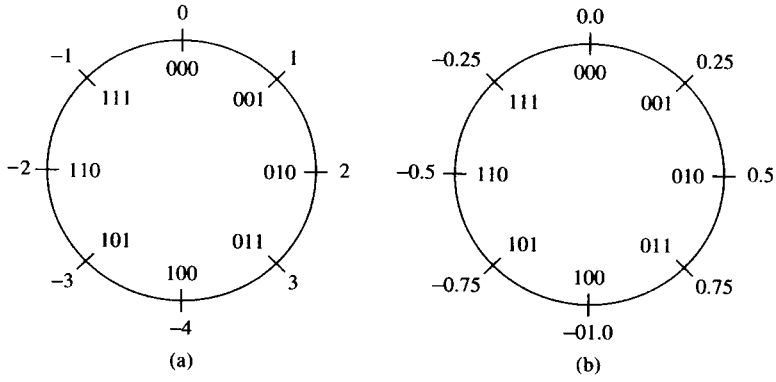


图 9.4.1　3 位的 2 的补格式数的计算轮：(a) 整数；(b) 小数

一般来说，两个 b 位字长的定点数相乘将得到 $2b$ 位的结果。在定点运算中，积要么被截尾，要么被舍入为 b 位。结果是我们得到一个最低有效位为 b 的截尾或者舍入误差。下面介绍这个误差的性质。

9.4.2　二进制数的浮点表示

数的定点表示允许我们用分辨率

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m-1}$$

涉及一个范围内的数字，即 $x_{\max} - x_{\min}$，其中 $m = 2^b$ 表示层数，b 是比特数。定点表示的基本特性是精度是固定的。此外，Δ 的增加和动态范围的增加成正比。

浮点表示可以涵盖一个很大的动态范围。实际中通常使用的二进制浮点数由尾数 M(它是该数的小数部分，其值域为$\frac{1}{2} \leqslant M < 1$)乘以指数因子 2^E 组成。其中，E 是一个正整数或负整数。因

此,数 X 表示为

$$X = M \cdot 2^E$$

尾数需要一个符号位来表示正整数或负整数,指数部分也需要一个符号位。因为尾数是有符号小数,所以我们可以使用先前描述的4种定点表示格式中的任何一种来描述。

例如,数 $X_1 = 5$ 可以用如下尾数和指数表示:

$$M_1 = 0.101000$$

$$E_1 = 011$$

而分数 $X_2 = \frac{3}{8}$ 可以用如下尾数和指数表示:

$$M_2 = 0.110000$$

$$E_2 = 101$$

其中,指数最左边的位表示符号位。

如果两个数相乘,则余数相乘而指数相加。所以,两个数的积为

$$X_1 X_2 = M_1 M_2 \cdot 2^{E_1 + E_2}$$

$$= (0.011110) \cdot 2^{010}$$

$$= (0.111100) \cdot 2^{001}$$

另一方面,两个浮点数相加要求指数相等,这可以通过将较小数的尾数右移,同时增加相应的指数作为补偿来完成。所以 X_2 可以表示为

$$M_2 = 0.000011$$

$$E_2 = 011$$

其中 $E_2 = E_1$,我们可将两个数 X_1 和 X_2 相加。结果是

$$X_1 + X_2 = (0.101011) \cdot 2^{011}$$

可以观察到为了使 X_2 的指数与 X_1 的指数相等的移位操作会导致精度损失,在这个例子中,6位尾数足够承受 M_2 的4位移位而不损失任何精度。但是,如果是5位移位,就会损失一位,如果是6位移位,则导致尾数 $M_2 = 0.000000$,除非在移位完后进行舍入。

上溢发生在两个浮点数相乘,指数之和超出了定点数表示的指数的动态范围时。比较定点和浮点两种格式,在同样位数的条件下,很显然浮点数通过可变的精度得到了更大的动态范围。随着数字的增大,精度在下降。换言之,相邻两个浮点数间的距离随数字的增大而增大。正是这种可变的精度导致了更大的动态范围。如果将一个定点数转为浮点表示,则在数字较小时浮点表示可提供较高的精度,较大时可提供较粗糙的精度。对比而言,定点表示对各范围的数提供一致的精度。

例如,如果我们有一个32位字长的计算机,它可以表示 2^{32} 个数字。如果我们希望表示从零开始的最大整数,那么最大的可能整数可表示为

$$2^{32} - 1 = 4\ 294\ 967\ 295$$

相邻两个数字间的距离(精度)为1。又如果我们将最左的一位用做符号位,而其他31位表示大小。在这种情况下定点数可以覆盖范围

$$-(2^{31} - 1) = -2\ 147\ 483\ 647 \quad \sim \quad (2^{31} - 1) = 2\ 147\ 483\ 647$$

精度同样为1。

另一方面，假设我们分 10 位为小数部分，21 位为整数部分，1 位为符号位。那么这种表示让我们的动态范围可以达到

$$-(2^{31}-1)\cdot 2^{-10} = -(2^{21}-2^{-10}) \quad \sim \quad (2^{31}-1)\cdot 2^{-10} = 2^{21}-2^{-10}$$

或等价为

$$-2\ 097\ 151.999 \quad \sim \quad 2\ 097\ 151.999$$

这种情况下，精度为 2^{-10}。所以，动态范围减少了将近 1000(实际上是 2^{10})，而精度则增加了相应的倍数。

为了比较，假设 32 位被用来表示浮点数。特别地，尾数表示为 23 位和 1 个符号位，指数表示为 7 位和 1 个符号位。现在最小数值可以表示为

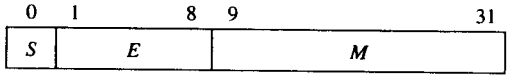
$$\begin{array}{cccc} \text{符号} & \text{23 位} & \text{符号} & \text{7 位} \\ 0. & 100\cdots 0 & 1 & 1111111 \end{array} = \frac{1}{2}\times 2^{-127} \approx 0.3\times 10^{-38}$$

另一个极端是，使用浮点表示时，最大数可以表示为

$$\begin{array}{cccc} \text{符号} & \text{23 位} & \text{位} & \text{7 位} \\ 0 & 111\cdots 1 & 0 & 1111111 \end{array} = (1-2^{-23})\times 2^{127} \approx 1.7\times 10^{38}$$

所以，我们得到了一个动态范围接近 10^{76} 但精度变化的表示。特别地，我们对较小的数有更高的精度，对大数有更粗糙的精度。

零的表示会引发一些特殊问题。一般来说，只有尾数必须为 0，但指数却不一定。对 M 和 E 的选择、0 的表示方法、溢出处理以及其他相关的问题导致了各种不同计算机中的各种浮点表示。为了定义一种通用的浮点格式，国际电气工程师协会(IEEE)引入了 IEEE 754 标准，它在实际中被广泛使用。对 32 位机器，IEEE 754 标准的单精度浮点数被表示为 $X=(-1)^S\cdot 2^{E-127}(M)$，其中，



对这个数的解释如下：

若 $E=255$ 且 $M\neq 0$，则 X 不是一个数。

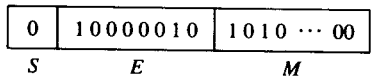
若 $E=255$ 且 $M=0$，则 $M=(-1)^S\cdot\infty$。

若 $0<E<255$，则 $X=(-1)^S\cdot 2^{E-127}(1.M)$。

若 $E=0$ 且 $M\neq 0$，则 $X=(-1)^S\cdot 2^{-126}(0.M)$。

若 $E=0$ 且 $M=0$，则 $X=(-1)^S\cdot 0$。

其中，$0.M$ 是小数，$1.M$ 是一个有着 1 个整数位与 23 个小数位的混合数。例如，数



的值为 $X=-1^0\times 2^{(130-127)}\times 1.1010\cdots 0=2^3\times\frac{13}{8}=13$。32 位 IEEE 754 浮点数的幅度值从 $2^{-126}\times 2^{-23}$ 至 $(2-2^{-23})\times 2^{127}$(例如从 1.18×10^{-38} 至 3.40×10^{38})。在这个范围之外的计算结果为上溢或下溢。

9.4.3　舍入与截尾引起的误差

在使用定点或浮点算术计算乘法时，我们通常会面对需要用舍入或截尾将一个数从一个精度量化为更低精度的问题。舍入与截尾的影响是引入了误差，这种误差取决于量化后的位数相对于初始位数的差值。由此引入误差的特性与其特定的数的表示形式相关。

具体来说，让我们考虑定点表示将一个数 x 从 b_u 位量化为 b 位的情形。所以由 b_u 位组成的数

$$x = \overbrace{0.1011\cdots01}^{b_u}$$

在量化后被表示为

$$x = \overbrace{0.101\cdots1}^{b}$$

其中 $b < b_u$。例如,如果 x 表示一个模拟信号,那么 b_u 可为无穷位。在任何情况下,如果 x 由于量化而被截尾,那么截尾误差被定义为

$$E_t = Q_t(x) - x \tag{9.4.10}$$

首先,我们考虑符号-幅度和 2 的补的表示形式的误差的取值范围。在这两种情况下,正数具有同样的表示。对正数截尾导致结果比未截尾之前的数小。从而,由有效位从 b_u 位到 b 位的减少所导致的截尾误差为

$$-(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leqslant E_t \leqslant 0 \tag{9.4.11}$$

其中,最大的误差产生于舍去 $b_u - b$ 位,所有的数字为 1。

在用符号-幅度表示负定点数时,截尾误差为正,因为截尾减小了数的幅度。从而,对于负数,我们有

$$0 \leqslant E_t \leqslant (2^{-b} - 2^{-b_u}) \tag{9.4.12}$$

在 2 的补表示中,一个数的负数是由 2 减去相应的正数得到的。结果是对负数进行截尾导致结果的幅度增加。从而,$x > Q_t(x)$并且有

$$-(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leqslant E_t \leqslant 0 \tag{9.4.13}$$

所以我们得出结论:符号-幅度表示的截尾误差关于零点对称,且位于如下范围内:

$$-(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leqslant E_t \leqslant (2^{-b} - 2^{-b_u}) \tag{9.4.14}$$

另一方面,对 2 的补的表示,截尾误差总是负值,并且落入区间

$$-(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leqslant E_t \leqslant 0 \tag{9.4.15}$$

接着,让我们考虑数的舍入产生的量化误差。一个数 x,在量化之前表示为 b_u 位,量化之后表示为 b 位,引入量化误差

$$E_r = Q_r(x) - x \tag{9.4.16}$$

基本上,舍入误差只包括数的幅度,从而舍入误差与定点表示的类型无关。舍入产生的最大误差是$(2^{-b} - 2^{-b_u})/2$并且可正可负,具体取决于 x 的值。因此,舍入误差关于零点对称并且落在下面的区间内:

$$-\tfrac{1}{2}(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leqslant E_r \leqslant \tfrac{1}{2}(2^{-b} - 2^{-b_u}) \tag{9.4.17}$$

这些关系被总结在图 9.4.2 中,其中的 x 是连续信号($b_u = \infty$)。

在浮点数表示中,尾数要么被舍入要么被截尾。因为精度不统一,浮点数中对应的误差大小和被量化的数的大小成比例。对量化后的数字的一种合适的表示为

$$Q(x) = x + ex \tag{9.4.18}$$

其中,e 称为相对误差。现在

$$Q(x) - x = ex \tag{9.4.19}$$

在基于 2 的补的表示的截尾的情况下,对于正数我们有

$$-2^E 2^{-b} < e_t x < 0 \tag{9.4.20}$$

因为 $2^{E-1} \leqslant x < 2^E$,得到

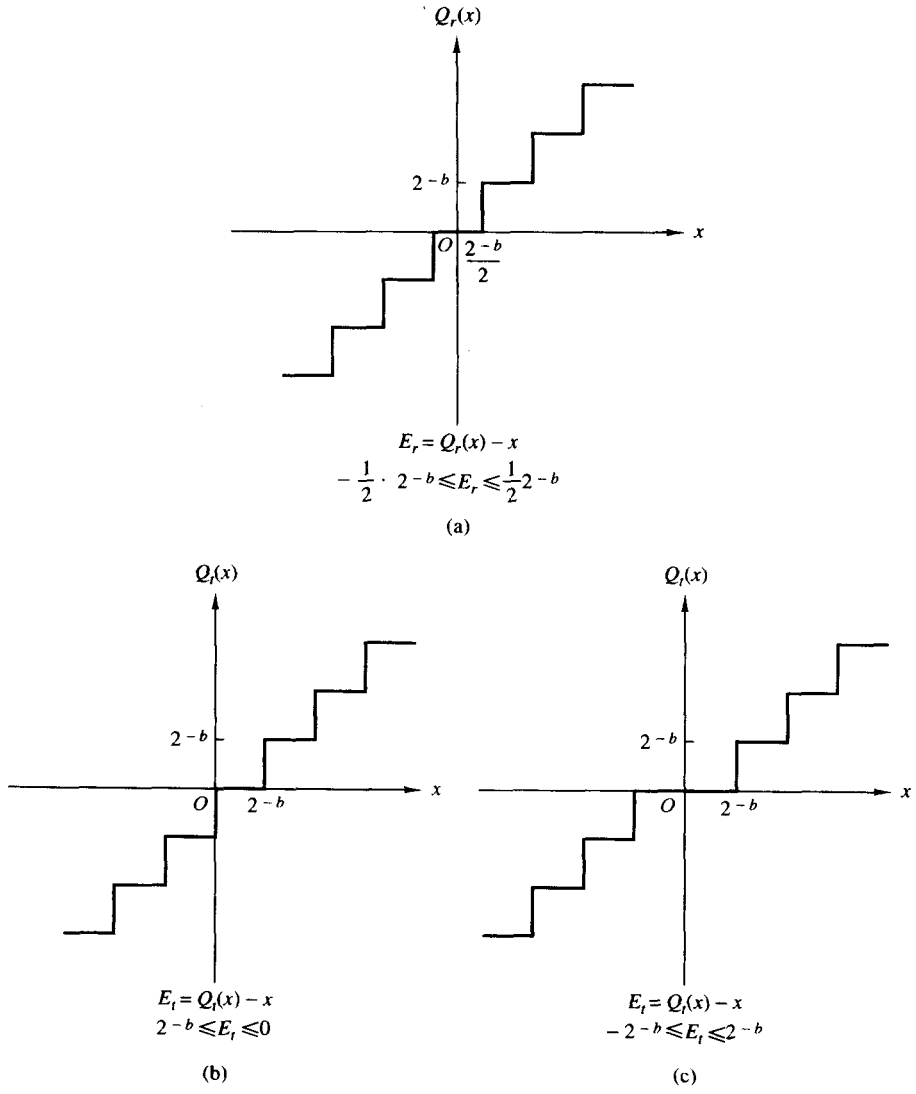


图 9.4.2　舍入和截尾的量化误差:(a) 舍入误差;(b) 2 的补的截尾误差;(c) 符号-幅度表示的截尾误差

$$-2^{-b+1} < e_t \leqslant 0, \qquad x > 0 \tag{9.4.21}$$

另一方面,对于 2 的补表示的负数,误差为

$$0 \leqslant e_t x < 2^E 2^{-b}$$

所以

$$0 \leqslant e_t < 2^{-b+1}, \qquad x < 0 \tag{9.4.22}$$

在这种情况下尾数被舍入,结果误差关于 0 点对称并且最大值为 $\pm 2^{-b}/2$。从而,舍入误差变为

$$-2^E \cdot 2^{-b}/2 < e_r x \leqslant 2^E \cdot 2^{-b}/2 \tag{9.4.23}$$

再一次,因为 x 落入范围 $2^{E-1} \leqslant x < 2^{-E}$ 内,我们对所有项除以 2^{E-1},从而有

$$-2^{-b} < e_r \leqslant 2^{-b} \tag{9.4.24}$$

在包括截尾和舍入的量化的算术运算中,可以很方便地用统计学方法描述这类误差。量化器可以被建模为对于未量化的 x 引入一个加性噪声。所以我们有

$$Q(x) = x + \epsilon$$

其中,对于舍入 $\epsilon = E_r$,而对于截尾 $\epsilon = E_t$。模型如图 9.4.3 所示。

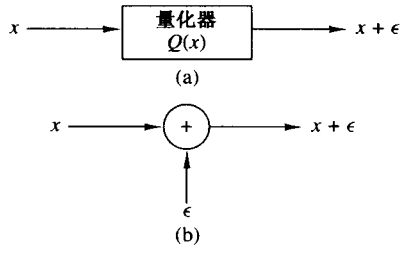


图 9.4.3 非线性量化过程的加性噪声模型:(a)实际系统;(b)量化模型

因为 x 可以是落入量化器的任何一层的任何数,所以量化误差通常建模为一个在指定范围内的随机变量。假设这个变量在定点表示指定的范围内服从均匀分布。此外,实践中 $b_u \gg b$,所以可以忽略下面公式中的因子 2^{-b_u}。在这种情况下,舍入和截尾误差的概率密度函数如图 9.4.4 所示。我们注意到对 2 的补进行截尾时,误差均值的偏差为 $2^{-b}/2$。而在其他方式中,如前面介绍的方式,误差均值为零。

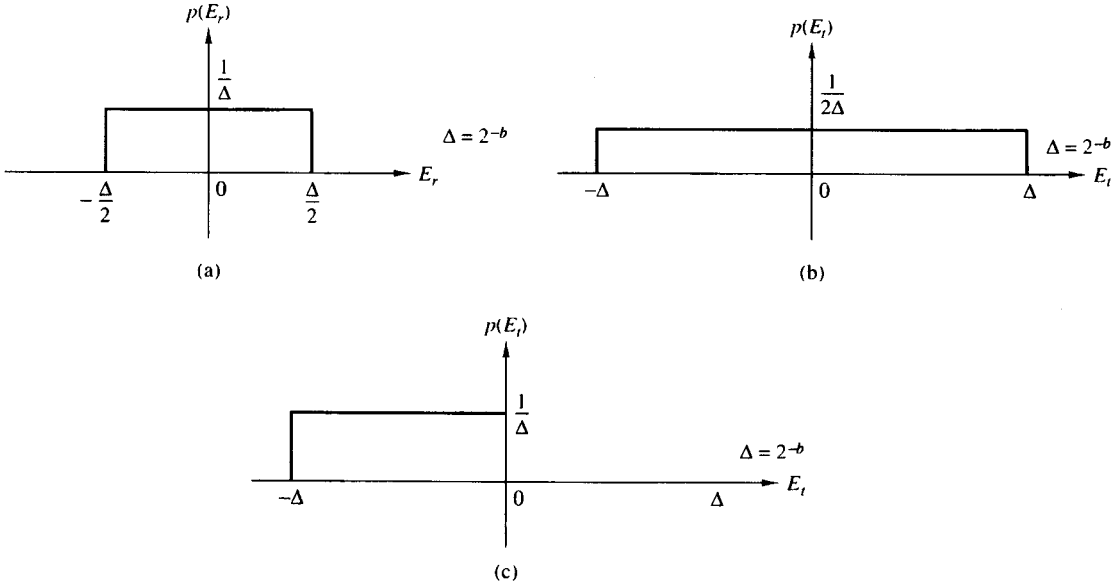


图 9.4.4 量化误差的统计特性:(a) 舍入误差;(b) 符号-幅度的截尾误差;(c) 2 的补的截尾误差

我们在处理数字滤波器和计算 DFT 定点实现中的量化误差时,将会用到这些的统计分析。

9.5 滤波器系数的量化效应

在硬件中或在一般用途计算机上的软件中实现 FIR 和 IIR 滤波器时,滤波器系数的精度会受到计算机字长或者存储寄存器字长的限制。因为用来实现滤波器的系数是不精确的,系统函数的零点和极点将会和需要的有所不同。从而,我们得到了一个和没有经过系数量化的频率响应不同的滤波器。

在 9.5.1 节,我们通过将二阶滤波器段互连成为了一个具有多个零点、极点且系数最小化的滤波器,并演示了滤波器频率响应特性对误差的敏感程度。这就产生了用二阶滤波器段作为基本模块实现的并联和级联型滤波器。

9.5.1　滤波器系数量化效应的敏感度分析

为了展示 IIR 滤波器的直接型实现中的滤波器系数的量化效应，我们首先考虑一个具有如下系统函数的通用 IIR 滤波器：

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_kz^{-k}} \tag{9.5.1}$$

IIR 滤波器的直接型实现具有系统函数

$$\overline{H}(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}\overline{b}_kz^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}\overline{a}_kz^{-k}} \tag{9.5.2}$$

其中，量化系数$\{\overline{b}_k\}$和$\{\overline{a}_k\}$可以通过如下关系式和量化前的系数$\{b_k\}$和$\{a_k\}$联系起来：

$$\begin{aligned}\overline{a}_k&=a_k+\Delta a_k, \qquad k=1,2,\cdots,N\\ \overline{b}_k&=b_k+\Delta b_k, \qquad k=0,1,\cdots,M\end{aligned} \tag{9.5.3}$$

并且$\{\Delta a_k\}$和$\{\Delta b_k\}$表示量化误差。

$H(z)$的分母可以写成

$$D(z)=1+\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}=\prod_{k=1}^{N}(1-p_kz^{-1}) \tag{9.5.4}$$

其中，$\{p_k\}$为 $H(z)$的极点。同样，我们可以将 $\overline{H}(z)$的分母表示为

$$\overline{D}(z)=\prod_{k=1}^{N}(1-\overline{p}_kz^{-1}) \tag{9.5.5}$$

其中，$\overline{p}_k=p_k+\Delta p_k$，$k=1,2,\cdots,N$，并且 Δp_k 为由系数量化产生的误差或扰动。

我们现在将扰动 Δp_k 与$\{a_k\}$中的量化误差关联起来。

扰动误差 Δp_i 可以表示为

$$\Delta p_i=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial p_i}{\partial a_k}\Delta a_k \tag{9.5.6}$$

其中，$\partial p_i/\partial a_k$，即 p_i 相对于 a_k 的偏微分，表示系数 a_k 的改变导致的 p_i 的改变量。所以，总误差 Δp_i 可以表示为每个系数$\{a_k\}$产生的增量误差之和。

偏微分$\partial p_i/\partial a_k$，$k=1,2,\cdots,N$ 可以通过 $D(z)$对$\{a_k\}$求微分得到。首先我们有

$$\left(\frac{\partial D(z)}{\partial a_k}\right)_{z=p_i}=\left(\frac{\partial D(z)}{\partial z}\right)_{z=p_i}\left(\frac{\partial p_i}{\partial a_k}\right) \tag{9.5.7}$$

然后有

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k}=\frac{(\partial D(z)/\partial a_k)_{z=p_i}}{(\partial D(z)/\partial z)_{z=p_i}} \tag{9.5.8}$$

式(9.5.8)的分子为

$$\left(\frac{\partial D(z)}{\partial a_k}\right)_{z=p_i} = -z^{-k}|_{z=p_i} = -p_i^{-k} \tag{9.5.9}$$

式(9.5.8)的分母为

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial D(z)}{\partial z}\right)_{z=p_i} &= \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\prod_{l=1}^{N}(1-p_l z^{-1})\right]\right\}_{z=pi} \\ &= \left\{\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k}{z^2}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}(1-p_l z^{-1})\right\}_{z=p_i} \\ &= \frac{1}{p_i^N}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}(p_i-p_l)\end{aligned} \tag{9.5.10}$$

所以,式(9.5.8)可以表示为

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{-p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}(p_i-p_l)} \tag{9.5.11}$$

将式(9.5.11)中的结果代入式(9.5.6),可得到总扰动误差 Δp_i 为

$$\Delta p_i = -\sum_{k=1}^{N}\frac{p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}(p_i-p_l)}\Delta a_k \tag{9.5.12}$$

上述表达式提供了第 i 个极点对系数 $\{a_k\}$ 的改变的敏感程度。类似地,可以得到零点相对于 $\{b_k\}$ 的敏感度。

式(9.5.12)的分母中的 $(p_i - p_l)$ 表示 z 平面中从极点 $\{p_l\}$ 到极点 p_i 的矢量。如果极点紧密地聚集在一起(如在窄带滤波器中),如图 9.5.1 所示,那么对于 p_i 附近的极点,长度 $|p_i - p_l|$ 将很短。长度短将导致大误差,从而引发较大的扰动误差 Δp_i。

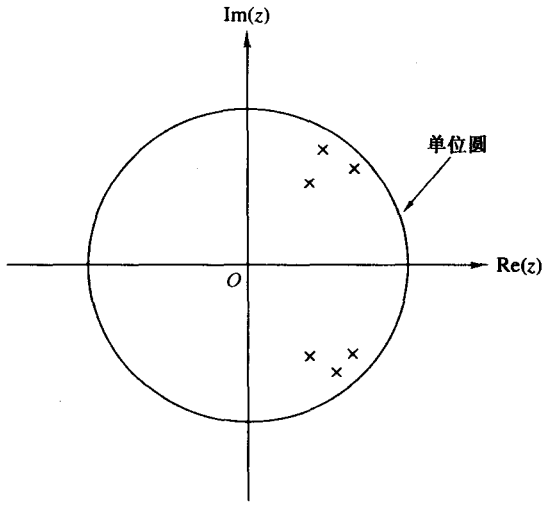


图 9.5.1 带通 IIR 滤波器的极点位置

误差 Δp_i 可以通过将距离 $|p_i - p_l|$ 最大化来最小化。这可以通过单极点或双极点的滤波器段组成高阶滤波器实现。一般来说,单极点(单零点)滤波器段具有复值极点,且其实现要求复值算术运算。这个问题可以通过将复值极点(零点)组合为二阶滤波器段得到。因为复值极点通常相距很远,所以扰动误差 $\{\Delta p_i\}$ 被最小化。从而,得到的系数被量化的滤波器可以更好地逼近量化前的频率响应特性。

我们注意到即使在双极点滤波器段中，用于实现滤波器段的结构在系数量化产生的误差中也扮演着重要的角色。特别地，我们考虑具有以下系统函数的双极点滤波器：

$$H(z)=\frac{1}{1-(2r\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}} \tag{9.5.13}$$

这个滤波器的极点在 $z=re^{\pm j\theta}$ 处。当采用如图 9.5.2 所示的实现时，两个系数分别为 $a_1=2r\cos\theta$，$a_2=-r^2$。在无限精度的情况下，滤波器可以具有无穷多个极点。很清楚，在有限精度下（a_1，a_2 被量化），可能的极点个数也是有限的。实际上，在用 b 位表示 a_1 和 a_2 的幅度时，每个象限最多有 $(2^b-1)^2$ 个可能的极点位置，但 $a_1=0$ 和 $a_2=0$ 的情况除外。

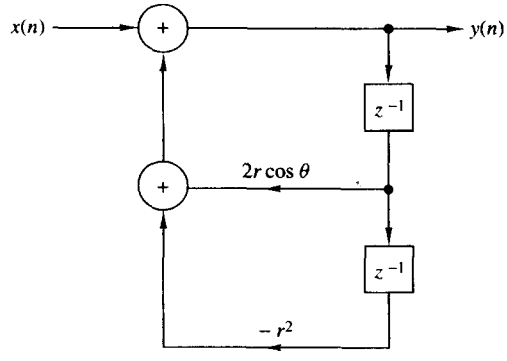


图 9.5.2　双极点带通 IIR 滤波器的实现

例如，假设 $b=4$，则 a_1 存在 15 个可能的非零值。同样对于 r^2 也有 15 个可能的非零值。我们在图 9.5.3 中给出了 z 平面第一象限中的可能值。这个例子中有 169 个可能值。点分布的不均匀是由 r^2 的量化引起的，它们都位于以 r 为半径的圆弧上。其中特别重要的是，在 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 的附近，极点很稀疏。这种情形完全不同于低通和高通滤波器的情形，低通和高通滤波器在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 附近通常有许多极点。

另一种双极点滤波器的实现是如图 9.5.4 所示的耦合型实现。两个耦合公式为

$$\begin{aligned}y_1(n)&=x(n)+r\cos\theta\ y_1(n-1)-r\sin\theta\ y(n-1)\\ y(n)&=r\sin\theta\ y_1(n-1)+r\cos\theta\ y(n-1)\end{aligned} \tag{9.5.14}$$

将两者变换到 z 域，可以简单地得到

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{(r\sin\theta)z^{-1}}{1-(2r\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}} \tag{9.5.15}$$

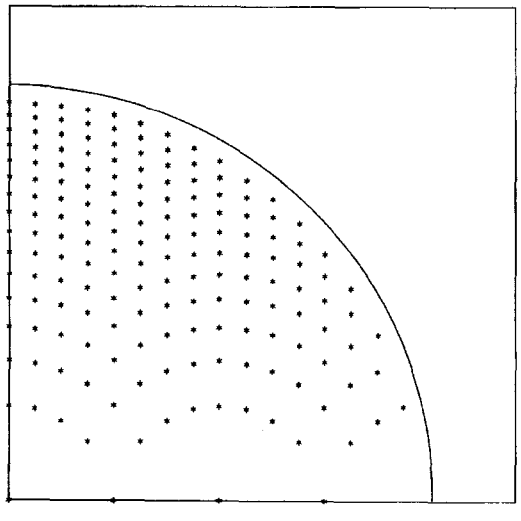


图 9.5.3　图 9.5.2 中双极点 IIR 滤波器实现的可能极点位置

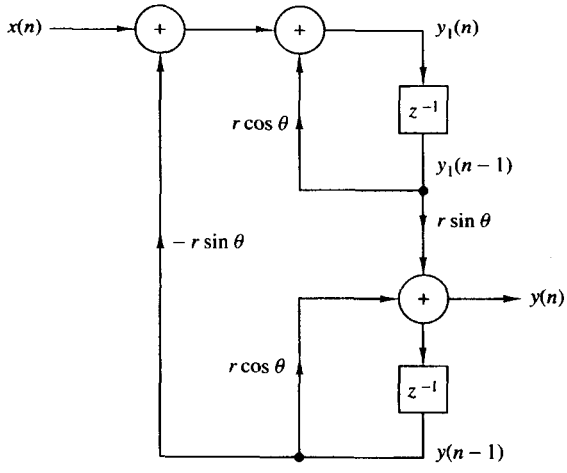


图 9.5.4　双极点 IIR 滤波器的耦合型实现

在耦合型实现中,我们观察到同样有两个系数 $\alpha_1 = r\sin\theta$ 和 $\alpha_2 = r\cos\theta$。因为它们对 r 而言都是线性的,所以可能的极点位置均匀地分布在矩形格点上,如图 9.5.5 所示。从而,极点在单位圆内均匀分布。和前面的情况相比,这种情况更为可取,特别是对低通滤波器(这种情况共有198个极点)。然而,我们得到均匀分布的代价是运算量的增加。耦合型实现的每个输出需要 4 次乘法,而图 9.5.2 中每个输出点只需要 2 次乘法。

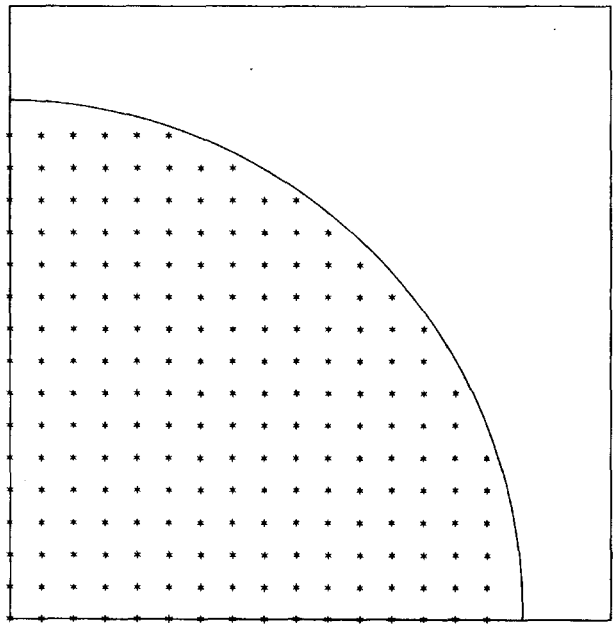


图 9.5.5 图 9.5.4 中耦合型双极点滤波器的可能极点位置

因为有各种方法可以实现二阶滤波器段,也就有由各种不同的由量化系数导致的极点位置。理想情形下,我们希望选择的滤波器结构在极点附近可提供密集的点。遗憾的是,没有简单且系统的方法可以得到期望的效果。

在高阶 IIR 滤波器可以通过二阶滤波器段的组合实现后,我们仍然需要决定是采用并联型实现还是采用级联型实现。换言之,我们必须是采用实现

$$H(z) = \prod_{k=1}^{K} \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \tag{9.5.16}$$

还是采用实现

$$H(z) = \sum_{k=1}^{K} \frac{c_{k0} + c_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \tag{9.5.17}$$

如果 IIR 滤波器在单位圆上有零点,就像通常采用椭圆滤波器或切比雪夫 II 型滤波器的情形那样,那么式(9.5.16)给出的级联配置中的每个二阶段都包含一对复共轭零点。系数 $\{b_k\}$ 直接决定这些零点的位置。如果 $\{b_k\}$ 被量化,那么系统响应的敏感度可以简单且直接通过对 $\{b_{ki}\}$ 的表示分配足够多的比特位的方式进行控制。实际上,我们能够很容易地评估由量化系数 $\{b_{ki}\}$ 至某个特定精度所带来的扰动。所以,我们可以直接控制量化过程所生的极点和零点。

另一方面,$H(z)$ 的并联型实现只能直接控制系统的极点。分母系数 $\{c_{k0}\}$ 和 $\{c_{k1}\}$ 并不直接指定零点的位置。实际上,系数 $\{c_{k0}\}$ 和 $\{c_{k1}\}$ 是通过对 $H(z)$ 进行部分分式展开得到的。所以它们不直接影响零点的位置,而是通过 $H(z)$ 所有因子的组合间接地影响。从而,我们就更难确定系数 $\{c_{ki}\}$ 的量化误差对系统零点的影响。

很明显,系数 $\{c_{ki}\}$ 的量化对零点位置会产生明显的扰动,且在定点实现中这种扰动通常足以将零点移离单位圆。这是一种我们非常不希望看到的情况,但可以很容易地采用浮点表示来弥补。在任何情况下级联型实现对于系数量化都更加鲁棒,且在实践中更受欢迎,特别是采用定点表示的情况。

例 9.5.1

求系数量化对用二阶滤波器级联段实现的表 10.6 中的 7 阶椭圆滤波器的频率响应的影响。

解:表 10.6 中给出的以级联方式实现的椭圆滤波器的系数有 6 位有效数字。我们将这些系数量化到了 4 位,然后量化到了 3 位(四舍五入),并画出了频率响应的幅度(dB)和相位。结果如图 9.5.6 所示,同时给出了未量化系数(6 位有效数字)的滤波器的频率响应。我们观察到级联型实现中的系数量化带来了不明显的退化。

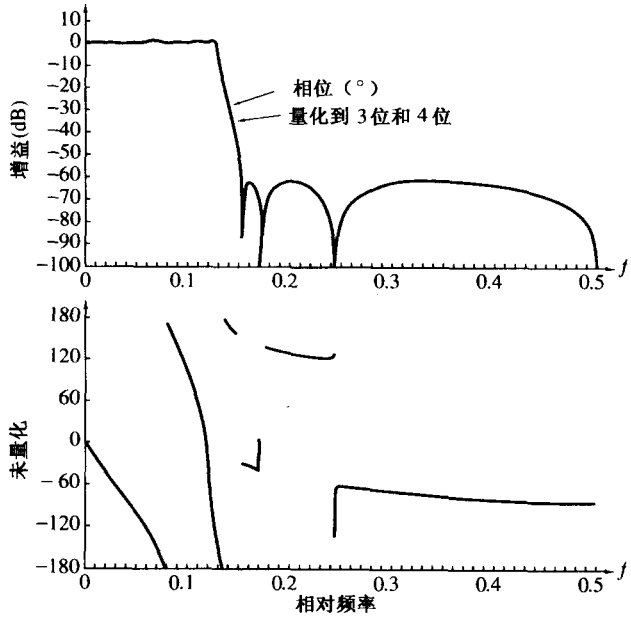


图 9.5.6　系数量化对以级联形式实现的 $N=7$ 的椭圆滤波器的幅度响应和相位响应的影响

例 9.5.2

当例 9.5.1 中的椭圆滤波器使用二阶段并联型实现时,重复例 9.5.1 中的频率响应计算。

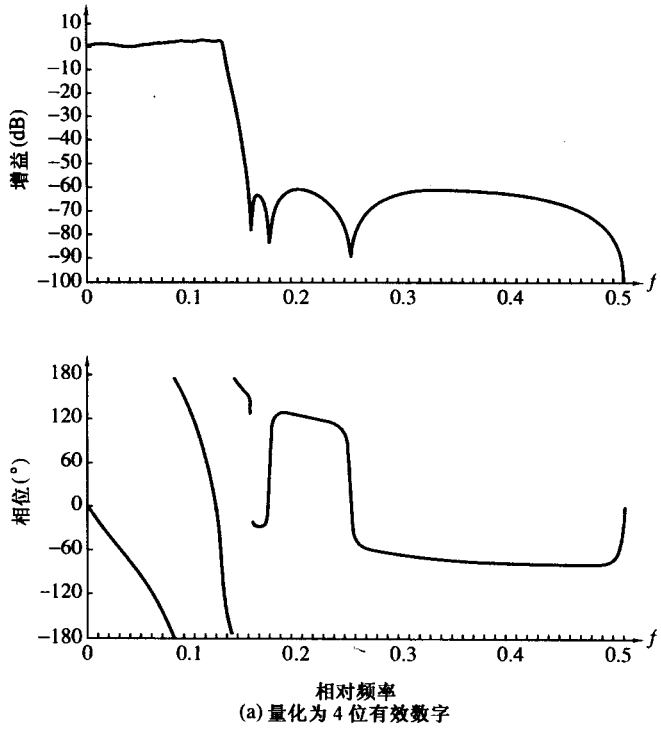
解:表 10.6 给出的 7 阶椭圆滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{0.278\,130\,4+0.005\,437\,310\,8z^{-1}}{1-0.790\,103z^{-1}}+\frac{-0.386\,780\,5+0.332\,222\,9z^{-1}}{1-1.517\,223z^{-1}+0.714\,088z^{-2}}+\frac{0.127\,703\,6-0.155\,869\,6z^{-1}}{1-1.421\,773z^{-1}+0.861\,895z^{-2}}+\frac{-0.015\,824\,186+0.383\,773\,56z^{-1}}{1-1.387\,447z^{-1}+0.962\,242z^{-2}}$$

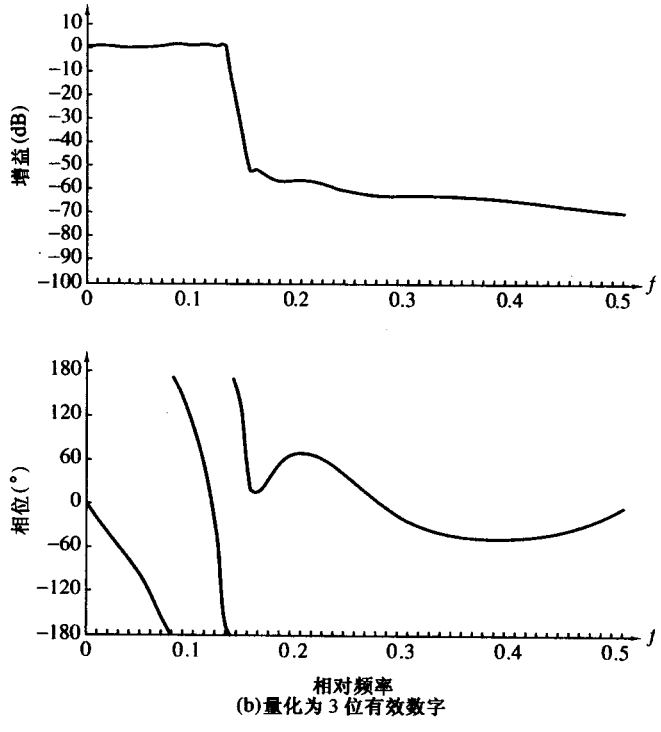
系数量化为 4 位有效数字后,滤波器的频率响应如图 9.5.7(a)所示。与图 9.5.6 相比,可以发现并联型实现的零点明显地被扰动了。幅度响应中的零值点变成了 -80 dB, -85 dB, -92 dB。相位只存在少量扰动。

当系数被量化为 3 位有效数字,频率响应特性明显恶化,不论是在幅度谱还是在频率谱,如图 9.5.7(b)所示。从幅度谱中可以明显看出,由于系数量化,零点已经不在单位圆上。这个结果清楚地显示了并联型实现对系数量化的敏感度。

将结果与例 9.5.1 相比较,很显然可以看出级联型比并联型对参数量化更加鲁棒。



(a) 量化为 4 位有效数字



(b)量化为 3 位有效数字

图 9.5.7 系数量化对并联型 $N=7$ 的椭圆滤波器的幅度谱和相位谱的影响:(a)量化为4位有效数字;(b)量化为3位有效数字

9.5.2　FIR 滤波器的系数量化

正如前一节中所指出的，对极点的敏感度分析可以直接套用到 IIR 滤波器的零点。从而，对 FIR 滤波器的零点可以得到类似式(9.5.12)给出的表达式。实际上，我们一般可以通过级联二阶或一阶滤波器段得到具有大量零点的 FIR 滤波器，从而使系统对系数量化的敏感度最小。

对实践而言，实现线性相位滤波器是特别有意义的。图 9.2.1 和图 9.2.2 所示直接型实现，即使在系数被量化的情况也能保持线性相位。这可以从线性 FIR 滤波器的系统函数满足如下属性得到：

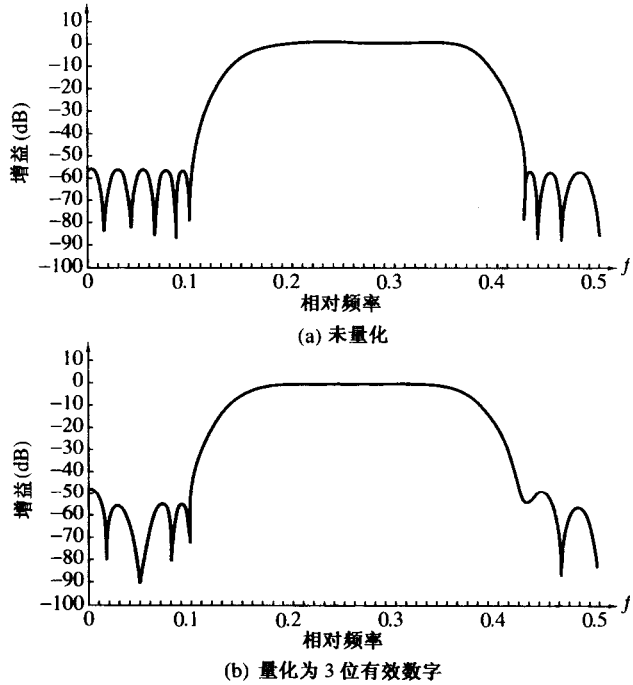
$$H(z) = \pm z^{-(M-1)} H(z^{-1})$$

而不论系数量化与否(见 10.2 节)。从而，系数量化不影响 FIR 滤波器的相位特性，而只会影响幅度。因此，系数量化效应在线性相位 FIR 滤波器上并不明显，因为它主要影响幅度谱。

例 9.5.3

求系数量化效应对 $M = 32$ 的带通线性相位 FIR 滤波器的频率响应的影响。滤波器采用直接型实现。

解：线性 FIR 滤波器的频率响应如图 9.5.8(a)所示。当系数量化为 4 位有效数字时，对频率响应的影响是不明显的。然而，当系数被量化为 3 位有效数字时，旁瓣增加了数分贝，如图 9.5.8(b)所示。结果显示我们应该至少用 10 位有效数字来表示此 FIR 滤波器的系数，最好能够达到 12 位至 14 位有效数字。



(a) 未量化

(b) 量化为 3 位有效数字

图 9.5.8　系数量化对直接型 $M = 32$ 的线性相位 FIR 滤波器的幅度的影响：(a)未量化；(b)量化为3位有效数字

从这个例子我们知道至少需要 10 位有效数字来表示一个中等长度的直接型 FIR 滤波器。当滤波器长度增加时，系数位数还必须增加以保持同样的频率响应误差。

例如，假设滤波器系数被舍入到 $(b+1)$ 位。则系数值中的最大误差是有界的，即

$$-2^{-(b+1)} < e_h(n) < 2^{-(b+1)}$$

因为量化值可以表示为 $\bar{h}(n) = h(n) + e_h(n)$，所以频率响应中的误差是

$$E_M(\omega)=\sum_{n=0}^{M-1}e_h(n)e^{-j\omega n}$$

因为 $e_h(n)$是零均值,所以 $E_M(\omega)$同样是零均值。假设系数误差序列 $e_h(n),0\leqslant n\leqslant M-1$ 是无关的,频率响应中的误差 $E_M(\omega)$的方差是 M 项的方差之和。所以我们有

$$\sigma_E^2=\frac{2^{-2(b+1)}}{12}M=\frac{2^{-2(b+2)}}{3}M$$

这里我们注意到 $H(\omega)$中的方差随 M 线性增长。所以,$H(\omega)$的标准偏差为

$$\sigma_E=\frac{2^{-(b+2)}}{\sqrt{3}}\sqrt{M}$$

从而,对于 M 每增长 4 倍,滤波器系数的精度必须增加 1 位来保持标准偏差不变。这个结果结合例 9.5.3 中的结果,表明滤波器长度为 256 之内的频率误差仍可以容忍,滤波器系数用 12 位至 13 位表示。如果数字信号处理器的字长小于 12 位或者滤波器长度大于 256,则滤波器必须采用更短长度的滤波器的级联形式,以降低精度需求。

在级联型实现中,

$$H(z)=G\prod_{k=1}^{K}H_k(z) \tag{9.5.18}$$

其中,二阶段给出为

$$H_k(z)=1+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2} \tag{9.5.19}$$

复值零点的系数被表示为 $b_{k1}=-2r_k\cos\theta_k$ 和 $b_{k2}=r_k^2$。对 b_{k1}与 b_{k2}量化后的零点位置如图 9.5.3 所示,只是网格点扩展到了单位圆外。

这种情况下,在保持线性相位属性时会出现问题,因为在 $z=(1/r_k)e^{\pm j\theta_k}$ 处的量化零点对可能不是在 $z=r_ke^{\pm j\theta_k}$ 的量化零点的镜像。这个问题可以通过重新排列与镜像零点相应的因式来解决。也就是说,我们可以将镜像因式写为

$$\left(1-\frac{2}{r_k}\cos\theta_kz^{-1}+\frac{1}{r_k^2}z^{-2}\right)=\frac{1}{r_k^2}(r_k^2-2r_k\cos\theta_kz^{-1}+z^{-2}) \tag{9.5.20}$$

因式$\{1/r_k^2\}$可以与总增益 G 结合,或它们也可以分拆进入每个二阶滤波器中。式(9.5.20)中的项正好包括$(1-2r_k\cos\theta_kz^{-1}+r_k^2z^{-2})$,从而即使参数被量化,零点仍然会出现在镜像对中。

通过以上简洁的描述,我们向读者介绍了 IIR 与 FIR 滤波器中的量化问题。我们论证了为了使量化误差效应最小化,一个高阶滤波器必须分解为级联(IIR 或 FIR 滤波器)或并联(IIR 滤波器)的形式实现。这一点对于用相对少的位数表示的定点实现尤其重要。

9.6 数字滤波器中的舍入效应

在 9.4 节中,我们表征了数字滤波器算术运算中存在的量化误差。由于数字滤波器的实现中存在一次或多次量化,导致产生的非线性设备的性能与离散线性滤波器的性能明显不同。例如,在下面提到的递归数字滤波器的输出中可能会产生不希望的振荡,即使在没有输入的情况下也是如此。

作为数字滤波器中执行有限精度运算的结果,部分寄存器可能因为输入信号过大而产生溢

出。溢出代表另一类我们不希望的非线性畸变。从而，必须对输入信号进行合适的尺度变换，以完全防止溢出，或至少能够减少它出现的次数。

由于有限精度运算的非线性，导致非常难以进行精确地分析数字滤波器的表现。为了对量化效应进行分析，我们采用量化误差统计描述，从而得到一个关于滤波器的线性模型。这样，我们就能够在数字滤波器的实现中评估量化误差的影响。我们的讨论仅限于量化效应非常重要的定点实现。

9.6.1　递归系统的极限环振荡

在数字滤波器的实现中，无论是在数字硬件还是计算机软件中，有限精度运算的本质是导致系统的非线性。在递归系统中，由有限精度带来的非线性经常会引起输出的周期性振荡，即使是在输入为零或非零常量时也是如此。这种振荡在递归系统中被称为有限环并且直接由乘法中的舍入误差和溢出误差引起。

为了显示有限环振荡的特性，让我们考察一个由如下线性差分方差描述的单极点系统：

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \tag{9.6.1}$$

其中，极点位于 $z = a$。理想系统的实现如图 9.6.1 所示。另一方面，实际系统对应于如下非线性差分方程：

$$v(n) = Q[av(n-1)] + x(n) \tag{9.6.2}$$

其实现如图 9.6.2 所示。

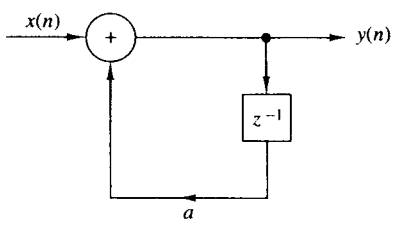


图 9.6.1　理想单极点递归系统

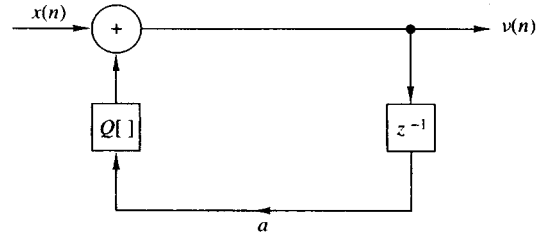


图 9.6.2　实际的非线性系统

假设图 9.6.2 中的实际系统采用定点算术实现，其中 4 位表示幅度，1 位表示符号。假设乘法之后的量化被向上舍入。

在表 9.2 中，我们列出了实际系统中极点在四个不同位置 $z = a$ 的响应，输入 $x(n) = \beta\delta(n)$，其中 $\beta = 15/16$，其二进制表示为 0.1111。理想情况下，系统的响应按指数衰减到 0[$y(n) = a^n \to 0$，当 $n \to \infty$ 时]。在实际的系统中，响应 $v(n)$达到了一个稳态的输出序列，其周期和极点值相关。当极点为正时，振荡周期为 $N_p = 1$，所以 $a = \frac{1}{2}$ 的输出为 $\frac{1}{16}$，$a = \frac{3}{4}$ 的输出为 $\frac{1}{8}$。另一方面，当极点为负时，输出序列在正负之间振荡(当 $a = -\frac{1}{2}$ 时为 $\pm\frac{1}{16}$，当 $a = -\frac{3}{4}$ 时为 $\pm\frac{1}{8}$)。所以周期为 $N_p = 2$。

这些极限环是由于乘法的量化效应导致的。当输入序列 $x(n)$恒为 0 时，滤波器的输出序列在经过一系列迭代之后进入极限环。输出将保持在极限环内，直到新的输入幅度大到足够将系统的状态带离极限环。类似地，零输入极限环来自于具有输入 $x(n) = 0$ 的非零初始条件。在极限环内的输出幅度被限制在一定的幅度以内，被称为滤波器的死带。

很有意思的是，当单极点滤波器的响应在极限环上时，实际的非线性系统等价于一个线性系统。当极点为正时，极点位置在 $z = 1$，当极点为负时，极点位置在 $z = -1$。即

$$Q_r[av(n-1)] = \begin{cases} v(n-1), & a > 0 \\ -v(n-1), & a < 0 \end{cases} \tag{9.6.3}$$

表 9.2 低通单极点滤波器的极限环

n	$a=0.1000=\frac{1}{2}$		$a=1.1000=-\frac{1}{2}$		$a=0.1100=\frac{3}{4}$		$a=1.1100=-\frac{3}{4}$	
0	0.1111	$(\frac{15}{16})$	0.1111	$(\frac{15}{16})$	0.1011	$(\frac{11}{16})$	0.1011	$(\frac{11}{16})$
1	0.1000	$(\frac{8}{16})$	1.1000	$(-\frac{8}{16})$	0.1000	$(\frac{8}{16})$	1.1000	$(-\frac{8}{16})$
2	0.0100	$(\frac{4}{16})$	0.0100	$(\frac{4}{16})$	0.0110	$(\frac{6}{16})$	0.0110	$(\frac{6}{16})$
3	0.0010	$(\frac{2}{16})$	1.0010	$(-\frac{2}{16})$	0.0101	$(\frac{5}{16})$	1.0101	$(-\frac{5}{16})$
4	0.0001	$(\frac{1}{16})$	0.0001	$(\frac{1}{16})$	0.0100	$(\frac{4}{16})$	0.0100	$(\frac{4}{16})$
5	0.0001	$(\frac{1}{16})$	1.0001	$(-\frac{1}{16})$	0.0011	$(\frac{3}{16})$	1.0011	$(-\frac{3}{16})$
6	0.0001	$(\frac{1}{16})$	0.0001	$(\frac{1}{16})$	0.0010	$(\frac{2}{16})$	0.0010	$(\frac{2}{16})$
7	0.0001	$(\frac{1}{16})$	1.0001	$(-\frac{1}{16})$	0.0010	$(\frac{2}{16})$	1.0010	$(-\frac{2}{16})$
8	0.0001	$(\frac{1}{16})$	0.0001	$(\frac{1}{16})$	0.0010	$(\frac{2}{16})$	0.0010	$(\frac{2}{16})$

因为被量化的积 $av(n-1)$通过舍入获得,从而有量化误差界为

$$|Q_r[av(n-1)]-av(n-1)|\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2^{-b} \tag{9.6.4}$$

其中,b 是用以表示极点 a 与 $v(n)$的位数(不包含符号位)。从而,由式(9.6.4)与式(9.6.3)可得

$$|v(n-1)|-|av(n-1)|\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2^{-b}$$

并且

$$|v(n-1)|\leqslant\frac{\frac{1}{2}\cdot 2^{-b}}{1-|a|} \tag{9.6.5}$$

式(9.6.5)中的表达式定义为单极点滤波器的死带。例如,当 $b=4$ 且 $|a|=\frac{1}{2}$时,死带的幅度范围是$(-\frac{1}{16},\frac{1}{16})$。当 $b=4$ 且 $|a|=\frac{3}{4}$时,死带增加到$(-\frac{1}{8},\frac{1}{8})$。

双极点滤波器的极限环模式更加复杂,并且可能产生的振荡形式变化多样。在这种情况下,理想双极点系统可用线性差分方程描述为

$$y(n)=a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+x(n) \tag{9.6.6}$$

而实际系统的差分方程描述为

$$v(n)=Q_r[a_1v(n-1)]+Q_r[a_2v(n-2)]+x(n) \tag{9.6.7}$$

当滤波器系数满足条件 $a_1^2<-4a_2$ 时,系统的极点位于

$$z=re^{\pm j\theta}$$

其中,$a_2=-r^2$ 和 $a_1=2r\cos\theta$。和单极点的情况一样,当系统的输入为零或者说位于零状态极限环上时,有

$$Q_r[a_2v(n-2)]=-v(n-2) \tag{9.6.8}$$

换言之,当复共轭极点位于单位圆上(即 $a_2=-r^2=-1$)时,系统产生振荡。对乘积 $a_2v(n-2)$进行舍入意味着有

$$|Q_r[a_2v(n-2)]-a_2v(n-2)|\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2^{-b} \tag{9.6.9}$$

将式(9.6.8)代入式(9.6.9),得到

$$|v(n-2)|-|a_2v(n-2)|\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2^{-b}$$

或等价为

$$|v(n-2)| \leqslant \frac{\frac{1}{2}\cdot 2^{-b}}{1-|a_2|} \tag{9.6.10}$$

式(9.6.10)中的表达式定义了复共轭极点的双极点滤波器的死带。我们观察到死带仅仅受 $|a_2|$ 限制。参数 $a_1 = 2r\cos\theta$ 决定了振荡的频率。

零输入的另一个可能的极限环模式由乘法的舍入造成，与之对应的二阶系统的极点位于 $z = \pm 1$。在这种情况下，Jackson(1969)发现双极点滤波器振荡的死带范围是 $2^{-b}/(1-|a_1|-a_2)$。

这些极限环是由于对滤波器系数与前一级的输出 $v(n-1)$ 与 $v(n-2)$ 之积的舍入造成的。除了舍入，我们还可以选择将结果截取为 b 位，采用截尾，我们可以去除许多但不是全部由 Claasen 等人(1973)提到的极限环。然而，回忆可知在不使用符号-幅度表示方式时，截尾导致了偏置误差，这种情形下截尾误差关于零点对称。一般来说，这种偏置是数字滤波器实现中我们不愿意见到的。

在高阶 IIR 系统的并联型实现中，每个二阶滤波器段都有自己的极限环特性，和其他滤波器段互不相关。从而，输出是各段零输入极限环之和。而在高阶 IIR 系统的级联型实现中，极限环的分析要困难得多。具体地说，第一段的输出极限环经过后续段滤波。如果极限环的频率落入后续滤波器的共振频率，那么序列的幅度被共振特性增强。一般来说，我们必须小心避免这样的情况。

除了由对乘法结果舍入误差造成的极限环，加法的溢出同样会造成极限环。两个或多个更多二进制数相加之和超出系统数字化实现的可用字长时，会导致溢出。例如，考虑图 9.6.3 中所示的二阶滤波器段，其中的加法由 2 的补来实现，所以我们可以将输出 $y(n)$ 写为

$$y(n) = g[a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + x(n)] \tag{9.6.11}$$

其中，函数 $g[\cdot]$ 表示 2 的补的加法。很容易验证函数 $g(v)$ 与 v 的关系如图 9.6.4 所示。

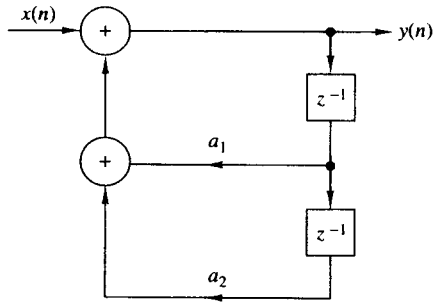


图 9.6.3　双极点滤波器实现

回忆可知稳定滤波器的参数 (a_1, a_2) 的取值范围由图 3.5.1 中的稳定三角形给出。然而，这些条件不再能阻止由 2 的补的算术产生的溢出振荡。实际上，可以很容易地得到没有零输入溢出极限环的充分必要条件是

$$|a_1| + |a_2| < 1 \tag{9.6.12}$$

对于二阶段而言，这是一个极端严格且不合理的限制条件。

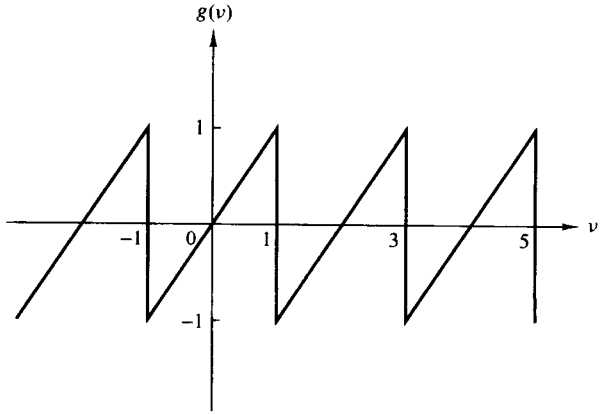


图 9.6.4　两个或多个数以 2 的补格式相加的输入输出关系

一种补救溢出振荡的有效方法是修改加法器,如图 9.6.5 所示,使它进行饱和运算。所以当上溢或下溢产生时,加法器的输出将是满度值 ± 1。倘若饱和出现次数不频繁,加法器的非线性导致的失真通常很小。采用这种非线性方式仍然需要将对信号和系统的参数进行尺度变换,详情在下一节中描述。

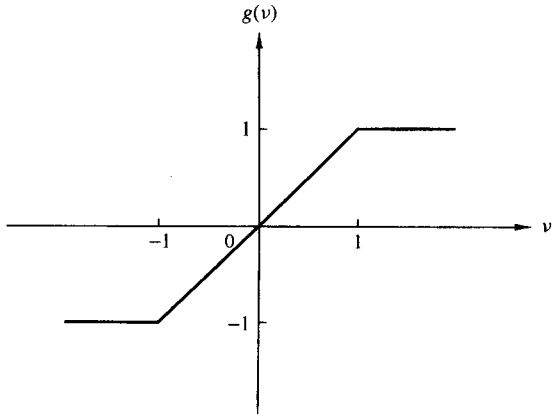


图 9.6.5 按 ± 1 截取的加法器的输入输出关系

9.6.2 尺度变换以防止溢出

刚描述的饱和算术排除了溢出导致的极限环,这只是问题的一方面,另一方面,截断将导致不希望见到的信号的非线性失真。为了减少非线性失真,需要对输入信号和系统中输入信号与任何内部加法节点间的单位样值响应进行尺度变换,从而使溢出极少发生。

对于定点算术,让我们首先考虑在系统的任何节点都不允许溢出的极端情形。令 $y_k(n)$表示系统在输入为 $x(n)$时第 k 个节点的响应,令节点和输入间的单位样值响应为 $h_k(n)$。则

$$|y_k(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k(m)x(n-m) \right| \leqslant \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)||x(n-m)|$$

假设 $x(n)$的上界为 A_x,则

$$|y_k(n)| \leqslant A_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)|, \quad \text{对于所有} n \tag{9.6.13}$$

现在,如果计算机的动态范围是$(-1,1)$,那么条件

$$|y_k(n)| < 1$$

可以通过将输入 $x(n)$进行如下尺度变换而得到满足:

$$A_x < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)|} \tag{9.6.14}$$

对于系统中所有可能的节点。式(9.6.14)是用于防止溢出的充分必要条件。

但式(9.6.14)中的条件过于保守,可能导致 $x(n)$被过度缩放。在这种情况下,会损失用于表示 $x(n)$的很多精度。在窄带序列的情况下,例如正弦曲线,由式(9.6.14)导致的缩放特别严重。对于窄带信号,我们可以使用系统的频率响应特性来确定缩放尺度。因为$|H(\omega)|$表示系统在频率 ω 处的增益,一种比较合理且不太严重的尺度变换方法要求

$$A_x < \frac{1}{\max\limits_{0 \leqslant \omega \leqslant \pi} |H_k(\omega)|} \tag{9.6.15}$$

其中,$H_k(\omega)$是$|h_k(n)|$的傅里叶变换。

对于 FIR 滤波器,式(9.6.14)简化为

$$A_x < \frac{1}{\sum_{m=0}^{M-1} |h_k(m)|} \tag{9.6.16}$$

其为滤波器单位冲激响应的 M 个非零项之和。

另一种对输入尺度变换的方法是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_k(n)|^2 \leqslant C^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = C^2 E_x \tag{9.6.17}$$

由帕塞瓦定理有

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_k(n)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \\ &\leqslant E_x \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{9.6.18}$$

将式(9.6.17)和式(9.6.18)结合，我们得到

$$C^2 \leqslant \frac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k(n)|^2} = \frac{1}{(1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega} \tag{9.6.19}$$

比较上面给出的不同尺度变换因子，可得

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k(n)|^2 \right]^{1/2} \leqslant \max_{\omega} |H_k(\omega)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k(n)| \tag{9.6.20}$$

很显然，式(9.6.14)是最悲观的限制。

在下一节中，我们将观察到尺度变换对一阶及二阶滤波器段的输出信噪比(SNR)产生的影响。

9.6.3　数字滤波器定点实现中量化效应的统计描述

很明显，我们上一节中采用量化误差的确定性模型对数字滤波器的量化误差的分析并没有产生太多有用的结果。根本问题是由于为了防止溢出而对两个数的乘积进行量化或两数之和进行截尾导致的非线性效应在包含大量乘法和加法节点的大型系统中并不容易建模。

为了得到关于滤波器量化效应更一般的结果，我们将乘法和加法节点的量化误差建模为一个加性噪声序列 $e(n)$，这就和我们对模拟信号在 A/D 转换的量化误差采用的方式一样。另外，我们考虑防止溢出采用的尺度变换的效果。

让我们从单极点滤波器中舍入噪声的描述开始入手。该滤波器是用定点运算实现的，并且由以下非线性差分方程描述：

$$v(n) = Q_r[av(n-1)] + x(n) \tag{9.6.21}$$

对积 $av(n-1)$的舍入误差效应可建模为一个噪声序列 $e(n)$加上实际的积 $av(n-1)$，即

$$Q_r[av(n-1)] = av(n-1) + e(n) \tag{9.6.22}$$

由量化误差效应的这个模型，描述的系统由以下线性差分方程描述：

$$v(n) = av(n-1) + x(n) + e(n) \tag{9.6.23}$$

对应的系统如图 9.6.6 中的框图所示。

从式(9.6.23)可以明显看出滤波器的输出序列 $v(n)$可以分成两部分。一部分是系统对输入序列 $x(n)$的响应。第二部分是对加性量化噪声 $e(n)$的响应。实际上,我们可以将输出序列$v(n)$表示为这两部分之和,即

$$v(n) = y(n) + q(n) \tag{9.6.24}$$

其中,$y(n)$表示系统对 $x(n)$的响应,$q(n)$表示系统对量化误差 $e(n)$的响应。将式(9.6.24)代入式(9.6.23),我们得到

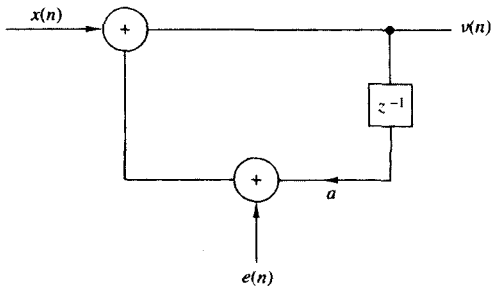


图 9.6.6 单极点滤波器量化误差的加性噪声模型

$$y(n) + q(n) = ay(n-1) + aq(n-1) + x(n) + e(n) \tag{9.6.25}$$

为了简化分析,我们将对误差序列 $e(n)$进行如下假设:

1. 对任意 n,误差序列$\{e(n)\}$在区间$(-1/2\cdot 2^{-b}, 1/2\cdot 2^{-b})$上是均匀分布的。这表示 $e(n)$的均值为 0 且其方差为

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \tag{9.6.26}$$

2. 误差$\{e(n)\}$是一个稳态白噪声序列。换言之,误差 $e(n)$和 $e(m)$ 在 $n \neq m$ 时不相关。
3. 误差序列$\{e(n)\}$与$\{x(n)\}$不相关。

最后一个假设让我们可以将差分方程(9.6.25)分解为两个非耦合的差分方程,即

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \tag{9.6.27}$$

$$q(n) = aq(n-1) + e(n) \tag{9.6.28}$$

式(9.6.27)中的差分方程表示所求系统输入输出的关系,而式(9.6.28)表示量化误差和系统输出之间的关系。

为了完成分析,我们使用 12.1 节中得到的两个重要关系。第一项为以 $h(n)$为冲激响应函数线性移不变滤波器的输出 $q(n)$的均值与输入随机序列 $e(n)$的均值 m_e 的关系。结果是

$$m_q = m_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \tag{9.6.29}$$

或等价为

$$m_q = m_e H(0) \tag{9.6.30}$$

其中,$H(0)$为滤波器频率响应 $H(\omega)$在 $\omega = 0$ 处的取值。

第二个重要的关系是以 $h(n)$为冲激响应函数的滤波器输出序列 $q(n)$的自相关序列的表达式,其输入随机序列 $e(n)$的自相关函数为 $\gamma_{ee}(n)$。结果为

$$\gamma_{qq}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l)\gamma_{ee}(k-l+n) \tag{9.6.31}$$

在随机序列为白噪声(谱为平坦的直线)的重要情形下,自相关函数 $\gamma_{ee}(n)$为单位样本序列乘以方差 σ_e^2,即

$$\gamma_{ee}(n) = \sigma_e^2 \delta(n) \tag{9.6.32}$$

将式(9.6.32)代入式(9.6.31)，我们得到自相关序列在由白噪声激励的滤波器输出中的期望结果，即

$$\gamma_{qq}(n)=\sigma_e^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)h(k+n) \tag{9.6.33}$$

输出噪声的方差 σ_q^2 可以通过 $\gamma_{qq}(n)$ 在 $n=0$ 处的取值获得。所以

$$\sigma_q^2=\sigma_e^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}h^2(k) \tag{9.6.34}$$

通过帕塞瓦定理，我们得到另一种表达形式

$$\sigma_q^2=\frac{\sigma_e^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{9.6.35}$$

在单极点滤波器中，单位样本响应为

$$h(n)=a^nu(n) \tag{9.6.36}$$

因为舍入造成的量化误差的均值为零，所以滤波器输出误差的均值为 $m_q=0$，方差为

$$\begin{aligned}\sigma_q^2&=\sigma_e^2\sum_{k=0}^{\infty}a^{2k}\\&=\frac{\sigma_e^2}{1-a^2}\end{aligned} \tag{9.6.37}$$

我们观察到噪声功率 σ_q^2 相对于输入噪声 σ_e^2 被增强了 $1/(1-a^2)$。极点若越接近单位圆，则该因子越大。

为了对获得量化误差更清楚的认识，我们需要考虑尺度变换对误差的影响。假设输入序列 $\{x(n)\}$ 是一个白噪声序列(宽带信号)，其尺度通过式(9.6.14)进行缩放以防止加法的溢出。那么

$$A_x<1-|a|$$

如果我们假设 $x(n)$ 在区间 $(-A_x,A_x)$ 上均匀分布，则根据式(9.6.31)和式(9.6.34)，滤波输出信号的功率为

$$\begin{aligned}\sigma_y^2&=\sigma_x^2\sum_{k=0}^{\infty}a^{2k}\\&=\frac{\sigma_x^2}{1-a^2}\end{aligned} \tag{9.6.38}$$

其中，$\sigma_x^2=(1-|a|)^2/3$ 是输入信号的方差。信号功率 σ_y^2 与量化误差功率 σ_q^2 的比值被称为信噪比(SNR)，即

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2}&=\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\\&=(1-|a|)^2\cdot 2^{2(b+1)}\end{aligned} \tag{9.6.39}$$

输出的 SNR 表达式清楚地显示了当对输入进行缩放时带来的严重损失，特别是极点在单位圆附近时。通过比较，如果信号没有被缩放且加法器的表示精度足够，那么信号的幅度可以被限制在范围 $(-1,1)$ 内。在这种情况下，$\sigma_x^2=\frac{1}{3}$，它和极点位置无关。从而有

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2} = 2^{2(b+1)} \tag{9.6.40}$$

式(9.6.40)和式(9.6.39)中 SNR 的不同表示清楚地说明了加法比乘法需要更多的精度。加法需要的位数和极点位置有关,在极点离单位圆较近时位数应当增加。

下面,我们考虑有限精度的双极点滤波器,其线性差分方程为

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + x(n) \tag{9.6.41}$$

其中,$a_1 = 2r\cos\theta$ 且 $a_2 = -r^2$。当两个乘积被舍入时,我们得到一个用非线性差分方程

$$v(n) = Q_r[a_1 v(n-1)] + Q_r[a_2 v(n-2)] + x(n) \tag{9.6.42}$$

描述的系统,如图 9.6.7 中的框图所示。

现在有两个乘法,所以每次输出产生两个量化误差。从而,我们应该引入两个误差序列 $e_1(n)$ 和 $e_2(n)$,它们对应于量化器的输出

$$\begin{aligned} Q_r[a_1 v(n-1)] &= a_1 v(n-1) + e_1(n) \\ Q_r[a_2 v(n-2)] &= a_2 v(n-2) + e_2(n) \end{aligned} \tag{9.6.43}$$

对应的模型框图如 9.6.8 所示。注意误差序列 $e_1(n)$和 $e_2(n)$可以直接移到滤波器的输入。

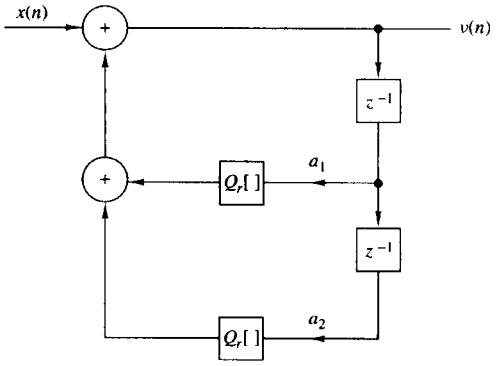


图 9.6.7 包含舍入量化器的双极点数字滤波器

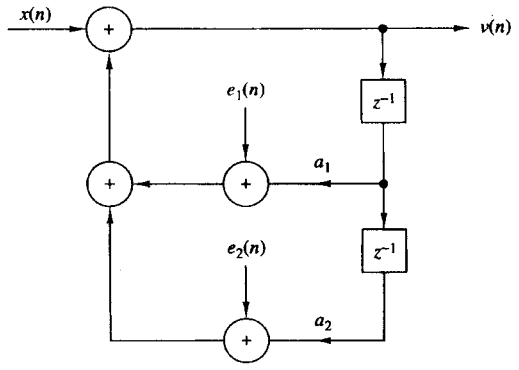


图 9.6.8 双极点滤波器实现中量化误差的加性噪声模型

和一阶滤波器一样,二阶滤波器的输出可以分解为两个分量,即所求的信号分量和量化误差分量。前者由差分方程

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + x(n) \tag{9.6.44}$$

描述,后者满足差分方程

$$q(n) = a_1 q(n-1) + a_2 q(n-2) + e_1(n) + e_2(n) \tag{9.6.45}$$

可以合理地假设序列 $e_1(n)$与 $e_2(n)$不相关。

现在二阶滤波器具有一个单位冲激响应

$$h(n) = \frac{r^n}{\sin\theta}\sin(n+1)\theta u(n) \tag{9.6.46}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) = \frac{1+r^2}{1-r^2}\frac{1}{r^4 + 1 - 2r^2\cos 2\theta} \tag{9.6.47}$$

通过应用式(9.6.34),我们得到了如下形式的滤波器输出的量化误差的方差:

$$\sigma_q^2 = \sigma_e^2 \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \frac{1}{r^4 + 1 - 2r^2 \cos 2\theta} \right) \tag{9.6.48}$$

在信号分量的情形下，如果我们将输入按照式(9.6.14)进行缩放以避免溢出，则输出信号的功率为

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) \tag{9.6.49}$$

其中，输入信号 $x(n)$的功率由以下方差确定：

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{3\left[\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|\right]^2} \tag{9.6.50}$$

从而，双极点滤波器的输出 SNR 为

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{2^{2(b+1)}}{\left[\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|\right]^2} \tag{9.6.51}$$

虽然很难确定式(9.6.51)中分母项的精确值，但获得其上下界却很简单。实践中$|h(n)|$的上界为

$$|h(n)| \leqslant \frac{1}{\sin\theta} r^n, \qquad n \geqslant 0 \tag{9.6.52}$$

从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \leqslant \frac{1}{\sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{(1-r)\sin\theta} \tag{9.6.53}$$

下界可以通过下式获得：

$$|H(\omega)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|$$

其中，

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})(1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})}$$

当 $\omega = \theta$(滤波器的共振频率)时，我们得到$|H(\omega)|$的最大值。因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \geqslant |H(\theta)| = \frac{1}{(1-r)\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos 2\theta}} \tag{9.6.54}$$

所以，SNR 的上下界分别为

$$2^{2(b+1)}(1-r)^2 \sin^2\theta \leqslant \frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2} \leqslant 2^{2(b+1)}(1-r)^2(1 + r^2 - 2r\cos 2\theta) \tag{9.6.55}$$

例如，当 $\theta = \pi/2$，式(9.6.55)中的表达式简化为

$$2^{2(b+1)}(1-r)^2 \leqslant \frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2} \leqslant 2^{2(b+1)}(1-r)^2(1+r)^2 \tag{9.6.56}$$

对界限起决定作用的项是$(1-r)^2$，当极点移近单位圆时会极大地减小 SNR。所以，尺度变换产生的效应在二阶滤波器中比一阶滤波器中更严重。注意，如果 $d = 1 - r$ 表示极点到单位圆的距

离,那么式(9.6.56)中的 SNR 按 d^2 减少,而单极点滤波器的减少与 d 成正比。这样的结果再次强调了前面指出的应采用比乘法更多的位数进行加法的机制来避免尺度变换产生的严重效果。

对二阶滤波器量化误差的分析可以直接应用到高阶滤波器的并联型实现中。在这种情况下,二阶段间相互独立,所以并联滤波器组的总量化噪声功率是各段量化噪声功率的线性组合。另一方面,级联方式更难分析。对于级联方式,任何一个二阶滤波器的噪声输出都会被后续的滤波器进行滤波。因此,现在的问题是如何将实值极点进行配对,得到合适的二阶段,以及如何组织这些二阶滤波器段将总误差功率减至最小。这个问题在 Jackson(1970a,b)得到了研究,研究表明接近单位圆的极点与接近的零点配对可以减少每个二阶段的增益。在排列这些二阶段方面,一种合理的方式是将二阶段以最大频率增益递减的方式进行排列。在这种情况下,前面的高增益段产生的噪声功率不会被后续的段过度放大。

下面的例子显示了合理安排级联型的顺序对控制整个滤波器的舍入误差十分重要。

例 9.6.1

试确定采用如下系统函数的滤波器两级级联型实现输出的舍入误差的方差。

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

其中,

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

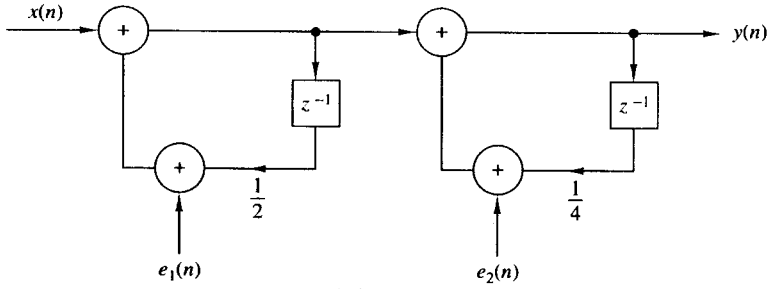
$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

解:令 $h(n), h_1(n), h_2(n)$ 分别表示对应的 $H(z), H_1(z), H_2(z)$ 的单位冲激响应。从而有

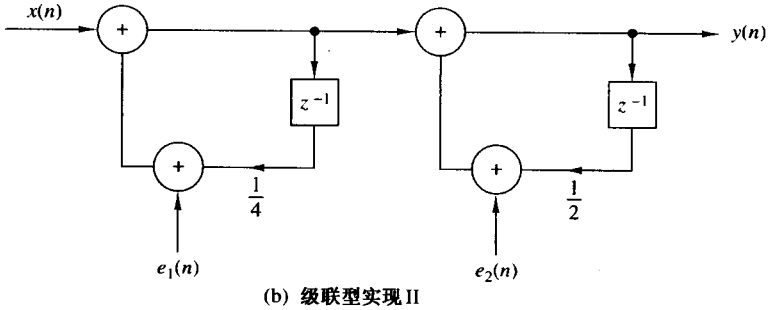
$$h_1(n) = (\tfrac{1}{2})^n u(n), \qquad h_2(n) = (\tfrac{1}{4})^n u(n)$$

$$h(n) = [2(\tfrac{1}{2})^n - (\tfrac{1}{4})^n]u(n)$$

两级联型实现如图 9.6.9 所示。



(a) 级联型实现 I



(b) 级联型实现 II

图 9.6.9 例 9.6.1 中的两种级联型实现:(a) 级联型实现 I;(b) 级联型实现 II

在第一种级联型实现中，输出的方差为

$$\sigma_{q1}^2 = \sigma_e^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n) \right]$$

在第二种级联型实现中，输出的方差为

$$\sigma_{q2}^2 = \sigma_e^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) \right]$$

现在有

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n) = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} h^2(n) = \frac{4}{1-\frac{1}{4}} - \frac{4}{1-\frac{1}{8}} + \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = 1.83$$

所以

$$\sigma_{q1}^2 = 2.90\sigma_e^2$$

$$\sigma_{q2}^2 = 3.16\sigma_e^2$$

噪声方差之比为

$$\frac{\sigma_{q2}^2}{\sigma_{q1}^2} = 1.09$$

从而，第二种级联型实现的方差比第一种的方差大 9%。

9.7　小结与参考文献

从本章的内容中，我们可以看到离散时间系统的各种不同实现方式。FIR 的实现包括直接型、级联型、频率采样型以及格型方式。IIR 的实现同样包括直接型、级联型、格型、格型梯状以及并联型方式。

对于由同一个线性常系数差分方程描述的任何系统，在内部以无限精度实现时，其各种实现都是等价的，表示的都是同一个系统，输入相同则输出也相同。然而，当运算采用有限精度时，各种结构就不再等价。

更多其他 FIR 以及 IIR 滤波器可以通过采用状态空间公式对系统内部进行描述来获得。这种状态空间实现法在本书的前一版中介绍过，这里由于空间有限被省略了。采用状态空间滤波器结构实现的 IIR 系统由 Mullis 和 Roberts(1976a,b)提出，并由 Hwang(1977)，Jackson 等人(1979)，Mills 等人(1981)和 Bomar(1985)进一步发展。

三个重要因素会影响到对 FIR 以及 IIR 系统实现的选择。这些因素是计算复杂度、内存需求、有限字长效应。依赖于特定系统的频域特性，部分实现方式比其他方式需要更少的计算量和内存空间。所以，我们的选择必须考虑两个重要因素。

对在 9.3 节中派生出的转置，我们介绍了各种概念和对信号流图的操作。信号流图的更深入的内容可以参看 Mason 与 Zimmerman(1960)和 Chow 与 Cassignol(1962)的著作。

另一个重要的 IIR 系统结构，即波数字滤波器，被 Fettweis(1971)研究，并由 Sedlmeyer 与 Fettweis(1973)进一步改进。这种滤波器的介绍可以在 Antoniou(1979)的书中找到。

IIR 滤波器的有限字长效应是实现数字信号处理器要考虑的重要因素。特别地,我们考察了如下应对有限字长效应的措施:

1. 数字滤波器中的参数量化。
2. 乘法中的舍入噪声。
3. 加法中的溢出。
4. 极限环。

这四种效应是滤波器所固有的,并影响到系统的实现方式。特别地,我们指出了高阶系统(特别是 IIR 系统)应通过使用二阶段作为构建块来实现。我们比较赞同采用直接 II 型(一般式或转置形式)实现。

FIR 与 IIR 滤波器结构定点实现中的舍入效应被许多研究人员考察过。我们引用了 Gold 与 Rader(1966),Rader 与 Gold(1967b),Jackson(1970a,b),Liu(1971),Chan 与 Rabiner(1973a,b,c)以及 Oppenheim 与 Weinstein(1972)的论文。

IIR 滤波器的极限环振荡是由于定点乘法的量化效应与舍入误差造成的。对数字滤波器中极限环及其特性的研究出现在 Parker 与 Hess(1971),Brubaker 与 Gowdy(1972),Sandberg 与 Kaiser(1972)以及 Jackson(1969,1979)的论文中。后面的文章采用状态空间的方法处理极限环。很多新的方法被设计出来解决舍入误差造成的极限环。如 Barnes 与 Fam(1977),Fam 与 Barnes(1979),Chang(1981),Butterweck 等人(1984)以及 Auer(1987)都讨论了这个问题。Ebert 等人(1969)的论文中讨论了溢出振荡。

参数量化的效应出现在许多论文中。我引用了 Rader 与 Gold(1976b),Knowles 与 Olcayto(1968),Avenhaus 与 Schuessler(1970),Herrmann 与 Schuessler(1970b),Chan 与 Rabiner(1973c)以及 Jackson(1976)的作品。

最后,我们需要提醒一下格型以及格型梯状结构的滤波器在定点实现中是已知的最鲁棒实现。对这类滤波器的介绍,读者可以参看 Gray 与 Markel(1973),Makhoul(1978)以及 Morf 等人(1977)的论文,还有 Markel 与 Gray(1976)的书。

习题

9.1 确定下列线性滤波器的直接型实现。

(a) $h(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4,3,2,1\}$

(b) $h(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,3,2,1\}$

9.2 考虑一个具有如下系统函数的 FIR 滤波器:

$$H(z)=1+2.88z^{-1}+3.4048z^{-2}+1.74z^{-3}+0.4z^{-4}$$

请画出此系统的直接型与格型实现的草图,并给出详细的输入输出公式。这个系统是最小相位的吗?

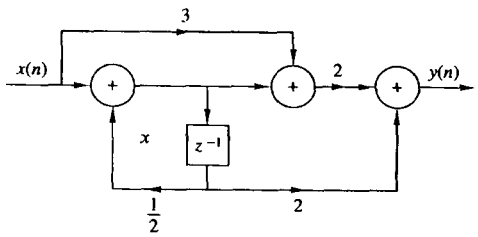


图 P9.3

9.3 求图 P9.3 中的系统的系统函数与冲激响应。

9.4 求图 P9.4 中系统的系统函数与冲激响应。

9.5 求图 P9.4 中系统的转置结构,并验证原系统与转置系统具有同样的系统函数。

9.6 求用 b_1,b_2 表示的 a_1,a_2,c_1,c_0,使得图 P9.6 中的两个系统等价。

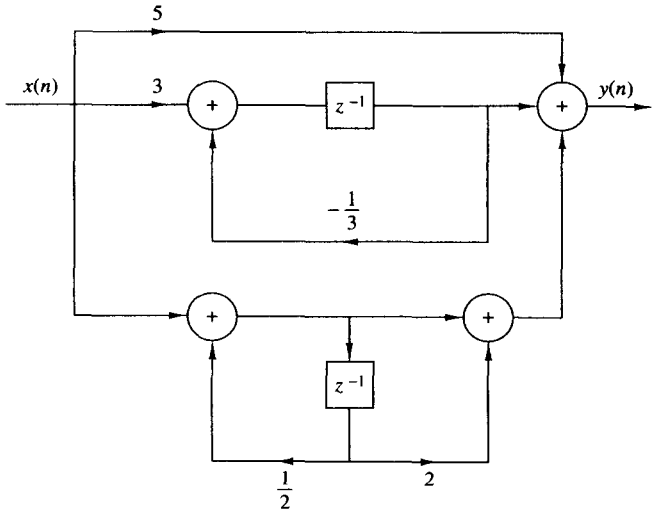


图 P9.4

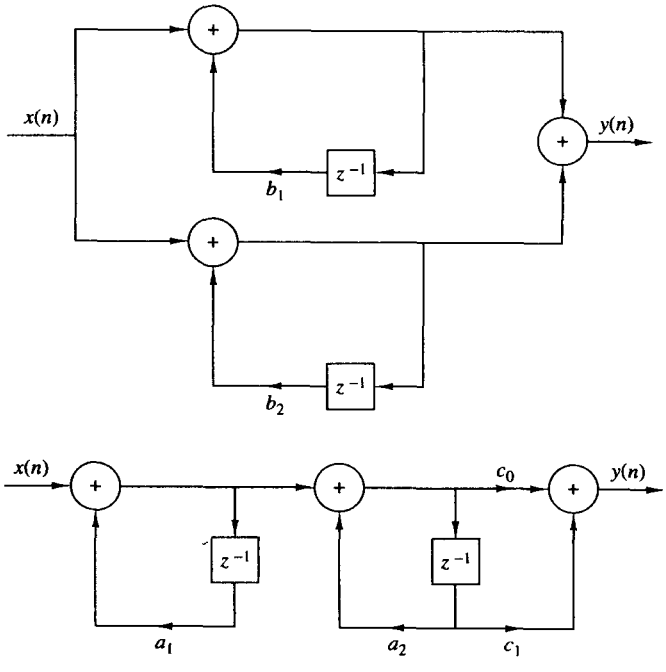


图 P9.6

9.7　观察图 P9.7 中的滤波器。

(a)求系统函数

(b)画出零极点图,并检查在系数如下时系统的稳定性:

1. $b_0 = b_2 = 1, b_1 = 2, a_1 = 1.5, a_2 = -0.9$

2. $b_0 = b_2 = 1, b_1 = 2, a_1 = 1, a_2 = -2$

3.(c)求当 $b_0 = 1, b_1 = b_2 = 0, a_1 = 1, a_2 = -0.99$ 时,系统对 $x(n) = \cos(\pi n/3)$ 的响应。

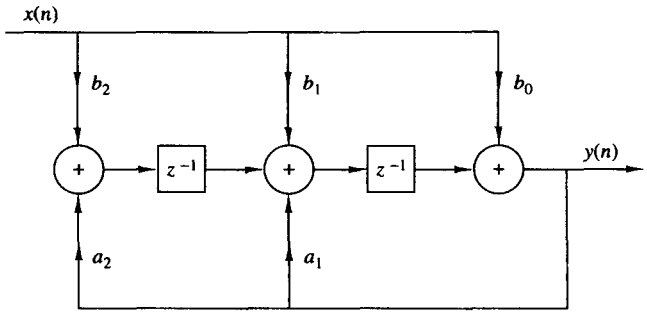


图 P9.7

9.8 考虑一个由如下差分方程描述的 LTI 系统,假设初始状态输入为零:

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-2) + x(n)$$

(a)求系统的冲激响应 $h(n)$。

(b)求系统对如下输入信号响应:

$$x(n) = [(\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^n]u(n)$$

(c)求此系统的直接 II 型实现、并联型实现以及级联型实现。

(d)粗略画出此系统的幅度响应 $|H(\omega)|$。

9.9 给出下列系统的直接 I 型、直接 II 型、级联和并联结构:

(a) $y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$

(b) $y(n) = -0.1y(n-1) + 0.72y(n-2) + 0.7x(n) - 0.252x(n-2)$

(c) $y(n) = -0.1y(n-1) + 0.2y(n-2) + 3x(n) + 3.6x(n-1) + 0.6x(n-2)$

(d) $H(z) = \frac{2(1-z^{-1})(1+\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2})}{(1+0.5z^{-1})(1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2})}$

(e) $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2) + x(n) + x(n-1)$

(f) $y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) - x(n-1) + x(n-2)$

上述哪些系统是稳定的。

9.10 证明图 P9.10 中的系统是等价的。

9.11 求由格型系数 $K_1 = \frac{1}{2}$, $K_2 = 0.6$, $K_3 = -0.7$ 以及 $K_4 = \frac{1}{3}$ 确定的所有 FIR 滤波器。

9.12 求用于描述转置直接 II 型实现的二阶子系统的差分方程的集合。

* **9.13** 编程实现基于转置直接 II 型二阶模块的并联滤波。

* **9.14** 编程实现基于常规直接 II 型二阶模块的级联滤波。

9.15 求对应于如下系统函数的 FIR 滤波器的格型滤波器参数 $\{K_m\}$:

$$H(z) = A_2(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

9.16 (a)求具有如下参数的 FIR 格型滤波器的零点,并画出草图:

$$K_1 = \frac{1}{2}, \qquad K_2 = -\frac{1}{3}, \qquad K_3 = 1$$

(b)在 $K_3 = -1$ 时重做(a)。

(c)你应该发现了零点正好位于单位圆上。这个结果能够推广吗?如何推广呢?

(d)画出(a)与(b)的相位响应的草图。你注意到什么?这个结果可以推广吗?如何推广呢?

9.17 考虑一个 FIR 格型滤波器,其系数为 $K_1 = 0.65$, $K_2 = -0.34$ 以及 $K_3 = 0.8$。

(a)跟踪通过格型结构的单位冲激响应,得到其冲激响应。

(b)画出直接型结构。

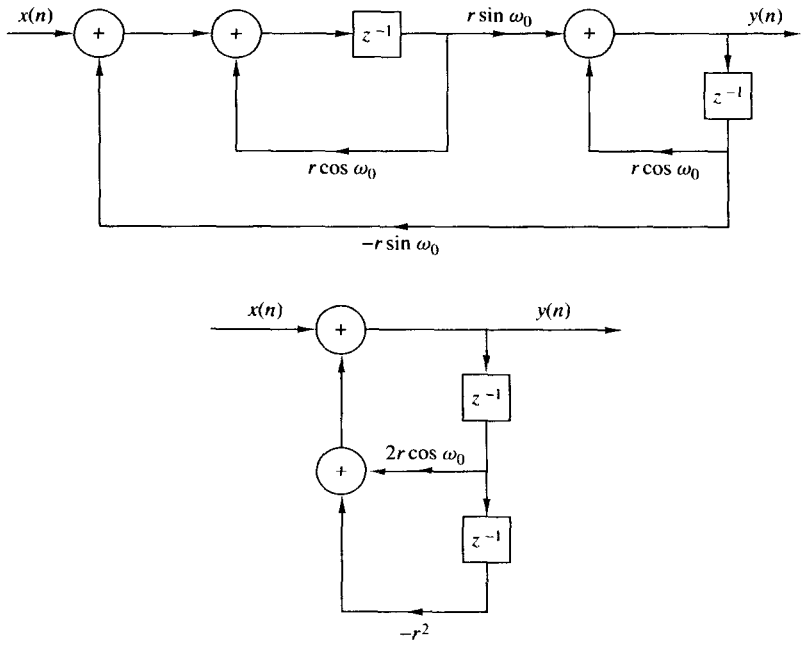


图 P9.10

9.18　考虑一个因果 IIR 系统，其系统函数为

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}}{1+0.9z^{-1}-0.8z^{-2}+0.5z^{-3}}$$

(a)确定等价的格型梯状结构。

(b)考察系统的稳定性。

9.19　求图 P9.19 中离散系统的输入与输出的关系、系统函数，并画出极-零点模式。

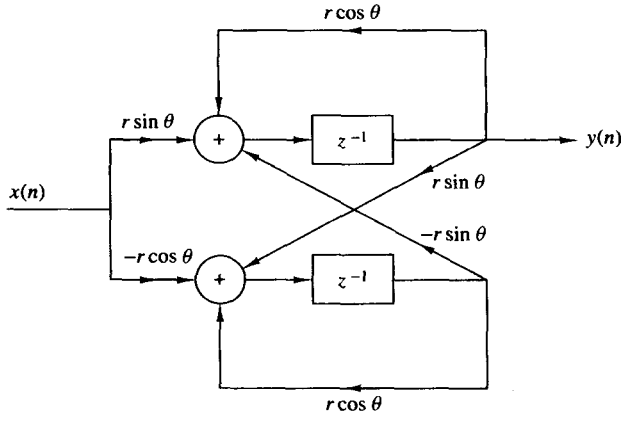


图 P9.19

9.20　求如下数字谐振器的格型实现：

$$H(z)=\frac{1}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

9.21　(a)求 FIR 格型滤波器的冲激响应，其参数为 $K_1=0.6, K_2=0.3, K_3=0.5, K_4=0.9$。

(b)画出直接型、全极点、全零点格型滤波的草图。

9.22 (a)求如下谐振器的格型梯实现:

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

(b)如果 $r=1$ 会如何?

9.23 画出如下系统的格型梯状结构的草图:

$$H(z)=\frac{1-0.8z^{-1}+0.15z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.72z^{-2}}$$

9.24 考虑一个极-零点系统,其系统函数为

$$H(z)=\frac{(1-0.5e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.5e^{-j\pi/4}z^{-1})}{(1-0.8e^{j\pi/3}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/3}z^{-1})}$$

画出系统的直接 II 型实现与转置实现。

9.25 求如下系统的并联与级联型实现:

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$

9.26 DSP 微处理器通常采用的浮点格式如下:

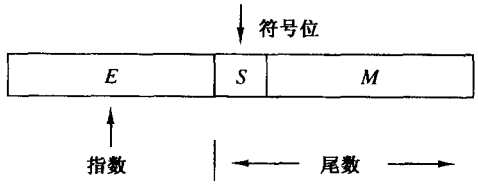


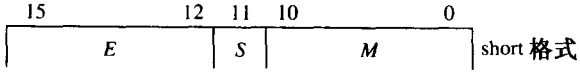
图 P9.26

X 的值由下式给定:

$$X=\begin{cases}01.M\times 2^E & \text{若 } S=0\\ 10.M\times 2^E & \text{若 } S=1\\ 0 & \text{若 } E \text{ 是最负的 2 的补的值}\end{cases}$$

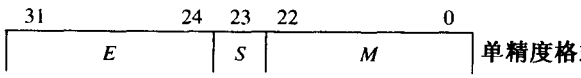
求如下两种格式的正数与负数的范围:

(a)



short 格式

(b)



单精度格式

9.27 考虑图 9.27 中给出的 IIR 递归滤波器,并且令 $h_F(n)$, $h_R(n)$以及 $h(n)$分别表示 FIR 段、递归段和整个滤波器的冲激响应。

(a) 找出所有带有整数系数(a_1, a_2)的因果和稳定递归二阶段,并画出它们的冲激响应和频率响应。这些滤波器不需要复杂的乘法或乘法之后的量化。

(b) (a)中的三段可以由其他段互联得到。

(c) 找出描述滤波器冲激响应 $h(n)$的差分方程,确定整个滤波器为 FIR 滤波器的条件。

(d) 从 z 域的角度重做(a)至(c)。

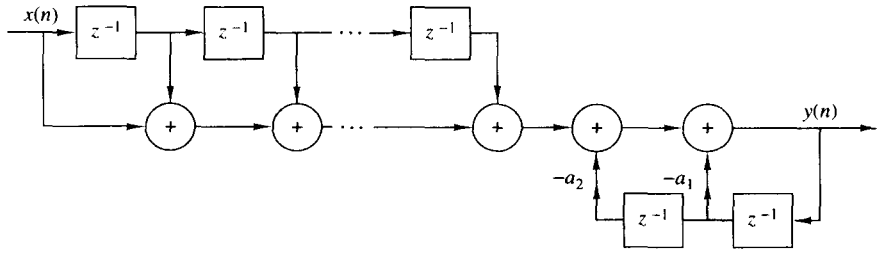


图 P9.27

9.28 本习题展示如何使用 Horner 计算多项式的规则来开始数字滤波器结构。考虑多项式

$$p(x) = \alpha_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

其中，$p(x)$的计算至少需要 p 次乘法和 p 次加法。

(a) 画出如下因式分解对应的结构：

$$H_1(z) = b_0(1 + b_1 z^{-1}(1 + b_2 z^{-1}(1 + b_3 z^{-1})))$$

$$H(z) = b_0(z^{-3} + (b_1 z^{-2} + (b_2 z^{-1} + b_3)))$$

并确定每个结构的系统函数、延迟单元的个数以及算术运算。

(b) 画出下述线性相位系统的 Horner 结构：

$$H(z) = z^{-1}\left[\alpha_0 + \sum_{k=1}^{3}(z^{-k} + z^k)\alpha_k\right]$$

9.29 令 x_1 和 x_2 是$(b+1)$位二进制数，其幅度小于 1。为使用 2 的补的表示来计算 x_1 与 x_2 的和，我们将其表示为$(b+1)$位无符号数，采用模 2 加法忽略符号位之后的进位。

(a) 证明，如果有同样符号的两个数的和的符号相反，则表明有溢出存在。

(b) 证明，当我们使用 2 的补的表示计算几个数的和时，结果将是正确的，即使存在溢出且正确的和的幅度小于 1。使用 3 个数字来构建一个简单的示例，以验证之。

9.30 考虑用如下差分方程描述的系统：

$$y(n) = ay(n-1) - ax(n) + x(n-1)$$

(a) 证明它是全通的。

(b) 获得系统的直接 II 型实现。

(c) 如果对(b)中的系统进行系数量化，它还是全通的吗？

(d) 将差分方程重写为 $y(n) = a[y(n-1) - x(n)] + x(n-1)$，给出系统的另一个实现。

(e) 如果对(d)中的系统进行系数量化，它还是全通的吗？

9.31 考虑系统

$$y(n) = \tfrac{1}{2}y(n-1) + x(n)$$

(a) 假设计算精度无限，计算对输入 $x(n) = (1/4)^n u(n)$的响应。

(b) 对同样的输入，计算系统 $y(n)$，$0 \leqslant n \leqslant 5$ 的响应，假设采用有限精度的符号-幅度小数算术表示 5 位(即符号位加上 4 个小数位)。采用截尾方式进行量化。

(c)比较(a)与(b)得到的结果。

9.32 系统

$$y(n) = 0.999y(n-1) + x(n)$$

的输入量化为 $b = 8$ 位。滤波器输出的量化噪声产生的功率是多少？

9.33 考虑系统

$$y(n) = 0.875y(n-1) - 0.125y(n-2) + x(n)$$

(a) 计算其极点并设计系统的级联型实现。

(b) 采用截尾方式对系统的系数进行量化,保留 1 个符号位和其他 3 位。求所得系统的极点。

(c) 采用舍入方式对系统的系数进行量化,重做(b),但精度要相同。

(d) 将(b)与(c)中的极点与(a)中的极点进行比较,哪种实现更好? 画出(a),(b),(c)中系统的频率响应。

9.34 考虑系统

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$$

(a) 画出系统所有可能的实现。

(b) 假设我们采用定点符号-幅度小数算术[使用($b+1$)位,其中 1 位为符号位]来实现滤波器。每个结果被舍入为 b 位。求(a)部分的每种实现的输出中,由乘法器产生的舍入误差的方差。

9.35 图 P9.35 中显示的一阶滤波器采用 4 位字长(包括符号位)的定点 2 的补的小数算术实现。乘积舍入为 4 位。采用输入 $x(n) = 0.10\delta(n)$。

(a) 若 $\alpha = 0.5$,求最早的 5 个输出。滤波器是否进入极限环?

(b) 若 $\alpha = 0.75$,求最早的 5 个输出。滤波器是否进入极限环?

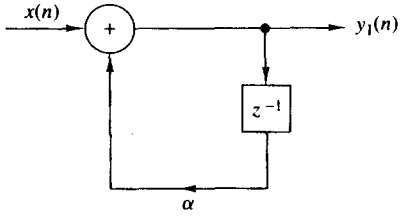


图 P9.35

9.36 如图 P9.36 所示的数字系统采用 6 位字长(包括符号位)的定点 2 的补的 A/D 转换器,并采用舍入。滤波器 $H(z)$采用带舍入的 8 位定点 2 的补的小数算术(包括符号位)实现。输入 $x(t)$是零均值均匀分布的随机过程,自相关函数为 $\gamma_{xx}(\tau) = 3\delta(\tau)$。假设 A/D 转换器可以处理 ± 1.0 之间的值而不会溢出。

(a) 在 A/D 转换器之前应当采用多大的衰减值以保证不溢出?

(b) 采用上述衰减,A/D 转换器输出端的信号量化噪声比(SQNR)是多少?

(c) 6 位 A/D 采样可以在 8 位表示的数字滤波器输入中采用左对齐、右对齐或居中。为了得到最大的 SNR,正确的策略是什么?

(d) 由所有量化噪声导致的输入端的 SNR 为多少?

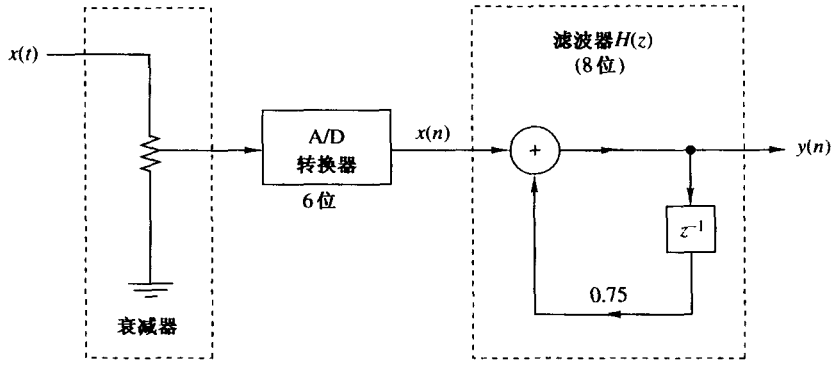


图 P9.36

9.37 图 P9.37 中显示的是一个双极点滤波器的耦合式实现,其极点位于 $z = re^{\pm j\theta}$。每个输出需要 4 次实数乘法。令 $e_i(n), i = 1,2,3,4$ 表示滤波器定点实现时的舍入误差。假设噪声源是零均值且互

不相关的平稳白噪声。对每个 n，概率密度函数 $p(e)$在区间 $-\Delta/2 \leqslant e \leqslant -\Delta/2$ 上是均匀的，其中 $\Delta = 2^{-b}$。

(a) 写出序列 $y(n)$与 $v(n)$的两个耦合差分方程，包括噪声源和输入序列 $x(n)$。

(b) 从这两个差分方程，证明滤波器系统函数 $H_1(z)$与 $H_2(z)$在输入噪声项 $e_1(n) + e_2(n)$与 $e_3(n) + e_4(n)$之间，并且输出 $y(n)$为

$$H_1(z) = \frac{r \sin\theta z^{-1}}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 - r\cos\theta z^{-1}}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

我们知道

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r2z^{-2}} \Rightarrow h(n) = \frac{1}{\sin\theta} r^n \sin(n+1)\theta u(n)$$

求 $h_1(n)$与 $h_2(n)$。

(c) 求滤波器输出端由 $e_i(n)$，$i = 1,2,3,4$ 得到的总噪声方差的闭合表达式。

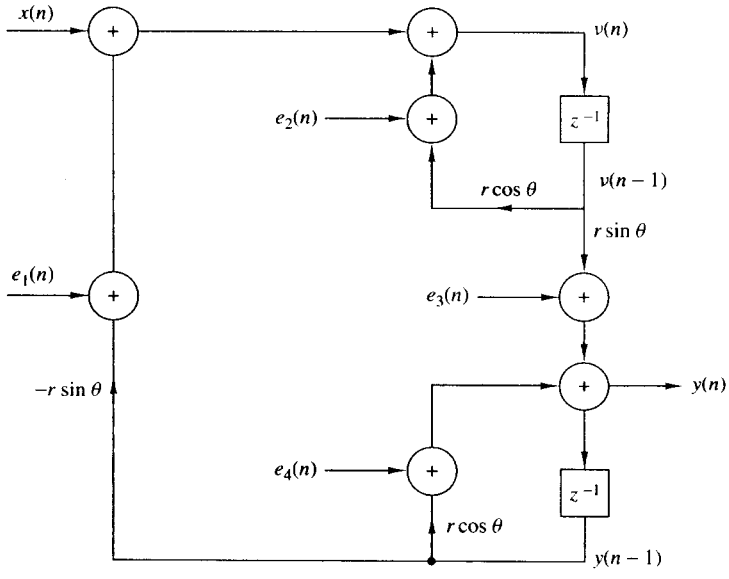


图 P9.37

9.38 求图 9.38 中所示滤波器的两个级联实现的输出端的舍入噪声的方差，系统函数为

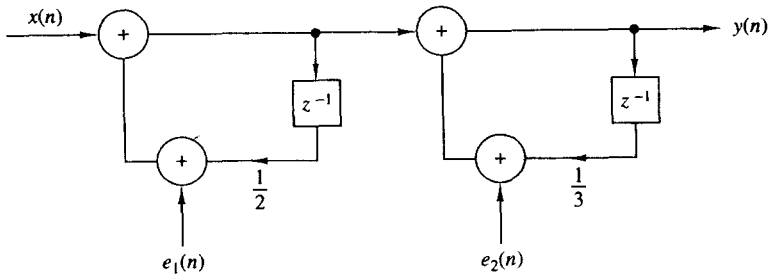
$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

其中，

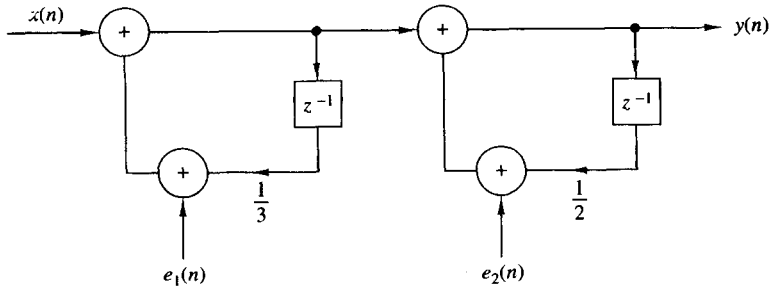
$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

9.39 直接型 FIR 滤波器中的量化效应。考虑长度为 M 的 FIR 滤波器的直接型实现。假设每个系数与相应信号采样之间的乘法采用 b 位定点运算实现，结果舍入为 b 位。利用 9.6.3 节中对舍入误差的统计描述，求滤波器输出端的量化噪声的方差。



(a) 级联型实现I



(b) 级联型实现II

图 P9.38

9.40 考虑由如下系统函数定义的系统:

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$$

$$=\left[G_1\frac{(1-0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}\right]\left[G_2\frac{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{5}{8}z^{-1})}{(1-0.8e^{j\pi/3}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/3}z^{-1})}\right]$$

(a) 选择 G_1 和 G_2 令每个二阶滤波器段在 $\omega=0$ 时的增益为 1。

(b) 画出系统的直接 I 型、直接 II 型和级联型实现。

(c) 编程实现直接 I 型和直接 II 型,并计算系统的冲激响应与阶跃响应的前 100 个样本。

(d) 画出(c)中的结果以显示程序的正确功能。

9.41 考虑习题 9.40 中的系统,其中 $G_1=G_2=1$。

(a) 求系统 $H(z)=B(z)$的格型实现。

(b) 求系统 $H(z)=1/A(z)$的格型实现。

(c) 求系统 $H(z)=B(z)/A(z)$的格型梯状实现。

(d) 编程实现(c)中的格型梯状结构。

(e) 求(a)至(c)中各种格型结构的冲激响应的前 100 个采样并画出草图。

(f) 求(a)与(b)两部分的冲激响应的卷积的前 100 个采样并画出草图。你发现了什么?解释你的结果。

9.42 考虑习题 9.40 中的系统。求并联型实现并编程实现之。

第 10 章　数字滤波器设计

有了前面阐述的章节作为背景知识，我们现在就可以开始数字滤波器设计这一主题。我们将阐述几种设计 FIR 和 IIR 数字滤波器的方法。

设计选频滤波器时，期望的滤波器特性是通过在频域中指定期望的幅度和相位响应来规定的。在滤波器设计过程中，我们通过尽量地逼近期望的频率响应来确定因果性 FIR 或 IIR 滤波器的系数。具体是设计哪类滤波器，FIR 还是 IIR，取决于具体问题的特性和期望频率响应的技术指标。

在实际中，FIR 滤波器应用于滤波器通带内要求具有线性相位特性的滤波问题。如果没有线性相位的要求，则 IIR 或 FIR 滤波器都可以。但是，一般来说，参数个数相同时，IIR 滤波器比 FIR 滤波器在阻带中的旁瓣更低。因此，如果一定的相位失真可容忍或关系不大，那么 IIR 滤波器更适合，主要因为它的实现涉及更少的参数，要求更少的存储量和具有更低的计算复杂度。

与滤波器设计的讨论相关联，我们还描述在模拟域和数字域进行频率变换，从而将低通原型滤波器变换到另一低通、带通、带阻或高通滤波器。

现在，FIR 和 IIR 数字滤波器设计可以被大量的计算机软件程序简化。本章通过描述各种各样的数字滤波器设计方法，给读者提供如何选择最适合具体应用和满足指标要求的滤波器所必需的基础知识。

10.1　整体考虑

在 5.4 节中，我们阐述了理想滤波器的特性并证明了这样的滤波器不具有因果性，故是物理上不可实现的。在这一节中我们将更详细地讨论因果性及其含义。接着，我们将介绍因果性 FIR 和 IIR 数字滤波器的频率响应特性。

10.1.1　因果性及其含义

通过研究具有如下频率响应特性的理想低通滤波器的冲激响应 $h(n)$，我们更深入的考虑因果性问题：

$$H(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0, & \omega_c<\omega\leqslant\pi\end{cases}\tag{10.1.1}$$

该滤波器的冲激响应为

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi}, & n=0\\ \dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin\omega_c n}{\omega_c n}, & n\neq 0\end{cases}\tag{10.1.2}$$

当 $\omega_c=\pi/4$ 时，$h(n)$如图 10.1.1 所示。很明显，理想低通滤波器是非因果的，故实际上它是不可实现的。

一种可能的解决方案是在 $h(n)$中引入一个大的延迟 n_0，并设定在 $n<n_0$ 时 $h(n)=0$。然而，这样所得的系统不再具有理想的频率响应特性。的确，如果我们设定在 $n<n_0$ 时 $h(n)=0$，那么 $H(\omega)$的傅里叶级数展开就会出现吉布斯现象，这将在 10.2 节介绍。

尽管这只限于讨论低通滤波器的可实现性，但是一般来说，我们的结论适用于所有其他的理

想滤波特性。简单地说,之前图 5.4.1 列出的理想滤波器特性都是非因果的,故所有那些滤波器都是物理上不可实现的。

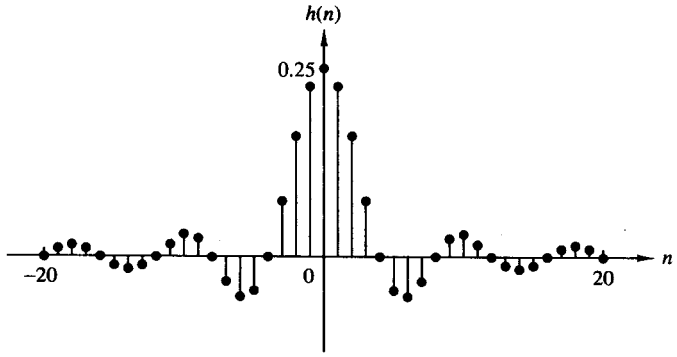


图 10.1.1 理想低通滤波器的单位样本响应

自然而然出现的一个问题就是:为了使得到的滤波器是因果的,频率响应特性 $H(\omega)$必须满足的充分必要条件是什么呢? Paley-Wiener 定理回答了这一问题,该定理陈述如下:

Paley-Wiener 定理:如果 $h(n)$能量有限并且当 $n<0$ 时 $h(n)=0$,则有[作为参考,见 Wiener 和 Paley(1934)]

$$\int_{-\pi}^{\pi} |ln|H(\omega)||\mathrm{d}\omega < \infty \tag{10.1.3}$$

反之,如果$|H(\omega)|$平方可积,并且假设式(10.1.3)中的积分是有限的,那么,我们就把$|H(\omega)|$和相位响应 $\Theta(\omega)$联系起来,这样得到的滤波器频率响应

$$H(\omega) = |H(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta(\omega)}$$

就是因果的。

从 Paley-Wiener 定理得出的一个重要结论是:在一些频率点,幅度函数$|H(\omega)|$可以是零,但是在任何有限频带上$|H(\omega)|$不为零,否则积分将变成无限的。因此,任何理想滤波器都是非因果的。

显而易见,因果性把一些严格的约束加到了线性时不变系统上。除了 Paley-Wiener 条件外,因果性也意味着频率响应 $H(\omega)$的实部 $H_R(\omega)$和虚部 $H_I(\omega)$存在紧密的关系。为了说明这种依存关系,我们将 $h(n)$分解为偶序列和奇序列,即

$$h(n) = h_e(n) + h_o(n) \tag{10.1.4}$$

其中,

$$h_e(n) = \frac{1}{2}[h(n) + h(-n)] \tag{10.1.5}$$

和

$$h_o(n) = \frac{1}{2}[h(n) - h(-n)] \tag{10.1.6}$$

这样,如果 $h(n)$是因果的,那么 $h(n)$就可以从其偶序列 $h_e(n)(0\leqslant n\leqslant\infty)$或奇序列 $h_o(n)(1\leqslant n\leqslant\infty)$恢复。

的确,很容易得到

$$h(n) = 2h_e(n)u(n) - h_e(0)\delta(n), \qquad n \geqslant 0 \tag{10.1.7}$$

和

$$h(n) = 2h_o(n)u(n) + h(0)\delta(n), \qquad n \geqslant 1 \tag{10.1.8}$$

由于当 $n=0$ 时 $h_o(n)=0$，故我们无法从 $h_o(n)$ 恢复出 $h(0)$，所以我们也必须知道 $h(0)$。任何情况下，$n \geqslant 1$ 时显然有 $h_o(n)=h_e(n)$，故 $h_o(n)$ 和 $h_e(n)$ 存在密切的关系。

如果 $h(n)$ 是绝对可和的（即 BIBO 稳定的），那么频率响应 $H(\omega)$ 存在，并且有

$$H(\omega) = H_R(\omega) + \mathrm{j}H_I(\omega) \tag{10.1.9}$$

此外，如果 $h(n)$ 是实值的并且是因果的，那么傅里叶变换的对称性质意味着

$$\begin{aligned} h_e(n) &\overset{F}{\longleftrightarrow} H_R(\omega) \\ h_o(n) &\overset{F}{\longleftrightarrow} H_I(\omega) \end{aligned} \tag{10.1.10}$$

因为 $h(n)$ 完全由 $h_e(n)$ 确定，由此可得，如果我们已知 $H_R(\omega)$，那么就可以完全确定 $H(\omega)$。另一方面，根据 $H_I(\omega)$ 和 $h(0)$，也可以确定 $H(\omega)$。简单地说，如果系统是因果的，那么 $H_R(\omega)$ 和 $H_I(\omega)$ 相互依存，不能单独被确定。也就是说，因果系统的幅度响应和相位响应是相互依存的，故也是不能单独被确定的。

对于一个相应的绝对可和的实偶序列 $h_e(n)$ 来说，给定 $H_R(\omega)$，我们就能确定 $H(\omega)$，下面的例子说明了这一过程。

例 10.1.1　考虑一个具有实偶冲激响应 $h(n)$ 的稳定 LTI 系统，如果

$$H_R(\omega) = \frac{1 - a\cos\omega}{1 - 2a\cos\omega + a^2}, \qquad |a| < 1$$

求 $H(\omega)$。

解：首先确定 $h_e(n)$，注意

$$H_R(\omega) = H_R(z)|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}$$

其中，

$$H_R(z) = \frac{1 - a(z + z^{-1})/2}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2} = \frac{z - a(z^2+1)/2}{(z-a)(1-az)}$$

收敛域必须用极点 $p_1 = a$ 和 $p_2 = 1/a$ 来限定，并且应该包括单位圆。所以，收敛域为 $|a| < |z| < 1/|a|$。这样，$h_e(n)$ 是一个双边序列，在 $z=a$ 处的极点影响因果部分，极点 $p_2 = 1/a$ 影响非因果部分。利用部分分式展开，可得

$$h_e(n) = \tfrac{1}{2}a^{|n|} + \tfrac{1}{2}\delta(n) \tag{10.1.11}$$

将式(10.1.11)代入式(10.1.7)，得到

$$h(n) = a^n u(n)$$

最后，得到 $h(n)$ 的傅里叶变换为

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

对于一个绝对可和的因果实序列来说，序列傅里叶变换的实部和虚部之间的关系从式(10.1.7)可以容易地推出。式(10.1.7)的傅里叶变换关系式为

$$H(\omega) = H_R(\omega) + \mathrm{j}H_I(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda)U(\omega - \lambda)\mathrm{d}\lambda - h_e(0) \tag{10.1.12}$$

其中，$U(\omega)$是单位阶跃序列 $u(n)$的傅里叶变换。虽然单位阶跃序列不是绝对可和的，但是它也有傅里叶变换(见 4.2.8 节)

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{1}{2}\cot\frac{\omega}{2}, \qquad -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi \end{aligned} \tag{10.1.13}$$

将式(10.1.13)代入式(10.1.12)并计算积分，得到 $H_R(\omega)$和 $H_I(\omega)$间的关系为

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda)\cot\frac{\omega-\lambda}{2}\mathrm{d}\lambda \tag{10.1.14}$$

于是，根据 $H_R(\omega)$，通过该积分关系式可唯一确定 $H_I(\omega)$，该积分被称为离散希尔伯特变换。用 $H_I(\omega)$的离散希尔伯特变换建立 $H_R(\omega)$的关系式将作为练习题留给读者。

总之，因果性在选频滤波器设计方面具有非常重要的含义：(a)频率响应 $H(\omega)$除了在频域有限点集外，不能为零；(b)幅度 $|H(\omega)|$在任何有限频率区间内不能是常数，并且从通带向阻带的过渡不能是陡变的(这是吉布斯现象的结果，原因是为了实现因果性，对 $h(n)$做了截尾)；(c) $H(\omega)$的实部和虚部互相依存并通过离散希尔伯特变换联系起来，因此，不能随意选择 $H(\omega)$的幅度 $|H(\omega)|$和相位 $\Theta(\omega)$。

既然知道了因果性加到频率响应特性上的限制和理想滤波器在实际中是不可实现的，那么我们将注意力集中在使用如下差分方程来确定的一类线性时不变系统上：

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

该系统是因果的并且是物理上可实现的。正如我们已说明的，这样的系统具有频率响应

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}} \tag{10.1.15}$$

数字滤波器设计的基本问题就是利用具有频率响应式(10.1.15)的系统，通过适当地选取系数 $\{a_k\}$和 $\{b_k\}$来逼近任何理想频率响应特性。在 10.2 节和 10.3 节中，我们将讨论有关数字滤波器设计的方法，详细地阐述逼近问题。

10.1.2 实际选频滤波器的特性

如同前一节的讨论中已观察到的，理想滤波器是非因果的，故对实时信号处理应用来说，是物理上不可实现的。因果性意味着滤波器的频率响应特性 $H(\omega)$除了在频率范围的有限点集外，不能等于零。另外，$H(\omega)$从通带到阻带不能有无限急剧的截止，也就是说，$H(\omega)$不能从 1 突变到 0。

虽然，理想滤波器所具有的频率响应特性可能是所期望的，但是，在大多数实际应用中，这些特性不是绝对必需的。如果我们放松这些条件，那么利用因果滤波器按照我们所期望的那样紧密地逼近理想滤波器是可能的。特别是，幅度 $|H(\omega)|$没有必要在滤波器整个通带内是常数。在通带范围内，如图 10.1.2 所示，少量的纹波是允许的。类似地，滤波器响应 $|H(\omega)|$在阻带内为零也不是必要的，阻带内很小的非零值或小的纹波也是允许的。

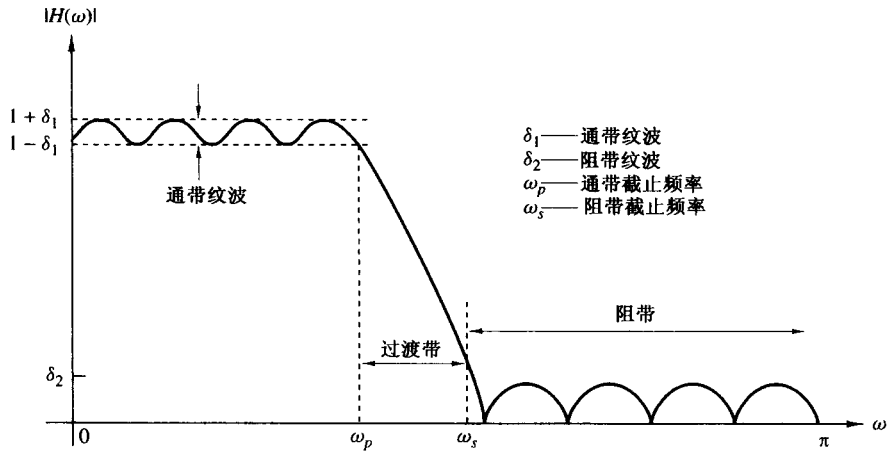


图 10.1.2　物理上可实现滤波器的幅度特性

正如图 10.1.2 所说明的，频率响应从通带过渡到阻带定义为滤波器的过渡带或过渡区域。通常截止频率 ω_p 定义为通带边缘，同时频率 ω_s 表示阻带的起点。于是，过渡带宽为 $\omega_s - \omega_p$，通带宽度称为滤波器的带宽。例如，通带截止频率为 ω_p 的低通滤波器，其带宽就是 ω_p。

如果通带内存在纹波，那么用 δ_1 表示其值，幅度 $|H(\omega)|$ 在范围 $1 \pm \delta_1$ 之间变化，阻带内纹波表示为 δ_2。

为了表征一个大的动态范围，在任何滤波器的频率响应图形中，普遍做法是利用对数尺度表示 $|H(\omega)|$，因此，通带内纹波是 $20\lg \delta_1$ dB，而阻带内纹波为 $20\lg \delta_2$ dB。

在任何滤波器设计问题中，我们可以规定(1)最大允许的通带纹波；(2)最大可允许的阻带纹波；(3)通带截止频率 ω_p；(4)阻带截止频率 ω_s。基于上述技术指标，我们可根据式(10.1.15)给出的频率响应特性中选取最佳逼近所期望的技术指标的参数 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$。$H(\omega)$ 逼近技术指标的程度取决于滤波器系数的个数 (M, N) 之外，还部分取决于滤波器系数 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 选取的准则。

在下一节中，我们将介绍有关设计线性相位 FIR 滤波器的方法。

10.2　FIR 滤波器的设计

在这一节中，我们将讨论几种设计 FIR 滤波器的方法。我们最感兴趣的是具有线性相位的 FIR 滤波器。

10.2.1　对称和反对称的 FIR 滤波器

以 $x(n)$ 为输入、$y(n)$ 为输出的长度为 M 的 FIR 滤波器，可用如下差分方程描述：

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_{M-1} x(n-M+1) \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) \end{aligned} \tag{10.2.1}$$

其中，$\{b_k\}$ 是滤波器系数的集合。当然，我们把输出序列写成系统的单位冲激响应 $h(n)$ 和输入信号的卷积形式。于是得

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) x(n-k) \tag{10.2.2}$$

其中,卷积和的下限和上限反映了滤波器的因果性和周期性特征。显然,式(10.2.1)和式(10.2.2)在形式上是一样的,故可得 $b_k = h(k), k = 0,1,\cdots,M-1$。

滤波器同样能够用它的系统函数来表征:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k} \tag{10.2.3}$$

我们可以将它视为变量 z^{-1} 的 M^{-1} 次多项式。这个多项式的根就是滤波器的零点。

我们说一个 FIR 滤波器具有线性相位,如果它的单位脉冲响应满足如下条件:

$$h(n) = \pm h(M-1-n), \qquad n = 0,1,\cdots,M-1 \tag{10.2.4}$$

当把式(10.2.4)的对称和反对称条件应用到式(10.2.3),我们可得

$$\begin{aligned} H(z) &= h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots + h(M-2)z^{-(M-2)} + h(M-1)z^{-(M-1)} \\ &= z^{-(M-1)/2}\left\{ h\left(\frac{M-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\left[z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2}\right]\right\}, \quad M \text{为奇数} \\ &= z^{-(M-1)/2} \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\left[z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2}\right], \qquad M \text{为偶数} \end{aligned} \tag{10.2.5}$$

现在,如果我们用 z^{-1} 替换式(10.2.3)中的 z,并且两边同时乘上 $z^{-(M-1)}$,可得

$$z^{-(M-1)} H(z^{-1}) = \pm H(z) \tag{10.2.6}$$

从这结果可以看出,多项式 $H(z)$的根和多项式 $H(z^{-1})$ 的根是一样的。相应地,$H(z)$的根一定是以互为倒数的共轭对出现的。也就是说,如果 z_1 是$H(z)$的一个根或一个零点,那么 $1/z_1$ 也是一个根。更进一步,如果滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$是实的,复值的根也一定以复共轭对出现。因此,如果 z_1 是复值的根,z_1^* 也必是根。由式(10.2.6)可知,$H(z)$在 $1/z_1^*$ 处也有一个零点。图 10.2.1 说明了线性相位 FIR 滤波器零点位置的对称性。

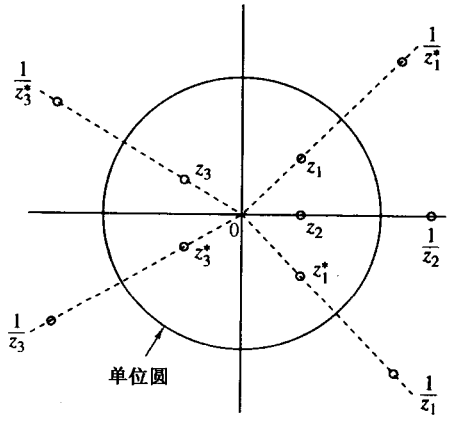


图 10.2.1 线性相位 FIR 滤波器零点位置的对称性

线性相位 FIR 滤波器的频率响应特性可以通过在单位圆上计算式(10.2.5)来获得。这个替换可以求得 $H(\omega)$的表达式。

当 $h(n) = h(M-1-n)$时,$H(\omega)$可表示为

$$H(\omega) = H_r(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)/2} \tag{10.2.7}$$

其中,$H_r(\omega)$是 ω 的实函数,并且可表示为

$$H_r(\omega) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\cos\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right), \quad M \text{为奇数} \tag{10.2.8}$$

$$H_r(\omega) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\cos\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right), \quad M \text{为偶数} \tag{10.2.9}$$

无论 M 是奇数还是偶数，滤波器的相位特性可表示为

$$\Theta(\omega)=\begin{cases}-\omega\left(\dfrac{M-1}{2}\right), & H_r(\omega)>0\\ -\omega\left(\dfrac{M-1}{2}\right)+\pi, & H_r(\omega)<0\end{cases} \tag{10.2.10}$$

当

$$h(n)=-h(M-1-n)$$

时，单位冲激响应是反对称的。对于 M 是奇数，$h(n)$的反对称中心点为 $n=(M-1)/2$。即

$$h\left(\frac{M-1}{2}\right)=0$$

但是，如果 M 是偶数，则 $h(n)$的每一项都有符号相反的对应项。

显然，单位冲激响应反对称的 FIR 滤波器的频率响应可表示为

$$H(\omega)=H_r(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}[-\omega(M-1)/2+\pi/2]} \tag{10.2.11}$$

其中，

$$H_r(\omega)=2\sum_{n=0}^{(M-3)/2}h(n)\sin\omega\left(\frac{M-1}{2}-n\right),\quad M\text{为奇数} \tag{10.2.12}$$

$$H_r(\omega)=2\sum_{n=0}^{(M/2)-1}h(n)\sin\omega\left(\frac{M-1}{2}-n\right),\quad M\text{为偶数} \tag{10.2.13}$$

无论 M 是奇数还是偶数，滤波器的相位特性为

$$\Theta(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\omega\left(\dfrac{M-1}{2}\right), & H_r(\omega)>0\\ \dfrac{3\pi}{2}-\omega\left(\dfrac{M-1}{2}\right), & H_r(\omega)<0\end{cases} \tag{10.2.14}$$

这些基本的频率响应公式可以用来设计具有对称和反对称单位冲激响应的线性相位 FIR 滤波器。我们注意到，对于对称的 $h(n)$，反映频率响应的滤波器系数的个数为$(M+1)/2$(M 是奇数)或者为 $M/2$(M 是偶数)。另一方面，如果单位冲激响应是反对称的，

$$h\left(\frac{M-1}{2}\right)=0$$

则当 M 是奇数时有$(M-1)/2$ 个滤波器系数被指定，M 是偶数时有 $M/2$ 个滤波器系数被指定。

具体选择对称还是反对称的单位冲激响应取决于应用。接下来我们将看到，对称的单位脉冲响应对某些应用特别适合，而反对称的单位冲激响应在另一些应用中更适合。例如，如果 $h(n)=-h(M-1-n)$并且 M 是奇数，由式(10.2.12)得 $H_r(0)=0$ 和 $H_r(\pi)=0$。由此可见，式(10.2.12)不适用于低通或高通滤波器。相似地，反对称的单位冲激响应当 M 是奇数时，很容易由式(10.2.13)算得 $H_r(0)=0$，由此可见，我们在设计低通线性相位 FIR 滤波器时不会使用反对称条件。另一方面，对称条件 $h(n)=h(M-1-n)$使得线性相位滤波器在 $\omega=0$ 处不是零响应，而是

$$H_r(0)=h\left(\frac{M-1}{2}\right)+2\sum_{n=0}^{(M-3)/2}h(n),\quad M\text{为奇数} \tag{10.2.15}$$

$$H_r(0) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n), \quad M\text{为偶数} \tag{10.2.16}$$

综上所述,FIR 滤波器的设计问题简化为由一个指定的期望频率响应 $H_d(\omega)$的 FIR 滤波器来确定 M 个系数 $h(n), n=0,1,\cdots,M-1$。$H_d(\omega)$指定的重要参数在图 10.1.2 中给出。

接下来的子章节中,我们将讨论基于指定的 $H_d(\omega)$的设计方法。

10.2.2 使用窗函数设计线性相位 FIR 滤波器

这种方法就是我们首先使用期望的指定频率响应 $H_d(\omega)$来确定相应的单位冲激响应 $h_d(n)$。实际上,$h_d(n)$和 $H_d(\omega)$是傅里叶变换对关系

$$H_d(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{10.2.17}$$

其中,

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega \tag{10.2.18}$$

因此,对给定的 $H_d(\omega)$,我们就可以通过计算式(10.2.17)的积分来确定单位冲激响应 $h_d(n)$。

一般来说,由(10.2.17)可知,单位冲激响应 $h_d(n)$在时间上是无限的,一定要在某点上截断,如在 $n=M-1$ 处,则产生长度为 M 的 FIR 滤波器。把 $h_d(n)$截断到长度 $M-1$ 等价于 $h_d(n)$乘上一个如下定义的"矩形窗":

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0,1,\cdots,M-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{10.2.19}$$

于是,FIR 滤波器的单位脉冲响应变成

$$\begin{aligned} h(n) &= h_d(n)w(n) \\ &= \begin{cases} h_d(n), & n = 0,1,\cdots,M-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \tag{10.2.20}$$

研究窗函数对期望的频率响应 $H_d(\omega)$的影响是很有意义的。注意到窗函数 $w(n)$与 $h_d(n)$的乘积等价于 $H_d(\omega)$与 $W(\omega)$的卷积,其中 $W(\omega)$是窗函数的频域表示(傅里叶变换),即

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} w(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{10.2.21}$$

因此,$H_d(\omega)$和 $W(\omega)$的卷积可以得到(截断的)FIR 滤波器的频率响应。即

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(v)W(\omega - v)\mathrm{d}v \tag{10.2.22}$$

矩形窗的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega M}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)/2}\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned} \tag{10.2.23}$$

这个窗函数的幅度响应为

$$|W(\omega)| = \frac{|\sin(\omega M/2)|}{|\sin(\omega/2)|}, \quad -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi \tag{10.2.24}$$

而分段线性相位为

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} -\omega\left(\dfrac{M-1}{2}\right), & \sin(\omega M/2) \geqslant 0 \\ -\omega\left(\dfrac{M-1}{2}\right) + \pi, & \sin(\omega M/2) < 0 \end{cases} \tag{10.2.25}$$

当 $M = 31$ 和 61 时窗函数的幅度响应如图 10.2.2 所示。主瓣宽度(宽度是通过测量 $W(\omega)$的第一个零点得到的)为 $4\pi/M$。因此,随着 M 的增大,主瓣变窄。但是 $|W(\omega)|$ 的旁瓣很高并且不受 M 的增大的影响。实际上,虽然每个旁瓣的宽度随着 M 增大而变窄,但是每个旁瓣的高度随着 M 增大而变高,这样每个旁瓣下的面积不会随 M 的变化而改变。这个特性通过观察图 10.2.2 并不明显,是因为 $W(\omega)$已经被 M 归一化,这样归一化的旁瓣峰值就不会随着 M 的增大而改变了。

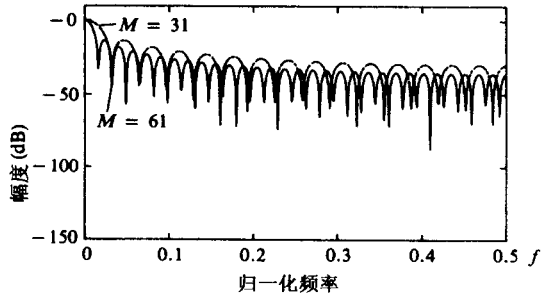


图 10.2.2　长度为(a)$M = 31$ 和(b)$M = 61$ 的矩形窗的频率响应

矩形窗函数的这些特性,在通过 $h_d(n)$的长度为 M 的截取部分确定 FIR 滤波器的频率响应时起重要作用。特别是,$H_d(\omega)$和 $W(\omega)$的卷积对 $H_d(\omega)$具有平滑作用。随着 M 的增大,$W(\omega)$变窄,$W(\omega)$提供的平滑作用变小。另一方面,$W(\omega)$的大旁瓣导致一些非期望的振铃效果出现在 FIR 滤波器的频率响应 $H(\omega)$中,相应地使 $H(\omega)$的旁瓣变大。通过使用窗,可以很好地抑制这些非期望的效果,并且时域特性不会出现突然的不连续,频域特性有相应低的旁瓣。

表 10.1 列出了一些可以满足期望频率响应特性的窗函数。图 10.2.3 给出了这些窗函数的时域特性。汉宁、汉明和布莱克曼窗的频率响应特性如图 10.2.4 到图 10.2.6 所示。所有这些窗函数相对于矩形窗都有明显低的旁瓣。但是对于相同的 M,这些窗函数的主瓣宽度比矩形窗的宽。因此,这些窗函数通过频域卷积操作提供了更大的平滑,这样,FIR 滤波器的过渡区更宽。为了降低过渡区的宽度,我们简单地增大窗的长度,产生一个更大的滤波器。表 10.2 总结了可变窗函数的这些重要频域特征。

通过一个特定的例子,可以很好地描述清楚这种窗技术。假设我们想设计一个有如下期望频率响应的对称低通线性相位 FIR 滤波器:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)/2}, & 0 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{10.2.26}$$

$(M-1)/2$ 单位的延时加入到 $H_d(\omega)$使滤波器的长度达到预期的 M。计算式(10.2.18)的积分得到相应单位脉冲响应

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\left(n-\frac{M-1}{2}\right)}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{\sin\omega_c\left(n-\frac{M-1}{2}\right)}{\pi\left(n-\frac{M-1}{2}\right)},\qquad n\neq\frac{M-1}{2} \tag{10.2.27}$$

显然，$h_d(n)$是非因果的并且时间上是无限的。

表 10.1 FIR 滤波器的窗函数

窗名称	时域序列 $h(n),0\leqslant n\leqslant M-1$
巴特利特（三角形）	$1-\dfrac{2\left\lvert n-\frac{M-1}{2}\right\rvert}{M-1}$
布莱克曼	$0.42-0.5\cos\dfrac{2\pi n}{M-1}+0.08\cos\dfrac{4\pi n}{M-1}$
汉明	$0.54-0.46\cos\dfrac{2\pi n}{M-1}$
汉宁	$\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\dfrac{2\pi n}{M-1}\right)$
凯泽	$\dfrac{I_0\left[\alpha\sqrt{\left(\frac{M-1}{2}\right)^2-\left(n-\frac{M-1}{2}\right)^2}\right]}{I_0\left[\alpha\left(\frac{M-1}{2}\right)\right]}$
Lanczos	$\left\{\dfrac{\sin\left[2\pi\left(n-\frac{M-1}{2}\right)\Big/(M-1)\right]}{2\pi\left(n-\frac{M-1}{2}\right)\Big/\left(\frac{M-1}{2}\right)}\right\}^L,\ L>0$
	$1,\left\lvert n-\dfrac{M-1}{2}\right\rvert\leqslant\alpha\dfrac{M-1}{2},\qquad 0<\alpha<1$
Tukey	$\dfrac{1}{2}\left[1+\cos\left(\dfrac{n-(1+a)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2}\pi\right)\right]$
	$\alpha(M-1)/2\leqslant\left\lvert n-\dfrac{M-1}{2}\right\rvert\leqslant\dfrac{M-1}{2}$

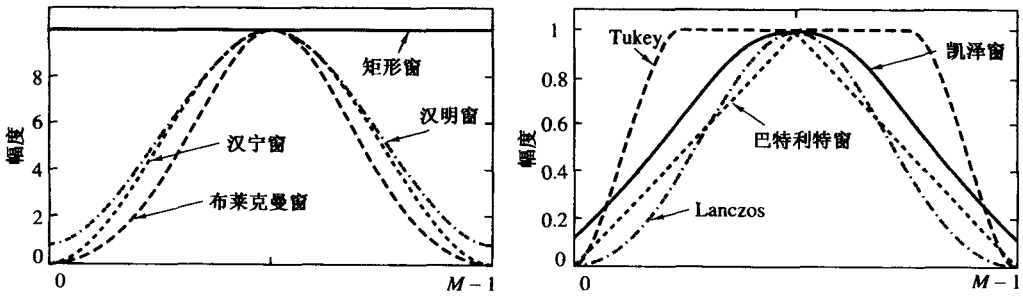


图 10.2.3 一些窗函数的形状

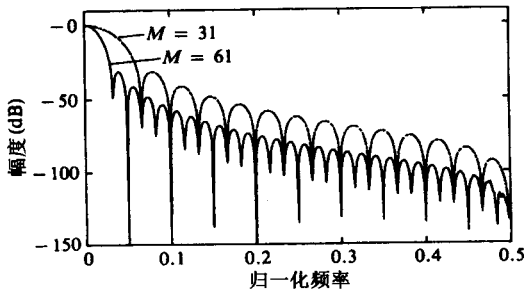


图 10.2.4　(a) $M=31$ 和(b) $M=61$ 的汉宁窗的频率响应

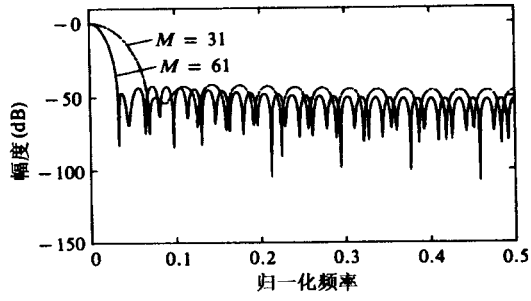


图 10.2.5　(a) $M=31$ 和(b) $M=61$ 的汉明窗的频率响应

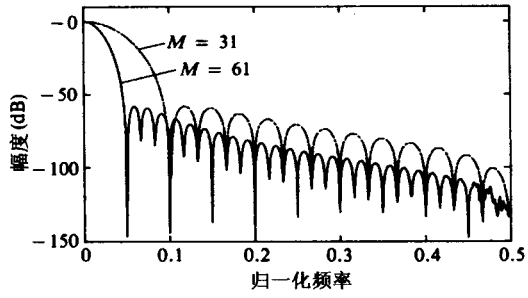


图 10.2.6　(a) $M=31$ 和(b) $M=61$ 的布莱克曼窗的频率响应

表 10.2　一些窗函数的重要频域特性

窗类型	主瓣过渡带近似宽度	旁瓣峰值 (dB)
矩形窗	$4\pi/M$	−13
巴特利特窗	$8\pi/M$	−25
汉宁窗	$8\pi/M$	−31
汉明窗	$8\pi/M$	−41
布莱克曼窗	$12\pi/M$	−57

如果我们将 $h_d(n)$乘上式(10.2.19)中的矩形窗序列,就可以达到具有如下单位冲激响应的长度为 M 的 FIR 滤波器:

$$h(n)=\frac{\sin\omega_c\left(n-\dfrac{M-1}{2}\right)}{\pi\left(n-\dfrac{M-1}{2}\right)},\qquad 0\leqslant n\leqslant M-1,\quad n\neq\frac{M-1}{2} \tag{10.2.28}$$

如果选择 M 为奇数,则 $h(n)$在 $n=(M-1)/2$ 处的值为

$$h\left(\frac{M-1}{2}\right)=\frac{\omega_c}{\pi} \tag{10.2.29}$$

当 $M=61$ 和 $M=101$ 时,该滤波器频率响应的幅度如图 10.2.7 所示。可以观察到在滤波器频带边缘附近出现有大的振荡或纹波。振荡的次数随着 M 增大而增多,但幅度上不会变小。正如前面提到的,这些大振荡是由于矩形窗的频率响应 $W(\omega)$有大的旁瓣。因为该窗函数被期望的频

率响应 $H_d(\omega)$卷积,所以当 $W(\omega)$的大的固定面积的旁瓣随 $H_d(\omega)$的不连续性滑动时会出现振荡。由于 $H_d(\omega)$是基本的傅里叶表达式,$h_d(n)$和一个窗函数的乘积会截断期望的滤波器特性 $H_d(\omega)$的傅里叶表达式。傅里叶序列的截取将增加频率响应特性 $H(\omega)$的波动,是由于非一致收敛的傅里叶序列出现不连续。滤波器频带附近的振荡称为吉布斯现象。

为了抑制在通带和阻带出现大振荡,我们使用的窗应该是锥形且衰落逐渐趋于0,而不是矩形窗那样陡变的。当表 10.1 列出的一些窗函数用到 $h_d(n)$上时,滤波器的频率响应如图 10.2.8 至图 10.2.11 所示。从图 10.2.8 到图 10.2.11 可以看出,通过增大滤波器的过渡带,窗函数的确削弱了在频带边的振铃效果并产生了更低的旁瓣。

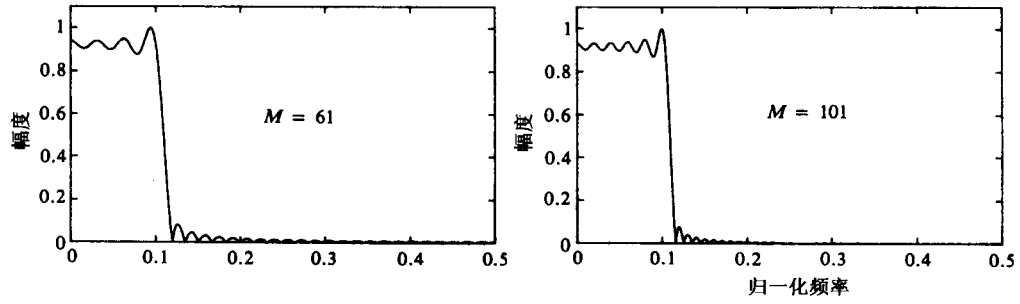


图 10.2.7 矩形窗的低通滤波器:(a)$M=61$ 和(b)$M=101$

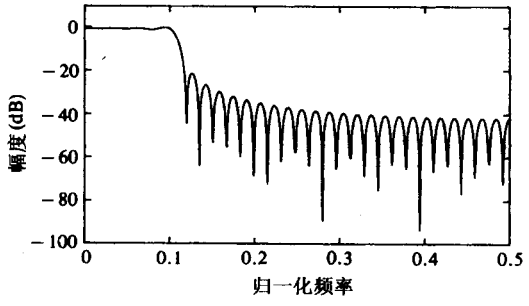


图 10.2.8 矩形窗的低通 FIR 滤波器($M=61$)

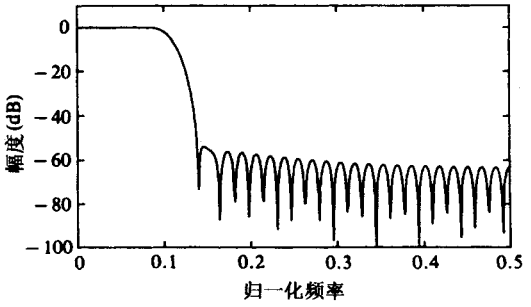


图 10.2.9 汉明窗的低通 FIR 滤波器($M=61$)

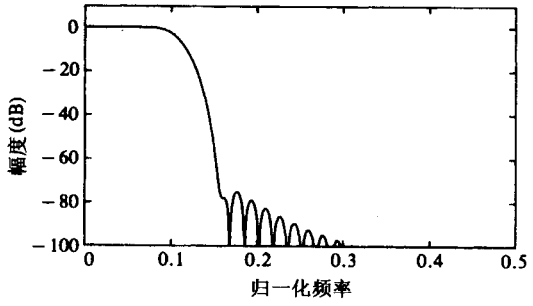


图 10.2.10 布莱克曼窗的低通 FIR滤波器($M=61$)

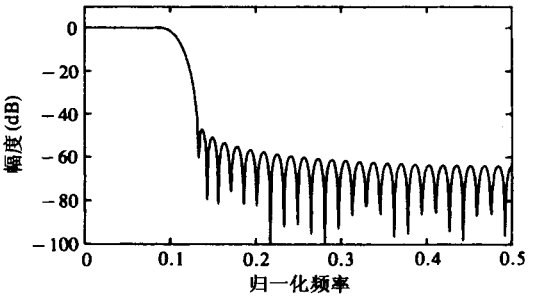


图 10.2.11 $\alpha=4$ 时 凯泽窗的低通 FIR 滤波器($M=61$)

10.2.3 采用频率采样方法设计线性相位 FIR 滤波器

使用频率采样方法设计 FIR 滤波器时,我们把期望频率响应 $H_d(\omega)$分成等宽频率段,定义为

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha), \quad k = 0, 1, \cdots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{为奇数}$$
$$k = 0, 1, \cdots, \frac{M}{2} - 1, \quad M \text{为偶数} \tag{10.2.30}$$
$$\alpha = 0 \quad \text{或} \quad \frac{1}{2}$$

从这些等宽频率段求出单位脉冲响应 $h(n)$。为了削弱旁瓣，必须对滤波器过渡带的频率段进行优化。这个优化工作可以通过 Rabiner 等(1970)提出的数字计算机的线性规划技术来解决。

在这一节我们提出一个具有对称特性的采样率响应的函数来简化计算。FIR 滤波器的期望频率响应为

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) e^{-j\omega n} \tag{10.2.31}$$

假设我们令滤波器的频率响应按式(10.2.30)的频段响应，由式(10.2.31)得

$$H(k+\alpha) \equiv H\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right)$$
$$H(k+\alpha) \equiv \sum_{n=0}^{M-1} h(n) e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M}, \qquad k = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{10.2.32}$$

很容易就可以对式(10.2.32)求逆，得到用 $H(k+a)$表示的 $h(n)$。如果我们对式(10.2.32)两边同时乘上指数 $\exp(j2\pi km/M)$，$m = 0, 1, \cdots, M-1$，并且对 $k = 0, 1, \cdots, M-1$ 情况求和，式(10.2.32)的右边再减去 $Mh(m)\exp(-j2\pi\alpha m/M)$。这样就可以得到

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, \qquad n = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{10.2.33}$$

通过式(10.2.33)的关系式，我们就可以由指定的频率采样 $H(k+a)$，$k = 0, 1, \cdots, M-1$ 计算出单位脉冲响应 $h(n)$的值。注意到，当 $\alpha = 0$ 时，式(10.2.32)简化成序列$\{h(n)\}$的离散傅里叶变换(DFT)，而式(10.2.33)变成傅里叶逆变换(IDFT)。

因为$\{h(n)\}$是实的，我们很容易知道频率采样$\{H(k+\alpha)\}$满足对称条件

$$H(k+\alpha) = H^*(M-k-\alpha) \tag{10.2.34}$$

这个对称条件，加上$\{h(n)\}$的对称条件，可以将频率点从 M 点降到$(M+1)/2$(M 为奇数)或降到 $M/2$(M 为偶数)。这样利用$\{H(k+\alpha)\}$来确定$\{h(n)\}$的线性方程就大大简化了。

特别是，如果按频率 $\omega_k = 2\pi(k+\alpha)/M$，$k = 0, 1, \cdots, M-1$ 对(10.2.11)进行采样，可得

$$H(k+\alpha) = H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right) e^{j[\beta\pi/2 - 2\pi(k+\alpha)(M-1)/2M]} \tag{10.2.35}$$

其中，当$\{h(n)\}$为对称序列时 $\beta = 0$，当$\{h(n)\}$为反对称序列时 $\beta = 1$。为简化式(10.2.35)，我们定义一组实频率样本$\{G(k+\alpha)\}$为

$$G(k+\alpha) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right), \qquad k = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{10.2.36}$$

将式(10.2.36)代入式(10.2.35)消去 $H_r(\omega_k)$，于是可得

$$H(k+\alpha) = G(k+\alpha) e^{j\pi k} e^{j[\beta\pi/2 - 2\pi(k+\alpha)(M-1)/2M]} \tag{10.2.37}$$

现在,在式(10.2.34)中给定的 $H(k+\alpha)$的对称条件转换成相应的 $G(k+\alpha)$的对称条件。通过将其代入式(10.2.33),可以用来简化 $\alpha=0,\alpha=1/2,\beta=0$ 和 $\beta=1$ 时的 FIR 滤波器的冲激响应 $\{h(n)\}$的表达式。表 10.3 归纳了这些结果,详细的推导留给读者作为练习。

表 10.3 单位样本响应:$h(n)=\pm h(M-1-n)$

	对称
$\alpha=0$	$H(k)=G(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi k/M},\quad k=0,1,\cdots,M-1$
	$G(k)=(-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right),\quad G(k)=-G(M-k)$
	$h(n)=\frac{1}{M}\left\{G(0)+2\sum_{k=1}^{U}G(k)\cos\frac{2\pi k}{M}(n+\frac{1}{2})\right\}$
	$U=\begin{cases}\frac{M-1}{2}, & M\text{为奇数}\\ \frac{M}{2}-1, & M\text{为偶数}\end{cases}$
$\alpha=\frac{1}{2}$	$H\left(k+\frac{1}{2}\right)=G\left(k+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(2k+1)/2M}$
	$G\left(k+\frac{1}{2}\right)=(-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$
	$G\left(k+\frac{1}{2}\right)=G\left(M-k-\frac{1}{2}\right)$
	$h(n)=\frac{2}{M}\sum_{k=0}^{U}G\left(k+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)$
	反对称
$\alpha=0$	$H(k)=G(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi k/M},\quad k=0,1,\cdots,M-1$
	$G(k)=(-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right),\quad G(k)=G(M-k)$
	$h(n)=-\frac{2}{M}\sum_{k=1}^{(M-1)/2}G(k)\sin\frac{2\pi k}{M}\left(n+\frac{1}{2}\right),\quad M\text{为奇数}$
	$h(n)=\frac{1}{M}\left\{(-1)^{n+1}G(M/2)-2\sum_{k=1}^{(M/2)-1}G(k)\sin\frac{2\pi}{M}k\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\},\quad M\text{为偶数}$
$\alpha=\frac{1}{2}$	$H\left(k+\frac{1}{2}\right)=G\left(k+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(2k+1)/2M}$
	$G\left(k+\frac{1}{2}\right)=(-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$
	$G\left(k+\frac{1}{2}\right)=-G\left(M-k-\frac{1}{2}\right);\quad G(M/2)=0,\quad M\text{为奇数}$
	$h(n)=\frac{2}{M}\sum_{k=0}^{V}G\left(k+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)$
	$V=\begin{cases}\frac{M-3}{2}, & M\text{为奇数}\\ \frac{M}{2}-1, & M\text{为偶数}\end{cases}$

虽然频率采样为我们提供了另一种设计线性相位 FIR 滤波器的方法，但是正如 9.2.3 节所证明的，该方法的主要优点在于大多频率采样为零时得到的有效频率采样结构。

下面通过例题说明如何利用频率采样方法来设计线性相位 FIR 滤波器。过渡带的最优样本取自附录 B 中的表格，而附录 B 来自 Rabiner 等(1970)的论文。

例 10.2.1　已知长度 $M=15$ 的线性相位 FIR 滤波器的单位样本响应具有对称性，并且频率响应满足条件

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right)=\begin{cases}1, & k=0,1,2,3\\ 0.4, & k=4\\ 0, & k=5,6,7\end{cases}$$

求该滤波器的系数。

解：因为 $h(n)$是对称的，并且频率选取对应于 $\alpha=0$ 的情况，所以我们可以利用表 10.3 中的相应公式来计算 $h(n)$，这样

$$G(k)=(-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right),\qquad k=0,1,\cdots,7$$

计算得

$$\begin{aligned}h(0)&=h(14)=-0.014\,112\,893\\ h(1)&=h(13)=-0.001\,945\,309\\ h(2)&=h(12)=0.040\,000\,04\\ h(3)&=h(11)=0.012\,234\,54\\ h(4)&=h(10)=-0.091\,388\,02\\ h(5)&=h(9)\;=-0.018\,089\,86\\ h(6)&=h(8)\;=0.313\,317\,6\\ h(7)&\;=0.52\end{aligned}$$

图 10.2.12 给出了该滤波器的频率响应特性，要特别指出的是，在 $\omega_k=2\pi k/15$ 处，$H_r(\omega)$与技术指标所规定的值完全相同。

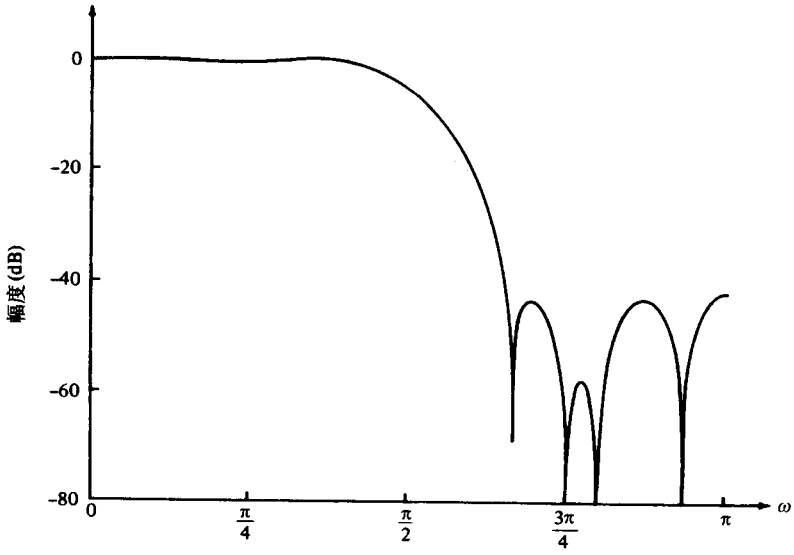


图 10.2.12　例 10.2.1 中的线性相位 FIR 滤波器的频率响应

例 10.2.2 已知长度 $M=32$ 的线性相位 FIR 滤波器的单位样本响应具有对称性,并且频率响应满足条件

$$H_r\left(\frac{2\pi(k+\alpha)}{32}\right)=\begin{cases}1, & k=0,1,2,3,4,5\\ T_1, & k=6\\ 0, & k=7,8,\cdots,15\end{cases}$$

式中,当 $\alpha=0$ 时 $T_1=0.378\,979\,5$,当 $\alpha=1/2$ 时 $T_1=0.357\,049\,6$。T_1 的这些取值来自附录 B 给出的最优过渡参数表。求该滤波器的系数。

解:表 10.3 给出了 $\alpha=0$ 和 $\alpha=1/2$ 时适合该计算的方程式。表 10.4 给出了由这些计算得到的单位样本的响应。图 10.2.13 和图 10.2.14 分别说明了相应的频率响应特性。注意 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时的滤波器带宽比 $\alpha=0$ 时的要大一些。

表 10.4

M = 32	M = 32
ALPHA = 0.	ALPHA = 0.5
T1 = 0.3789795E+00	T1 = 0.3570496E+00
h(0) = −0.7141978E-02	h(0) = −0.4089120E-02
h(1) = −0.3070801E-02	h(1) = −0.9973779E-02
h(2) = 0.5891327E-02	h(2) = −0.7379891E-02
h(3) = 0.1349923E-01	h(3) = 0.5949799E-02
h(4) = 0.8087033E-02	h(4) = 0.1727056E-01
h(5) = −0.1107258E-01	h(5) = 0.7878412E-02
h(6) = −0.2420687E-01	h(6) = −0.1798590E-01
h(7) = −0.9446550E-02	h(7) = −0.2670584E-01
h(8) = 0.2544464E-01	h(8) = 0.3778549E-02
h(9) = 0.3985050E-01	h(9) = 0.4191022E-01
h(10) = 0.2753036E-02	h(10) = 0.2839344E-01
h(11) = −0.5913959E-01	h(11) = −0.4163144E-01
h(12) = −0.6841660E-01	h(12) = −0.8254962E-01
h(13) = 0.3175741E-01	h(13) = 0.2802212E-02
h(14) = 0.2080981E+00	h(14) = 0.2013655E+00
h(15) = 0.3471138E+00	h(15) = 0.3717532E+00

频率样本在频率响应的过渡区中的最优化问题可以解释为计算由式(9.2.12)给定的系统函数 $H(z)$在单位圆上的值,利用关系式(10.2.37)通过 $G(k+\alpha)$表示 $H(\omega)$。于是,对于对称性滤波器,我们可得

$$H(\omega)=\left\{\frac{\sin\left(\frac{\omega M}{2}-\pi\alpha\right)}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{G(k+\alpha)}{\sin\left[\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{M}(k+\alpha)\right]}\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)/2} \tag{10.2.38}$$

其中,

$$G(k+\alpha)=\begin{cases}-G(M-k), & \alpha=0\\ G(M-k-\frac{1}{2}), & \alpha=\frac{1}{2}\end{cases} \tag{10.2.39}$$

类似地,对于反对称性线性相位 FIR 滤波器,可得

$$H(\omega)=\left\{\frac{\sin\left(\frac{\omega M}{2}-\pi\alpha\right)}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{G(k+\alpha)}{\sin\left[\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{M}(k+\alpha)\right]}\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$$

其中，

$$G(k+\alpha)=\begin{cases}G(M-k), & \alpha=0\\ -G\left(M-k-\frac{1}{2}\right), & \alpha=\frac{1}{2}\end{cases}\tag{10.2.41}$$

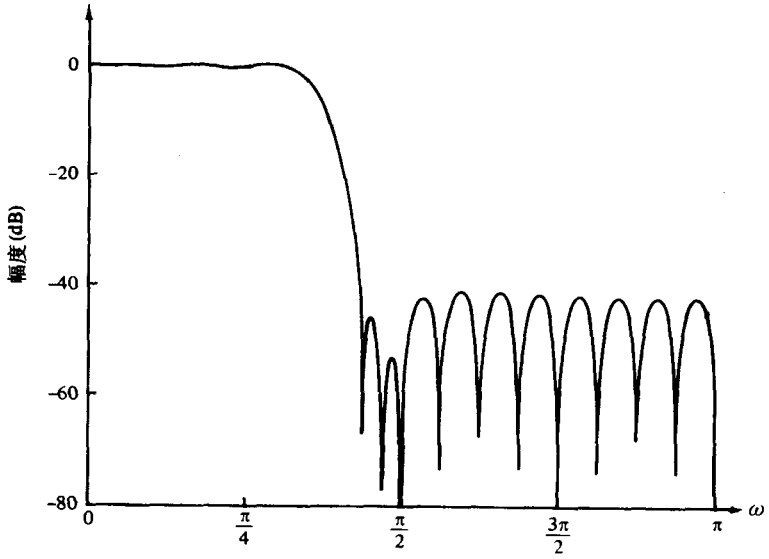


图 10.2.13　例 10.2.2($M=32,\alpha=0$)的线性相位 FIR 滤波器的频率响应

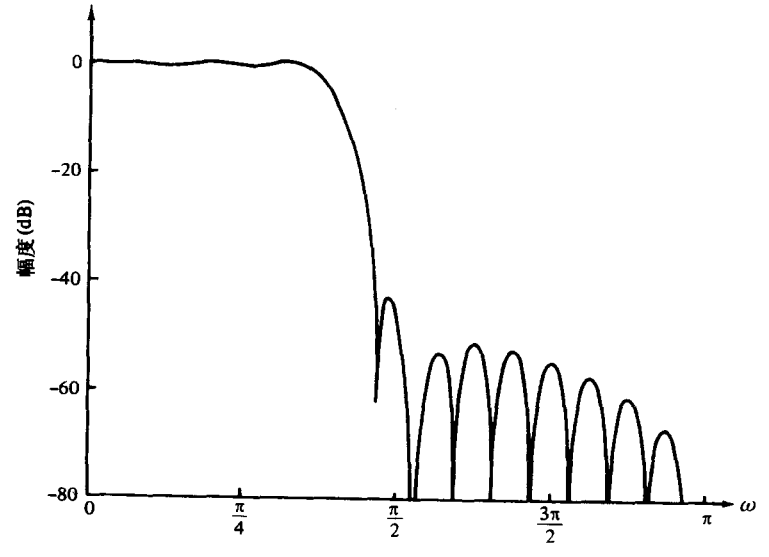


图 10.2.14　例 10.2.2($M=32,\alpha=1/2$)的线性相位 FIR 滤波器的频率响应

利用这些通过理想频率样本$\{G(k+\alpha)\}$给定的频率响应 $H(\omega)$的表达式，我们就可以很容易地解释在过渡带选取参数$\{G(k+\alpha)\}$最小化阻带中的旁瓣峰值的方法。简单地说，在通带内，置

$G(k+\alpha)$的值为$(-1)^k$,而在阻带中,置 $G(k+\alpha)$的值为零,在过渡带中的 $G(k+\alpha)$的值置为 $(-1)^k$ 或 0 都可以,这样计算 $H(\omega)$在频率密集上的值(即在 $\omega_n=2\pi n/K, n=0,1,\cdots,K-1$,其中,例如,$K=10M$)。确定最大的旁瓣值,朝着最陡下降方向调整过渡带中的参数$\{G(k+\alpha)\}$的值,实际上,这样处理的结果降低了最大的旁瓣。现在,对新的$\{G(k+\alpha)\}$值重新计算 $H(\omega)$,再次确定 $H(\omega)$的旁瓣,并朝着最陡下降的方向调整过渡带中的参数$\{G(k+\alpha)\}$的值,这样又降低了旁瓣,这种交互式过程一直进行,直到它收敛到过渡带参数$\{G(k+\alpha)\}$的最佳选择为止。

在 FIR 线性相位滤波器的频率采样实现中,一个潜在的问题就是 FIR 滤波器在单位圆的等间隔点上引入极点和零点。在理想情况下,零点和极点相抵消,因此,$H(z)$实际的零点可通过选取频率样本由$\{H(k+\alpha)\}$来确定。然而,在频率采样实现的实际应用中,量化效应阻止了极点和零点完全相互抵消。事实上,极点在单位圆上的位置与计算过程引入的舍入噪声抑制无关。

为了缓解这一问题,我们可以将极点和零点从单位圆上移到正好在单位圆内的一个圆上,不妨设为半径 $r=1-\epsilon$的圆上,其中ϵ是一非常小的数,因而线性相位 FIR 滤波器的系统函数变成

$$H(z)=\frac{1-r^M z^{-M}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\alpha}}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{H(k+\alpha)}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega\pi(k+\alpha)/M}z^{-1}} \tag{10.2.42}$$

9.2.3 节中的双极点滤波器实现经过相应的改进也适用本式。另外,通过选取 $r<1$,衰减因子 r 保证了舍入误差是有界的,因此,也避免了不稳定性。

10.2.4 最优等纹波线性相位 FIR 滤波器的设计

对于线性相位 FIR 滤波器的设计而言,窗函数方法和频率采样方法是相对简单的方法,然而,它们都有一些在 10.2.6 节将要描述的缺点,这些缺点可能使得它们不满足某些应用的需要。其中一个主要的问题就是不能精确地控制像 ω_p 和 ω_s 这类关键频率。

本节描述的滤波器设计方法可以表述为切比雪夫逼近问题。如果想将理想频率响应和实际频率响应之间的加权逼近误差均匀地分散到滤波器的整个通带和阻带,并且最小化最大误差,那么切比雪夫逼近被视为最优设计准则。所得到的滤波器结构在通带和阻带都有纹波。

为了阐述设计过程,我们考虑通带截止频率为 ω_p 和阻带频率为 ω_s 的低通滤波器的设计。根据图 10.1.2 给定的通用技术指标,在通带内,滤波器频率响应满足条件

$$1-\delta_1\leqslant H_r(\omega)\leqslant 1+\delta_1,\qquad |\omega|\leqslant\omega_p \tag{10.2.43}$$

类似地,在阻带内规定滤波器频率响应落在范围 $\pm\delta_2$ 之间,即

$$-\delta_2\leqslant H_r(\omega)\leqslant\delta_2,\qquad |\omega|>\omega_s \tag{10.2.44}$$

于是,δ_1 表示通带中的纹波,δ_2 表示阻带中的衰减或纹波。剩下的滤波器参数是 M,即滤波器的长度或系数的个数。

让我们集中考虑四种产生线性相位 FIR 滤波器的不同情形,这些例子在 10.2.2 节已描述,现总结如下:

情形 1:对称性单位样本响应。 $h(n)=h(M-1-n)$且 M 为奇数,此时,实值频率响应特性 $H_r(\omega)$为

$$H_r(\omega)=h\left(\frac{M-1}{2}\right)+2\sum_{n=0}^{(M-3)/2}h(n)\cos\omega\left(\frac{M-1}{2}-n\right) \tag{10.2.45}$$

如果我们令 $k=(M-1)/2-n$,并定义一组新的滤波器系数$\{a(k)\}$为

$$a(k)=\begin{cases} h\left(\dfrac{M-1}{2}\right), & k=0 \\ 2h\left(\dfrac{M-1}{2}-k\right), & k=1,2,\cdots,\dfrac{M-1}{2} \end{cases} \tag{10.2.46}$$

那么，式(10.2.45)可简化为

$$H_r(\omega)=\sum_{k=0}^{(M-1)/2} a(k)\cos\omega k \tag{10.2.47}$$

情形 2：对称性单位样本响应。 $h(n)=h(M-1-n)$且 M 为偶数，此时，实值频率响应特性 $H_r(\omega)$为

$$H_r(\omega)=2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\cos\omega\left(\frac{M-1}{2}-n\right) \tag{10.2.48}$$

我们再次将求积下标从 n 变到 $k=M/2-n$，并定义一组新的滤波器系数$\{b(k)\}$为

$$b(k)=2h\left(\frac{M}{2}-k\right), \qquad k=1,2,\cdots,M/2 \tag{10.2.49}$$

利用这些替换，那么式(10.2.48)变为

$$H_r(\omega)=\sum_{k=1}^{M/2} b(k)\cos\omega\left(k-\frac{1}{2}\right) \tag{10.2.50}$$

在实现优化时，进一步将式(10.2.50)重新排列得

$$H_r(\omega)=\cos\frac{\omega}{2}\sum_{k=0}^{(M/2)-1}\tilde{b}(k)\cos\omega k \tag{10.2.51}$$

其中，系数$\{\tilde{b}(k)\}$与系数$\{b(k)\}$线性相关，事实上，可以证明两者的关系为

$$\begin{aligned} &\tilde{b}(0)=\tfrac{1}{2}b(1), \qquad \tilde{b}(1)=2b(1)-2b(0) \\ &\tilde{b}(k)=2b(k)-\tilde{b}(k-1), \qquad k=1,2,3,\cdots,\frac{M}{2}-2 \\ &\tilde{b}\left(\frac{M}{2}-1\right)=2b\left(\frac{M}{2}\right) \end{aligned} \tag{10.2.52}$$

情形 3：反对称性单位样本响应。 $h(n)=-h(M-1-n)$且 M 为奇数，此时，实值频率响应特性 $H_r(\omega)$为

$$H_r(\omega)=2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\sin\omega\left(\frac{M-1}{2}-n\right) \tag{10.2.53}$$

如果我们将求和下标从 n 变成 $k=(M-1)/2-n$，并定义一组新的滤波器系数$\{c(k)\}$为

$$c(k)=2h\left(\frac{M-1}{2}-k\right), \qquad k=1,2,\cdots,(M-1)/2 \tag{10.2.54}$$

那么，式(10.2.53)可简化为

$$H_r(\omega)=\sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k)\sin\omega k \tag{10.2.55}$$

如同前面的情形,可方便地将式(10.2.55)重新排列得

$$H_r(\omega)=\sin\omega\sum_{k=0}^{(M-3)/2}\tilde{c}(k)\cos\omega k \tag{10.2.56}$$

其中,系数$\{\tilde{c}(k)\}$和系数$\{c(k)\}$线性相关,从式(10.2.55)和式(10.2.56)可推导出理想的关系:

$$\begin{aligned}
&\tilde{c}\left(\frac{M-3}{2}\right)=c\left(\frac{M-1}{2}\right)\\
&\tilde{c}\left(\frac{M-5}{2}\right)=2c\left(\frac{M-3}{2}\right)\\
&\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\\
&\tilde{c}(k-1)-\tilde{c}(k+1)=2c(k),\qquad 2\leqslant k\leqslant\frac{M-5}{2}\\
&\tilde{c}(0)-\tfrac{1}{2}\tilde{c}(2)=c(1)
\end{aligned}\tag{10.2.57}$$

情形 4:反对称性单位样本响应。$h(n)=-h(M-1-n)$且 M 为偶数,此时,实值频率响应特性 $H_r(\omega)$为

$$H_r(\omega)=2\sum_{n=0}^{(M/2)-1}h(n)\sin\omega\left(\frac{M-1}{2}-n\right) \tag{10.2.58}$$

同样,将求和下标从 n 变成 $k=M/2-n$,并定义一组新的滤波器系数$\{d(k)\}$为

$$d(k)=2h\left(\frac{M}{2}-k\right),\qquad k=1,2,\cdots,\frac{M}{2} \tag{10.2.59}$$

那么,式(10.2.58)可简化为

$$H_r(\omega)=\sum_{k=1}^{M/2}d(k)\sin\omega\left(k-\frac{1}{2}\right) \tag{10.2.60}$$

与前面的两种情形一样,很容易就可以将式(10.2.60)重排得

$$H_r(\omega)=\sin\frac{\omega}{2}\sum_{k=0}^{(M/2)-1}\tilde{d}(k)\cos\omega k \tag{10.2.61}$$

其中,新滤波器参数$\{\tilde{d}(k)\}$和系数$\{d(k)\}$有如下关系:

$$\begin{aligned}
&\tilde{d}\left(\frac{M}{2}-1\right)=2d\left(\frac{M}{2}\right)\\
&\tilde{d}(k-1)-\tilde{d}(k)=2d(k),\qquad 2\leqslant k\leqslant\frac{M}{2}-1\\
&\tilde{d}(0)-\tfrac{1}{2}\tilde{d}(1)=d(1)
\end{aligned}\tag{10.2.62}$$

归纳这四种情形中 $H_r(\omega)$的表达式并列于表 10.5 中。我们注意到,在情形 2、情形 3 和情形 4 中所做的重排允许我们将 $H_r(\omega)$表示为

$$H_r(\omega)=Q(\omega)P(\omega) \tag{10.2.63}$$

其中，

$$Q(\omega)=\begin{cases}1 & \text{情形 1}\\ \cos\dfrac{\omega}{2} & \text{情形 2}\\ \sin\omega & \text{情形 3}\\ \sin\dfrac{\omega}{2} & \text{情形 4}\end{cases} \tag{10.2.64}$$

并且 $P(\omega)$具有普遍形式

$$P(\omega)=\sum_{k=0}^{L}\alpha(k)\cos\omega k \tag{10.2.65}$$

其中，$\{\alpha(k)\}$表示滤波器的系数，它与 FIR 滤波器的单位样本响应 $h(n)$线性相关。对于情形 1 来说，求和中的上限为 $L=(M-1)/2$；对于情形 3，$L=(M-3)/2$；对于情形 2 和情形 4，$L=M/2-1$。

表 10.5　一些窗函数的重要频域特性

滤波器类型	$Q(\omega)$	$P(\omega)$
$h(n)=h(M-1-n)$ M 为奇数 (情形 1)	1	$\sum_{k=0}^{(M-1)/2}a(k)\cos\omega k$
$h(n)=h(M-1-n)$ M 为偶数 (情形 2)	$\cos\dfrac{\omega}{2}$	$\sum_{k=0}^{(M/2)-1}\tilde{b}(k)\cos\omega k$
$h(n)=-h(M-1-n)$ M 为奇数 (情形 3)	$\sin\omega$	$\sum_{k=0}^{(M-3)/2}\tilde{c}(k)\cos\omega k$
$h(n)=-h(M-1-n)$ M 为偶数 (情形 4)	$\sin\dfrac{\omega}{2}$	$\sum_{k=0}^{(M/2)-1}\tilde{d}(k)\cos\omega k$

除了在上面给出的关于 $H_r(\omega)$表达的普通框架外，我们还定义了实值理想频率响应 $H_{dr}(\omega)$和逼近误差上的加权函数 $W(\omega)$。实值理想频率响应 $H_{dr}(\omega)$可简单地定义为通带内等于 1，而阻带内等于 0。作为例子，图 10.2.15 说明了几种不同特征类型的 $H_{dr}(\omega)$。逼近误差上的加权函数允许我们在不同的频带内(即通带和阻带)选取相对大小的误差，具体地说，可方便地在阻带内将 $W(\omega)$归一化，在通带内令 $W(\omega)=\delta_2/\delta_1$，即

$$W(\omega)=\begin{cases}\delta_2/\delta_1, & \omega\text{ 在通带内}\\ 1, & \omega\text{ 在阻带内}\end{cases} \tag{10.2.66}$$

然后，我们仅仅在通带内选择 $W(\omega)$，反映出我们对阻带中的纹波与通带中的纹波之间相对大小很重视。

根据 $H_{dr}(\omega)$和 $W(\omega)$的技术指标，现在我们可以定义加权逼近误差为

$$\begin{aligned}E(\omega)&=W(\omega)[H_{dr}(\omega)-H_r(\omega)]\\&=W(\omega)[H_{dr}(\omega)-Q(\omega)P(\omega)]\\&=W(\omega)Q(\omega)\left[\frac{H_{dr}(\omega)}{Q(\omega)}-P(\omega)\right]\end{aligned} \tag{10.2.67}$$

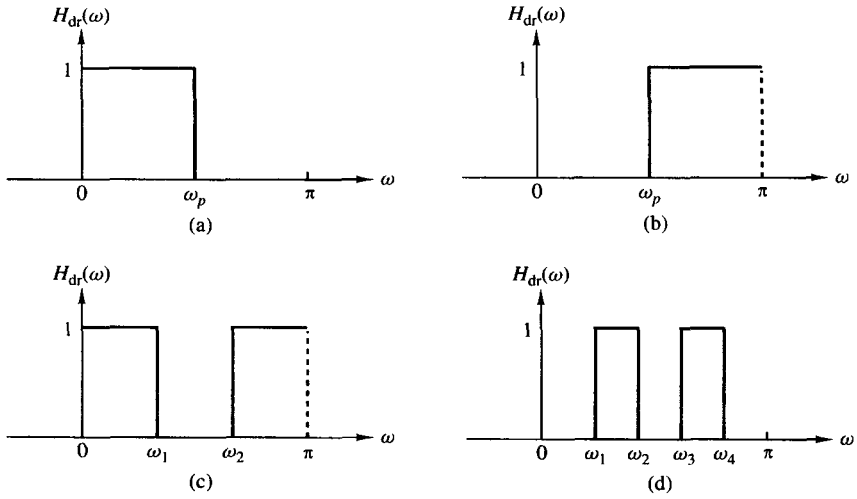


图 10.2.15 对于不同类型滤波器的理想频率响应特征

为了数学上的方便,我们定义一个修正的加权函数 $\hat{W}(\omega)$和一个修正的理想频率响应 $\hat{H}_{dr}(\omega)$分别为

$$\hat{W}(\omega) = W(\omega)Q(\omega)$$
$$\hat{H}_{dr}(\omega) = \frac{H_{dr}(\omega)}{Q(\omega)} \tag{10.2.68}$$

则对所有四种不同类型的线性相位 FIR 滤波器来说,加权逼近误差可以表示为

$$E(\omega) = \hat{W}(\omega)[\hat{H}_{dr}(\omega) - P(\omega)] \tag{10.2.69}$$

定义误差函数 $E(\omega)$,则切比雪夫逼近问题基本上就是确定滤波器参数$\{\alpha(k)\}$,使得所实施逼近的频带上 $E(\omega)$的最大绝对值可以最小化。按照数学术语,我们寻找问题

$$\min_{\text{over }\{\alpha(k)\}}\left[\max_{\omega\in S}|E(\omega)|\right] = \min_{\text{over }\{a(k)\}}\left[\max_{\omega\in S}|\hat{W}(\omega)[\hat{H}_{dr}(\omega) - \sum_{k=0}^{L}\alpha(k)\cos\omega k]|\right] \tag{10.2.70}$$

的解。式中 S 表示在其中实施最优化的频带集合(不相交的并集)。基本上,集合 S 由理想滤波器的通带和阻带组成。

这一问题的解决归功于 Parks 和 McClellan(1972a),他们在切比雪夫逼近理论中应用了一个称之为交错定理的定理。现在,我们在不加以证明的情况下阐述该定理。

交错定理:令 S 为区间$[0,\pi)$的一个闭子集,为了使

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^{L}\alpha(k)\cos\omega k$$

的 $E(\omega)$在 S 上为$\hat{H}_{dr}(\omega)$的唯一最佳加权切比雪夫逼近,其充分必要条件是误差函数在 S 上至少显现 $L+2$ 个极值曲线频率点,即在 S 上必须至少存在 $L+2$ 个频率$\{\omega_i\}$,使得当 $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{L+2}$时,$E(\omega_i) = -E(\omega_{i+1})$,且

$$|E(\omega_i)| = \max_{\omega\in S}|E(\omega)|, \qquad i = 1,2,\cdots,L+2$$

我们注意到,两个相邻的极值频率点之间,误差函数 $E(\omega)$在符号上交替变化,因此,该定理称为交错定理。

为了对交错定理做详细说明，我们考虑设计一个通带为 $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p$、阻带为 $\omega_s \leqslant \omega \leqslant \pi$ 的低通滤波器。因为理想频率响应 $H_{dr}(\omega)$和加权函数 $W(\omega)$是逐段恒定的，所以我们有

$$\begin{aligned}\frac{dE(\omega)}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega}\{W(\omega)[H_{dr}(\omega) - H_r(\omega)]\} \\ &= -\frac{dH_r(\omega)}{d\omega} = 0\end{aligned}$$

因此，对应于误差函数 $E(\omega)$各峰值点的频率$\{\omega_i\}$，同样也对应于 $H_r(\omega)$满足误差容限时的峰值点。因为 $H_r(\omega)$是 L 次三角多项式，所以，作为例题，对情形 1 来说，$H_r(\omega)$可表示为

$$\begin{aligned}H_r(\omega) &= \sum_{k=0}^{L}\alpha(k)\cos\omega k \\ &= \sum_{k=0}^{L}\alpha(k)\left[\sum_{n=0}^{k}\beta_{nk}(\cos\omega)^n\right] \\ &= \sum_{k=0}^{L}\alpha'(k)(\cos\omega)^k\end{aligned} \tag{10.2.71}$$

由此得出，在开区间 $0 < \omega < \pi$ 上，$H_r(\omega)$至多能有 $L-1$ 个局部极大值和极小值。另外，$\omega = 0$ 和 $\omega = \pi$通常是 $H_r(\omega)$的极值点，并且它们同时也是 $E(\omega)$的极值点。因此，$H_r(\omega)$至多有 $L+1$ 个极值频率点，此外，截止频率 ω_p 和 ω_s 也是$E(\omega)$的极值点，因为当 $\omega = \omega_p$ 和 $\omega = \omega_s$ 时，$|E(\omega)|$具有最大值结果，对于理想低通滤波器的唯一最佳近似，在 $E(\omega)$上至多存在 $L+3$ 个极值频率点。另一方面，交错定理说明在 $E(\omega)$上至少存在 $L+2$ 个极值频率点，于是，作为低通滤波器设计的误差函数不是有 $L+3$ 个就是 $L+2$ 个极值点。一般来说，如果滤波器结构包含的交错或纹波数目多于 $L+2$ 时，则这种滤波器称为“超纹波”滤波器。当滤波器结构包含有最大数目的交错时，这类滤波器称为“最大纹波滤波器”。

交错定理保证了在式(10.2.70)中的切比雪夫最优化问题有唯一解，在理想极值频率$\{\omega_n\}$，我们有方程组

$$\hat{W}(\omega_n)[\hat{H}_{dr}(\omega_n) - P(\omega_n)] = (-1)^n\delta, \qquad n = 0, 1, \cdots, L+1 \tag{10.2.72}$$

式中，δ 表示误差函数 $E(\omega)$的极大值。事实上，如果我们按式(10.2.66)所指明的那样选取 $W(\omega)$，则由此得出 $\delta = \delta_2$。

式(10.2.27)中的线性方程组可以重排为

$$P(\omega_n) + \frac{(-1)^n\delta}{\hat{W}(\omega_n)} = \hat{H}_{dr}(\omega_n), \qquad n = 0, 1, \cdots, L+1$$

或者，等效为

$$\sum_{k=0}^{L}\alpha(k)\cos\omega_n k + \frac{(-1)^n\delta}{\hat{W}(\omega_n)} = \hat{H}_{dr}(\omega_n), \qquad n = 0, 1, \cdots, L+1 \tag{10.2.73}$$

如果我们把$\{a(k)\}$和 δ 当做被确定的参数来处理，那么式(10.2.73)可以按照矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega_0 & \cos 2\omega_0 & \cdots & \cos L\omega_0 & \dfrac{1}{\hat{W}(\omega_0)} \\ 1 & \cos\omega_1 & \cos 2\omega_1 & \cdots & \cos L\omega_1 & \dfrac{-1}{\hat{W}(\omega_1)} \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & \cos\omega_{L+1} & \cos 2\omega_{L+1} & \cdots & \cos L\omega_{L+1} & \dfrac{(-1)^{L+1}}{\hat{W}(\omega_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(L) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_0) \\ \hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_{L+1}) \end{bmatrix} \tag{10.2.74}$$

最初,我们既不知道极值频率组$\{\omega_n\}$,也不知道参数$\{\alpha(k)\}$和δ。为了求出这些参数,我们利用称为 Remez 交换算法的迭代算法[见 Rabiner 等(1975)]。在迭代算法中,我们首先从猜测一组频率开始,接着确定$P(\omega)$和δ,然后计算误差函数$E(\omega)$,我们又可确定另一组$(L+2)$个极值频率点$E(\omega)$,重复迭代过程,直到所得到的频率组收敛于最佳的极值频率组为止。虽然,在式(10.2.74)中的矩阵方程可用在迭代方法中,但矩阵求逆耗时且效率低。

一种更为有效的方法由 Rabiner 等(1975)在论文中提出。该方法按照公式

$$\delta = \frac{\gamma_0 \hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_0) + \gamma_1 \hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_1) + \cdots + \gamma_{L+1} \hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_{L+1})}{\dfrac{\gamma_0}{\hat{W}(\omega_0)} - \dfrac{\gamma_1}{\hat{W}(\omega_1)} + \cdots + \dfrac{(-1)^{L+1}\gamma_{L+1}}{\hat{W}(\omega_{L+1})}} \tag{10.2.75}$$

其中,

$$\gamma_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{L+1} \frac{1}{\cos\omega_k - \cos\omega_n} \tag{10.2.76}$$

解析计算δ,在式(10.2.75)中,关于δ的表达式是直接从式(10.2.74)中的矩阵方程得出的,于是,利用$(L+2)$个极值频率点的初始猜测值,我们就可计算δ。

现在,由于$P(\omega)$是形如

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^{L} \alpha(k) x^k, \qquad x = \cos\omega$$

的三角多项式,并且已知在点$x_n \equiv \cos\omega_n (n = 0, 1, \cdots, L+1)$处,多项式相应的值为

$$P(\omega_n) = \hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_n) - \frac{(-1)^n \delta}{\hat{W}(\omega_n)}, \qquad n = 0, 1, \cdots, L+1 \tag{10.2.77}$$

所以,我们可以利用关于$P(\omega)$的拉格朗日插值公式,故$P(\omega)$可表示为[见 Hamming(1962)]

$$P(\omega) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{L} P(\omega_k)[\beta_k/(x - x_k)]}{\displaystyle\sum_{k=0}^{L} [\beta_k/(x - x_k)]} \tag{10.2.78}$$

其中,$P(\omega_n)$由式(10.2.77)给出,$x = \cos\omega$,$x_k = \cos\omega_k$,以及

$$\beta_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n\neq k}}^{L} \frac{1}{x_k - x_n} \tag{10.2.79}$$

求出 $P(\omega)$后，我们就可以在频率点密集上计算误差函数 $E(\omega)$

$$E(\omega) = \hat{W}(\omega)[\hat{H}_{dr}(\omega) - P(\omega)] \tag{10.2.80}$$

通常，点的个数等于 $16M$ 就足够了，其中 M 是滤波器的长度。如果对于密集的某些频率来说，$|E(\omega)| \geqslant \delta$，则选取一组新的对应于 $|E(\omega)|$ 的 $L+2$ 个最大的峰值点频率，并且重复开始式(10.2.75)的计算过程。因为选取的这组新的 $L+2$ 个极值频率对应于误差函数 $|E(\omega)|$ 的峰值，所以，算法在每次迭代中都使 δ 增加，直到 δ 收敛于上界为止，因此 δ 也收敛于切比雪夫逼近问题的最佳解。换言之，当密集中的所有频率 $|E(\omega)| \leqslant \delta$ 时，通过多项式 $H(\omega)$就已找到最优解。该算法的流程图见图 10.2.16，由 Remez(1957)提出。

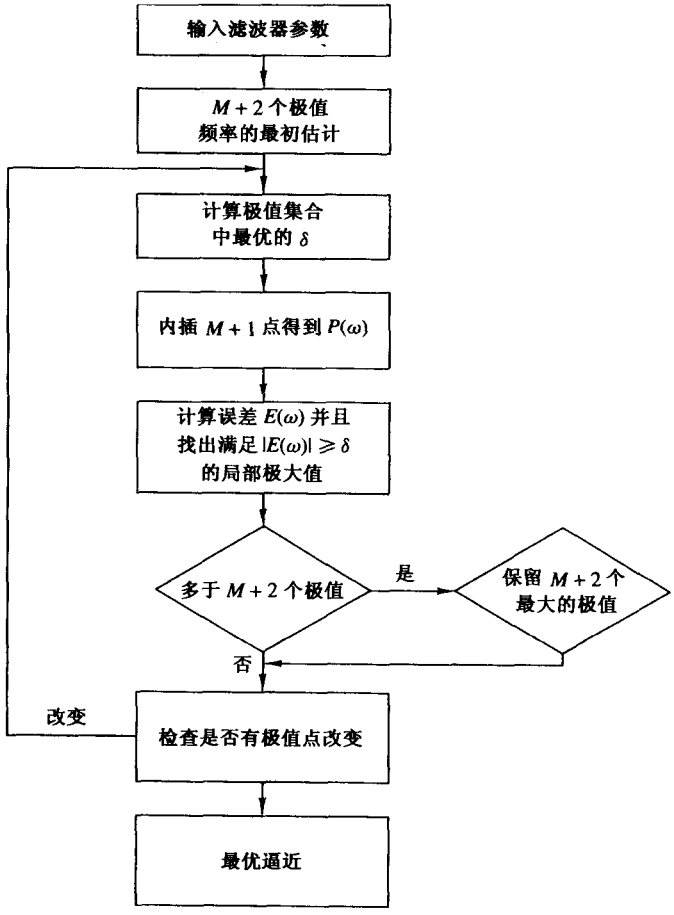


图 10.2.16　Remez 算法的流程图

一旦通过 $P(\omega)$得到最优解，在不必计算参数 $\{a(k)\}$ 的情况下，就可以直接计算单位样本响应 $h(n)$，事实上，我们已经可以确定

$$H_r(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$$

具体来说,对于 M 为奇数的情况,在 $\omega = 2\pi k/M, k = 0,1,\cdots,(M-1)/2$,计算 $H_r(\omega)$。然后,依据所设计的滤波器类型,从表 10.3 选取相应的公式来确定 $h(n)$。

对基于切比雪夫逼近准则和用 Remez 交换算法实现的线性相位 FIR 滤波器来说,由 Parks 和 McClellan(1972b)编写的计算机程序是现成的。该程序可用来设计低通、高通或带通滤波器、微分器和希尔伯特变换器。最后的两种类型的滤波器将在下一节中介绍,许多等纹波线性相位 FIR 滤波器的软件包现在都是现成的。

Parks-McClellan 程序需要若干确定滤波器特性的输入参数,特别是,必须指定下面的参数:

NFILT: 滤波器长度,在上面表示为 M

JTYPE: 滤波器的类型:

JTYPE = 1 产生一个多路带通/带阻滤波器

JTYPE = 2 产生一个差分器

JTYPE = 3 产生一个希尔伯特变换器

NBANDS: 频带数目:从 2(对低通滤波器)到最多 10(对多路带通滤波器)

LGRID: 误差函数 $E(\omega)$插值的网格密度,如果左边未指定,默认值为 16

EDGE: 由上下截止频率规定的频带,最多到 10 个频带(一个最大为 20 的数组)。通过变量 $f = \omega/2\pi$ 给定的频率,其中 $f = 0.5$ 对应于折叠频率

FX: 最大为 10 的数组,它规定每个频带上的理想频率响应 $H_{dr}(\omega)$

WTX: 最大为 10 的数组,它规定每个频带上的加权函数

下面的例题说明了如何利用该程序来设计一个低通和高通滤波器。

例 10.2.3 设计一个长度为 $M = 61$、通带截止频率为 $f_p = 0.1$ 并且阻带截止频率为 $f_s = 0.15$ 的低通滤波器。

解:该滤波器是一个通带截止频率为(0,0.1)和阻带截止频率为(0.15,0.5)的双频带滤波器。理想响应是(1,0)并且加权函数任意选为(1,1)。故指定参数为

```
61, 1, 2
0.0, 0.1, 0.15, 0.5
1.0, 0.0
1.0, 1.0
```

其冲激响应和频率响应如图 10.2.17 所示。所得到的滤波器具有 -56 dB 的通带衰减和 0.0135 dB 的通带纹波。

如果我们将滤波器长度增大到 $M = 101$,同时保持上面给出的其他参数不变,那么所得滤波器的冲激响应和频率响应如图 10.2.18 所示。此时,阻带衰减为 -85 dB,而通带纹波降到 0.000 46 dB。

我们应该指明的是,通过保持滤波器长度不变,比如 $M = 61$,同时减少在通带内的加权函数 $W(\omega) = \delta_2/\delta_1$来增大阻带中的衰减是可能的。根据 $M = 61$ 和加权函数(0.1,1),我们得到一个具有 -65 dB 阻带衰减和 0.049 dB 通带纹波的滤波器。

例 10.2.4 设计一个长度为 $M = 32$ 的带通滤波器,其通带截止频率为 $f_{p1} = 0.2$ 和 $f_{p2} = 0.35$,阻带截止频率为 $f_{s1} = 0.1$ 和 $f_{s2} = 0.425$。

解:该滤波器是个 3 频带滤波器,分别是阻带(0,0.1)、通带(0.2,0.35)和第 2 阻带(0.425,0.5),加权函数选为(10.0,1.0,10.0)或者(1.0,0.1,1.0),在 3 个频带中的理想响应为(0.0,1.0,0.0)。故程序的输入参数为

```
32, 1, 3
0.0, 0.1, 0.2, 0.35, 0.425, 0.5
0.0, 1.0, 0.0
10.0, 1.0, 10.0
```

我们注意到阻带中的纹波 δ_2 是通带中的 1/10，这是因为在阻带中的误差加权与通带误差加权因子相比为 1/10。该带通滤波器的冲激响应和频率响应如图 10.2.19 所示。

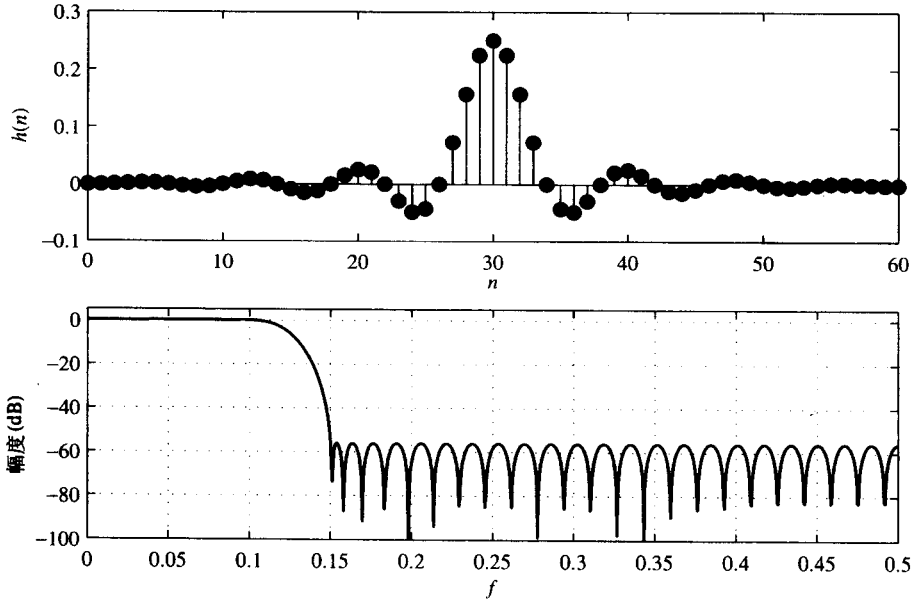


图 10.2.17　例 10.2.3 中长度为 $M=61$ 的 FIR 滤波器的冲激响应和频率响应

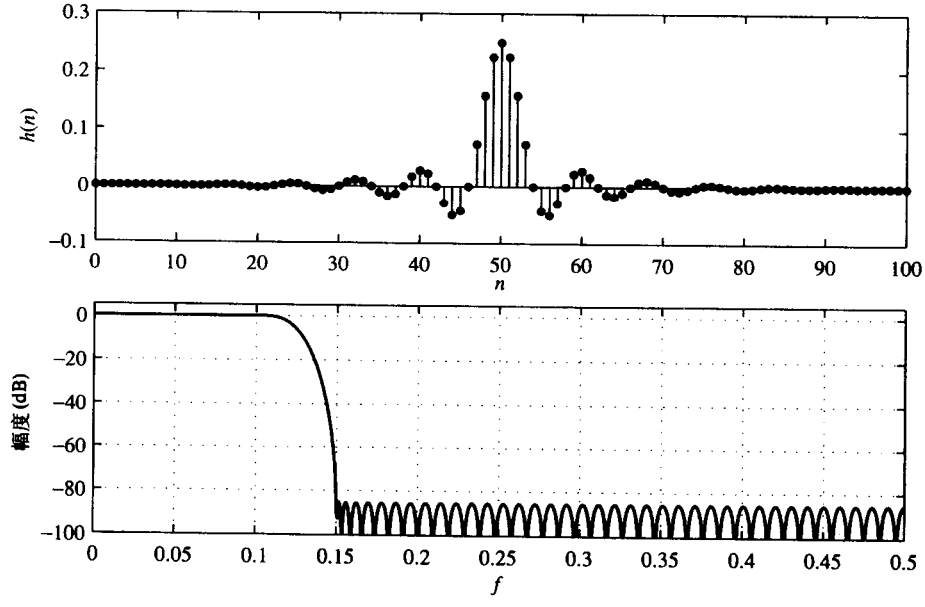


图 10.2.18　例 10.2.3 中长度为 $M=101$ 的 FIR 滤波器的冲激响应和频率响应

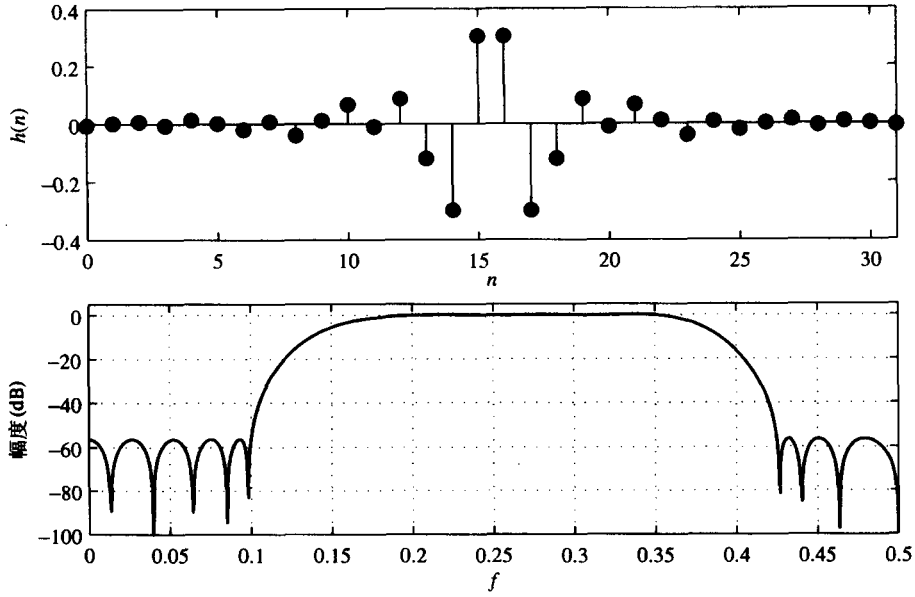


图 10.2.19 例 10.2.4 中长度为 $M=32$ 的 FIR 滤波器的冲激响应和频率响应

这些例题足以说明,基于 Remez 变换算法实现的切比雪夫逼近准则,设计最佳低通、高通、带通、带阻以及更普通的多频带线性相位 FIR 滤波器的方法是相对简单的。接下来的两节我们将考虑微分器和希尔伯特变换器的设计。

10.2.5 FIR 微分器设计

在许多模拟和数字系统中,微分器常常用来求信号的导数。理想微分器具有与频率成线性关系的频率响应。这样,理想微分器可以定义为具有频率响应

$$H_d(\omega)=\mathrm{j}\omega, \qquad -\pi\leqslant\omega\leqslant\pi \tag{10.2.81}$$

的微分器。对应于 $H_d(\omega)$的单位样本响应为

$$\begin{aligned} h_d(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega \\ &=\frac{\cos\pi n}{n}, \qquad -\infty<n<\infty, \qquad n\neq 0 \end{aligned} \tag{10.2.82}$$

我们注意到理想微分器的单位样本响应具有反对称性[即 $h_d(n)=-h_d(-n)$],故 $h_d(0)=0$。

考虑到理想微分器的单位样本响应具有反对称性,我们只集中考虑 $h(n)=-h(M-1-n)$情况下 FIR 的设计,因此我们将考虑在前一小节归类为情形 3 和情形 4 的滤波器类型。

我们回想一下情形 3,其中 M 为奇数,FIR 滤波器的实值频率响应 $H_r(\omega)$具有 $H_r(0)=0$ 特性。当频率为 0 时,响应也为 0,这正是微分器必须满足的条件。从表 10.5 可知那两种类型的滤波器都符合条件。然而,如果需要全频带微分器,就不可能由具有奇数个系数的 FIR 滤波器得到,因为当 M 是奇数时 $H_r(\pi)=0$。但是实际中,很少用到全频带微分器。

在大多数实际应用中,仅仅要求理想频率响应在有限频率范围 $0\leqslant\omega\leqslant 2\pi f_p$ 是线性的,其中 f_p 是微分器的带宽。在频率范围 $2\pi f_p<\omega\leqslant\pi$,频率响应可以不加约束或规定为 0。

基于切比雪夫逼近准则设计 FIR 微分器，加权函数在程序中规定为

$$W(\omega)=\frac{1}{\omega},\qquad 0\leqslant\omega\leqslant 2\pi f_p \tag{10.2.83}$$

目的在于保证通带中的相对纹波不变。于是，理想响应 $H_d(\omega)$ 和近似 $H_r(\omega)$ 之间的绝对误差随着 ω 从 0 到 $2\pi f_p$ 变化而增大，然而，在式(10.2.83)中的加权函数确保了相对误差

$$\begin{aligned}\delta&=\max_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi f_p}\{W(\omega)[\omega-H_r(\omega)]\}\\&=\max_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi f_p}\left[1-\frac{H_r(\omega)}{\omega}\right]\end{aligned}\tag{10.2.84}$$

在微分器通带内保持不变。

例 10.2.5　利用 Remez 算法设计一个长度为 $M=60$ 的线性相位 FIR 微分器，其通带截止频率为 0.1，阻带截止频率为 0.15。

解：程序的输入参数为

```
60,   2,    2
0.0,  0.1,  0.15,  0.5
1.0,  0.0
1.0,  1.0
```

其频率响应特性如图 10.2.20 所示。同样该图还给出了滤波器在通带 $0\leqslant f\leqslant 0.1$ 的逼近误差。

在微分器中，重要的参数有长度 M、带宽(通带截止频率)f_p 和逼近的最大相对误差 δ。它们之间的相互关系可以按参数形式表现。事实上，M 作为参数，f_p 对 $20\lg\delta$ 的图形，M 为偶数时如图 10.2.21 所示，M 为奇数时如图 10.2.22 所示。这些结果归功于 Rabiner 和 Schafer(1974a)。它们在给定了带内纹波和截止频率 f_p 情况下，对选取滤波器的长度非常有用。

比较图 10.2.21 和图 10.2.22 中的曲线，我们发现偶数长度与奇数长度的微分器相比，产生的逼近误差 δ 非常小。如果带宽超过 $f_p=0.45$，那么 M 为奇数时的设计特别差，问题主要是当 $\omega=\pi(f=1/2)$ 时频率响应为零。当 $f_p<0.45$ 时，对于 M 为奇数来说，可以得到较好的设计，但是，在逼近误差较小这个意义上，M 为偶数且比较长的微分器总是要好一些。

鉴于偶数长度微分器比奇数长度的有明显优点，我们可以认为在实际系统中偶数长度的微分器更合适。对于许多应用来说，这的确是正确的。然而，我们应该注意通过线性相位 FIR 滤波器引入的信号延时为 $(M-1)/2$，当 M 为偶数时，该延时不是一个整数。在很多实际应用中，这关系并不大。但是，在某些应用中，希望在微分器的输出信号中有整数值的延迟时，我们就必须选取 M 为奇数。

这些数值结果都是由基于切比雪夫逼近准则的设计引起的。我们想说明的是，基于频率采样方法设计线性相位 FIR 微分器也是可以的，并且相对容易。作为例题，图 10.2.23 说明了一个长度为 $M=30$ 的宽带($f_p=0.5$)微分器的频率响应特性，另外，该图也给出了逼近误差的绝对值作为频率的函数。

10.2.6　希尔伯特变换器的设计

理想的希尔伯特变换器是一个把 90°相移施加到输入信号上的全通滤波器，因此理想希尔伯特变换器的频率响应可规定为

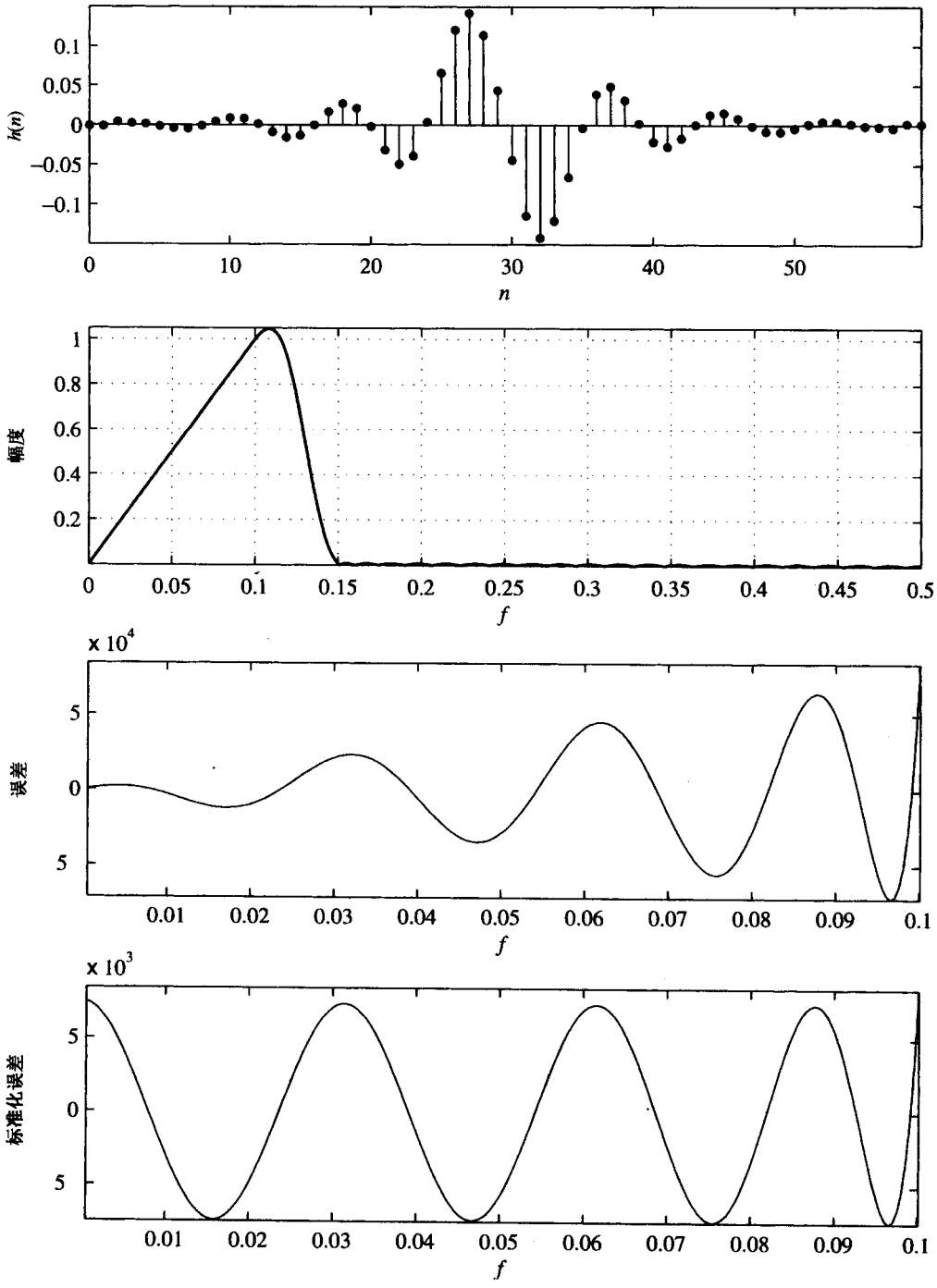


图 10.2.20 例 10.2.5 中 FIR 微分器的频率响应和逼近误差($M=60$)

$$H_d(\omega)=\begin{cases}-\mathrm{j}, & 0<\omega\leqslant\pi\\ \mathrm{j}, & -\pi<\omega<0\end{cases} \tag{10.2.85}$$

希尔伯特变换器频繁使用于通信和信号处理中,例如,单边调制信号的产生、雷达信号处理和语音信号处理。

理想希尔伯特变换器的单位样本响应为

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega-\int_{0}^{\pi}\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega\right)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2(\pi n/2)}{n}, & n\neq 0\\ 0, & n=0\end{cases} \tag{10.2.86}$$

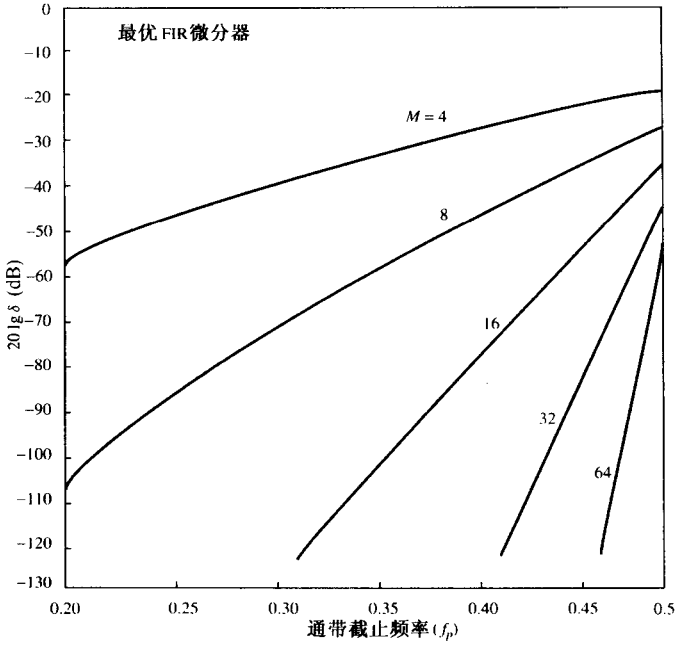


图 10.2.21　$M=4,8,16,32$ 和 64 时，$20\lg\delta$ 与 f_p 的函数曲线[出自 Rabiner 和 Schafer(1974a)]

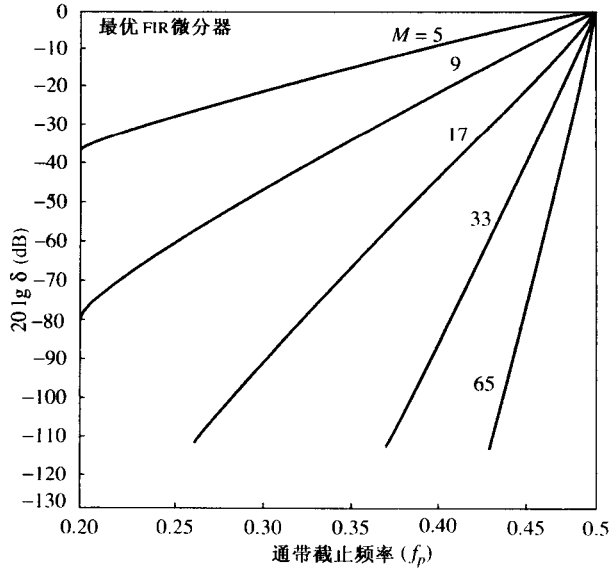


图 10.2.22　$M=5,9,17,33$ 和 65 时，$20\lg\delta$ 与 f_p 的函数曲线[出自 Rabiner 和 Schafer(1974a)]

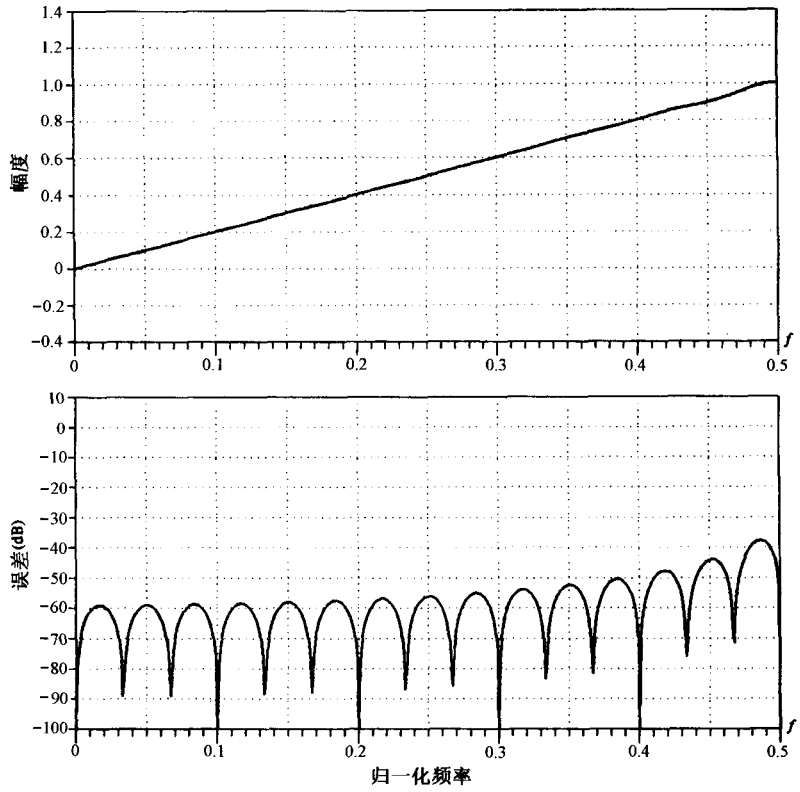


图 10.2.23 频率采样方法设计的 FIR 微分器的频率响应和逼近误差($M=30$)

正如所期望的,$h_d(n)$是无限时宽且非因果的。我们注意到 $h_d(n)$为反对称的[即 $h_d(n)=-h_d(-n)$]。考虑到这一特性,我们集中考虑具有反对称性单位样本响应[即 $h(n)=-h(M-1-n)$]的线性相位 FIR 希尔伯特变换器的设计。还注意到,反对称性单位样本的选取与具有纯虚部频率响应特性的 $H_d(\omega)$是一致的。

回顾可知,当 $h(n)$为反对称时,无论 M 是奇数还是偶数,实值频率响应特性 $H_r(\omega)$在 $\omega=0$ 时等于 0。而 M 为奇数时,还有 $H_r(\pi)=0$。显然,设计一个全通希尔伯特变换器是不可能的。幸好,在实际信号处理应用中,全通希尔伯特变换器不是必需的,所需要的仅仅是其带宽可以覆盖相移后信号的带宽。因此,我们规定希尔伯特变换器的理想实值频率响应为

$$H_{dr}(\omega)=1, \qquad 2\pi f_l \leqslant \omega \leqslant 2\pi f_u \tag{10.2.87}$$

其中,f_l 和 f_u 分别下截止和上截止频率。

有趣的是,式(10.2.86)中给定的单位样本响应 $h_d(n)$的理想希尔伯特变换器在 n 为偶数时为零。该性质可通过让 FIR 希尔伯特变换器满足某些对称性条件得到。具体地,让我们考虑情形 3 的滤波器类型:

$$H_r(\omega)=\sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k)\sin\omega k \tag{10.2.88}$$

并且假定 $f_l=0.5-f_u$,这保证了通带关于中点频率 $f=0.25$ 对称。如果频率响应具有这样的对称性,那么 $H_r(\omega)=H_r(\pi-\omega)$,则式(10.2.88)变成

$$\sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k)\sin\omega k = \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k)\sin k(\pi-\omega)$$

$$= \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k)\sin\omega k\cos\pi k$$

$$= \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k)(-1)^{k+1}\sin\omega k$$

或等效为

$$\sum_{k=1}^{(M-1)/2} [1-(-1)^{k+1}]c(k)\sin\omega k = 0 \tag{10.2.89}$$

显然，$k=0,2,4,\cdots$时，$c(k)$等于 0。

现在，根据式(10.2.54)，$\{c(k)\}$和单位样本响应$\{h(n)\}$之间关系为

$$c(k) = 2h\left(\frac{M-1}{2}-k\right)$$

或等效为

$$h\left(\frac{M-1}{2}-k\right) = \frac{1}{2}c(k) \tag{10.2.90}$$

如果 $k=0,2,4,\cdots$时 $c(k)=0$，则由式(10.2.90)得到

$$h(k) = \begin{cases} 0, & k=0,2,4,\cdots, \quad \dfrac{M-1}{2} \text{ 为偶数} \\ 0, & k=1,3,5,\cdots, \quad \dfrac{M-1}{2} \text{ 为奇数} \end{cases} \tag{10.2.91}$$

遗憾的是，式(10.2.91)仅在 M 为奇数时才成立，而在 M 为偶数时不成立。这意味着对差不多的 M 值来说，由于 M 为奇数时计算复杂度(每点输出的乘法和加法次数)大约是 M 为偶数时的一半，因此 M 为奇数更好些。

当通过切比雪夫逼近准则利用 Remez 算法实现希尔伯特变换器设计时，我们选取滤波器系数最小化逼近误差峰值

$$\begin{aligned} \delta &= \max_{2\pi f_l \leqslant \omega \leqslant 2\pi f_u} [H_{\mathrm{dr}}(\omega) - H_r(\omega)] \\ &= \max_{2\pi f_l \leqslant \omega \leqslant 2\pi f_u} [1 - H_r(\omega)] \end{aligned} \tag{10.2.92}$$

于是，加权函数设置为 1，并在单个频带上实现最优化(例如，滤波器的通带)。

例 10.2.6　设计一个参数为 $M=31$，$f_l=0.05$ 和 $f_u=0.45$ 的希尔伯特变换器。

解：我们注意到，由于 $f_u=0.5-f_l$，故频率响应具有对称性。Remez 算法所需的参数为

```
31,     3,   1
0.05,   0.45
1.0
1.0
```

其单位样本响应和频率响应如图 10.2.24 所示。我们注意到，确实 $h(n)$的值每隔一个基本上为 0。

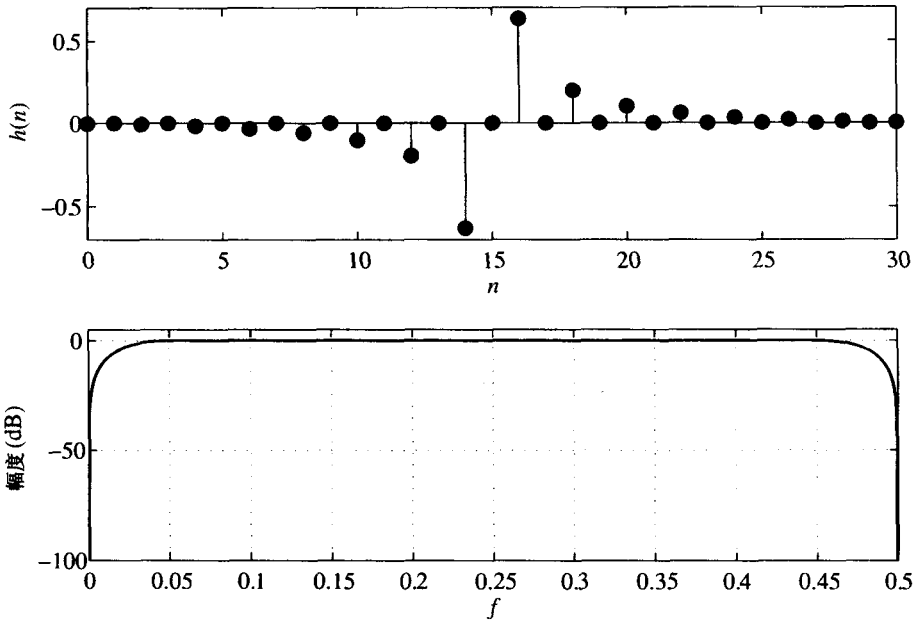


图 10.2.24 例 10.2.6 中 FIR 希尔伯特变换器的频率响应

Rabiner 和 Schafer(1974b)研究了 M 为奇数和 M 为偶数两种情况下的希尔伯特变换器的结构特性。如果滤波器的结构限于对称频率响应,那么我们感兴趣的参数基本上有三个,即 M,δ 和 f_l。图 10.2.25 给出了 $20\lg\delta$ 与 f_l 关系曲线随 M 变化的情况。从该图我们可以看到,对差不多的 M 值来说,M 为奇数的情形并不优于 M 为偶数的情形,反之亦然。但是,如同前面说明的,对于实现滤波器的计算复杂度来说,M 为奇数的计算量不到 M 为偶数时的 1/2。因此,在实际中 M 为奇数更好些。

为了设计的目的,图 10.2.25 建议

$$Mf_l \approx -0.61\lg\delta \tag{10.2.93}$$

作为一个经验公式。所以,当确定了滤波器三个参数中的两个时,就可利用该式估计出另一参数的值。

10.2.7 线性相位 FIR 滤波器设计方法的比较

从历史的角度看,设计线性相位 FIR 滤波器,首先提出的方法是利用窗函数截尾冲激响应 $h_d(n)$得到理想的成形谱的设计方法。然后,到 20 世纪 70 年代,又提出了频率采样方法和切比雪夫逼近方法。后来,在实际的线性相位 FIR 滤波器的设计中,这两种方法得到了普遍应用。

窗函数方法的主要缺点就是缺少关键频率的精度控制,例如,在设计低通 FIR 滤波器时的 ω_p 和 ω_s。一般来说,ω_p 和 ω_s 的值依赖于窗函数的类型和滤波器长度 M。

频率采样方法在窗函数方法基础上做了一些改进,指定了 $\omega_k = 2\pi k/M$ 或 $\omega_k = \pi(2k+1)/M$ 上 $H_r(\omega)$的值,并且规定过渡带为 $2\pi/M$ 的倍数。在频域用 DFT 或者频率采样实现 FIR 滤波器时,这种方法特别有吸引力,因为 $H_r(\omega_k)$在过渡带以外的所有频率上等于 0 或者 1。

切比雪夫逼近方法对滤波器技术指标提供总控制,因此,它通常比其他两种方法要好。例如,低通滤波器,按照参数 ω_p,ω_s,δ_1,δ_2 和 M 给定的技术指标,我们指定参数 ω_p,ω_s,δ_1 和 M,然后利

用 δ_2 来优化滤波器。通常将逼近误差分散到滤波器的通带和阻带上，对一组给定的技术指标来说，在最大的旁瓣最小化的意义上，这种方法得到的滤波器结构是最佳的。

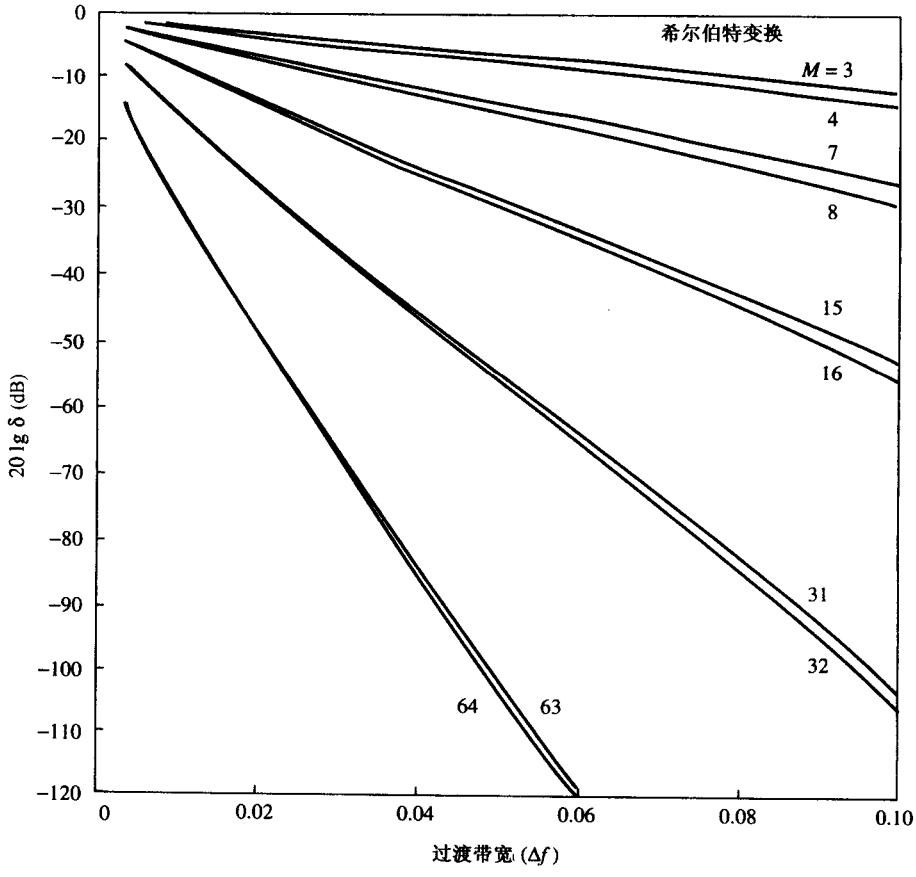


图 10.2.25　$M=3,4,7,8,15,16,31,32,63,64$ 时，$20\lg\delta$ 与 Δf 的关系曲线[出自Rabiner和Schafer(1947b)的论文]

切比雪夫设计方法以 Remez 变换算法为基础，需要我们指定滤波器的长度、关键频率 ω_p 和 ω_s，以及比值 δ_2/δ_1。但是，更自然的做法是指定 $\omega_p,\omega_s,\delta_1$ 和 δ_2 来确定满足这些技术指标的滤波器长度。虽然，没有根据这些参数确定滤波器长度的简单公式，但是，已经有很多根据 $\omega_p,\omega_s,\delta_1$ 和 δ_2 来估计 M 的近似公式。一个归功于凯泽的很简单的近似公式为

$$\hat{M}=\frac{-20\lg\left(\sqrt{\delta_1\delta_2}\right)-13}{14.6\,\Delta f}+1 \tag{10.2.94}$$

其中 $\Delta f=(\omega_s-\omega_p)/2\pi$。该公式由 Rabiner 等(1975)在论文中给出。另一个更加准确的公式由 Herrmann 等(1973)提出，

$$\hat{M}=\frac{D_\infty(\delta_1,\delta_2)-f(\delta_1,\delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f}+1 \tag{10.2.95}$$

其中，定义

$$D_\infty(\delta_1,\delta_2)=[0.005\,309(\lg\delta_1)^2+0.071\,14(\lg\delta_1)-0.4761](\lg\delta_2)$$
$$-[0.002\,66(\lg\delta_1)^2+0.594\,1\lg\delta_1+0.4278] \tag{10.2.96}$$

$$f(\delta_1,\delta_2)=11.012+0.512\,44(\lg\delta_1-\lg\delta_2) \tag{10.2.97}$$

在给定技术指标 $\Delta f,\delta_1,\delta_2$ 的情况下,这些公式对于估计出一个适合的滤波器长度是非常有用的。利用该估计来完成滤波器的设计,如果所得到的 δ 超过指定的 δ_2,那么就可以增加滤波器的长度直到旁瓣水平达到指定指标。

10.3 从模拟滤波器设计 IIR 滤波器

正如在 FIR 滤波器设计中,存在几种可用于设计无限时宽单位样本响应的数字滤波器,本节要描述的方法全都建立在将模拟滤波器转换到数字滤波器上。模拟滤波器设计是一个充分研究过的成熟领域,所以,在模拟域设计滤波器,然后将设计转到数字域,这是很正常的。

模拟滤波器可用它的系统函数

$$H_a(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}\beta_k s^k}{\sum_{k=0}^{N}\alpha_k s^k} \tag{10.3.1}$$

来描述,式中 $\{\alpha_k\}$ 和 $\{\beta_k\}$ 是滤波器系数,或者用冲激响应来加以描述。冲激响应 $h(n)$ 和系统函数 $H_a(s)$ 通过拉普拉斯变换

$$H_a(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{10.3.2}$$

联系在一起。另外,具有式(10.3.1)中给定的有理系统函数 $H(s)$ 的模拟滤波器可用线性常系数微分方程描述为

$$\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k}=\sum_{k=0}^{M}\beta_k\frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k} \tag{10.3.3}$$

其中,$x(t)$ 表示输入信号,$y(t)$ 表示滤波器的输出。

模拟滤波器的这三种等效表示中,每一种表示都可以得出一种将滤波器转换到数字域的备选方法,将在 10.3.1 节至 10.3.3 节中进行描述。我们回顾一下,一个系统函数为 $H(s)$ 的模拟线性时不变系统,如果它的所有极点都位于 s 平面的左半部,那么该系统就是稳定的。因此,如果转换方法是有效的,那么就应该具有以下所期望的性质:

1. 在 s 平面中的 $\mathrm{j}\Omega$ 轴应映射为 z 平面中的单位圆,因此,在两个域中的两个频率变量之间将存在直接的映射关系。
2. s 平面的左半平面(LHP)应该映射为 z 平面的单位圆内,因此,稳定的模拟系统将转换成稳定的数字滤波器。

在上一节,我们提到物理上可实现的稳定的 IIR 滤波器不能有线性相位。回想一下,一个线性相位滤波器的系统函数必须满足条件

$$H(z)=\pm z^{-N}H(z^{-1}) \tag{10.3.4}$$

其中，z^{-N}表示 N 个单位延迟。但是，如果滤波器这样的话，对每个单位圆内的极点，滤波器将在单位圆外有一个镜像极点，从而该滤波器是不稳定的。因此，因果稳定的 IIR 滤波器不能有线性相位。

如果不考虑物理上可实现这一特性，那么得到的一个线性相位 IIR 滤波器至少在原理上是可能的。该方法涉及到对输入信号 $x(n)$的反转，将 $x(-n)$通过数字滤波器 $H(z)$，再将 $H(z)$的输出做时域反转，最后将结果再通过 $H(z)$。这种信号处理在计算上很麻烦，并且与线性相位 FIR 滤波器相比似乎没有任何优点，故当应用需要线性相位滤波器时，它一定是个 FIR 滤波器。

在 IIR 滤波器设计中，我们将仅仅规定理想滤波器的幅度响应特性，但这并不意味着我们认为相位响应不重要。由于幅度响应特性和相位特性如在 10.1 节所指出的是相关的，故我们在指定理想幅度特性时，认为相位响应可以从设计方法得到。

10.3.1　用导数逼近设计 IIR 滤波器

将一个模拟滤波器转换成一个数字滤波器，其中一个最简单的方法就是用等效的差分方程逼近式(10.3.3)中的微分方程。这种方法通常用来在数字计算机上数字求解线性常微分方程。

我们用后向差分$[y(nT)-y(nT-1)]/T$替换时刻$t=nT$处的导数 $\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t$，这样可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=nT}=\frac{y(nT)-y(nT-T)}{T}=\frac{y(n)-y(n-1)}{T} \tag{10.3.5}$$

其中，T表示采样间隔，$y(n)\equiv y(nT)$。带输出 $\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t$ 的模拟微分器的系统函数为 $H(s)=s$，而带输出$[y(n)-y(n-1)]/T$的数字系统的系统函数为$H(z)=(1-z^{-1})/T$，因此如图 10.3.1 所示，对于式(10.3.5)中的关系式来说，频域等效关系为

$$s=\frac{1-z^{-1}}{T} \tag{10.3.6}$$

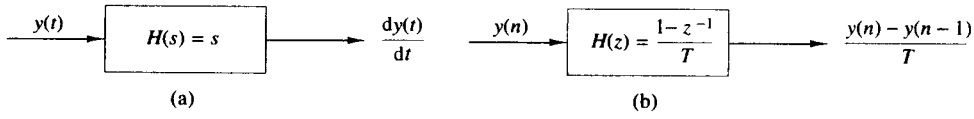


图 10.3.1　后向差分代替导数意味着映射 $s=(1-z^{-1})/T$

同样地，二阶导数 $\mathrm{d}^2y(t)/\mathrm{d}t^2$ 可用二阶差分来代替，推导如下：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=nT}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{t=nT}\\&=\frac{[y(nT)-y(nT-T)]/T-[y(nT-T)-y(nT-2T)]/T}{T}\\&=\frac{y(n)-2y(n-1)+y(n-2)}{T^2}\end{aligned} \tag{10.3.7}$$

在频域式(10.3.7)等效为

$$s^2=\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{T^2}=\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^2 \tag{10.3.8}$$

从上面的讨论可以得出替换 $y(t)$的 k 阶导数产生等效的频域关系式为

$$s^k = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k \tag{10.3.9}$$

因此,对数字 IIR 滤波器来说,用有限差分逼近导数所得到的系统函数为

$$H(z) = H_a(s)|_{s=(1-z^{-1})/T} \tag{10.3.10}$$

其中,$H_a(s)$是用式(10.3.3)的微分方程表征的模拟滤波器的系统函数。

让我们研究由式(10.3.6)给定的从 s 平面到 z 平面的映射的含义,或等价地研究

$$z = \frac{1}{1-sT} \tag{10.3.11}$$

的含义。如果我们在式(10.3.11)中做替换 $s = j\Omega$,那么可得

$$z = \frac{1}{1-j\Omega T} = \frac{1}{1+\Omega^2T^2} + j\frac{\Omega T}{1+\Omega^2T^2} \tag{10.3.12}$$

随着 Ω 从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$,在 z 平面中,相应的点轨迹是一个中心在 $z=\frac{1}{2}$、半径为$\frac{1}{2}$的圆,如图 10.3.2所示。

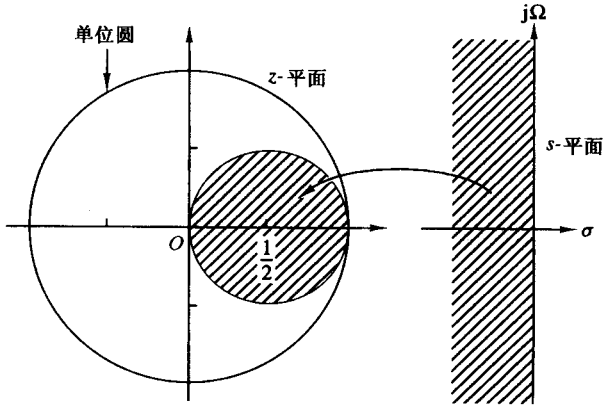


图 10.3.2 映射 $s=(1-z^{-1})/T$ 将 s 平面的 LHP 映射成 z 平面上中心为$z=\frac{1}{2}$、半径为$\frac{1}{2}$的圆内点

很容易就可以证明,式(10.3.11)中的映射将 s 平面左半平面(LHP)上的点映射为 z 平面上中心在$z=\frac{1}{2}$、半径为$\frac{1}{2}$的圆内点,并且将 s 平面右半平面(RHP)的点映射到该圆以外的点。因此,该映射具有一个稳定的模拟滤波器转换到一个稳定的数字滤波器所需要的性质。然而,数字滤波器极点的可能位置被限制在相对很小的频率,因此,这种映射仅限于设计具有相对较小谐振频率的低通滤波器和带通滤波器。例如,不可能将高通模拟滤波器变换成相应的高通数字滤波器。

为了克服上面提出的映射中的局限性,人们做了一些尝试,提出了更加复杂的置换导数的方法。具体地说,提出了形如

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{L}\alpha_k\frac{y(nT+kT)-y(nT-kT)}{T} \tag{10.3.13}$$

的 L 阶差分方式的置换,其中$\{\alpha_k\}$是一组可选的最优化逼近的参数,所得到的 s 平面和 z 平面之间的映射变成

$$s = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{L}\alpha_k(z^k - z^{-k}) \tag{10.3.14}$$

当 $z=e^{j\omega}$ 时，有

$$s=j\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{L}\alpha_k\sin\omega k \tag{10.3.15}$$

这是一个纯虚数，于是，所得到的两个频率变量间的映射为

$$\Omega=\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{L}\alpha_k\sin\omega k \tag{10.3.16}$$

经过适当选取系数$\{\alpha_k\}$，将 $j\Omega$ 轴映射成单位圆是可能的，而且在 s 平面 LHP 上的点可以映射成 z 平面上单位圆内的点。

尽管得到了映射式(10.3.16)的两个所期望的特性，但如何选取系数组$\{\alpha_k\}$还未解决。一般来说，这是个很难的问题。由于存在将模拟滤波器转换成 IIR 数字滤波器的更为简便的方法，我们将不推荐将 L 阶差分用做置换导数。

例 10.3.1　利用后向差分表示导数，将系统函数

$$H_a(s)=\frac{1}{(s+0.1)^2+9}$$

的模拟带通滤波器转换成数字 IIR 滤波器。

解：将式(10.3.6)代入 $H(s)$得

$$H(z)=\frac{1}{\left(\dfrac{1-z^{-1}}{T}+0.1\right)^2+9}$$

$$=\frac{T^2/(1+0.2T+9.01T^2)}{1-\dfrac{2(1+0.1T)}{1+0.2T+9.01T^2}z^{-1}+\dfrac{1}{1+0.2T+9.01T^2}z^{-2}}$$

为了使极点靠近单位圆，如果将 T 选得足够小(如 $T\leqslant 0.1$)，那么系统函数 $H(z)$具有谐振性质。注意，必须满足 $a_1^2<4a_2$，以保证极点是复数。

例如，如果 $T=0.1$，那么极点位于

$$p_{1,2}=0.91\pm j0.27=0.949e^{\pm j16.5^\circ}$$

注意，谐振频率的范围限于低频，这是由映射的性质决定的，建议读者对不同的 T 值画出数字滤波器的频率响应 $H(\omega)$，并将这些结果与模拟滤波器的频率响应进行比较。

例 10.3.2　利用如下映射将例 10.3.1 中的模拟带通滤波器转换成数字 IIR 滤波器：

$$s=\frac{1}{T}(z-z^{-1})$$

解：通过置换 $H(s)$中的 s，可得到

$$H(z)=\frac{1}{\left(\dfrac{z-z^{-1}}{T}+0.1\right)^2+9}$$

$$=\frac{z^2T^2}{z^4+0.2Tz^3+(2+9.01T^2)z^2-0.2Tz+1}$$

我们注意到，从 $H_a(s)$转换到 $H(z)$的过程中，该映射引入了两个额外的零点。因此，数字滤波器要比模拟滤波器复杂很多。这是上面所给映射的一个主要不足。

10.3.2 用冲激不变设计 IIR 滤波器

在冲激不变方法中,我们的目标是设计一个具有模拟滤波器冲激响应采样形成的单位样本响应 $h(n)$的 IIR 滤波器,即

$$h(n) \equiv h(nT), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{10.3.17}$$

其中,T 为采样间隔。

为了研究式(10.3.17)的含义,我们参考前面的 6.1 节,回想一下,当按每秒 $F_s = 1/T$ 个样本对具有谱 $X_a(F)$的连续时间信号 $x_a(t)$采样时,采样信号的谱就是定标谱 $F_sX_a(F)$的周期性重复,其周期为 F_s。具体地说,两者之间有如下关系:

$$X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[(f-k)F_s] \tag{10.3.18}$$

其中 $f = F/F_s$,是归一化频率。如果采样率低于 $X_a(F)$最高频率的两倍,则会出现混叠现象。

在对频率响应为 $H_a(F)$的模拟滤波器采样时,单位样本响应为 $h(n) \equiv h_a(nT)$的数字滤波器的频率响应为

$$H(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[(f-k)F_s] \tag{10.3.19}$$

或者等效表示为

$$H(\omega) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[(\omega - 2\pi k)F_s] \tag{10.3.20}$$

或者也可表示成

$$H(\Omega T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \tag{10.3.21}$$

图 10.3.3 描绘了一个低通模拟滤波器的频率响应和相应的数字滤波器的频率响应。

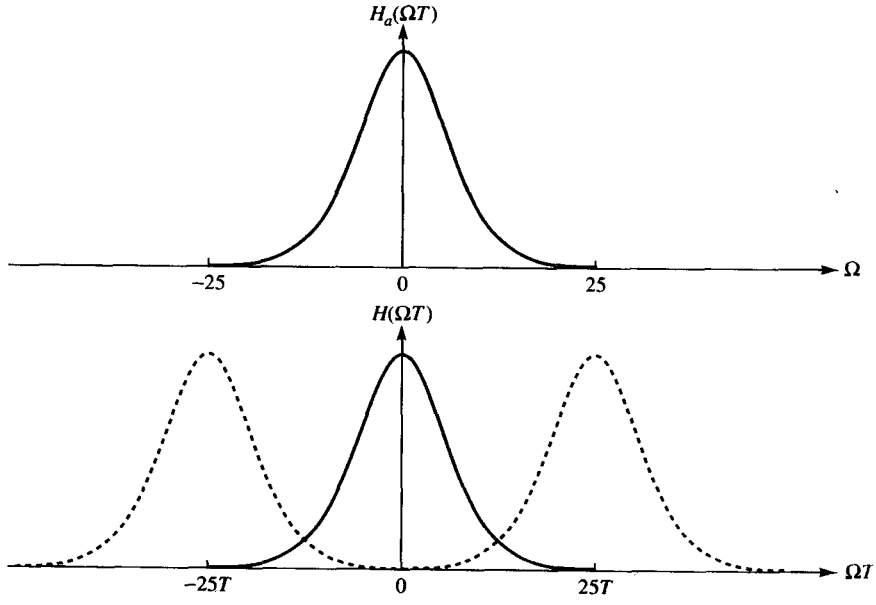


图 10.3.3 模拟滤波器的频率响应 $H_a(\omega)$和带有混叠现象的相应数字滤波器的频率响应

很明显，如果采样间隔 T 选得足够小，就可以完全避免或尽量最小化混叠效应，那么频率响应 $H(\omega)$ 的数字滤波器具有相应的模拟滤波器的频率响应特性。由于采样过程会引起谱混叠效应，故冲激不变方法不适合于高通滤波器。

为了研究 z 平面和 s 平面间采样过程所包含的点映射关系，我们通过式(10.3.21)将 $h(n)$ 的 z 变换和 $h_a(t)$ 的拉普拉斯变换联系起来。这一关系式为

$$H(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \tag{10.3.22}$$

其中，

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \\ H(z)|_{z=e^{sT}} &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-sTn} \end{aligned} \tag{10.3.23}$$

注意，当 $s = j\Omega$ 时，式(10.3.22)可简化为式(10.3.21)，其中在 $H_a(\omega)$ 中的因子 j 简写到了符号中。

考虑由关系式

$$z = e^{sT} \tag{10.3.24}$$

所包含的从 s 平面到 z 平面的映射关系。如果我们用 $s = \sigma + j\Omega$ 替换 s，并按极坐标形式将复变量 z 表示成 $z = re^{j\omega}$，那么式(10.3.24)变为

$$re^{j\omega} = e^{\sigma T}e^{j\Omega T}$$

显然有

$$\begin{aligned} r &= e^{\sigma T} \\ \omega &= \Omega T \end{aligned} \tag{10.3.25}$$

因此，$\sigma < 0$ 意味着 $0 < r < 1$，$\sigma > 0$ 意味着 $r > 1$，当 $\sigma = 0$ 时，$r = 1$。所以，在 s 平面中的 LHP 映射到 z 平面的单位圆内，而 s 平面中的 RHP 映射到 z 平面的单位圆外。

另外，如上面已指出的，$j\Omega$ 轴映射为 z 平面的单位圆，但该映射不是一一映射，因为在 $(-\pi,\pi)$ 上，ω 是唯一的，映射 $\omega = \Omega T$ 意味着将区间 $-\pi/T \leqslant \Omega \leqslant \pi/T$ 映射成 $-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$ 中相应的值。此外，频率区间 $\pi/T \leqslant \Omega \leqslant 3\pi/T$ 也映射成区间 $-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$ 中相应的值，并且通常当 k 为整数时，区间 $(2k-1)\pi/T \leqslant \Omega \leqslant (2k+1)\pi/T$ 的映射均是如此。因此，从模拟频率 Ω 到数字域的频率 ω 的映射是多对一映射，这简单地反映了采样的混叠效应。图 10.3.4 说明了关系式(10.3.24)从 s 平面到 z 平面的映射。

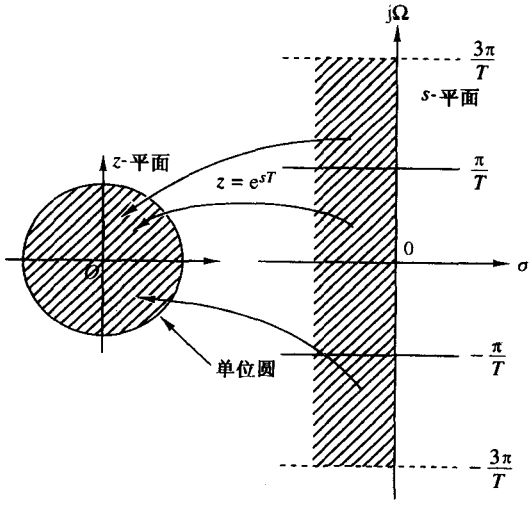


图 10.3.4　映射 $z = e^{sT}$ 将 s 平面宽为 $2\pi/T(\sigma < 0)$ 的带映射成 z 平面单位圆内的点

为了进一步探讨冲激不变设计方法对所得滤波器特性的影响，我们以部分分式的形式表示模拟滤波器的系统函数。假设模拟滤波器的极点互不相同，我们可以将 $H_a(s)$ 表示成

$$H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{s-p_k} \tag{10.3.26}$$

其中,$\{p_k\}$为模拟滤波器的极点,$\{c_k\}$为部分分式展开的系数。因此,

$$h_a(t)=\sum_{k=1}^{N}c_k e^{p_k t},\qquad t\geqslant 0 \tag{10.3.27}$$

如果我们按 $t=nT$ 对 $h_a(t)$进行周期性采样,有

$$h(n)=h_a(nT)=\sum_{k=1}^{N}c_k e^{p_k Tn} \tag{10.3.28}$$

现在,置换式(10.3.28),所得的数字 IIR 滤波器的系统函数变成

$$\begin{aligned}H(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}c_k e^{p_k Tn}\right)z^{-n}\\&=\sum_{k=1}^{N}c_k\sum_{n=0}^{\infty}(e^{p_k T}z^{-1})^n\end{aligned} \tag{10.3.29}$$

因为 $p_k<0$,所以式(10.3.29)中的求和收敛,并且得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(e^{p_k T}z^{-1})^n=\frac{1}{1-e^{p_k T}z^{-1}} \tag{10.3.30}$$

所以,数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{1-e^{p_k T}z^{-1}} \tag{10.3.31}$$

我们注意到,数字滤波器的极点位于

$$z_k=e^{p_k T},\qquad k=1,2,\cdots,N \tag{10.3.32}$$

虽然,通过式(10.3.32)的关系将极点从 s 平面映射到 z 平面,但是,我们要强调的是在两个域中的零点并不满足相同的关系。因此,冲激不变方法并不对应于式(10.3.24)中的简单点映射。

导出式(10.3.31)给定的 $H(z)$的展开是以滤波器具有不同的极点为前提的,这种展开可推广到多阶极点情况。但是,为简洁起见,我们不打算推广式(10.3.31)。

例 10.3.3 利用冲激不变法,将系统函数为

$$H_a(s)=\frac{s+0.1}{(s+0.1)^2+9}$$

的模拟滤波器转换成数字 IIR 滤波器。

解:我们注意到模拟滤波器在 $s=-0.1$ 处有一个零点,在

$$p_k=-0.1\pm j3$$

处有一对复共轭极点,如图 10.3.5 所示。

为了利用冲激不变法设计数字 IIR 滤波器，我们不必先确定冲激响应 $h_a(t)$，而是根据 $H_a(s)$的部分分式展开直接确定式(10.3.31)中的 $H(z)$。于是得

$$H(s)=\frac{\frac{1}{2}}{s+0.1-\mathrm{j}3}+\frac{\frac{1}{2}}{s+0.1+\mathrm{j}3}$$

则有

$$H(z)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\mathrm{e}^{-0.1T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}3T}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\mathrm{e}^{-0.1T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3T}z^{-1}}$$

因为两个极点是复共轭的，我们可以将它们结合在一起形成单个双极点滤波器，其系统函数为

$$H(z)=\frac{1-(\mathrm{e}^{-0.1T}\cos 3T)z^{-1}}{1-(2\mathrm{e}^{-0.1T}\cos 3T)z^{-1}+\mathrm{e}^{-0.2T}z^{-1}}$$

$T=0.1$ 和 $T=0.5$ 时，该滤波器的频率响应特性的幅度如图 10.3.6 所示。为了比较，我们也给出模拟滤波器频率响应的幅度，如图 10.3.7 所示。注意，$T=0.5$ 时的混叠比 $T=0.1$ 时的混叠要严重许多，另外，谐振频率随着 T 的变化会发生偏移。

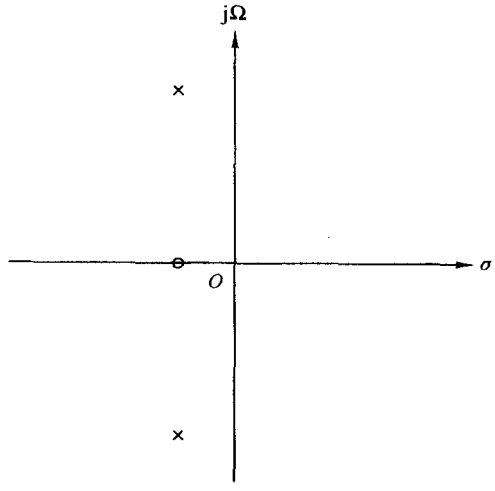


图 10.3.5　例 10.3.3 中的模拟滤波器的极点零点位置

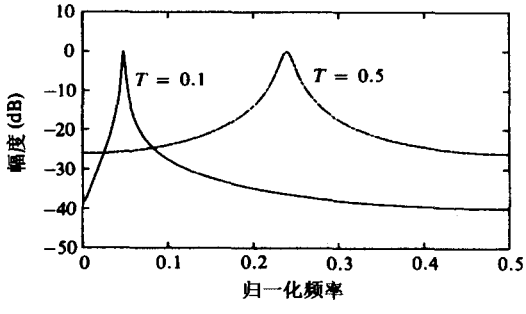


图 10.3.6　例 10.3.3 中的数字滤波器的频率响应

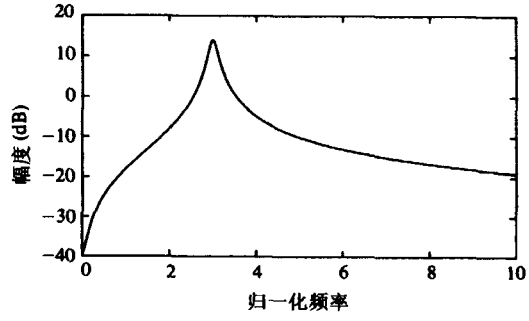


图 10.3.7　例 10.3.3 中的模拟滤波器的频率响应

从上面的例题可以看出，为了最小化混叠效应，选取小的 T 值非常重要。由于混叠现象，冲激不变法仅仅适用于设计低通和带通滤波器。

10.3.3 利用双线性变换设计 IIR 滤波器

前两节描述的 IIR 滤波器设计方法有一个严重的局限性,那就是它们仅仅适合于低通滤波器和一类有限的带通滤波器。

在这一节中,我们将介绍一个称为双线性变换的从 s 平面到 z 平面的映射,该变换克服了前面描述的两种方法的局限性。双线性变换是一个保形映射,它仅仅将 $j\Omega$ 轴变换到 z 平面的单位圆一次,从而避免了频率成分的混叠。而且,在 s 平面 LHP 上的所有点被映射到 z 平面的单位圆内,而在 s 平面 RHP 上的所有点被映射到 z 平面单位圆以外的相应点。

双线性变换与数值积分的梯形公式有关,例如,我们考虑系统函数为

$$H(s)=\frac{b}{s+a} \tag{10.3.33}$$

的模拟线性滤波器。该系统也可以用微分方程来描述:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+ay(t)=bx(t) \tag{10.3.34}$$

如果我们对导数积分,并利用梯形公式近似该积分,而不是用有限微分量替换导数,那么可得

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}y'(\tau)\mathrm{d}\tau+y(t_0) \tag{10.3.35}$$

式中 $y'(t)$表示 $y(t)$的导数,用 $t=nT$ 和 $t_0=nT-T$ 的梯形公式近似式(10.3.35)中的积分可得

$$y(nT)=\frac{T}{2}[y'(nT)+y'(nT-T)]+y(nT-T) \tag{10.3.36}$$

现在,计算微分方程式(10.3.34)在 $t=nT$ 处的值,可得

$$y'(nT)=-ay(nT)+bx(nT) \tag{10.3.37}$$

我们利用式(10.3.37)替换式(10.3.36)中的导数,于是可得等价离散时间系统的微分方程。令 $y(n)\equiv y(nT)$和 $x(n)\equiv x(nT)$,可得

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)y(n)-\left(1-\frac{aT}{2}\right)y(n-1)=\frac{bT}{2}[x(n)+x(n-1)] \tag{10.3.38}$$

对该差分方程进行 z 变换得

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)Y(z)-\left(1-\frac{aT}{2}\right)z^{-1}Y(z)=\frac{bT}{2}(1+z^{-1})X(z)$$

因此,等效数字滤波器的系统函数是

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{(bT/2)(1+z^{-1})}{1+aT/2-(1-aT/2)z^{-1}}$$

或者等效为

$$H(z)=\frac{b}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a} \tag{10.3.39}$$

显然,从 s 平面到 z 平面的映射为

$$s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \tag{10.3.40}$$

这就是双线性变换。

虽然我们是在一阶微分方程的情况下导出双线性变换的，但是，一般来说，该变换对 N 阶微分方程也适用。

为了研究双线性变换的特性，我们令

$$z = re^{j\omega}$$

$$s = \sigma + j\Omega$$

则式(10.3.40)变为

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T}\frac{re^{j\omega}-1}{re^{j\omega}+1} = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} + j\frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega}\right)$$

即

$$\sigma = \frac{2}{T}\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} \tag{10.3.41}$$

$$\Omega = \frac{2}{T}\frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega} \tag{10.3.42}$$

首先，我们注意到如果 $r<1$，则 $\sigma<0$，如果 $r>1$，则 $\sigma>0$。因此，s 平面的 LHP 映射在 z 平面单位圆之内，而 s 平面的 RHP 则映射在单位圆之外。当 $r=1$ 时，则 $\sigma=0$，并且有

$$\Omega = \frac{2}{T}\frac{\sin\omega}{1+\cos\omega} = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2} \tag{10.3.43}$$

或者等效为

$$\omega = 2\arctan\frac{\Omega T}{2} \tag{10.3.44}$$

关系式(10.3.44)建立了两个域中频率变量之间的联系，如图 10.3.8 所示。我们注意到，在 Ω 域中的整个区域仅仅映射到区间 $-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$。然而，该映射是高度非线性的，我们注意到由于反正切函数的非线性引起的频率压缩或通常所说的频率变形。

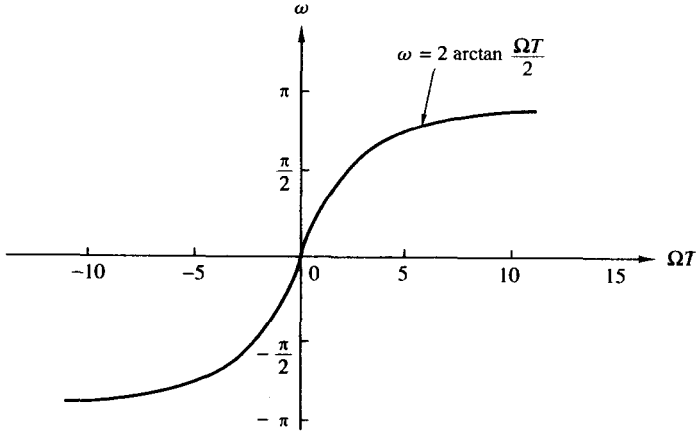


图 10.3.8　双线性变换引起的频率变量 ω 和 Ω 间的映射

比较有趣的是，双线性变换将点 $s=\infty$ 映射成点 $z=-1$。因此，式(10.3.33)中的单极点低通滤波器，由于 $s=\infty$ 处有一个零点，故相应的数字滤波器在 $z=-1$ 处有个零点。

例 10.3.4 利用双线性变换,将系统函数为

$$H_a(s)=\frac{s+0.1}{(s+0.1)^2+16}$$

的模拟滤波器转换成数字 IIR 滤波器,使其具有一个谐振频率 $\omega_r=\pi/2$。

解:首先,我们注意到模拟滤波器有一个谐振频率 $\Omega_r=4$。通过选取参数 T 的值,可将该频率映射成 $\omega_r=\pi/2$。根据式(10.3.43),我们必须选取 $T=1/2$,才能有 $\omega_r=\pi/2$。于是所希望的映射为

$$s=4\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

所得滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{0.128+0.006z^{-1}-0.122z^{-1}}{1+0.0006z^{-1}+0.975z^{-2}}$$

我们注意到,在 $H(z)$的分母中 z^{-1}项的系数非常小,可用零来近似,所以系统函数可变为

$$H(z)=\frac{0.128+0.006z^{-1}-0.122z^{-2}}{1+0.975z^{-2}}$$

该滤波器的极点和零点分别为

$$p_{1,2}=0.987e^{\pm j\pi/2}$$

和

$$z_{1,2}=-1,0.95$$

到此,我们成功设计了一个在 $\omega=\pi/2$ 附近有谐振的双极点滤波器。

该例题中,选取参数 T,使得模拟滤波器的谐振频率映射成数字滤波器所期望的谐振频率。通常数字滤波器的设计从数字域中包括频率变量 ω 在内的技术指标开始,利用式(10.3.43)将用频率表示的这些技术指标转换到模拟域,然后设计满足这些技术指标的模拟滤波器,并利用双线性变换式(10.3.40)将其转换成数字滤波器。该方法中,参数 T 是透明的,可以设为任何值(例如,$T=1$)。下面的例题说明了这一点。

例 10.3.5 设计一个 3 dB 带宽为 0.2π 的单极点低通滤波器,要求利用对系统函数为

$$H(s)=\frac{\Omega_c}{s+\Omega_c}$$

的模拟滤波器进行双线性变换得到,其中 Ω_c 为 3 dB 带宽。

解:数字滤波器在 $\omega_c=0.2\pi$ 处指定有 -3 dB 的增益。在模拟滤波器的频域,$\omega_c=0.2\pi$ 对应于

$$\Omega_c=\frac{2}{T}\tan 0.1\pi=\frac{0.65}{T}$$

于是,模拟滤波器的系统函数为

$$H(s)=\frac{0.65/T}{s+0.65/T}$$

这就是在模拟域中我们所期望的滤波器。

现在,我们利用式(10.3.40)的双线性变换,将模拟滤波器转换为数字滤波器,从而有

$$H(z)=\frac{0.245(1+z^{-1})}{1-0.509z^{-1}}$$

其中,参数 T 已消去。

最后,得到数字滤波器的频率响应为

$$H(\omega)=\frac{0.245(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})}{1-0.509\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

当 $\omega=0$ 时，$H(0)=1$，并且 $\omega=0.2\pi$ 时，$|H(0.2\pi)|=0.707$，这正是我们所期望的响应。

10.3.4　通用模拟滤波器的特性

从前面的讨论可以看出，通过从模拟滤波器开始，然后利用映射将 s 平面变换到 z 平面，可以很容易得到 IIR 数字滤波器。因此，数字滤波器的设计可以简化为，首先设计一个适当的模拟滤波器，然后实现从 $H(s)$ 到 $H(z)$ 的变换，这样就能保留模拟滤波器的理想特性。

模拟滤波器的设计已经很成熟，关于这一主题已有许多著作。我们的讨论仅限于低通滤波器。接着，我们描述几种将低通原型滤波器转换成带通、高通和带阻滤波器的变换。

巴特沃兹滤波器。低通巴特沃兹滤波器是使用幅度平方频率响应

$$|H(\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}=\frac{1}{1+\epsilon^2(\Omega/\Omega_p)^{2N}} \tag{10.3.45}$$

描述的全极点滤波器，其中 N 是滤波器的阶数，Ω_c 为其 -3 dB 频率（通常称为截止频率），Ω_p 是通带截止频率，$1/(1+\epsilon^2)$ 是 $|H(\Omega)|^2$ 频带边缘值。因为 $H(s)H(-s)$ 在 $s=\mathrm{j}$ 处的值就等于 $|H(\Omega)|^2$ 的值，由此得

$$H(s)H(-s)=\frac{1}{1+(-s^2/\Omega_c^2)^N} \tag{10.3.46}$$

$H(s)H(-s)$ 的极点以等间隔方式出现在半径为 Ω_c 的圆上。根据式(10.3.46)可得

$$\frac{-s^2}{\Omega_c^2}=(-1)^{1/N}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2k+1)\pi/N},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

由此得

$$s_k=\Omega_c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2k+1)\pi/2N},\qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{10.3.47}$$

例如，图 10.3.9 说明了在 $N=4$ 和 $N=5$ 情况下的巴特沃兹滤波器的极点位置。

对于 N 的几个不同取值，巴特沃兹滤波器的频率响应特性如图 10.3.10 所示。我们注意到，在通带和阻带中，$|H(\Omega)|^2$ 均具有单调性，从式(10.3.45)可以看出滤波器在指定频率 Ω_c 处满足衰减 δ_2 所要求的阶数。于是，在 $\Omega=\Omega_s$ 处，有

$$\frac{1}{1+\epsilon^2(\Omega_s/\Omega_p)^{2N}}=\delta_2^2$$

由此可得

$$N=\frac{\lg[(1/\delta_2^2)-1]}{2\lg(\Omega_s/\Omega_c)}=\frac{\lg(\delta/\epsilon)}{\lg(\Omega_s/\Omega_p)} \tag{10.3.48}$$

其中，定义了 $\delta_2=1/\sqrt{1+\delta_2}$。因此，巴特沃兹滤波器完全可由参数 N,δ_2,ϵ 和 Ω_s/Ω_p 描述。

例 10.3.6　假定低通巴特沃兹滤波器具有 500 Hz 的 -3 dB 带宽，并在 1000 Hz 处有 40 dB 的衰减，请确定该滤波器的阶数和极点位置。

解：低通巴特沃兹滤波器的关键频率是 -3 dB 频率 Ω_c 和阻带频率 Ω_s，

$$\Omega_c=1000\pi$$

$$\Omega_s=2000\pi$$

对于衰减为 40 dB 来说，$\delta_2 = 0.01$。因此由式(10.3.48)可得

$$N = \frac{\lg(10^4 - 1)}{2\lg 2}$$

$$= 6.64$$

为了满足期望技术指标，我们选择 $N = 7$。所得的极点位置为

$$s_k = 1000\pi e^{j[\pi/2 + (2k+1)\pi/14]}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, 6$$

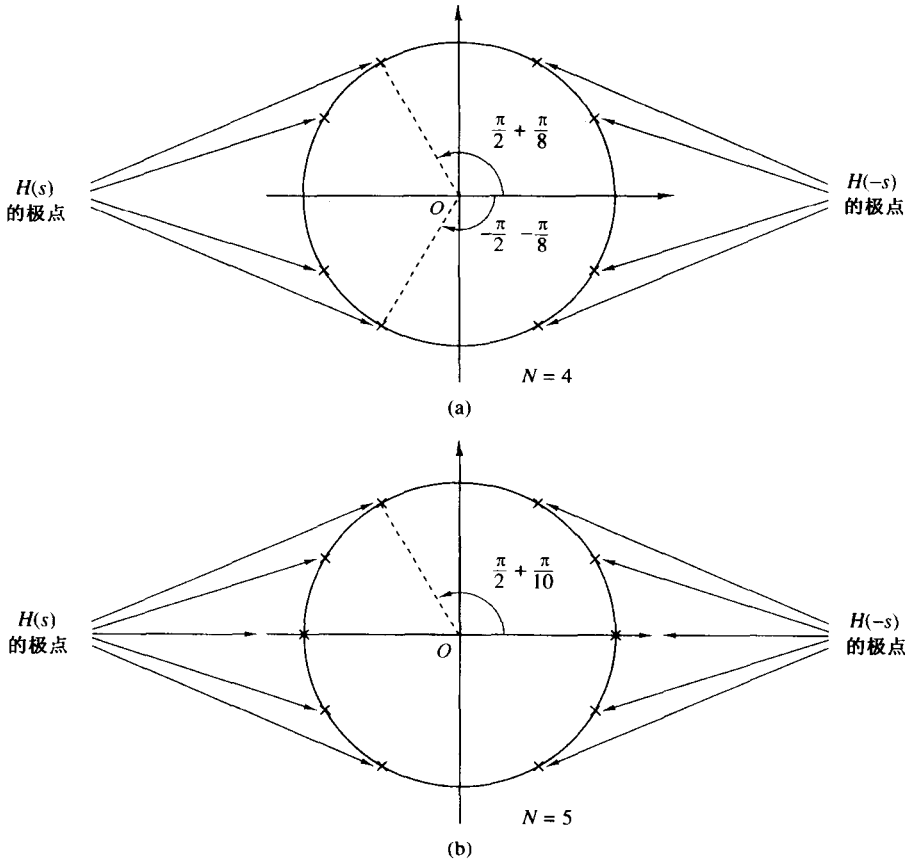


图 10.3.9 巴特沃兹滤波器的极点位置

切比雪夫滤波器。切比雪夫滤波器有两类，一类是在通带内幅度频率响应呈现等纹波特性，而阻带内是单调的全极点滤波器；另一类是在通带内幅度频率响应呈现单调特性，而阻带内是等纹波特性，同时有零点和极点的滤波器，这类滤波器的零点位于 s 平面的虚轴上。

第一类切比雪夫滤波器频率响应特性的幅度给定为

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)} \tag{10.3.49}$$

其中，ϵ是与通带纹波有关的参数，$T_N(x)$是一个 N 阶切比雪夫多项式，定义为

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \arccos x), & |x| \leqslant 1 \\ \cosh(N \operatorname{arcosh} x), & |x| > 1 \end{cases} \tag{10.3.50}$$

切比雪夫多项式可以用如下递推方程产生：

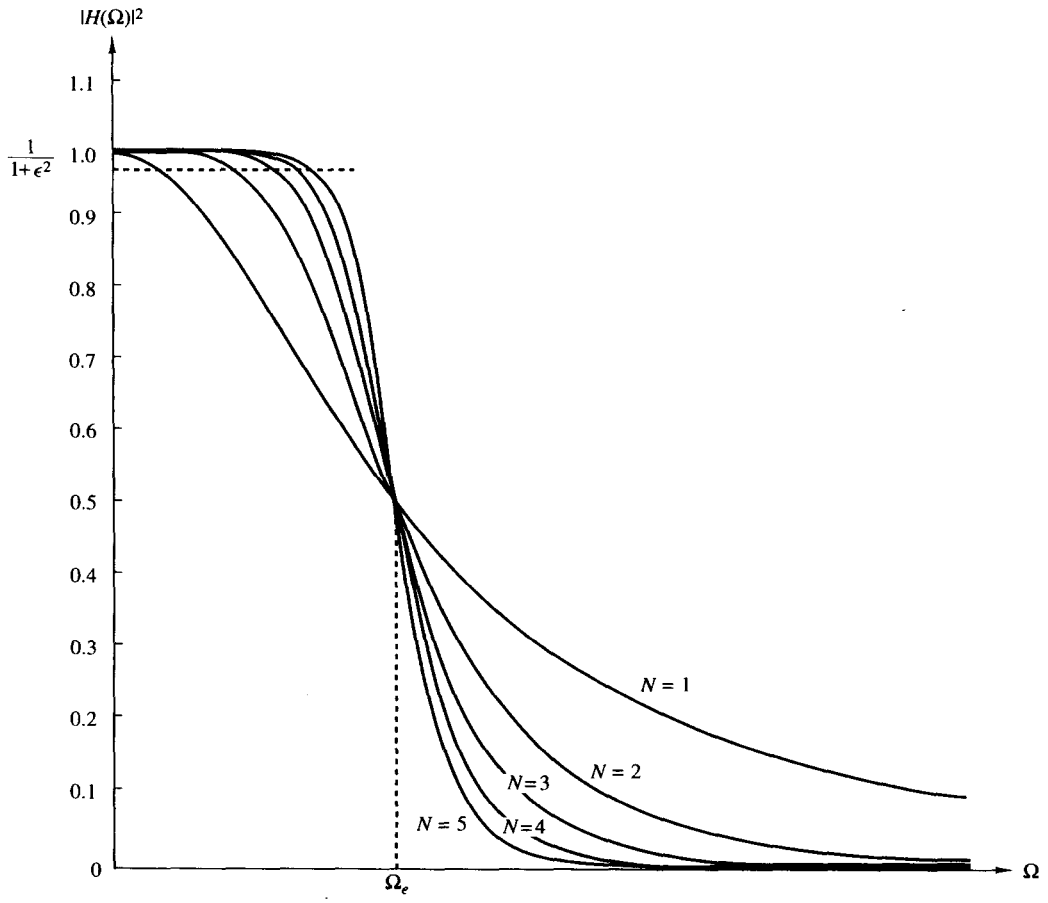


图 10.3.10　巴特沃兹滤波器的频率响应

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x), \qquad N = 1, 2, \cdots \tag{10.3.51}$$

其中 $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$。由式(10.3.51)我们可得 $T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x$,依次类推。

这些多项式具有如下一些特性:

1. 当 $|x| \leqslant 1$ 时 $|T_N(x)| \leqslant 1$。

2. 对所有 $N, T_N(1) = 1$。

3. 多项式 $T_N(x)$的所有根都在区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 内。

滤波器参数ϵ与通带纹波有关,N 为奇数和 N 为偶数时,如图 10.3.11 所示。对于 N 为奇数,$T_N(0) = 0$,由此可得 $|H(0)|^2 = 1$。对于 N 为偶数,$T_N(0) = 1$,由此可得 $|H(0)|^2 = 1/(1+\epsilon^2)$)。在截止频率 $\Omega = \Omega_p$ 处,有 $T_N(1) = 1$,因此可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

或者等效为

$$\epsilon^2 = \frac{1}{(1-\delta_1)^2} - 1 \tag{10.3.52}$$

其中,δ_1 是通带纹波的值。

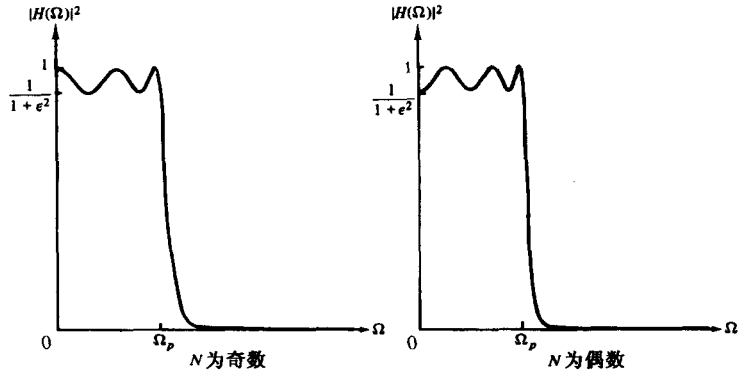


图 10.3.11 第 I 类切比雪夫滤波器的特性

第 I 类切比雪夫滤波器的极点位于 s 平面中长轴为

$$r_1 = \Omega_p \frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \tag{10.3.53}$$

而短轴为

$$r_2 = \Omega_p \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} \tag{10.3.54}$$

的椭圆上,其中 β 与 ϵ 有如下关系:

$$\beta = \left[\frac{\sqrt{1+\epsilon^2}+1}{\epsilon}\right]^{1/N} \tag{10.3.55}$$

如图 10.3.12 所示,通过首先找到等价的 N 阶巴特沃兹滤波器半径为 r_1 或半径为 r_2 的圆上的极点,可以轻易确定 N 阶滤波器的极点位置,如果我们将巴特沃兹滤波器极点的角度定义为

$$\phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \tag{10.3.56}$$

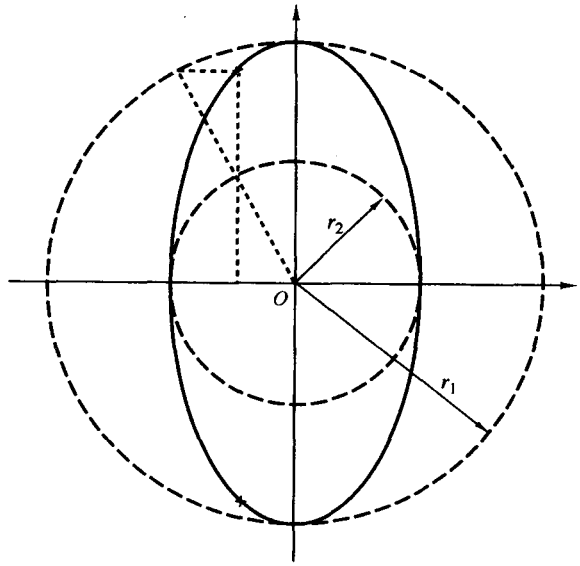


图 10.3.12 切比雪夫滤波器极点位置的确定

则切比雪夫滤波器的极点位置位于椭圆上，其坐标(x_k, y_k)，$k=0,1,\cdots,N-1$ 可表示为

$$\begin{aligned} x_k &= r_2 \cos\phi_k, \quad k=0,1,\cdots,N-1 \\ y_k &= r_1 \sin\phi_k, \quad k=0,1,\cdots,N-1 \end{aligned} \tag{10.3.57}$$

第 II 类切比雪夫滤波器同时包含零点和极点，其频率响应的幅度平方定义为

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2[T_N^2(\Omega_s/\Omega_p)/T_N^2(\Omega_s/\Omega)]} \tag{10.3.58}$$

其中，$T_N(x)$是 N 阶切比雪夫多项式，Ω_s 是阻带频率，如图 10.3.13 所示。零点在虚轴上位于

$$s_k = \mathrm{j}\frac{\Omega_s}{\sin\phi_k}, \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{10.3.59}$$

极点位于(v_k, w_k)，其中

$$v_k = \frac{\Omega_s x_k}{\sqrt{x_k^2+y_k^2}}, \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{10.3.60}$$

$$w_k = \frac{\Omega_s y_k}{\sqrt{x_k^2+y_k^2}}, \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{10.3.61}$$

其中，$\{x_k\}$和$\{y_k\}$定义如式(10.3.57)，β 与阻带中纹波的关系为

$$\beta = \left[\frac{1+\sqrt{1-\delta_2^2}}{\delta_2}\right]^{1/N} \tag{10.3.62}$$

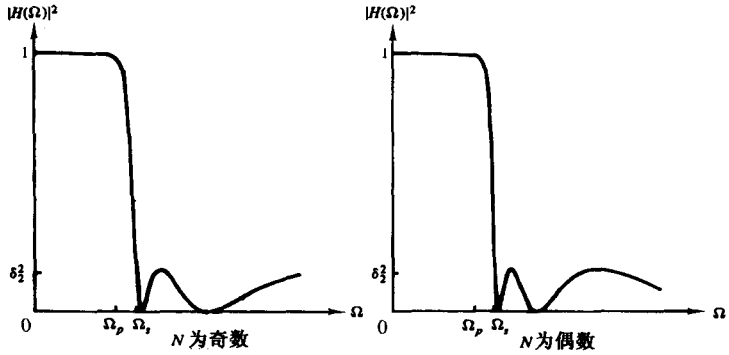


图 10.3.13　第 II 类切比雪夫滤波器的特性

从上面的描述，我们注意到切比雪夫滤波器可用参数 N,ϵ,δ_2 和 Ω_s/Ω_p 来表征。对于一组给定的技术指标ϵ,δ_2 和 Ω_s/Ω_p，我们可以根据以下关系式确定滤波器的阶数 N：

$$\begin{aligned} N &= \frac{\lg\left[\left(\sqrt{1-\delta_2^2}+\sqrt{1-\delta_2^2(1+\epsilon^2)}\right)/\epsilon\delta_2\right]}{\lg\left[(\Omega_s/\Omega_p)+\sqrt{(\Omega_s/\Omega_p)^2-1}\right]} \\ &= \frac{\operatorname{arcosh}(\delta_2/\epsilon)}{\operatorname{arcosh}(\Omega_s/\Omega_p)} \end{aligned} \tag{10.3.63}$$

其中，定义 $\delta_2 = 1/\sqrt{1+\delta^2}$。

例 10.3.7 假定第 I 类切比雪夫滤波器在通带有 1 dB 的纹波,截止频率为 $\Omega_p = 1000\pi$,阻带频率为 2000π,在 $\Omega \geqslant \Omega_s$ 的情况下,衰减为 40 dB 或更多,请确定滤波器的阶数和极点。

解:首先,我们确定滤波器的阶数。根据已知条件,可得

$$10\lg(1+\epsilon^2) = 1$$

$$1+\epsilon^2 = 1.259$$

$$\epsilon^2 = 0.259$$

$$\epsilon = 0.5088$$

和

$$20\lg\delta_2 = -40$$

$$\delta_2 = 0.01$$

因此,根据式(10.3.63)可得

$$N = \frac{\lg 196.54}{\lg(2+\sqrt{3})}$$

$$= 4.0$$

于是,具有四个极点的第 I 类切比雪夫滤波器满足技术指标。

然后,根据式(10.3.53)~式(10.3.57),确定滤波器的极点位置。我们首先计算 β, r_1 和 r_2,可得

$$\beta = 1.429$$

$$r_1 = 1.06\Omega_p$$

$$r_2 = 0.365\Omega_p$$

角度 $\{\phi_k\}$ 为

$$\phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{8}, \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

所以,极点位于

$$x_1 + jy_1 = -0.1397\Omega_p \pm j0.979\Omega_p$$

$$x_2 + jy_2 = -0.337\Omega_p \pm j0.4056\Omega_p$$

在例 10.3.7 中,滤波器技术指标与涉及到巴特沃兹滤波器设计的例 10.3.6 给定的技术指标非常相似。在那种情况下,满足技术指标所要求的极点个数是 7。另一方面,满足给定技术指标的切比雪夫滤波器所要求的极点数目仅仅为 4。这一结果是具有代表性的。一般来说,切比雪夫滤波器与相应的巴特沃兹滤波器相比满足技术指标所要求的极点数目较少。另一方面,如果我们把巴特沃兹滤波器与一个具有相同极点数、通带和阻带的切比雪夫滤波器相比,则切比雪夫滤波器具有较小的过渡带宽。Zverev(1967)已将切比雪夫滤波器的特性和它们的零极点位置制成表格。有兴趣的读者可参考 Zverev 的手册。

椭圆滤波器。椭圆滤波器同时在通带和阻带内呈现等纹波特性,N 为奇数和偶数时,如图 10.3.14 所示。这类滤波器不仅包含极点而且包含零点,并且可用如下幅度平方频率响应来描述:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 U_N(\Omega/\Omega_p)} \tag{10.3.64}$$

其中,$U_N(x)$ 是 N 阶雅可比椭圆函数,Zverev(1967)已将它制表,另外 ϵ 是与通带纹波有关的参数,零点在 $j\Omega$ 轴上。

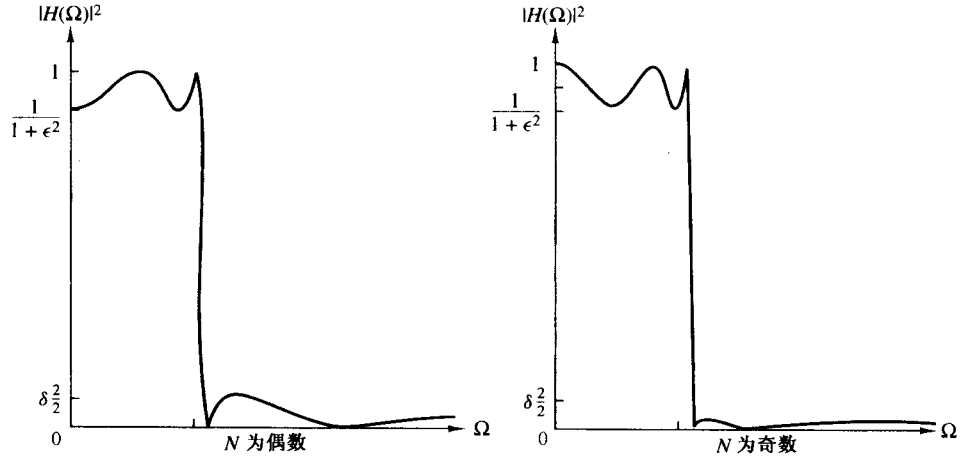


图 10.3.14　椭圆滤波器的幅度平方频率特性

我们回想一下有关 FIR 滤波器的讨论，当我们将逼近误差平均地分散到通带和阻带内时，就得到了最有效的设计。椭圆滤波器达到这一目标，并且从给定一组技术指标产生最小阶数滤波器的观点看，是最有效的。等效地，我们可以说对给定的阶数和给定的一组技术指标，椭圆滤波器的过渡带宽最小。

满足通带纹波 δ_1、阻带纹波 δ_2 和过渡比 Ω_p/Ω_s 这一组给定技术指标的滤波器的阶数为

$$N = \frac{K(\Omega_p/\Omega_s)K\left(\sqrt{1-(\epsilon^2/\delta^2)}\right)}{K(\epsilon/\delta)K\left(\sqrt{1-(\Omega_p/\Omega_s)^2}\right)} \tag{10.3.65}$$

其中，$K(x)$为第一类完全椭圆积分，定义为

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}} \tag{10.3.66}$$

并且 $\delta_2 = \sqrt{1+\delta^2}$。积分的值在一些教科书里已制成表格[例如，Jahnke，Emde(1945)和 Dwight(1957)写的书]。通带纹波为 $10\lg(1+\epsilon^2)$。

我们不打算对椭圆函数进行任何详细的介绍，因为这已超出了本书的内容范围。只要说明根据以上指出的频率技术指标，已有现成的设计椭圆滤波器的计算机程序就可以了。

鉴于椭圆滤波器的最佳性，读者可能会问在实际应用中为什么还要考虑巴特沃兹滤波器或者切比雪夫滤波器呢？在某些应用中，其他类型的滤波器可能更合适的一个重要原因是，这些滤波器的相位特性比椭圆滤波器的更好一些。在通带内，特别是靠近频带边缘，椭圆滤波器比巴特沃兹滤波器或者切比雪夫滤波器之类更加非线性。

贝塞尔滤波器。贝塞尔滤波器是一类可以用如下系统函数描述的全极点滤波器：

$$H(s) = \frac{1}{B_N(s)} \tag{10.3.67}$$

其中，$B_N(s)$是 N 阶贝塞尔多项式。这些多项式可以表示为

$$B_N(s) = \sum_{k=0}^{N} a_k s^k \tag{10.3.68}$$

其中,系数$\{a_k\}$定义为

$$a_k = \frac{(2N-k)!}{2^{N-k}k!(N-k)!}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N \tag{10.3.69}$$

另一方面,贝塞尔滤波器多项式可以根据关系式

$$B_N(s) = (2N-1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s) \tag{10.3.70}$$

用$B_0(s) = 1$和$B_1(s) = s + 1$作为初始条件,递推产生。

贝塞尔滤波器的一个重要特性就是通带内具有线性相位响应。例如,图 10.3.15 给出了阶数$N = 4$的贝塞尔滤波器与巴特沃兹滤波器的幅度和相位响应相比较的结果。我们注意到,贝塞尔滤波器的过渡带较宽,但其相位在通带内是线性的。然而,我们要强调的是,模拟滤波器的线性相位特性在利用前面描述的变换将滤波器转换到数字滤波器的过程中被破坏了。

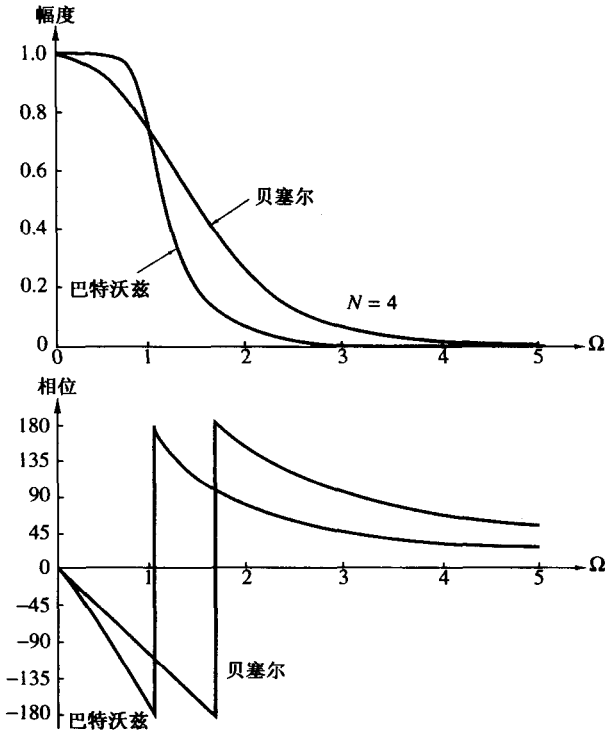


图 10.3.15 阶数$N = 4$的贝塞尔和巴特沃兹滤波器的幅度和相位响应

10.3.5 基于双线性变换的数字滤波器设计的一些例子

在这一节中,我们将给出几个根据模拟滤波器,应用双线性变换将$H(s)$转换到$H(z)$来得到数字滤波器的例子。目前,运行在 PC 机上的设计滤波器的软件包有好几种,我们利用其中一个来完成这些滤波器的设计。

设计一个低通滤波器,要求满足如下技术指标:在通带内最大的纹波为 1/2 dB,在阻带内的衰减为 60 dB,通带截止频率为$\omega_p = 0.25\pi$以及阻带截止频率为$\omega_s = 0.30\pi$。

一个满足这些技术指标的巴特沃兹滤波器的阶数$N = 37$,其频率响应特性如图 10.3.16 所示。如果利用切比雪夫滤波器,那么阶数$N = 13$就能满足技术指标。第 I 类切比雪夫滤波器的频率响应特性如图 10.3.17 所示。该滤波器的通带纹波为 0.31 dB。而椭圆滤波器只需要阶数$N = 7$就能

满足技术指标。为清楚起见，我们将结果列于表 10.6 中，而滤波器的参数和所得滤波器频率响应的数值如图 10.3.18 所示。函数 $H(z)$的参数用以下的符号表示：

$$H(z)=\prod_{i=1}^{K}\frac{b(i,0)+b(i,1)z^{-1}+b(i,2)z^{-2}}{1+a(i,1)z^{-1}+a(i,2)z^{-2}} \tag{10.3.71}$$

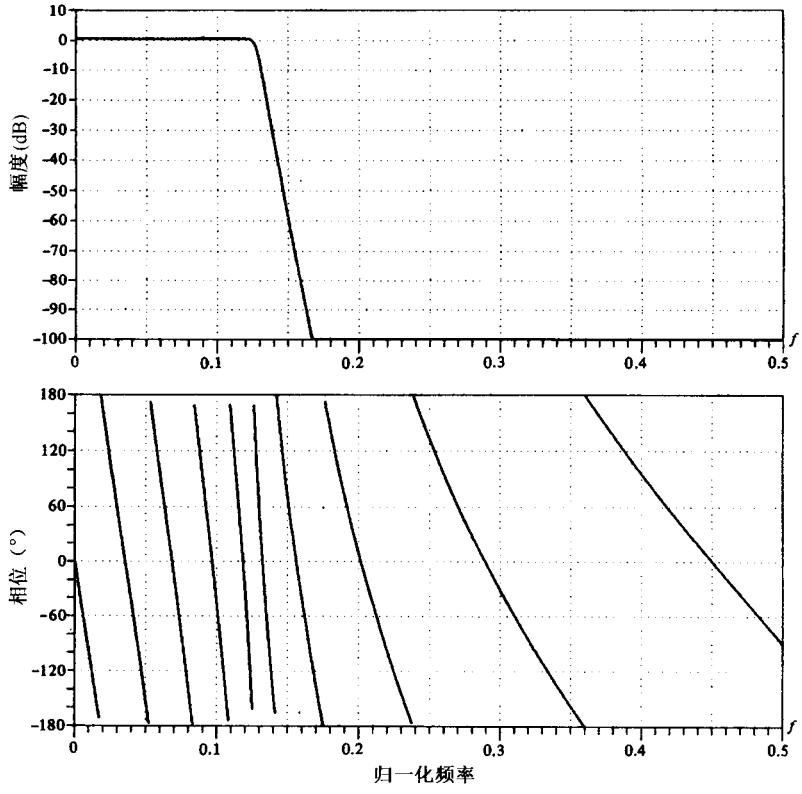


图 10.3.16　37 阶巴特沃兹滤波器的频率响应特性

表 10.6　7 阶椭圆滤波器的系数

INFINITE IMPULSE RESPONSE (IIR)
ELLIPTIC LOWPASS FILTER
UNQUANTIZED COEFFICIENTS

FILTER ORDER = 7
SAMPLING FREQUENCY = 2.000 KILOHERTZ

I.	A(I, 1)	A(I, 2)	B(I, 0)	B(I, 1)	B(I, 2)
1	-0.790103	0.000000	0.104948	0.104948	0.000000
2	-1.517223	0.714088	0.102450	-0.007817	0.102232
3	-1.421773	0.861895	0.420100	-0.399842	0.419864
4	-1.387447	0.962252	0.714929	-0.826743	0.714841

*** CHARACTERISTICS OF DESIGNED FILTER ***

	BAND 1	BAND 2
LOWER BAND EDGE	0.00000	0.30000
UPPER BAND EDGE	0.25000	1.00000
NOMINAL GAIN	1.00000	0.00000
NOMINAL RIPPLE	0.05600	0.00100
MAXIMUM RIPPLE	0.04910	0.00071
RIPPLE IN DB	0.41634	-63.00399

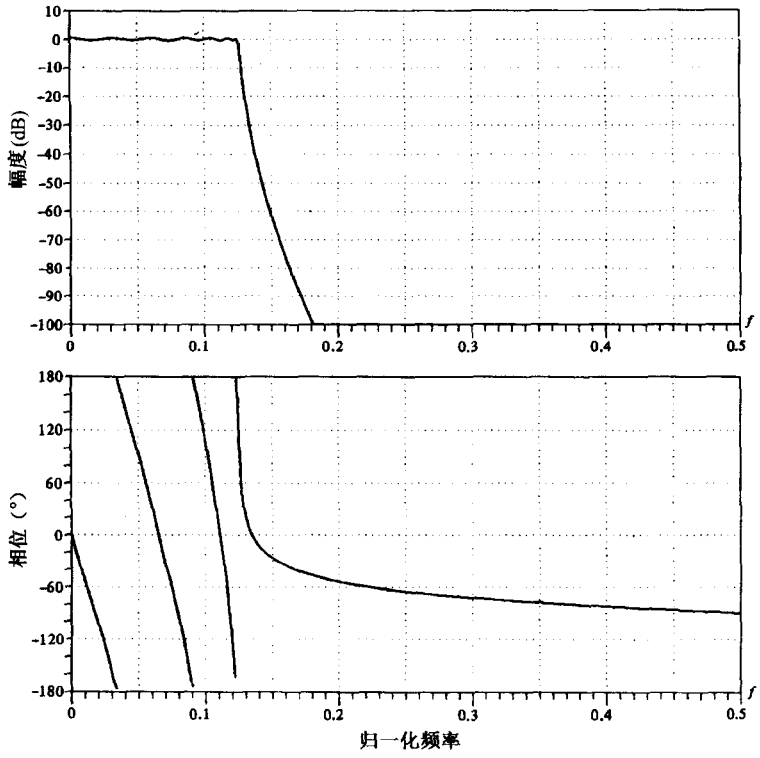


图 10.3.17 13 阶第 I 类切比雪夫滤波器的频率响应特性

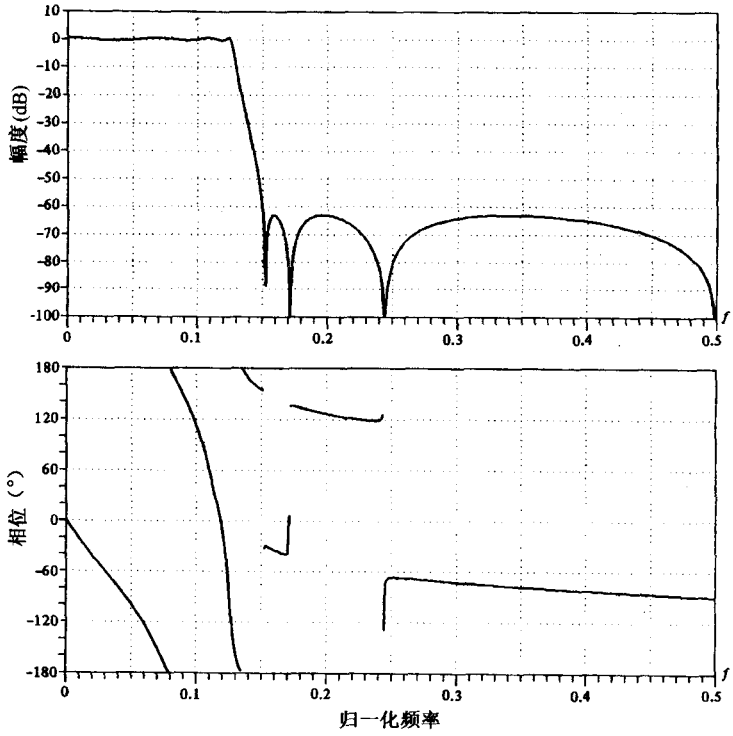


图 10.3.18 7 阶椭圆滤波器的频率响应特性

虽然在上一节我们仅仅描述了低通模拟滤波器，但是，利用 10.4 节描述的频率变换方法将一个低通滤波器转换成一个带通、带阻或高通模拟滤波器，就很容易了。然后利用双线性变换将模拟滤波器转换成等效的数字滤波器，如同前面描述的低通滤波器情况，整个设计都可以在计算机上实现。

10.4　频率变换

上一节的讨论主要集中在低通 IIR 滤波器的设计，如果我们希望设计高通、带通或者带阻滤波器，就可以简单地对一个低通原型滤波器(巴特沃兹、切比雪夫、椭圆、贝塞尔)进行频率变换得到。

一种做法是，首先在模拟域进行频率变换，然后利用 s 平面到 z 平面的映射，将频率变换后的模拟滤波器转换成相应的数字滤波器。另一种方法是，先将模拟低通滤波器转换成数字低通滤波器，然后，利用数字变换将低通数字滤波器转换成所需要的数字滤波器。一般来说，除了双线性变换外，这两种方法会产生不同的结果，但在双线性变换的情况下所得到的滤波器是相同的。下面将具体阐述这两种方法。

10.4.1　模拟域频率变换

首先，我们考虑在模拟域中进行频率变换。假定我们有一个通带截止频率为 Ω_p 低通滤波器，希望将其转换成另一个通带截止频率为 Ω'_p 的低通滤波器。我们将完成这种转换的变换记为

$$s \longrightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p}s, \qquad \text{(低通到低通)} \tag{10.4.1}$$

于是，我们得到一个系统函数为 $H_l(s) = H_p[(\Omega_p/\Omega'_p)s]$ 的低通滤波器，其中 $H_p(s)$ 是通带截止频率为 Ω_p 的原型低通滤波器的系统函数。

如果我们希望把一个低通滤波器转变成通带截止频率为 Ω'_p 的高通滤波器，则所需变换为

$$s \longrightarrow \frac{\Omega_p\Omega'_p}{s}, \qquad \text{(低通到高通)} \tag{10.4.2}$$

高通滤波器的系统函数为 $H_h(s) = H_p(\Omega_p\Omega'_p/s)$。

如果我们希望把一个通带截止频率为 Ω_c 的低通模拟滤波器转换成频带下限截止频率为 Ω_l 和频带上限截止频率为 Ω_u 的带通滤波器，则变换可分为两步完成。首先把低通滤波器转变成另一个截止频率为 $\Omega'_p = 1$ 的低通滤波器，然后完成变换

$$s \longrightarrow \frac{s^2 + \Omega_l\Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}, \qquad \text{(低通到带通)} \tag{10.4.3}$$

等价地，利用如下变换在单步内得到相同结果：

$$s \longrightarrow \Omega_p\frac{s^2 + \Omega_l\Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}, \qquad \text{(低通到带通)} \tag{10.4.4}$$

其中，

$$\Omega_l = \text{为频带下限截止频率}$$

$$\Omega_u = \text{为频带上限截止频率}$$

于是可得

$$H_b(s) = H_p\left(\Omega_p\frac{s^2 + \Omega_l\Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}\right)$$

最后,如果我们希望把一个频带截止频率为 Ω_p 的低通模拟滤波器转变成一个带阻滤波器,则变换仅仅是式(10.4.3)的逆变换带上另一用于归一化低通滤波器的频带截止频率的因子 Ω_p。因此该变换为

$$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}, \qquad \text{(低通到带阻)} \tag{10.4.5}$$

于是可得

$$H_{bs}(s) = H_p\left(\Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}\right)$$

表 10.7 总结了式(10.4.1)、式(10.4.2)、式(10.4.3)和式(10.4.5)的映射。式(10.4.4)和式(10.4.5)的映射是非线性的,可能会导致低通滤波器频率响应特性失真。但是,频率响应的非线性影响是很小的,主要影响频率定标,但不会改变滤波器的幅度响应特性。因此,一个等纹波低通滤波器被转换成一个等纹波带通、带阻或高通滤波器。

表 10.7 模拟滤波器的频率变换(频带截止频率为 Ω_p 的低通原型滤波器)

变换类型	变换	新滤波器的频带截止频率
低通	$s \longrightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega_p'} s$	Ω_p'
高通	$s \longrightarrow \frac{\Omega_p \Omega_p'}{s}$	Ω_p'
带通	$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$	Ω_l, Ω_u
带阻	$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_c)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}$	Ω_l, Ω_u

例 10.4.1 考虑一个系统函数为

$$H(s) = \frac{\Omega_p}{s + \Omega_p}$$

的单极点低通巴特沃兹滤波器,请将其变换成一个上限截止频率和下限截止频率分别为 Ω_u 和 Ω_l 的带通滤波器。

解:所需要的变换由式(10.4.4)给定,于是,我们有

$$H(s) = \frac{1}{\dfrac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)} + 1} = \frac{(\Omega_u - \Omega_l)s}{s^2 + (\Omega_u - \Omega_l)s + \Omega_l \Omega_u}$$

所得到的滤波器有一个零点位于 $s = 0$ 处,有两个极点位于

$$s = \frac{-(\Omega_u - \Omega_l) \pm \sqrt{\Omega_u^2 + \Omega_l^2 - 6\Omega_u \Omega_l}}{2}$$

10.4.2 数字域频率变换

如同模拟域一样,对数字低通滤波器也可以实行频率变换,将其转变为带通、带阻或高通滤波器。该变换涉及到用一个有理函数 $g(z^{-1})$ 替换变量 z^{-1} 的过程,而有理函数 $g(z^{-1})$ 必须满足下列性质:

(1) 映射 $z^{-1}\to g(z^{-1})$必须将 z 平面单位圆内的点映射成它自己。

(2) 单位圆也必须映射成 z 平面的单位圆周。

条件(2)意味着对 $r=1$,有

$$e^{-j\omega}=g(e^{-j\omega})\equiv g(\omega)=|g(\omega)|e^{j\arg[g(\omega)]}$$

很明显,对所有的 ω 我们必须有 $|g(\omega)|=1$。也就是说,映射必须是全通的。因此它有形式

$$g(z^{-1})=\pm\prod_{k=1}^{n}\frac{z^{-1}-a_k}{1-a_kz^{-1}} \tag{10.4.6}$$

其中,$|a_k|<1$ 保证了变换将一个稳定的滤波器变成另一个稳定的滤波器(例如,满足条件 1)。

从式(10.4.6)的通用形式,我们得到一组所希望的数字变换,它们将原型数字低通滤波器转变成带通、带阻、高通或另一个低通数字滤波器。表 10.8 列出了这些变换。

表 10.8　数字滤波器的频率变换(原型低通滤波器的频带截止频率为 ω_p)

变换类型	所用变换	参数
低通	$z^{-1}\longrightarrow\dfrac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}$	$\omega'_p=$ 新滤波器的频带截止频率 $a=\dfrac{\sin[(\omega_p-\omega'_p)/2]}{\sin[(\omega_p+\omega'_p)/2]}$
高通	$z^{-1}\longrightarrow-\dfrac{z^{-1}+a}{1+az^{-1}}$	$\omega'_p=$ 新滤波器的频带截止频率 $a=-\dfrac{\cos[(\omega_p+\omega'_p)/2]}{\cos[(\omega_p-\omega'_p)/2]}$
带通	$z^{-1}\longrightarrow-\dfrac{z^{-2}-a_1z^{-1}+a_2}{a_2z^{-2}-a_1z^{-1}+1}$	$\omega_l=$ 下频带截止频率 $\omega_u=$ 上频带截止频率 $a_1=2\alpha K/(K+1)$ $a_2=(K-1)/(K+1)$ $\alpha=\dfrac{\cos[(\omega_u+\omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u-\omega_l)/2]}$ $K=\cot\dfrac{\omega_u-\omega_l}{2}\tan\dfrac{\omega_p}{2}$
带阻	$z^{-1}\longrightarrow\dfrac{z^{-2}-a_1z^{-1}+a_2}{a_2z^{-1}-a_1z^{-1}+1}$	$\omega_l=$ 下频带截止频率 $\omega_u=$ 上频带截止频率 $a_1=2\alpha/(K+1)$ $a_2=(1-K)/(1+K)$ $\alpha=\dfrac{\cos[(\omega_u+\omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u-\omega_l)/2]}$ $K=\tan\dfrac{\omega_u-\omega_l}{2}\tan\dfrac{\omega_p}{2}$

例 10.4.2　*考虑系统函数为*

$$H(z)=\frac{0.245(1+z^{-1})}{1-0.509z^{-1}}$$

的单极点低通巴特沃兹滤波器,将其转变成上限截止频率和下限截止频率分别为 ω_u 和 ω_l 的带通滤波器。低通滤波器有 3 dB 带宽 $\omega_p=0.2\pi$(见例 10.3.5)。

解:*所需要的变换为*

$$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-2}-a_1z^{-1}+a_2}{a_2z^{-2}-a_1z^{-1}+1}$$

其中，a_1 和 a_2 的定义见表 10.8，将其代入 $H(z)$得

$$H(z)=\frac{0.245\left[1-\dfrac{z^{-2}-a_1z^{-1}+a_2}{a_2z^{-2}-a_1z^{-1}+1}\right]}{1+0.509\left(\dfrac{z^{-2}-a_1z^{-1}+a_2}{a_2z^{-2}-a_1z^{-1}+1}\right)}$$

$$=\frac{0.245(1-a_2)(1-z^{-2})}{(1+0.509a_2)-1.509a_1z^{-1}+(a_2+0.509)z^{-2}}$$

注意，所得滤波器在 $z=\pm 1$ 有两个零点，并且有一对依赖于 ω_u 和 ω_l 的极点。

例如，假定 $\omega_u=3\pi/5$ 和 $\omega_l=2\pi/5$，因为 $\omega_p=0.2\pi$，所以，我们求出 $K=1$，$a_2=0$ 和 $a_1=0$。因此，可得

$$H(z)=\frac{0.245(1-z^{-2})}{1+0.509z^{-2}}$$

该滤波器的极点位于 $z=\pm j0.713$，谐振在 $\omega=\pi/2$ 处。

因为频率变换既可在模拟域也可在数字域实现，所以滤波器设计者需要做出选择。然而，必须慎重考虑所设计滤波器的类型。特别是，我们知道，由于混叠问题，利用冲激不变方法和导数映射方法设计高通滤波器和许多的带通滤波器是不合适的。因此，我们不应该利用模拟频率变换将这两项映射结果转变到数字域，而更好的是利用这两种映射中的任何一种将模拟低通滤波器映射成数字低通滤波器，然后在数字域内完成频率变换，这样避免了混叠问题。

在双线性变换的情况下，不存在混叠问题，无论是在模拟域执行频率变换还是在数字域执行都无关重要。事实上，只有这种情况下，这两种方法产生的数字滤波器相同。

10.5 小结与参考文献

我们已经相当详细地描述了有关设计 FIR 数字滤波器和 IIR 数字滤波器的最重要的方法。这些方法或者建立在用理想频率响应 $H_d(\omega)$表示的频域技术指标的基础上，或者是建立在通过理想冲激响应 $h_d(n)$表示的时域技术指标的基础上。

通常，FIR 滤波器用于需要线性相位滤波器的应用中。在许多应用中，要求滤波器具有线性相位，特别是通信中，多路解码过程要求在不造成信号失真的情况下，分离(多路解码)已被频分复用的数据信号。在所描述的设计 FIR 滤波器的几种方法中，频率采样方法和最佳切比雪夫逼近方法得出的结果最好。

一般来说，IIR 滤波器用在允许一定的相位失真的应用中。在 IIR 滤波器类型中，在阶数较低或者系数较少这个意义上，椭圆滤波器是最有效的实现。当与 FIR 滤波器相比时，椭圆滤波器也是更加有效的。考虑到这一点，我们应该利用椭圆滤波器来获得理想的选频特性，然后，利用一个全通的相位补偿器来补偿在椭圆滤波器中的相位失真。然而，实现这一想法又增加了很多以级联组合形式的滤波器的系数，从而系数的个数等于或超过等效的线性相位 FIR 滤波器。因此，在相位补偿椭圆滤波器的应用中，计算复杂度没有降低。

现在，关于数字滤波器设计的文献非常丰富，以至于利用所有重要的参考文献是不可能的，故我们将只引用少量的文献。关于数字滤波器设计，早期的一些工作由 Kaiser(1963，1966)，Steiglitz(1965)，Golden 和 Kaiser(1964)，Rader 和 Gold(1967a)，Shanks(1967)，Helms(1968)，Gibbs(1969，1970)，以及 Gold 和 Rader(1969)完成。

模拟滤波器设计在一些由 Storer(1957), Guillemin(1957), Weinberg(1962)以及 Daniels(1974)所写的经典著作中讲述。

滤波器设计的频率采样方法由 Gold 和 Jordan(1968, 1969)首先提出, Rabiner 等(1970), Herrmann 和 Schuessler(1970a),以及 Hofstetter 等(1971)发表了另外一些成果。设计线性相位 FIR 滤波器的切比雪夫(最小化最大值)逼近方法由 Parks 和 McClellan(1972a, b)提出,并由 Rabiner 等(1975)做了进一步的讨论。Gold 和 Rader(1969)在所著的书中, Gray 和 Markel(1976)在文章中均论述了椭圆滤波器。后者还提供了设计数字椭圆滤波器的计算机程序。

在数字域中,利用频率变换法是由 Constantinides(1967, 1968, 1970)提出的。这些变换方法仅仅适合于 IIR 滤波器,读者应该注意到,当这些变换方法用于低通 FIR 滤波器时,所得到的滤波器是 IIR 滤波器。

直接设计数字滤波器的技术在包括 Shanks(1967)、Burrus 和 Parks(1970)、Steiglitz(1970)、Deczky(1972)、Brophy 和 Salazar(1973),以及 Bandler 和 Bardakjian(1973)等人的著作在内的许多著作中都有论述。

习题

10.1 设计一个近似理想频率响应的线性相位 FIR 滤波器

$$H_d(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\dfrac{\pi}{6}\\ 0, & \dfrac{\pi}{6}<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

(a) 基于窗方法,利用矩形窗函数,确定 25 个抽头的滤波器系数。

(b) 确定和画出该滤波器的幅度和相位响应。

(c) 利用汉明窗,重复(a)和(b)。

(d) 利用巴特利特窗,重复(a)和(b)。

10.2 对具有如下理想响应的带通滤波器,重复习题 10.1

$$H_d(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\dfrac{\pi}{6}\\ 0, & \dfrac{\pi}{6}<|\omega|<\dfrac{\pi}{3}\\ 1, & \dfrac{\pi}{3}\leqslant|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

10.3 利用汉宁和布莱克曼窗,再次设计习题 10.1 的滤波器。

10.4 利用汉宁和布莱克曼窗,再次设计习题 10.2 的滤波器。

10.5 已知一个长度为 $M=4$ 的线性相位 FIR 滤波器在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi/2$ 的频率响应分别为

$$H_r(0)=1,\qquad H_r\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

请确定其单位样本 $\{h(n)\}$。

10.6 已知一个长度为 $M=15$ 的线性相位 FIR 滤波器,其具有对称单位样本响应,并且频率响应满足条件

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right)=\begin{cases}1, & k=0,1,2,3\\ 0, & k=4,5,6,7\end{cases}$$

请确定该滤波器的系数 $\{h(n)\}$。

10.7 频率响应技术指标为

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right)=\begin{cases}1, & k=0,1,2,3\\ 0.4, & k=4\\ 0, & k=5,6,7\end{cases}$$

的情况下,重复习题 10.6 的滤波器设计问题。

10.8 理想模拟微分器描述为

$$y_a(t)=\frac{\mathrm{d}x_a(t)}{\mathrm{d}t}$$

其中 $x_a(t)$是输入信号,$y_a(t)$是输出信号。

(a) 用输入 $x_a(t)=e^{j2\pi Ft}$激励系统,请确定系统的频率响应。

(b) 画出带限为 B Hz 的理想模拟微分器的幅度和相位响应草图。

(c) 理想数字微分器定义为

$$H(\omega)=j\omega,\qquad |\omega|\leqslant\pi$$

通过把(b)中的幅度和相位响应与频率响应$|H(\omega)|$和$\measuredangle H(\omega)$相比较,说明该定义是正确的。

(d) 通过计算频率响应 $H(\omega)$,证明离散时间系统

$$y(n)=x(n)-x(n-1)$$

在低频能很好地近似微分器。

(e) 计算系统对输入

$$x(n)=A\cos(\omega_0 n+\theta)$$

的响应。

10.9 利用窗方法,用汉明窗设计一个如图 P10.9 所示的 21 抽头微分器。计算并画出所得到的滤波器的幅度和频率响应。

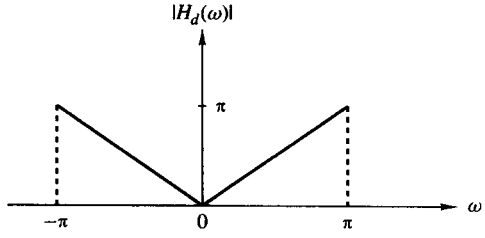


图 P10.9

10.10 利用双线性变换将具有如下系统函数的模拟滤波器转变成数字 IIR 滤波器

$$H(s)=\frac{s+0.1}{(s+0.1)^2+9}$$

选取 $T=0.1$,并把 $H(z)$的零点位置与通过在 $H(s)$的转换中使用冲激不变法所得到的零点位置相比较。

10.11 利用双线性变换把例 10.4.1 中设计的模拟带通滤波器转变成数字滤波器。从而,用另外的方法导出例 10.4.2 所得到的数字滤波器特性,验证双线性变换应用于这个模拟滤波器能否得到相同的数字带通滤波器。

10.12 系统函数 $H_a(s)=1/s$ 的理想模拟积分器,考虑利用双线性变换将其转变为具有如下系统函数的数字积分器:

$$H(z)=\frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\equiv H_a(s)\big|_{s=(2/T)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})}$$

(a) 写成数字积分器输入 $x(n)$和输出 $y(n)$相联系的差分方程。

(b) 粗略画出模拟积分器的幅度 $|H_a(j\Omega)|$和相位 $\Theta(\Omega)$。

(c) 很容易验证数字积分器的频率响应为

$$H(\omega) = -j\frac{T}{2}\frac{\cos(\omega/2)}{\sin(\omega/2)} = -j\frac{T}{2}\cot\frac{\omega}{2}$$

大致画出 $|H(\omega)|$和 $\theta(\omega)$。

(d) 比较在(b)和(c)中得到的幅度和相位特性。数字积分器匹配模拟积分器的幅度和相位特性的程度如何?

(e) 数字积分器在 $z=1$ 处有一个零点,如果你在一台数字计算机上实现滤波器,那么为避免计算的困难,应对输入序列 $x(n)$有什么约束?

10.13 图 P10.13 给出了某一数字滤波器的 z 平面零点-极点图。该滤波器在直流部分的增益为 1。

(a) 确定如下系统函数:

$$H(z) = A\left[\frac{(1+a_1z^{-1})(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2})}{(1+c_1z^{-1})(1+d_1z^{-1}+d_2z^{-2})}\right]$$

给出参数 $A, a_1, b_1, b_2, c_1, d_1$ 和 d_2。

(b) 画出以下形式的框图,并指出路径增益的数值。

(1) 直接 II 型。

(2) 级联型(每一节为实系数的典型)。

10.14 考虑如图 P10.14 的零极点图。

(a) 它表示一个 FIR 滤波器吗?

(b) 它是否线性相位系统?

(c) 给出为了最小化乘法次数而利用所有对称性质的直接型实现,并指出所有路径增益。

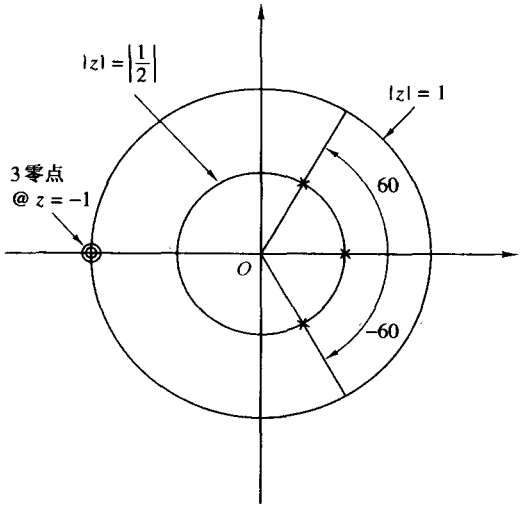


图 P10.13

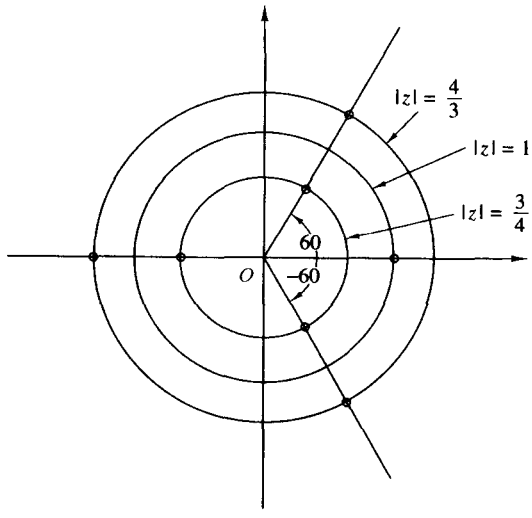


图 P10.14

10.15 一个数字低通滤波器满足如下技术指标:

通带纹波 ≤ 1 dB

通带截止频率为 4 kHz

阻带衰落 ≥ 40 dB

阻带截止频率为 6 kHz

采样率为 24 kHz

通过对模拟系统函数进行双线性变换来得到该滤波器。确定满足上述技术指标的数字巴特沃兹、切比雪夫和椭圆滤波器的阶数。

10.16 一个 IIR 数字低通滤波器满足如下技术指标:

通带纹波(或者峰-峰纹波)≤ 0.5 dB

通带截止频率为 1.2 kHz

阻带衰减≥40 dB

阻带截止频率为 2.0 kHz

采样率为 8.0 kHz

利用书中的设计公式,确定下列情况滤波器所需的阶数:

(a) 数字巴特沃兹滤波器。

(b) 数字切比雪夫滤波器。

(c) 数字椭圆滤波器。

10.17 确定满足如下技术指标的最低阶数切比雪夫数字滤波器的系统函数 $H(z)$:

(a) 通带 $0 \leqslant |\omega| \leqslant 0.3\pi$ 内有 1 dB 的纹波。

(b) 阻带 $0.35\pi \leqslant |\omega| \leqslant \pi$ 内,至少 60 dB 的衰减。利用双线性变换。

10.18 确定满足如下技术指标的最低阶数切比雪夫数字滤波器的系统函数 $H(z)$:

(a) 通带 $0 \leqslant |\omega| \leqslant 0.24\pi$ 内有 $\frac{1}{2}$ dB 的纹波。

(b) 阻带 $0.35\pi \leqslant |\omega| \leqslant \pi$ 内,至少 50 dB 的衰减。利用双线性变换。

10.19 模拟信号 $x(t)$由两个分量 $x_1(t)$和 $x_2(t)$组成,其谱特性如图 P10.19 所示。$x(t)$为 40 kHz 有限带宽信号,以 100 kHz 对其采样得到序列 $x(n)$。

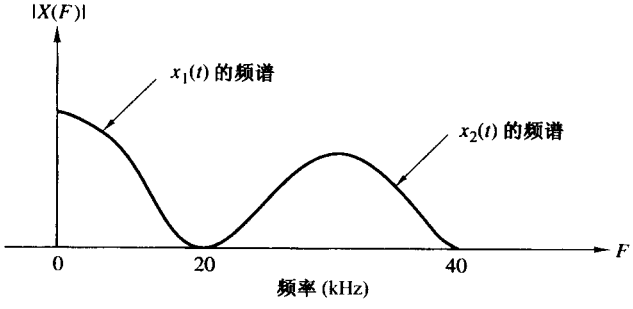


图 P10.19

希望将序列 $x(n)$通过一数字低通滤波器来压缩信号 $x_2(t)$。$|X_1(f)|$在区间 $0 \leqslant |F| \leqslant 15$ kHz 上所允许的幅度失真为 ±2%($\delta_1 = 0.02$),在 20 kHz 以上,滤波器的衰减必须至少有 40 dB($\delta_2 = 0.01$)。

(a) 利用 Remez 变换算法设计满足上述技术指标的阶数最低的线性相位 FIR 滤波器,根据滤波器频率响应的幅度特性图给出滤波器所达到的实际技术指标。

(b) 比较(a)所得的阶数 M 与式(10.2.94)和式(10.2.95)给出的近似公式所得的结果。

(c) 对于(a)所得的阶数 M,利用窗函数和汉明窗设计一个 FIR 数字低通滤波器。把该设计的频率响应特性同(a)所得的相比较。

(d) 设计一个满足给定幅度技术指标的阶数最低的椭圆滤波器,并比较其与(a)中 FIR 滤波器的频率响应。

(e) 比较(a)中实现 FIR 滤波器与(d)中得到的椭圆滤波器的复杂性。假定按直接型实现 FIR 滤波器,按双极点滤波器的级联型实现椭圆滤波器,利用存储要求和每个输出点的乘法次数比较两者的复杂性。

10.20 模拟滤波器的冲激响应如图 P10.20 所示。

(a) 令 $h(n)=h_a(nT)$,其中 $T=1$,是离散时间滤波器的冲激响应,确定该 FIR 滤波器的系统函数 $H(z)$和频率响应 $H(\omega)$。

(b) 大致画出 $|H(\omega)|$,并把该频率响应特性与 $|H_a(j\Omega)|$比较。

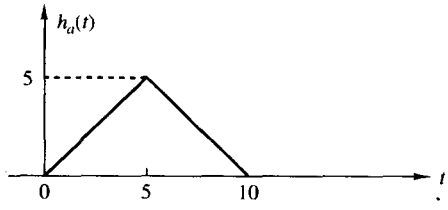


图 P10.20

10.21 本题中,你将比较单极点低通模拟滤波器模拟实现和数字实现的一些特性。

$$H_a(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}\Leftrightarrow h_a(t)=e^{-\alpha t}$$

(a) 直流增益是多少?角频率为多少时,直流的模拟频率响应下降 3 dB?频率为多少时,模拟频率响应为零?何时模拟冲激响应衰减到初始值的 1/e?

(b) 针对冲激不变法,给出该滤波器的数字系统函数 $H(z)$。直流分量增益为多少?给出 3 dB 角频率的表达式,在什么(实值)频率时,响应为零?单位样本时域响应衰减到初始值的 1/e 之前,有多少样本?

(c) "预反卷"参数 α 并利用双线性变换从模拟设计得到数字系统函数 $H(z)$。直流增益为多少?在什么(实值)频率时,响应为零?给出 3 dB 角频率的表达式。单位样本时域响应衰减到初始值的 1/e 之前,有多少个样本?

10.22 我们希望设计一个时宽为 $M=201$ 的 FIR 带通滤波器。$H_d(\omega)$表示的非因果带通滤波器的理想特性如图 P10.22 所示。

(a) 确定对应于 $H_d(\omega)$的单位样本(脉冲)响应 $h_d(n)$。

(b) 解释如何使用汉明窗

$$w(n)=0.54+0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right),\qquad -\frac{M-1}{2}\leqslant n\leqslant\frac{M-1}{2}$$

来设计一个脉冲响应 $h(n)$,$0\leqslant n\leqslant 200$ 的 FIR 带通滤波器。

(c) 假定利用频率采样方法设计长度为 $M=201$ 的 FIR 滤波器,指定 DFT 系数 $H(k)$,而不是 $h(n)$。给出对应于 $H_d(e^{j\omega})$的 $H(k)$,$0\leqslant k\leqslant 200$ 的值,并指明实际滤波器的频率响应和理想的有什么不同。实际滤波器是一个好的设计吗?给出你的解释。

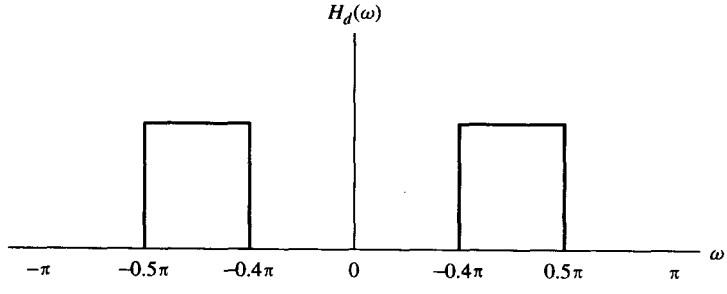


图 P10.22

10.23 我们希望利用双线性变换,根据二阶模拟低通巴特沃兹原型滤波器设计一个数字带通滤波器。其技术指标如图 P10.23(a)所示,截止频率(在半功率点测量)应该位于 $\omega_l=5\pi/12$ 和 $\omega_u=7\pi/12$。

模拟原型表示为

$$H_a(s)=\frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

其中半功率点在 $\Omega=1$ 处。

(a) 确定该数字带通滤波器的系统函数。

(b) 利用与(a)中一样的数字滤波器规范,确定为了得出适当的数字滤波器,利用双线性变换,可将图 P10.23(b)中的模拟带通原型滤波器的哪一个直接变成数字滤波器?

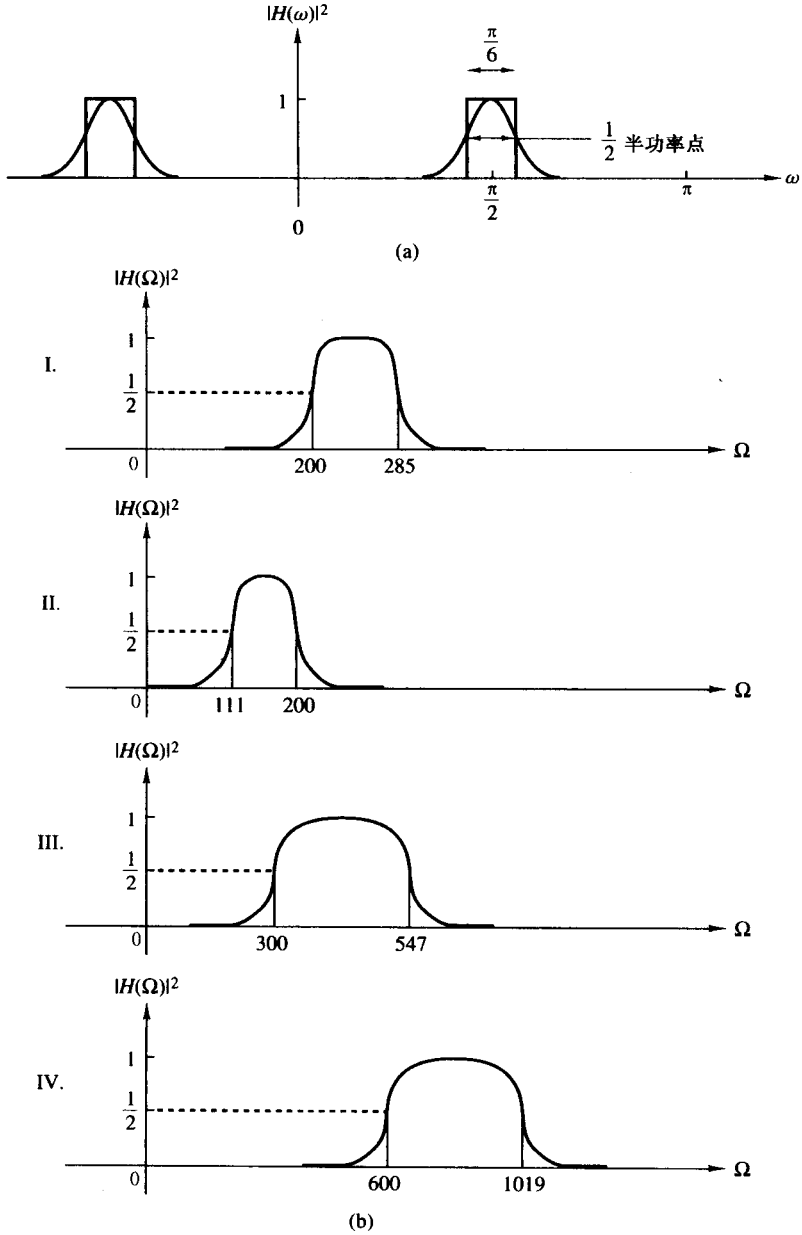


图 P10.23

10.24　一个利用频率采样方法设计的数字滤波器如图 P10.24 所示。

(a) 画出该滤波器 z 平面极点-零点图。

(b) 该滤波器是低通、高通还是带通的?

(c) 对于 $k=0,1,2,3,4,5,6$,确定频率 $\omega_k=\pi k/6$ 的频率响应 $|H(\omega)|$。

(d) 利用(c)的结果,画出 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$ 的幅度响应草图,并验证(b)中的答案。

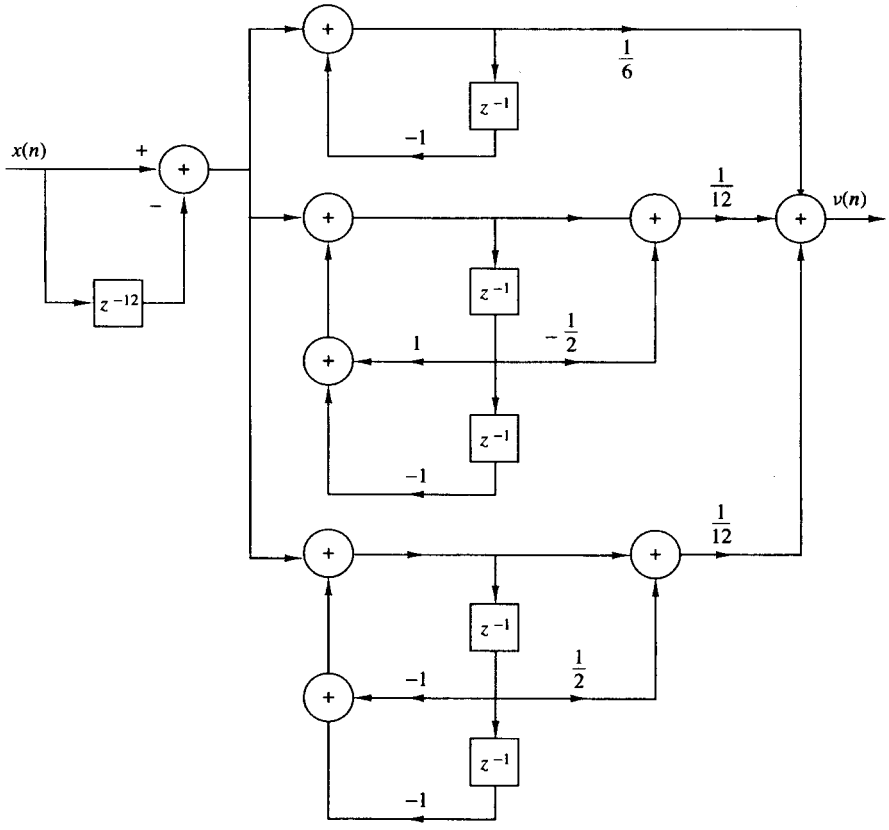


图 P10.24

10.25　考虑模拟信号 $x_a(t)=a(t)\cos 2000\pi t$,将其频带限制在 $900\leqslant F\leqslant 1100$ Hz,并作为图 P10.25 系统的输入。

(a) 确定并画出信号 $x(n)$和 $w(n)$的谱。

(b) 利用长度为 $M=31$ 的汉明窗,设计一个经过$\{a(n)\}$的低通线性相位 FIR 滤波器 $H(\omega)$。

(c) 确定允许我们消除图 P10.25 中频率转换的 A/D 转换器的采样率。

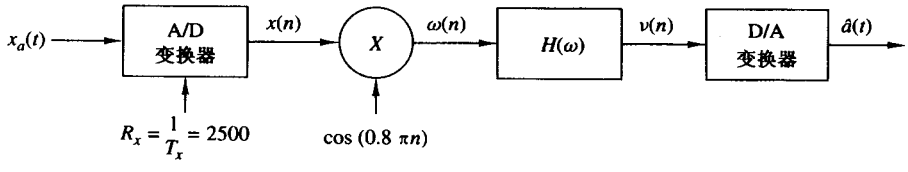


图 P10.25

10.26　系统辨识:考虑一个未知的 LTI 系统和一个如图 P10.26 所示的 FIR 系统模型,用相同的输入序列$\{x(n)\}$激励这两个系统,以最小均方误差准则确定系统的 FIR 模型系数$\{h(n),0\leqslant n\leqslant M-1\}$。

(a) 利用最小二乘准则,确定最佳 FIR 滤波器系数$\{h(n),0\leqslant n\leqslant M-1\}$的方程。

$$\mathcal{E}=\sum_{n=0}^{N}[y(n)-\hat{y}(n)]^2$$

其中,

$$\hat{y}(n)=\sum_{k=0}^{M-1}h(k)x(n-k),\quad n=K,K+1,\cdots,N$$

并且 $N>>M$。

(b) 如果未知系统的输出被方差为 σ_w^2 的加性白噪声序列$\{w(n)\}$所污染,重复(a)。

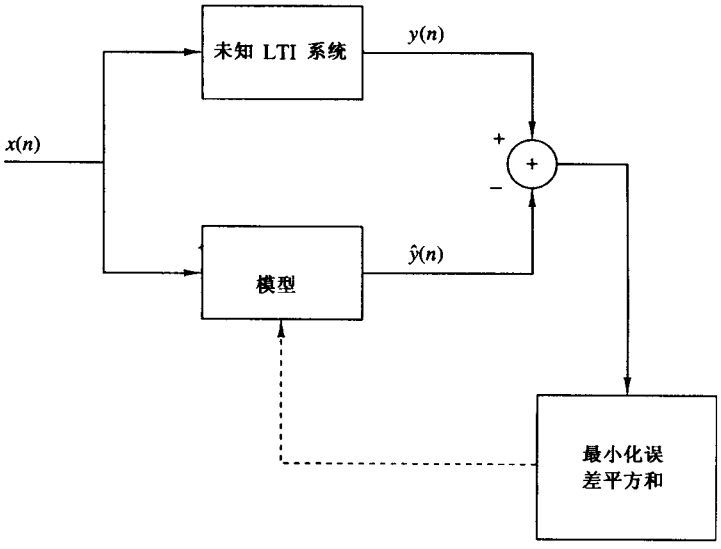


图 P10.26

10.27 一线性时不变系统的输入序列和输出序列分别为 $x(n)$和 $y(n)$,用户只能知道系统输出 $y(n)$。另外,下列信息可利用:

输入信号是基本周期为 N 的周期信号,且具有平坦的谱包络,即

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}c_k^x e^{j(2\pi/N)kn},\quad \text{所有}n$$

其中对所有 k,$c_k^x=1$。

系统 $H(z)$是全极点的,即

$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{P}a_k z^{-k}}$$

但阶数 p 和系数$(a_k,1\leqslant k\leqslant p)$未知。请问可能通过测量输出 $y(n)$确定阶数 p 和系数$\{a_k,1\leqslant k\leqslant p\}$的值吗?若可以,解释原因。对每个 p 值都可能吗?

10.28 FIR 系统建模:考虑一个"未知"的 FIR 系统,其冲激响应 $h(n),0\leqslant n\leqslant 11$ 如下:

$$h(0) = h(11) = 0.309\,828 \times 10^{-1}$$
$$h(1) = h(10) = 0.416\,901 \times 10^{-1}$$
$$h(2) = h(9) = -0.577\,081 \times 10^{-1}$$
$$h(3) = h(8) = -0.852\,502 \times 10^{-1}$$
$$h(4) = h(7) = 0.147\,157 \times 10^{0}$$
$$h(5) = h(6) = 0.449\,188 \times 10^{0}$$

潜在的用户可以得到系统输入和输出，但除了知道它是 FIR 以外，没有任何其他关于冲激响应的信息。在确定系统冲激响应过程中，用户用均匀分布在[-0.5,0.5]的零均值随机序列 $x(n)$来激励，记录 $0 \leqslant n \leqslant 199$ 内的 $x(n)$和对应输出 $y(n)$。

(a) 根据未知系统是 FIR 的信息，用户利用最小二乘准则得到一个 FIR 模型 $h(n), 0 \leqslant n \leqslant M-1$ 建立系统的线性方程，指定参数 $h(0), h(1), \cdots, h(M-1)$。指定计算自相关和互相关值的公式。

(b) 因为系统的阶数未知，用户决定尝试不同阶数的模型并检查相应的总平方误差。显然，该误差将为零(或非常接近于零，如果模型的阶数等于系统的阶数)。当 $M = 8, 9, \cdots, 14$ 时计算 FIR 模型 $h_M(n), 0 \leqslant n \leqslant M-1$，并且计算相应的总平方误差 E_M。你注意到了什么?

(c) 确定并画出 $M = 11, 12, 13$ 时系统和模型的频率响应。评价所得结果。

(d) 现在假定系统的输出被加性噪声所污染，故我们已有的信号不是 $y(n), 0 \leqslant n \leqslant 199$，而是

$$v(n) = y(n) + 0.01w(n)$$

其中，$w(n)$是零均值方差为 $\sigma^2 = 1$ 的高斯随机序列，利用 $v(n)$而不是 $y(n)$重复(b)，并评价所得结果。模型的质量可用如下变量来确定：

$$Q = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}[h(n) - \hat{h}(n)]^2}{\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n)}$$

10.29 Padé 逼近设计滤波器：指定 IIR 滤波器的期望冲激响应 $h_d(n), n \geqslant 0$，请设计用来逼近 $\{h_d(n)\}$ 的滤波器的系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

$H(z)$有 $L = M + N + 1$ 个参数，即系数 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 待定。假定输入 $x(n) = \delta(n)$，则滤波器的响应 $y(n) = h(n)$，即

$$\begin{aligned} h(n) = &-a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \cdots - a_N h(n-N) \\ &+ b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1) + \cdots + b_M\delta(n-M) \end{aligned} \tag{1}$$

(a) 将方程(1)化简为

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \cdots - a_N h(n-N) + b_n, \quad 0 \leqslant n \leqslant M \tag{2}$$

(b) 当 $n > M$ 时，方程(1)化简为

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \cdots - a_N h(n-N), \quad n > M \tag{3}$$

(c) 解释怎样利用方程(2)和(3)通过令 $h(n) = h_d(n), 0 \leqslant n \leqslant N + M$ 确定 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$。该滤波器设计方法，所得 $h(n)$非常匹配期望响应 $h_d(n), 0 \leqslant n \leqslant M + N$，称为 Padé 逼近方法。

10.30 假定期望单位样本响应为

$$h_d(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

(a) 利用题 10.29 中描述的 Padé 逼近来确定 $h(n)$。

(b) 比较频率响应 $H(\omega)$和期望滤波器响应 $H_d(\omega)$。

10.31 Shanks 方法设计最小二乘滤波器:假定给出了期望响应 $h_d(n)$, $n \geqslant 0$,我们希望确定具有如下系统函数的 IIR 滤波器的系数$\{a_k\}$和$\{b_k\}$:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

使得 $h_d(n)$和 $h(n)$间的误差平方和最小。

(a) 如果 $H(z)$的输入 $x(n) = \delta(n)$,那么滤波器 $H(z)$满足的差分方程是怎样的?

(b) 证明当 $n > M$ 时,$h_d(n)$的一个估计为

$$\hat{h}_d(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k h_d(n-k)$$

并且确定系数$\{a_k\}$的方程,通过最小化平方误差和

$$\mathcal{E}_1 = \sum_{n=M+1}^{\infty} [h_d(n) - \hat{h}_d(n)]^2$$

这样,就确定了作为 $H(z)$分母部分的滤波器系数$\{a_k\}$。

(c) 考虑如图 P10.31 的系统,确定参数$\{b_k\}$,其中

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k z^{-k}}$$

$$H_2(z) = \sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}$$

并且$\{\hat{a}_k\}$是(b)中确定的系数。

$\delta(n)$输入到 $H_1(z)$的响应记为

$$v(n) = -\sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k v(n-k) + \delta(n)$$

并且 $H_2(z)$的输出记为 $h_d(n)$,确定参数$\{b_k\}$的参数,使得平方误差最小

$$\mathcal{E}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [h_d(n) - \hat{h}_d(n)]^2$$

前面提到的最小二乘法设计滤波器归功于 Shanks(1967)。

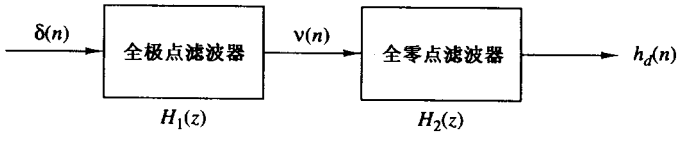


图 P10.31

10.32　利用如同题 10.31 所描述的滤波器设计的 Shanks 方法，确定下式的参数$\{a_k\}$和$\{b_k\}$：

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

当期望响应为具有如下系统函数的三极点三零点 II 型低通切比雪夫数字滤波器的冲激响应时：

$$H_d(z)=\frac{0.3060(1+z^{-1})(0.2652-0.09z^{-1}+0.2652z^{-2})}{(1-0.3880z^{-1})(1-1.1318z^{-1}+0.5387z^{-2})}$$

(a) 画出 $h_d(n)$并且观察当 $n>50$ 时 $h_d(n)\approx 0$。

(b) 确定用 Shanks 方法得到的滤波器 $H(z)$在$(N,M)=(3,2)$，$(N,M)=(3,3)$和$(N,M)=(4,3)$情况下极点和零点的位置，并与 $H_d(z)$的极点和零点比较。评价相同点和不同点。

第 11 章　多速率数字信号处理

在数字信号处理的许多实际应用中，面临的一个问题就是需要改变信号的采样率，无论是提高还是降低。例如，在发送和传送不同类型信号（如电传打字、电报、传真、语音、视频等）的电信系统中，需要以与信号带宽成比例的不同速率来处理各种信号。将信号从一给定速率转换到另一不同速率的过程称为采样率转换。相应地，应用多种采样率进行数字信号处理的系统称为多速率数字信号处理系统。

数字信号的采样率转换有两种通用方法。一种方法是将数字信号通过一个 D/A 转换器，如果有需要就加上滤波，然后按所希望的速率对所得到的模拟信号重新采样（例如，将模拟信号通过一个 A/D 转换器）。第二种方法是完全在数字域实现采样率转换。

第一种方法明显的优点是可以任意选取新的采样率并且与旧的采样率没有任何特殊关系。主要缺点是，信号重构时 D/A 转换器会引入信号失真，并且 A/D 转换过程中的量化效应也会引入信号失真。而完全在数字域实现采样率转换就避免了这一缺点。

在本章中，我们将描述在数字域中的采样率转换和多速率信号处理。首先，我们阐述通过一个有理因子转换采样率，并给出几种实现速率转换器的方法，包括单级实现和多级实现。接着，我们阐述用任意因子转换采样率的方法及其实现。最后，我们给出多速率数字信号处理系统中采样率转换的几个应用，包括窄带滤波器、数字滤波器组、复用转换器和正交镜像滤波器。

11.1　引言

采样率转换过程可以理解为“重构后重采样”。即离散信号理想地重构并且所得到的连续时间信号用另一不同速率重采样。利用 $F_x = 1/T_x$ 的速率对连续时间信号 $x(t)$ 采样来产生离散时间信号 $x(nT_x)$。利用如下插值公式，我们可以由样本 $x(nT_x)$ 得到一个连续时间信号：

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_x)g(t - nT_x) \tag{11.1.1}$$

如果 $x(t)$ 的带宽小于 $F_x/2$，并且插值函数为

$$g(t) = \frac{\sin(\pi t/T_x)}{\pi t/T_x} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(F) = \begin{cases} T_x, & |F| \leqslant F_x/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{11.1.2}$$

那么 $y(t) = x(t)$；否则 $y(t) \neq x(t)$。在实际中，$x(t)$ 的完全恢复是不可能的，因为式(11.1.1)中的无限求和会被有限求和取代。

为了阐述采样率转换，我们简单地考察在时刻 $t = mT_y$ 的式(11.1.1)，其中 $F_y = 1/T_y$ 是所期望的采样率。这样，采样率转换的通用公式变成了

$$y(mT_y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_x)g(mT_y - nT_x) \tag{11.1.3}$$

该式直接利用原始序列的样本和重构函数在 $(mT_y - nT_x)$ 处的采样值表示出所期望序列的样本。计算 $y(nT_y)$ 需要：(a)输入序列 $x(nT_x)$，(b)重构函数 $g(t)$ 以及(c)输入和输出样本时刻 nT_x 和 mT_y。只有当 $F_y > F_x$ 时，通过该等式计算 $y(mT_y)$ 的值才是准确的。如果 $F_y < F_x$，在重采样前我

们就要滤掉 $x(t)$ 中高于 $F_y/2$ 的频率成分来消除混叠效应。这样，如果我们利用式(11.1.2)和 $X(F)=0(|F|\geqslant\min\{F_x/2,F_y/2\})$，采样率转换公式(11.1.3)就变成 $y(mT_y)=x(mT_y)$。

如果 $T_y=T_x$，式(11.1.3)就变成了一个卷积和，对应于一个 LTI 系统。当 $T_y\neq T_x$ 时，为了理解式(11.1.3)的含义，我们按如下形式重排 $g(t)$ 的参数：

$$y(mT_y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_x)g\left(T_x\left(\frac{mT_y}{T_x}-n\right)\right) \tag{11.1.4}$$

比值 mT_y/T_x 可以分解为整数部分 k_m 和小数部分 $\Delta_m(0\leqslant\Delta_m<1)$，即

$$\frac{mT_y}{T_x}=k_m+\Delta_m \tag{11.1.5}$$

其中，

$$k_m=\left\lfloor\frac{mT_y}{T_x}\right\rfloor \tag{11.1.6}$$

而

$$\Delta_m=\frac{mT_y}{T_x}-\left\lfloor\frac{mT_y}{T_x}\right\rfloor \tag{11.1.7}$$

符号$\lfloor a\rfloor$表示小于等于 a 的最大整数。Δ_m 确定当前样本在采样周期 T_x 内的位置。把式(11.1.5)代入式(11.1.4)可得

$$y(mT_y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_x)g((k_m+\Delta_m-n)T_x) \tag{11.1.8}$$

如果我们将式(11.1.8)求和的下标从 n 改成 $k=k_m-n$，可得

$$\begin{aligned}y(mT_y)&=y((k_m+\Delta_m)T_x)\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g(kT_x+\Delta_mT_x)x((k_m-k)T_x)\end{aligned} \tag{11.1.9}$$

式(11.1.9)提供了实现离散时间采样率转换的基本公式。这一过程如图 11.1.1 所示。我们注意到：(a)给定 T_x 和 T_y，那么输入和输出采样时刻就固定了；(b)函数 $g(t)$ 每隔 m 平移一次，以保证值 $g(\Delta_mT_x)$ 位于 $t=mT_y$ 处；(c)所需要的 $g(t)$ 值取决于输入采样时刻。对于每个 m 值，小数间隔 Δ_m 决定冲激响应系数，而索引 k_m 指定了求样本 $y(mT_y)$ 所需要的相应输入样本。由于对任何给定的 m 值，索引 k_m 都是整数，故 $y(mT_y)$ 是输入序列 $x(nT_x)$ 和一个冲激响应 $g((n+\Delta_m)T_x)$ 的卷积。式(11.1.8)和式(11.1.9)的不同之处在于第一个式子平移一个“变化中”重构函数，而第二个式子平移“固定”的输入序列。

式(11.1.9)所定义的采样率转换过程是一个离散时间线性时变系统，因为对每个输出样本 $y(mT_y)$ 要求一个不同的冲激响应

$$g_m(nT_x)=g((n+\Delta_m)T_x) \tag{11.1.10}$$

因此，对计算每个输出样本要先计算出一个新的系数集合或者从存储中搜索(见图 11.1.2)。当 $g(t)$ 很复杂并且所要计算值的个数很大时，该处理可能效率低下。这是由于 m 阻止了递归结构的应用，因为计算当前 Δ_m 值所需的以前输出值必须利用冲激响应来计算。

当比值 T_y/T_x 被约束为有理数时，一个有意义简化结果如下：

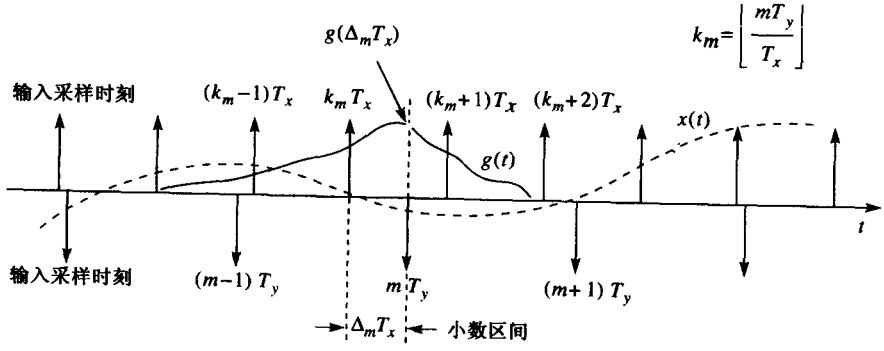


图 11.1.1 采样率转换的时间关系图

$$\frac{T_y}{T_x}=\frac{F_x}{F_y}=\frac{D}{I} \tag{11.1.11}$$

其中,D 和 I 是互质的整数。最后,我们把步长 Δ_m 写成

$$\Delta_m=\frac{mD}{I}-\left\lfloor\frac{mD}{I}\right\rfloor=\frac{1}{I}\left(mD-\left\lfloor\frac{mD}{I}\right\rfloor I\right)=\frac{1}{I}(mD)_I \tag{11.1.12}$$

其中$(k)_I$ 表示 k 模 I 得到的值。由式(11.1.12)明显看出,Δ_m 只能取 I 个不同的值$0,1/I,\cdots,(I-1)/I$,所以只可能有 I 个不同的冲激响应。由于 $g_m(nT_x)$可以取 I 个不同集合的值,周期为 m,即

$$g_m(nT_x)=g_{m+rI}(nT_x),\quad r=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{11.1.13}$$

因此,系统 $g_m(nT_x)$是线性且周期的时变离散时间系统。该系统已在广泛的应用中被研究(Meyers 和 Burrus,1975)。相对于式(11.1.10)的连续时变离散时间系统,这是一个大大的简化。

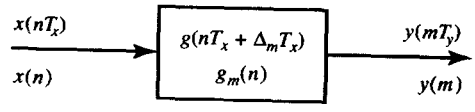


图 11.1.2 离散时间线性时变系统的采样率转换

为了说明这些概念,我们考虑两种重要的情形。我们首先考虑以一个整数因子 D 将采样率降低的过程,即所谓的压缩或下采样。如果我们设定式(11.1.3)中的 $T_y=DT_x$,可得

$$y(mT_y)=y(mDT_x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_x)g((mD-k)T_x) \tag{11.1.14}$$

我们注意到输入信号和冲激响应都按周期 T_x 采样。但是,冲激响应按步长 $T_y=DT_x$ 发生平移,因为我们只需计算每 D 个样本中的一个。由于 $I=1$,我们得到 $\Delta_m=0$,这样对所有 m,只有一个冲激响应 $g(nT_x)$。当 $D=2$ 时,该过程如图 11.1.3 所示。

我们考虑利用一个整数因子 I 提高采样率的过程,即所谓的上采样或插值。如果我们设定式(11.1.3)中的 $T_y=T_x/I$,可得

$$y(mT_y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_x)g(m(T_x/I)-kT_x) \tag{11.1.15}$$

我们注意到 $x(t)$和 $g(t)$都是按周期 T_x 采样的。但是,计算每个输出样本时冲激响应按步长 $T_y=T_x/I$发生平移,这样每$(I-1)$个样本需要额外"填充"一个值来构成一个周期 T_x。当 $I=2$ 时,如图 11.1.4(a)~(b)所示。每个"小数平移"都要求我们重采样 $g(t)$,结果获得一个新的冲激响应 $g_m(nT_x)=g(nT_x+mT_x/I)$,式(11.1.14)规定 $m=0,1,\cdots,I-1$。细心地观察图 11.1.4(a)~(b),

如果我们确定一个冲激响应序列 $g(nT_y)$，并且通过在后续的 $x(nT_x)$样本中插入$(I-1)$个 0 来创建一个新序列 $v(nT_y)$，我们就可以通过序列 $g(nT_y)$和 $x(nT_y)$的卷积来计算 $y(mT_y)$。当 $I=2$ 时，该过程如图 11.1.4(c)所示。

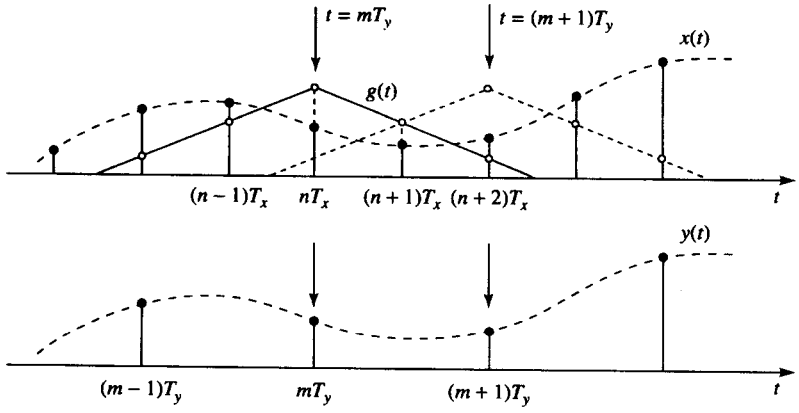


图 11.1.3　采样率以整数因子 $D=2$ 降低时的时间关系图。以周期 T_x 采样的单冲激响应以步长 $T_y = DT_x$ 平移后产生输出样本

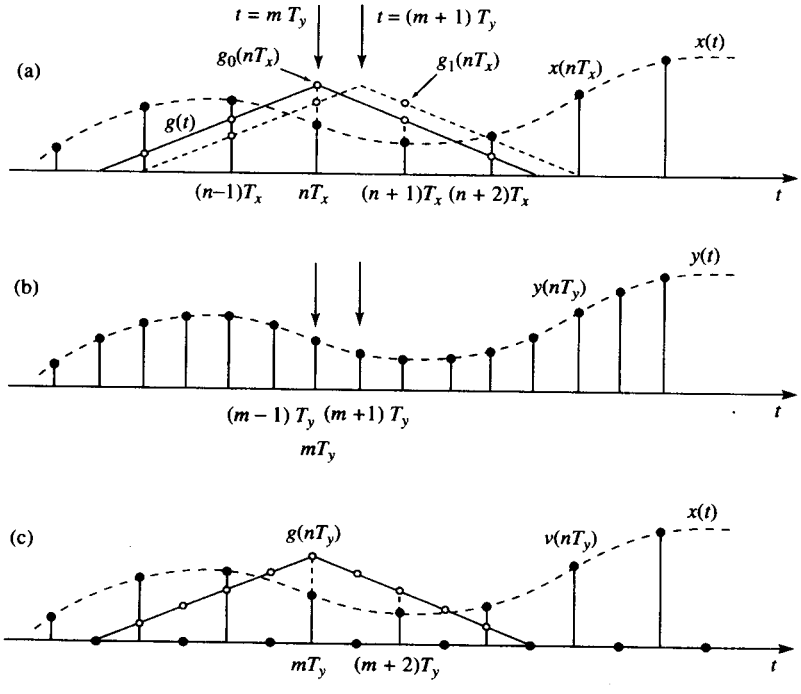


图 11.1.4　采样率以整数因子 $D=2$ 提高时的时间关系图。(a)中的应用要求一个偶数个数的冲激响应和一个奇数个数的输出样本。(c)中的应用只要求一个冲激响应，通过插入(a)中的冲激响应获得

在接下来几个章节中，我们将更具体地讨论完全时域实现采样率转换的属性、设计和结构。为方便起见，我们通常不把 T_x 和 T_y 作为离散时间信号的参数。然而，经常地，这会帮助读者以连续时间数量和单位的形式来思考。

11.2 以因子 D 抽取

让我们假定对具有谱 $X(\omega)$的信号 $x(n)$将以整数因子 D 进行下采样。在频率区间 $0\leqslant|\omega|\leqslant\pi$,或者等效地,$|F|\leqslant F_x/2$,假定谱 $X(\omega)$非零。我们知道,如果简单地通过每隔 D 个选取一个$x(n)$值来降低采样率,那么所得的信号将是 $x(n)$的一个混叠形式,其折叠频率为 $F_x/2D$。为了避免混叠,我们首先将 $x(n)$的带宽减少到 $F_{max}=F_x/2D$,或者等效地,$\omega_{max}=\pi/D$,然后我们就可以按 D 下采样,并且避免了混叠。

抽取过程如图 11.2.1 所示。输入序列 $x(n)$通过一个由冲激响应 $h(n)$和频率响应 $H_D(\omega)$描述的低通滤波器。理想情况下,该频率响应满足条件

$$H_D(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\pi/D\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{11.2.1}$$

这样该滤波器消去 $X(\omega)$在 $\pi/D<\omega<\pi$ 内的谱。当然,这意味着信号的进一步处理中,仅仅对 $x(n)$在$|\omega|\leqslant\pi/D$ 内的频率成分感兴趣。

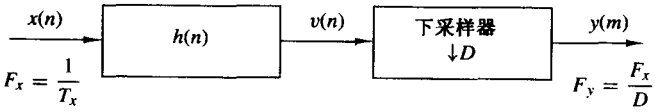


图 11.2.1 以因子 D 抽取

该滤波器的输出是 $v(n)$,如下式所示:

$$v(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n-k) \tag{11.2.2}$$

对其以因子 D 下采样得到$y(m)$,即

$$y(m)=v(mD)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(mD-k) \tag{11.2.3}$$

虽然 $x(n)$上的滤波操作是线性并且是时不变的,但是与滤波组合的下采样操作产生一个时变系统。这是很容易证明的。假定由 $x(n)$生成 $y(m)$,我们注意到除非 n_0 是 D 的倍数,否则无法从 $x(n-n_0)$得到 $y(n-n_0)$。因此,$x(n)$上的所有线性操作(下采样后的线性滤波)不是时不变的。

输出序列 $y(m)$的频率特性可以通过 $y(m)$的谱和输入序列 $x(n)$的谱的相关来获得。首先,为方便起见,定义序列 $\tilde{v}(n)$为

$$\tilde{v}(n)=\begin{cases}v(n), & n=0,\pm D,\pm 2D,\cdots\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{11.2.4}$$

显然,$\tilde{v}(n)$可视为 $v(n)$乘上周期为 D 的序列$p(n)$得到的序列,如图 11.2.2 所示。$p(n)$的离散傅里叶级数表示为

$$p(n)=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}e^{j2\pi kn/D} \tag{11.2.5}$$

所以

$$\tilde{v}(n)=v(n)p(n) \tag{11.2.6}$$

而

$$y(m)=\tilde{v}(mD)=v(mD)p(mD)=v(mD) \tag{11.2.7}$$

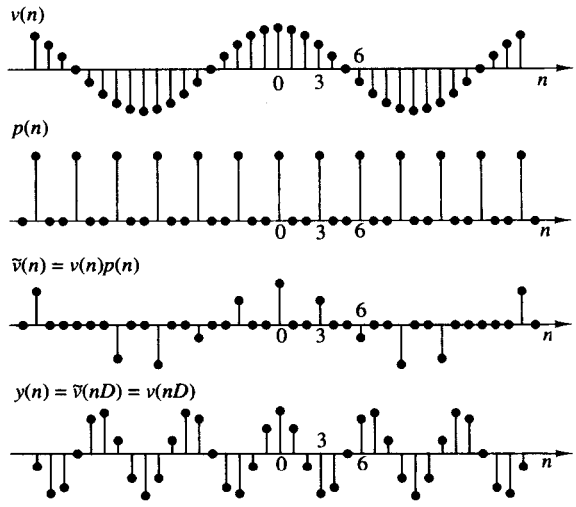


图 11.2.2　数学描述上以因子 D 下采样的步骤，利用正弦序列来说明

现在对输出序列 $y(m)$进行 z 变换：

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{v}(mD)z^{-m} \\ Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{v}(m)z^{-m/D} \end{aligned} \tag{11.2.8}$$

其中，最后一步是由 $\tilde{v}(m)=0$(除了在 D 的倍数处外)的前提推出的。将式(11.2.5)和式(11.2.6)的关系式代入式(11.2.8)，可得

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m)\left[\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi mk/D}\right] z^{-m/D} \\ &= \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}\sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m)(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/D}z^{1/D})^{-m} \\ &= \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} V(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/D}z^{1/D}) \\ &= \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} H_D(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/D}z^{1/D})X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/D}z^{1/D}) \end{aligned} \tag{11.2.9}$$

其中，最后一步可从 $V(z)=H_D(z)X(z)$推出。

通过在单位圆上计算 $Y(z)$，我们得到输出信号 $y(m)$的谱。由于 $y(m)$的采样率为 $F_y = 1/T_y$，即频率变量，我们记为 ω_y，单位为 rad，与采样率 F_y 相关，

$$\omega_y = \frac{2\pi F}{F_y} = 2\pi FT_y \tag{11.2.10}$$

由于采样率 F_x 和 F_y 具有如下关系：

$$F_y = \frac{F_x}{D} \tag{11.2.11}$$

于是可得频率变量 ω_y 和

$$\omega_x = \frac{2\pi F}{F_x} = 2\pi F T_x \tag{11.2.12}$$

有如下关系:

$$\omega_y = D\omega_x \tag{11.2.13}$$

于是,正如所期望的,通过下采样过程,频率区间 $0 \leqslant |\omega_x| \leqslant \pi/D$ 拓展到相应的频率区间 $0 \leqslant |\omega_y| \leqslant \pi$。

谱 $Y(\omega_y)$可以通过在单位圆上计算式(11.2.9)得到,表示为

$$Y(\omega_y) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} H_D\left(\frac{\omega_y - 2\pi k}{D}\right) X\left(\frac{\omega_y - 2\pi k}{D}\right) \tag{11.2.14}$$

利用适当设计的滤波器 $H_D(\omega)$,可以消除混叠,因此式(11.2.14)中除了首项外都变成零。对于 $0 \leqslant |\omega_y| \leqslant \pi$,

$$\begin{aligned} Y(\omega_y) &= \frac{1}{D} H_D\left(\frac{\omega_y}{D}\right) X\left(\frac{\omega_y}{D}\right) \\ &= \frac{1}{D} X\left(\frac{\omega_y}{D}\right) \end{aligned} \tag{11.2.15}$$

序列 $x(n)$,$v(n)$和 $y(n)$的谱如图 11.2.3 所示。

例 11.2.1 设计一个对输入信号 $x(n)$以因子 $D=2$ 下采样的采样器。利用 Remez 算法确定 FIR 滤波器的系数,使其具有 0.1 dB 的通带纹波并且阻带至少有 30 dB的衰减。

解:一个长度为 $M=30$ 的滤波器可以满足上述技术指标,其频率响应如图 11.2.4 所示。注意到截止频率 $\omega_c = \pi/2$。

11.3 以因子 I 内插

将采样率增加到 I 倍可以通过在信号的两个连续值之间内插 $I-1$ 个样本来实现。这一内插过程可以有许多方式实现。我们将介绍一个保持信号序列 $x(n)$的谱形状不变的方式。

令 $v(m)$表示采样率为 $F_y = IF_x$ 的序列,可以通过在 $x(n)$的两个连续值之间插入 $I-1$ 个零得到。于是

$$v(m) = \begin{cases} x(m/I), & m = 0, \pm I, \pm 2I, \cdots \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{11.3.1}$$

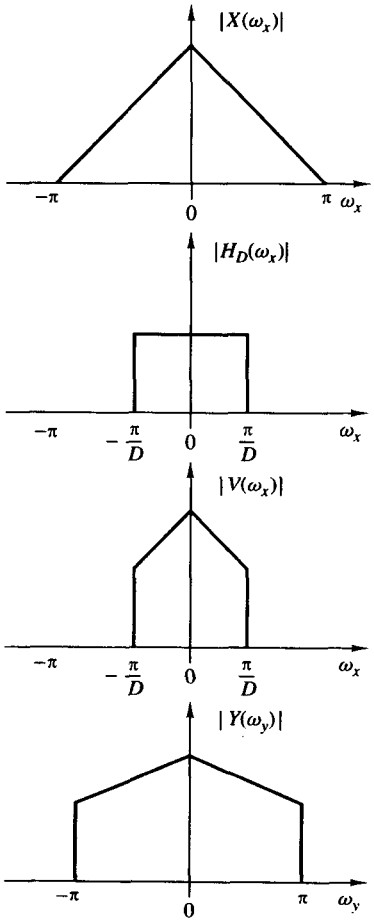


图 11.2.3 以因子 D 抽取 $x(n)$的信号谱图

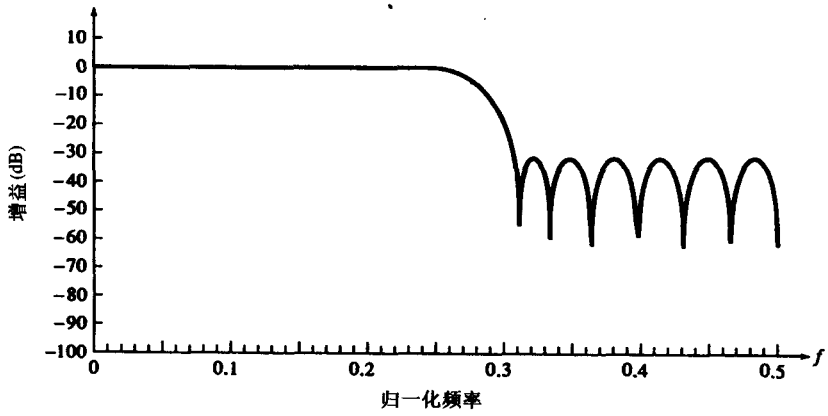


图 11.2.4　例 11.2.1 中长度为 $M=30$ 的线性相位 FIR 滤波器的幅度响应

并且,其采样率与 $y(m)$的相同。该序列的 z 变换为

$$V(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}v(m)z^{-m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-mI}=X(z^I) \tag{11.3.2}$$

$v(m)$相应的谱可以通过在单位圆上计算式(11.3.2)得到。于是

$$V(\omega_y)=X(\omega_y I) \tag{11.3.3}$$

其中,ω_y 表示新采样率 F_y 的频率变量(即 $\omega_y=2\pi F/F_y$)。现在采样率间的关系为 $F_y=IF_x$,所以频率变量间的关系为

$$\omega_y=\frac{\omega_x}{I} \tag{11.3.4}$$

$X(\omega_x)$和 $V(\omega_y)$的谱如图 11.3.1 所示。可以看出,通过在 $x(n)$的两个连续值之间插入 $I-1$ 个零,实现采样率增加所得到的信号,其谱 $V(\omega_y)$是输入信号的谱 $X(\omega_x)$的 I 次周期性重复折叠。

由于只有在 $0\leqslant\omega_y\leqslant\pi/I$ 时 $x(n)$的频率成分才是唯一的,故应该将 $X(\omega)$在 $\omega_y=\pi/I$ 以上的镜像去掉。这一过程可以通过将序列 $v(m)$经过频率响应 $H_I(\omega_y)$具有如下理想特性的低通滤波器来实现:

$$H_I(\omega_y)=\begin{cases}C, & 0\leqslant|\omega_y|\leqslant\pi/I\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{11.3.5}$$

其中,C 是对输出序列 $y(m)$进行适当归一化的放缩因子。因此,输出谱为

$$Y(\omega_y)=\begin{cases}CX(\omega_y I), & 0\leqslant|\omega_y|\leqslant\pi/I\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{11.3.6}$$

选取放缩因子 C 使得输出 $y(m)=x(m/I)$, $m=0,\pm I,\pm 2I,\cdots$。为了数学上的方便,我们选取 $m=0$。这样,

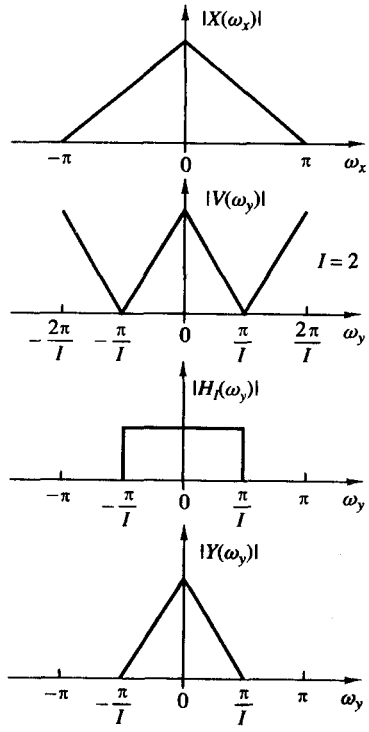


图 11.3.1　$x(n)$和 $v(n)$的谱,满足 $V(\omega_y)=X(\omega_y l)$

$$y(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Y(\omega_y)\mathrm{d}\omega_y=\frac{C}{2\pi}\int_{-\pi/I}^{\pi/I}X(\omega_y I)\mathrm{d}\omega_y \tag{11.3.7}$$

由于 $\omega_y=\omega_x/I$,式(11.3.7)可写成

$$y(0)=\frac{C}{I}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega_x)\mathrm{d}\omega_x=\frac{C}{I}x(0) \tag{11.3.8}$$

因此,$C=I$ 就是所期望的归一化因子。

最后,我们指出的是,输出序列 $y(m)$可以表示成序列 $v(n)$和低通滤波器的单位样本响应 $h(n)$的卷积形式。即

$$y(m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(m-k)v(k) \tag{11.3.9}$$

因为除了在 I 的倍数处 $v(kI)=x(k)$外,在其他处都有 $v(k)=0$,所以式(11.3.9)变成

$$y(m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(m-kI)x(k) \tag{11.3.10}$$

例 11.3.1 设计一个以因子 $I=5$ 提高输入采样率的内插器。利用 Remez 算法确定 FIR 滤波器的系数,使其具有 0.1 dB 的通带纹波并且阻带至少有 30 dB 的衰减。

解:一个长度为 $M=30$ 的滤波器可以满足上述技术指标。其频率响应如图 11.3.2 所示。注意到截止频率 $\omega_c=\pi/5$。

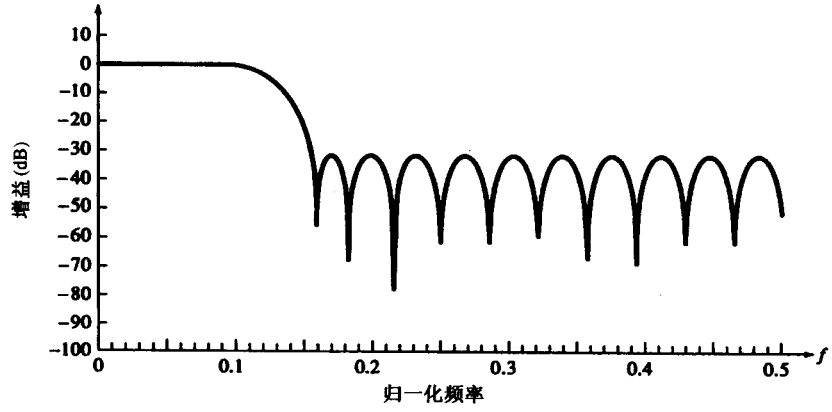


图 11.3.2 例 11.3.1 中长度为 $M=30$ 的线性相位 FIR 滤波器的幅度响应

11.4 以有理因子 I/D 转换采样率

前面已经讨论了抽取(以因子 D 下采样)和内插(以因子 I 上采样)的特殊情形,我们现在考虑以有理因子 I/D 转换采样率的一般情形。基本上,要完成该采样率转换,我们可以通过先以因子 I 内插,再以因子 D 对内插器的输出进行抽取。换言之,可以将内插器和抽取器级联来实现按有理因子 I/D 的采样率转换,如图 11.4.1 所示。

要强调的是,先进行内插后进行抽取的重要性在于保留了 $x(n)$的理想频率特性。另外,利用如图 11.4.1 所示的级联结构,冲激响应分别为$\{h_u(k)\}$和$\{h_d(k)\}$的两个滤波器按同样的采样率 IF_x 操作,因此可以将它们组合成冲激响应为 $h(k)$的单个低通滤波器,如图 11.4.2 所示。组合滤

波器的频率响应 $H(\omega_v)$必须包括内插和抽取的滤波运算,故其理想情况下的频率响应为

$$H(\omega_v)=\begin{cases}I, & 0\leqslant|\omega_v|\leqslant\min(\pi/D,\pi/I)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{11.4.1}$$

其中,$\omega_v=2\pi F/F_v=2\pi F/IF_x=\omega_x/I$。

在时域中,上采样器的输出为序列

$$v(l)=\begin{cases}x(l/I), & l=0,\pm I,\pm 2I,\cdots\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{11.4.2}$$

而线性时变滤波器的输出为

$$w(l)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(l-k)v(k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(l-kI)x(k)\tag{11.4.3}$$

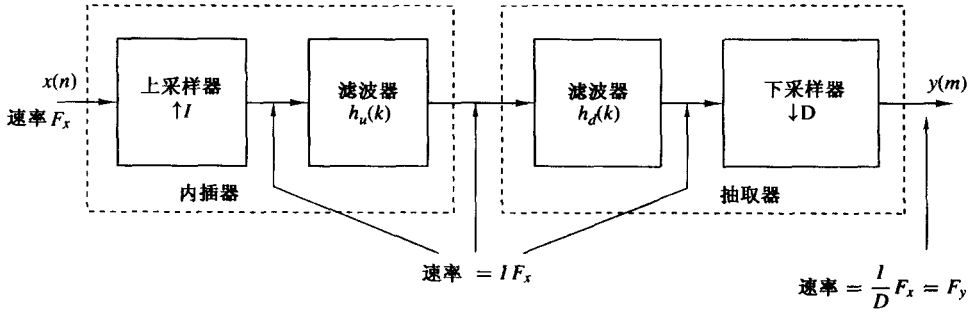


图 11.4.1　以因子 I/D 转换采样率的方法

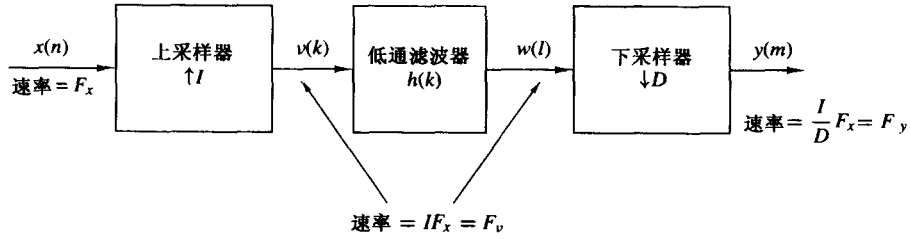


图 11.4.2　以因子 I/D 转换采样率的方法

最后,采样率转换器的输出为序列$\{y(m)\}$,该序列可通过按因子 D 对序列$\{w(l)\}$下采样得到,即

$$y(m)=w(mD)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(mD-kI)x(k)\tag{11.4.4}$$

通过变量替换,可将(11.4.4)变成另一不同形式。令

$$k=\left\lfloor\frac{mD}{I}\right\rfloor-n\tag{11.4.5}$$

其中,符号$\lfloor r\rfloor$表示小于等于 r 的最大整数。通过变量替换,式(11.4.4)变成

$$y(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h\left(mD-\left\lfloor\frac{mD}{I}\right\rfloor I+nI\right)x\left(\left\lfloor\frac{mD}{I}\right\rfloor-n\right)\tag{11.4.6}$$

我们注意到

$$mD - \left\lfloor \frac{mD}{I} \right\rfloor I = mD, \qquad \text{以 } I \text{ 为模}$$

$$= (mD)_I$$

因此,式(11.4.6)可表示为

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nI + (mD)_I)x\left(\left\lfloor \frac{mD}{I} \right\rfloor - n\right) \tag{11.4.7}$$

该式是式(11.1.9)的离散时间形式。

由表达式显而易见,输出 $y(m)$是输入序列 $x(n)$经过具有如下冲激响应的时变滤波器得到的:

$$g(n,m) = h(nI + (mD)_I), \qquad -\infty < m,n < \infty \tag{11.4.8}$$

其中,$h(k)$是以采样率 IF_x 操作的时变低通滤波器的冲激响应。更进一步观察到,对任意整数 k,

$$\begin{aligned} g(n,m+kI) &= h(nI + (mD + kDI)_I) \\ &= h(nI + (mD)_I) \\ &= g(n,m) \end{aligned} \tag{11.4.9}$$

因此,$g(n,m)$是变量 m 的周期函数,且周期为 I。

把内插过程和抽取过程的结果结合起来就可以得到频域关系。于是,冲激响应为 $h(l)$的线性滤波器的输出的谱为

$$\begin{aligned} V(\omega_v) &= H(\omega_v)X(\omega_v I) \\ &= \begin{cases} IX(\omega_v I), & 0 \leqslant |\omega_v| \leqslant \min(\pi/D, \pi/I) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \tag{11.4.10}$$

通过以因子 D 对序列 $v(n)$抽取得到的输出序列 $y(m)$的谱为

$$Y(\omega_y) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} V\left(\frac{\omega_y - 2\pi k}{D}\right) \tag{11.4.11}$$

其中,$\omega_y = D\omega_v$。如式(11.4.10)推导的,该线性滤波器避免了混叠,故式(11.4.11)所表示的输出序列的谱可简化为

$$Y(\omega_y) = \begin{cases} \dfrac{I}{D}X\left(\dfrac{\omega_y}{D}\right), & 0 \leqslant |\omega_y| \leqslant \min\left(\pi, \dfrac{\pi D}{I}\right) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{11.4.12}$$

例 11.4.1 设计一个以因子 2.5 提高输入采样率的采样率转换器。利用 Remez 算法确定 FIR 滤波器的系数,使其具有 0.1 dB 的通带纹波并且阻带至少有 30 dB 的衰减。给出用于实现采样率转换器的时变系数的集合 $g(n,m)$。

解:满足该问题技术指标的 FIR 滤波器恰好与例 11.3.1 所设计的滤波器相同。其带宽为 $\pi/5$。

该 FIR 滤波器的系数由(11.4.8)给出:

$$\begin{aligned} g(n,m) &= h(nI + (mD)_I) \\ &= h\left(nI + mD - \left\lfloor \frac{mD}{I} \right\rfloor I\right) \end{aligned}$$

代入 $I=5$ 和 $D=2$ 可得

$$g(n,m)=h\left(5n+2m-5\lfloor\frac{2m}{5}\rfloor\right)$$

对 $n=0,1,\cdots,5$ 和 $m=0,1,\cdots,4$ 时计算 $g(n,m)$，我们可得时变滤波器的如下系数：

$$\begin{aligned}
g(0,m)&=\{h(0)\quad h(2)\quad h(4)\quad h(1)\quad h(3)\ \}\\
g(1,m)&=\{h(5)\quad h(7)\quad h(9)\quad h(6)\quad h(8)\ \}\\
g(2,m)&=\{h(10)\quad h(12)\quad h(14)\quad h(11)\quad h(13)\}\\
g(3,m)&=\{h(15)\quad h(17)\quad h(19)\quad h(16)\quad h(18)\}\\
g(4,m)&=\{h(20)\quad h(22)\quad h(24)\quad h(21)\quad h(23)\}\\
g(0,m)&=\{h(25)\quad h(27)\quad h(29)\quad h(26)\quad h(28)\}
\end{aligned}$$

综上所述，按因子 I/D 的采样率转换，可以通过先在输入信号 $x(n)$ 的相继值间插入 $I-1$ 个零将采样率提高 I 倍，再对所得序列做线性滤波以消除不想要的 $X(\omega)$ 的镜像，最后按因子 D 对滤波后信号做下采样来实现。当 $F_y>F_x$ 时，低通滤波器作为一个反镜像后置滤波器，消除 F_x 倍数但非 IF_x 倍数处的谱重复。当 $F_y<F_x$ 时，低通滤波器作为一个反镜像前置滤波器，消除 F_y 处下平移的谱重复以避免重叠。低通滤波器的设计可以通过第 10 章描述的滤波器设计技术来完成。

11.5　采样率转换的实现

在这一节中，我们考虑利用多相滤波器结构实现采样率转换系统。利用 11.6 节描述的多级应用可以简化计算。

11.5.1　多相滤波器结构

多相滤波器是为了高效地实现采样率转换器而发展出来的。但是，它们还有很多其他应用。多相结构基于以下事实：任何系统函数都可分解为

$$\begin{aligned}
H(z)=&\cdots+h(0)&&+h(M)z^{-M}+\cdots\\
&\cdots+h(1)z^{-1}&&+h(M+1)z^{-(M+1)}+\cdots\\
&&&\vdots\\
&\cdots+h(M-1)z^{-(M-1)}&&+h(2M-1)z^{-(2M-1)}+\cdots
\end{aligned}$$

如果我们对第 i 行提取因子 $z^{-(i-1)}$，则有

$$\begin{aligned}
H(z)=&[\cdots+h(0)&&+h(M)z^{-M}+\cdots]\\
&+z^{-1}[\cdots+h(1)&&+h(M+1)z^{-M}+\cdots]\\
&&&\vdots\\
&+z^{-(M-1)}[\cdots+h(M-1)&&+h(2M-1)z^{-M}+\cdots]
\end{aligned}$$

最后等式可写成

$$H(z)=\sum_{i=0}^{M-1}z^{-i}P_i(z^M)\tag{11.5.1}$$

其中，

$$P_i(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(nM+i)z^{-n}\tag{11.5.2}$$

关系式(11.5.1)称为 M 元多相分解,而 $P_i(z)$是 $H(z)$的多相元素。每个子序列

$$p_i(n) = h(nM + i), \quad i = 0, 1, \cdots, M - 1 \tag{11.5.3}$$

可以通过下采样原始冲激响应的延迟("相移")形式得到。

为了研究 M 元多相滤波器结构,我们在 $M = 3$ 时展开输出序列的 z 变换:

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= P_0(z^3)X(z) + z^{-1}P_1(z^3)X(z) + z^{-2}P_2(z^3)X(z) \qquad (11.5.4) \\ &= P_0(z^3)X(z) + z^{-1}\{P_1(z^3)X(z) + z^{-1}[P_2(z^3)X(z)]\} \qquad (11.5.5) \end{aligned}$$

式(11.5.4)推出的多相结构如图 11.5.1 所示。类似地,式(11.5.5)得到的多相结构如图 11.5.2 所示。由于与转置 FIR 滤波器实现很相似,故称为转置多相结构。所得的多相结构对任何滤波器,FIR 或者 IIR,并且对任何有限值 M,都是有效的,同时也能满足我们的要求。额外结构和更具体内容可参考 Vaidyanathan(1993)。

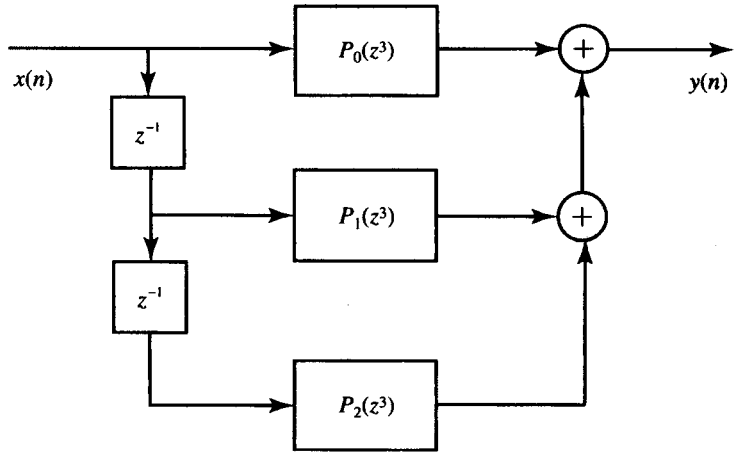


图 11.5.1 $M = 3$ 时多相滤波器结构的框图

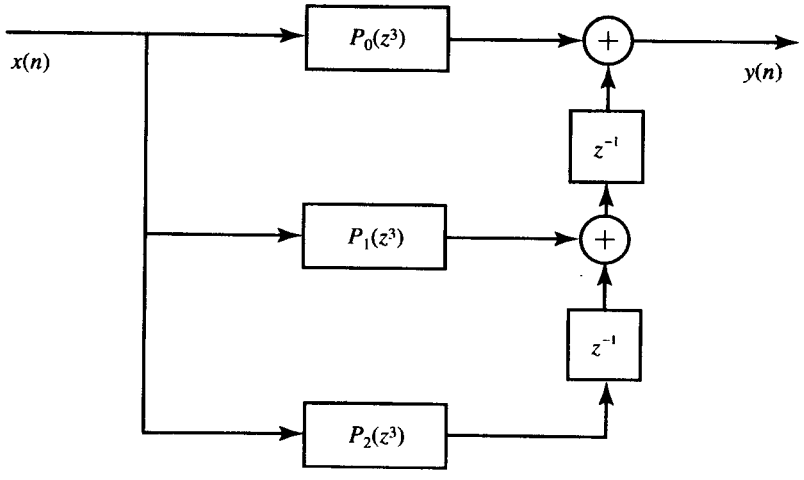


图 11.5.2 $M = 3$ 时转置多相滤波器的结构

11.5.2　滤波器和下采样器/上采样器的相互交换

一般来说，采样转换器(是一个线性时变系统)和线性时不变系统的顺序是不能交换的。我们得到两个恒等式，称为稀有恒等式，可以帮助我们通过适当修改滤波器就能交换滤波器和下采样器或上采样器的位置。

为了证明第一个恒等式(见图 11.5.3)，我们回顾一下一个下采样器的输入/输出描述

$$y(n)=x(nD)\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}Y(z)=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}X(z^{1/D}W_D^i) \tag{11.5.6}$$

其中，$W_D=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/D}$。图 11.5.3(a)中的系统的输出可写成

$$Y(z)=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}V_1(z^{1/D}W_D^i)=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}H(zW_D^{iD})X(z^{1/D}W_D^i) \tag{11.5.7}$$

因为 $V_1(z)=H(z^D)X(z)$。考虑到 $W_D^{iD}=1$ 和图 11.5.3(b)，由式(11.5.7)可得

$$Y(z)=\frac{1}{D}H(z)\sum_{i=0}^{D-1}X(z^{1/D}W_D^i)=H(z)V_2(z) \tag{11.5.8}$$

图 11.5.3 给出了两种结构的等价性。

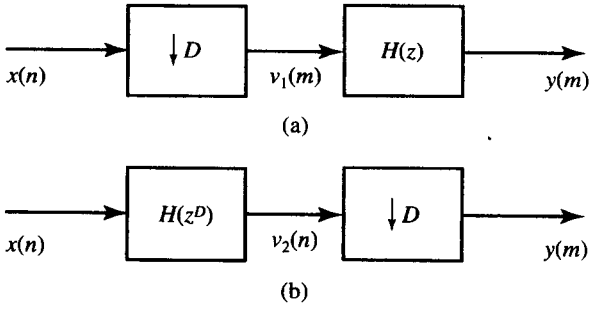


图 11.5.3　两种等价的下采样系统(第一稀有恒等式)

对于上采样，也有一个类似的恒等式。首先，我们回顾一下上采样器的输入/输出描述

$$y(n)=\begin{cases}x\left(\dfrac{n}{I}\right), & n=0,\pm I,\pm 2I,\cdots\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}Y(z)=X(z^I) \tag{11.5.9}$$

图 11.5.4(a)中系统的输出可写成

$$Y(z)=H(z^I)V_1(z)=H(z^I)X(z^I) \tag{11.5.10}$$

因为 $V_l(z)=X(z^I)$。图 11.5.4(b)中系统的输出为

$$Y(z)=V_2(z^I)=H(z^I)X(z^I) \tag{11.5.11}$$

与式(11.5.10)相等。这就说明了图 11.5.4 的两个系统是等价的。

因此，我们已经证明：如果我们适当地修改滤波器的系统函数，就可能交换线性滤波操作和下采样或上采样的先后次序。

11.5.3　利用级联积分器的梳状滤波器转换采样率

用来进行采样率转换的低通滤波器的硬件实现可以大大简化，如果我们选择具有如下系统函数的梳状滤波器(见 5.4.5 节)：

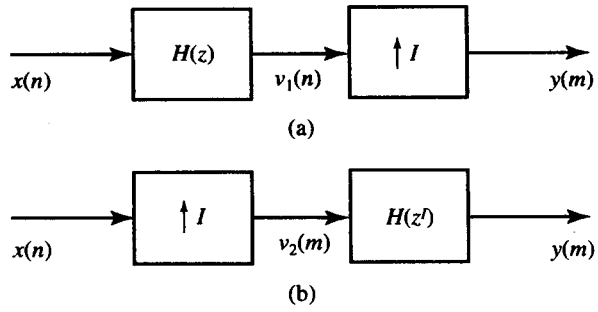


图 11.5.4 两种等价的上采样系统(第二稀有恒等式)

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-1}z^{-k}=\frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}} \tag{11.5.12}$$

该系统可以通过级联"积分器"$1/(1-z^{-1})$的梳状滤波器$(1-z^{-M})$来实现。这就得到了称为级联积分器的梳状(CIC)滤波器结构。CIC 结构不需要对滤波器系数进行任何操作或存储。

为了获取一个高效的抽取结构,我们首先在积分器梳状 CIC 滤波器的后面接下采样器,接着应用第一稀有恒等式,如图 11.5.5 所示。对于内插的情形,我们在上采样器后面接上梳状积分器 CIC 滤波器,再应用第二稀有恒等式,如图 11.5.6 所示。为了改进采样率转换的低通频率响应,我们可以级联 K 级 CIC 滤波器。这种情况下,我们安排所有的积分器在滤波器的一边,而梳状滤波器在另一边,接着如同单级情形那样应用第一稀有恒等式。积分器 $1/(1-z^{-1})$是非稳定系统。因此,其输出可能会无限制地增大,当积分器部分先出现时,如图 11.5.5(b)的抽取结构,会导致溢出。但是,如果整个滤波器是用两个互补的固定点结构实现的,则该溢出是可容忍的。如果 $D\neq M$ 或 $I\neq M$,则图 11.5.5(a)和 11.5.6(b)中的梳状滤波器 $1-z^{-1}$需要分别用 $1-z^{-M/D}$或 $1-z^{-M/I}$取代。更详细的关于抽取和内插的 CIC 滤波器的研究可参考 Hogenauer(1981)。最后,我们注意到 CIC 滤波器是 10.2.3 节讨论的频率采样结构的特殊情况。

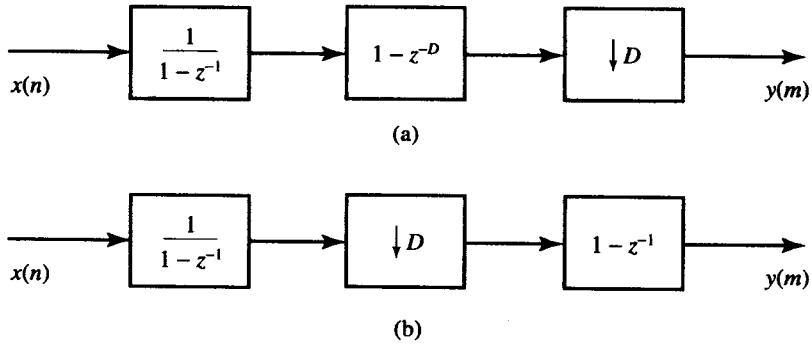


图 11.5.5 利用第一稀有恒等式得到的抽取的有效 CIC 滤波器结构

如果 CIC 滤波器的阶数是 2 的整数次幂,即 $M=2^K$,我们就可以将系统函数式(11.5.12)分解为

$$H(z)=(1+z^{-1})(1+z^{-2})(1+z^{-4})\cdots(1+z^{-2^{K-1}}) \tag{11.5.13}$$

利用该分解,我们可以用非递归 CIC 滤波器得到抽取器结构。图 11.5.7 给出了一个 $D=M=8$ 的抽取器的例子。N 个 CIC 滤波器的级联可以通过在每个抽取前提供 M 个前向的$(1-z^{-1})$单元。约束条件 $M=2^k$ 可以放松到 M 为质数的乘积,具体见 Jang 和 Yang(2001)。

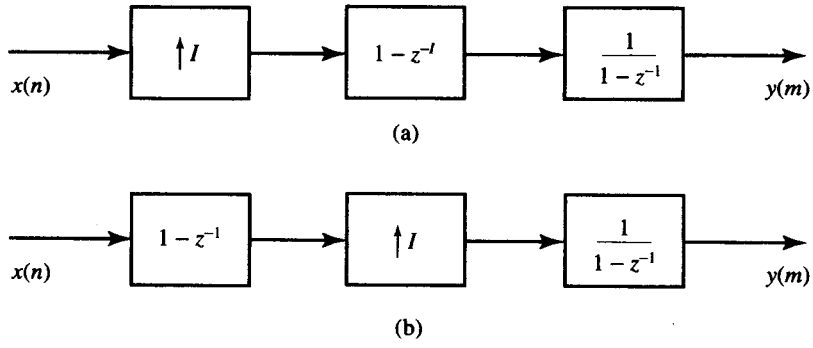


图 11.5.6　利用第二稀有恒等式得到的内插的有效 CIC 滤波器结构

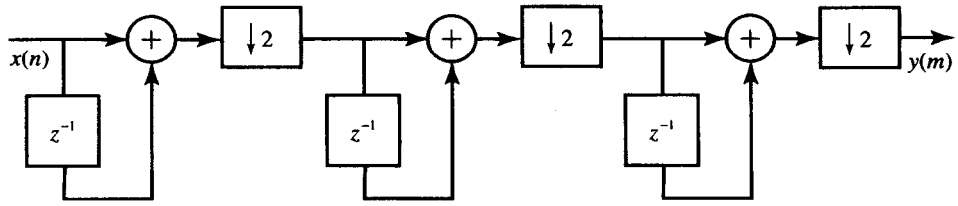


图 11.5.7　$D=8$ 时利用梳状滤波器的抽取的有效滤波器结构

11.5.4　抽取和内插滤波器的多相结构

为了研究抽取的多相结构，我们从如图 11.5.8 所示的抽取过程的前向实现开始。通过将输入序列 $x(n)$经过线性滤波器，再对滤波器输出以因子 D 下采样，就可以得到抽取序列。这种情况下，滤波器以高采样率 F_x 工作，但是实际上每 D 个输出中只有一个是需要的。一种合理的方案是找到一个仅仅对所需要样本计算的结构。我们通过开发出如图 11.5.1 所示的多相结构来得到这样有效的实现。由于下采样通过加法得到补偿，故组合图 11.5.8 和图 11.5.1 所示的结构可以得到如图 11.5.9(a)所示的结构。如果我们接着应用如图 11.5.3 所示的恒等式，就可以得到期望的实现结构，如图 11.5.9(b)所示。在该滤波器结构下，只有需要的样本才被计算，并且所有的乘法和加法都是在低采样率 F_x/D 下进行的。这样，我们就得到了期望的高效。计算上额外的简化可以通过使用线性相位 FIR 滤波器和利用冲激响应的对称性得到。

在实践中，利用一个如图 11.5.10 所示的转接器来实现多相抽取器是更简便的。转接器从 $n=0$开始顺时针旋转，将一组 D 个输入样本依次送到多相滤波器的第 $D-1$ 个至第 0 个滤波器。对于每组 D 个输入样本，多相滤波器收到一个新输入，它们的输出被计算并且加起来构成输出信号 $y(m)$的一个样本。通过仔细观察图 11.1.3 就可以理解该实现的操作。

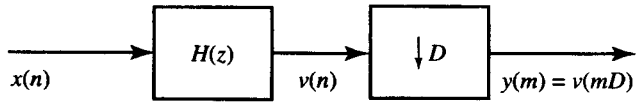


图 11.5.8　抽取系统

接着，我们考虑内插器的有效实现，通过在 $x(n)$的相继值间插入 $I-1$ 个零，再对所得序列进行滤波(见图 11.5.11)。该结构的主要问题是滤波器的运算是在高采样率 IF_x 下进行的。可以通过首先用图 11.5.2 中的转置多相结构替换图 11.5.11 中的滤波器，如图 11.5.12(a)所示，得到期望

的简化。然后,我们利用第二稀有恒等式(见图 11.5.4)得到图 11.5.12(b)中的结构。这样,所有的滤波操作都是以低采样率 F_x 进行的。有趣的是,内插器的结构可以通过转置抽取器的结构得到,反之亦然(Crochiere 和 Rabiner,1981)。

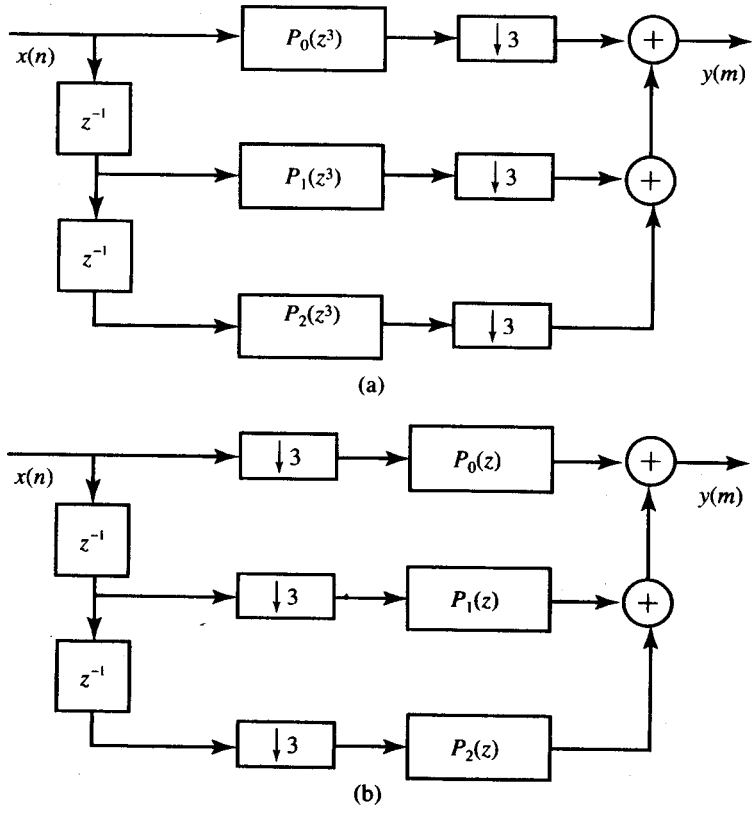


图 11.5.9 在第一稀有恒等式前(a)和后(b)使用多相结构的抽取系统的实现

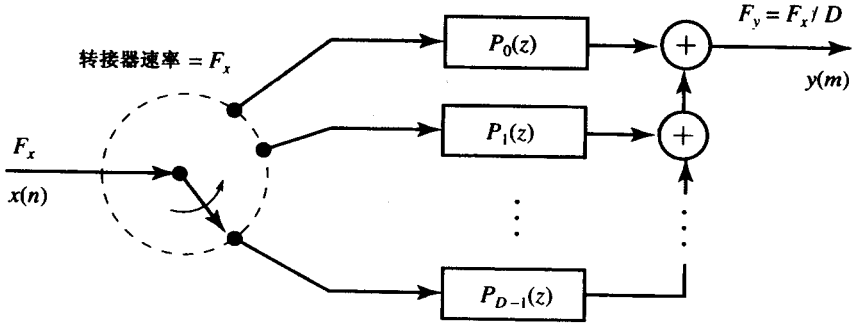


图 11.5.10 利用多相滤波器和转接器的抽取

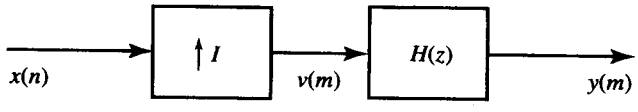
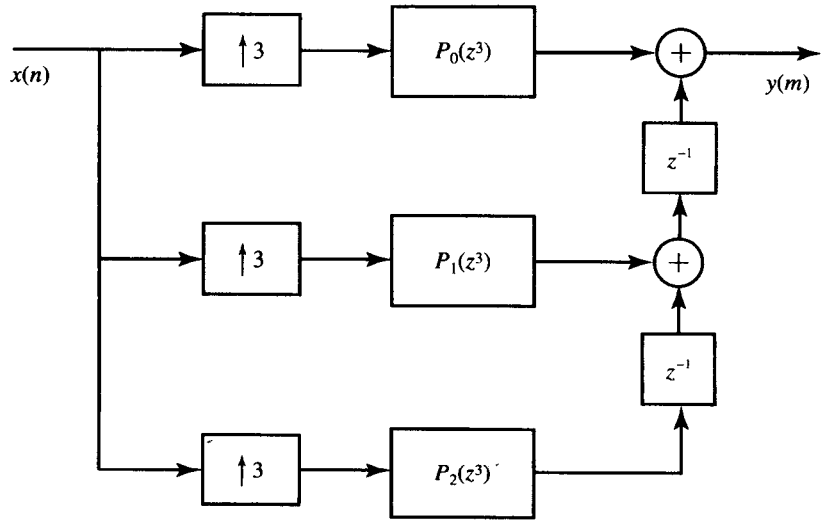
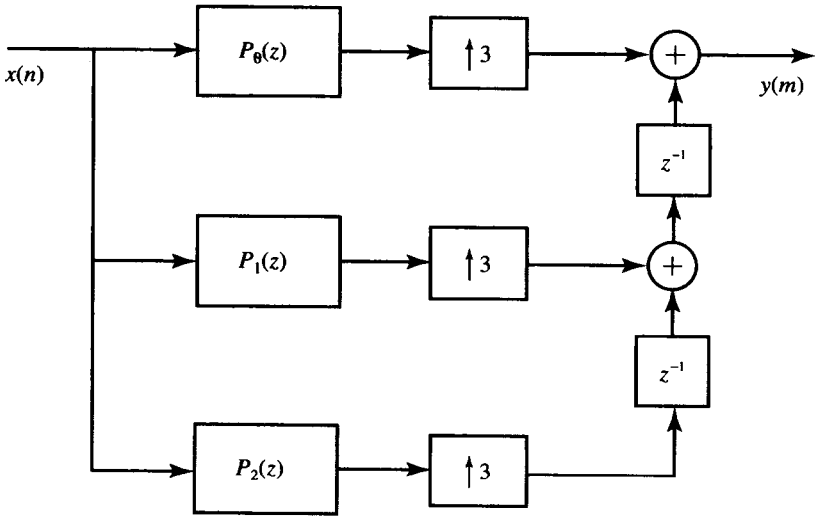


图 11.5.11 内插系统



(a)



(b)

图 11.5.12　在第二稀有恒等式前(a)和后(b)使用多相结构的内插系统的实现

对于每个输入样本，多相滤波器产生 I 个输出样本 $y_0(n), y_1(n), \cdots, y_{I-1}(n)$。因为第 i 个滤波器的输出 $y_i(n)$ 后面有 $(I-1)$ 个零并且被第 i 个样本延迟，所以多相滤波器在不同时隙产生非零样本。实际中，我们可以通过如图 11.5.13 所示的转接器模型实现部分结构，包括 1 到 I 的扩展器、延时器和加法器。转接器在分支 $i=0$ 处首先从时刻 $n=0$ 开始顺时针旋转。对每个输入样本 $x(n)$，转接器通过读进每个多相滤波器的输出来得到输出(内插)信号 $y(m)$ 的 I 个样本。细心观察图 11.1.4 就可以理解该实现的操作。图 11.5.13 中的每个多相滤波器利用自己独特的系数集合处理同一输入数据。因此，我们可以利用一个单滤波器通过连续地加载不同的系数集合得到相同的结果。

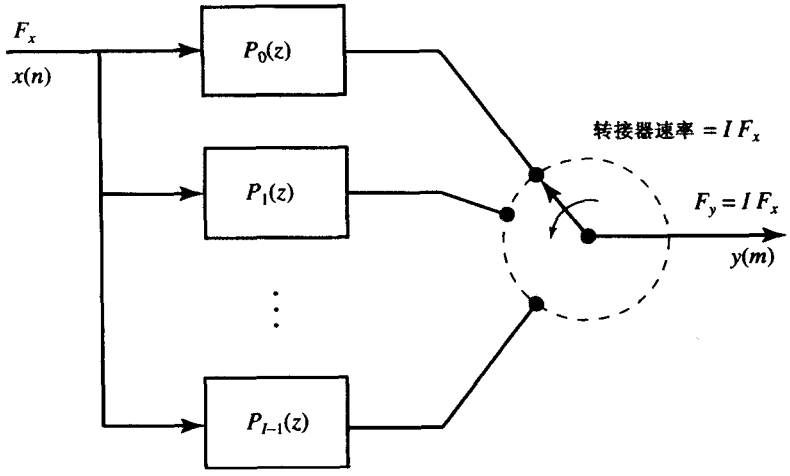


图 11.5.13 利用多相滤波器和转接器实现内插

11.5.5 有理采样率转换的结构

利用一个多相内插器接着一个下采样器,就可以有效地实现一个比率为 I/D 的采样率转换器。但是,由于下采样器仅保留 D 个多相子滤波器其中一个的输出,故它无法计算输入信号相继值间的所有 I 个内插值。为了确定到底计算哪个多相子滤波器的输出,我们考虑一个 $I=5$ 并且 $D=3$ 的例子。内插器的多相结构有 $I=5$ 个能在有效采样周期 $T=T_x/I$ 内提供内插样本的子滤波器。下采样器每次从这些样本中取出第 D 个,得到采样周期为 $T_y=DT=DT_x/I$ 的离散时间信号。很容易想到块形式的周期为

$$T_{\text{block}}=IT_y=DT_x=IDT \tag{11.5.14}$$

其中包括 L 个输出样本或 I 个输入样本。各种序列和一块数据的时间位置关系如图 11.5.14 所示。输入序列 $x(nT_x)$ 内插得到序列 $v(kT)$,$v(kT)$ 被抽取后产生 $y(mT_y)$。如果我们利用具有 $M=KI$ 个系数的 FIR 滤波器,令多相子滤波器的 $p_i(n)=h(nI+i)(i=0,1,\cdots,I-1)$,其中 $n=0,1,\cdots,K-1$。为了计算输出样本 $y(m)$,我们利用具有索引 i_m 的多相子滤波器,其需要输入样本 $x(k_m),x(k_m-1),\cdots,x(k_m-K+1)$。由关系式(11.1.9)和图 11.5.14,我们可以轻易推出

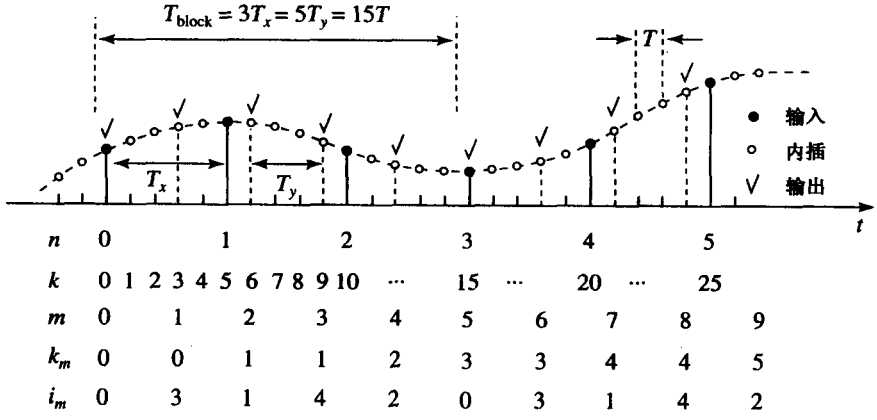


图 11.5.14 有理比率 $I/D=5/3$ 时采样率转换的多相实现的索引计算

$$k_m = \left\lfloor \frac{mD}{I} \right\rfloor \quad \text{和} \quad i_m = (Dm)_I \tag{11.5.15}$$

对 $D=3$ 和 $I=5$，第一个数据块包括 $D=3$ 个输入样本和 $I=5$ 个输出样本。为了计算样本 $\{y(0), y(1), y(2), y(3), y(4)\}$，我们相应地使用由索引 $i_m = \{0,3,1,4,2\}$ 指定的多相子滤波器。只有当 k_m 的值变化时，滤波器中存储的样本才需要更新。该讨论提供了利用 FIR 滤波器有效软件实现有理采样率转换的基本思想。

11.6　采样率转换的多级实现

在采样率转换的实际应用中，我们经常遇到比 1 大很多的抽取因子和内插因子。例如，假定要求我们按因子 $I/D = 130/63$ 改变采样率。虽然，理论上讲，可以准确地实现该采样率转换，但是那将需要一组 130 个的多相滤波器，并且计算上可能是低效的。在这一节中，我们考虑多级中 $D \gg 1$ 和 $I \gg 1$ 时实现采样率转换的方法。

首先，我们考虑以因子 $I \gg 1$ 内插。假定 I 可以分解成若干正整数的积，

$$I = \prod_{i=1}^{L} I_i \tag{11.6.1}$$

那么，以因子 I 内插可通过 L 级内插和滤波的级联来实现，如图 11.6.1 所示。注意到内插器中每一个滤波器都消除了在相应内插器的上采样过程中所产生的镜像。

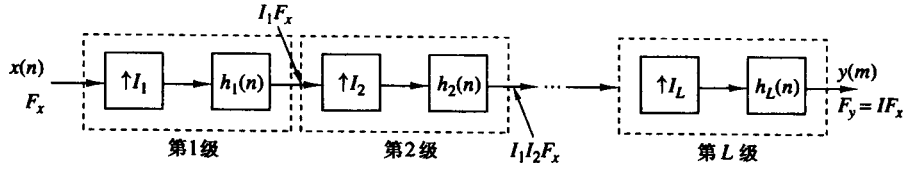


图 11.6.1　以因子 I 内插的多级实现

类似地，以因子 D 抽取，其中因子 D 可以分解成若干正整数的积，

$$D = \prod_{i=1}^{J} D_i \tag{11.6.2}$$

那么就可通过级联 J 级滤波和抽取来实现，如图 11.6.2 所示。于是，第 i 级输出的采样率为

$$F_i = \frac{F_{i-1}}{D_i}, \qquad i = 1, 2, \cdots, J \tag{11.6.3}$$

其中，序列 $\{x(n)\}$ 的输入速率为 $F_0 = F_x$。

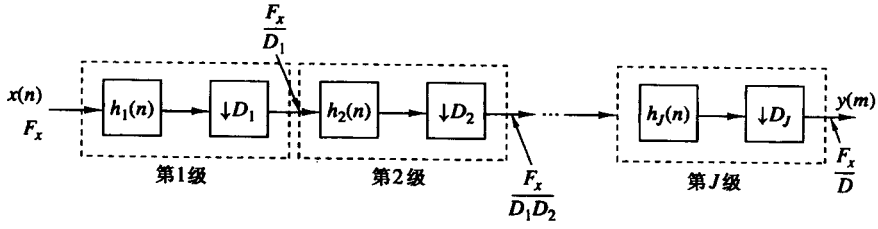


图 11.6.2　以因子 D 抽取的多级实现

为了确保整个抽取过程不出现混叠,我们设计每一级的滤波器都可以在感兴趣的频带内不出现混叠。为了详细阐述,我们定义整个抽取器中的理想通带和过渡带为

$$\begin{aligned} &\text{通带: } 0 \leqslant F \leqslant F_{pc} \\ &\text{过渡带: } F_{pc} \leqslant F \leqslant F_{sc} \end{aligned} \tag{11.6.4}$$

其中,$F_{sc} \leqslant F_x/2D$。为了避免在频带 $0 \leqslant F \leqslant F_{sc}$ 内出现混叠,可以通过选取每级滤波器的频带为

$$\begin{aligned} &\text{通带: } 0 \leqslant F \leqslant F_{pc} \\ &\text{过渡带: } F_{pc} \leqslant F \leqslant F_i - F_{sc} \\ &\text{阻带: } F_i - F_{sc} \leqslant F \leqslant \frac{F_{i-1}}{2} \end{aligned} \tag{11.6.5}$$

例如,在第 1 级的滤波器有 $F_1 = F_x/D_1$,并且滤波器的频带设计如下:

$$\begin{aligned} &\text{通带: } 0 \leqslant F \leqslant F_{pc} \\ &\text{过渡带: } F_{pc} \leqslant F \leqslant F_1 - F_{sc} \\ &\text{阻带: } F_1 - F_{sc} \leqslant F \leqslant \frac{F_0}{2} \end{aligned} \tag{11.6.6}$$

以因子 D_1 抽取后,来自信号成分的混叠落于滤波器的过渡带内,但是在 F_{sc} 以上的频带出现混叠。因此,在 $0 \leqslant F \leqslant F_{sc}$ 内没有混叠。通过设计后续级的满足式(11.6.5)给出的技术指标的滤波器,我们保证了主频带 $0 \leqslant F \leqslant F_{sc}$ 不会出现混叠。

例 11.6.1 考虑额定带宽为 4 kHz 的音频信号,以 8 kHz 的速率对其采样。假定我们希望用一个通带为 $0 \leqslant F \leqslant 75$、过渡带 $75 \leqslant F \leqslant 80$ 的滤波器分离 80 Hz 以下的频率成分,即 $F_{pc} = 75$ Hz 和 $F_{sc} = 80$ Hz。频带 $0 \leqslant F \leqslant 80$ 的信号可以按因子 $D = F_x/2F_{sc} = 50$ 抽取。另外,规定滤波器的通带纹波为 $\delta_1 = 10^{-2}$、阻带纹波为 $\delta_2 = 10^{-4}$。

满足这些技术指标的线性相位 FIR 滤波器的长度,可以根据 10.2.7 节介绍的一个著名公式来估计得到。回想一下,由凯泽提出的估计 M 的一个特别简单的公式为

$$\hat{M} = \frac{-10\lg\delta_1\delta_2 - 13}{14.6\Delta f} + 1 \tag{11.6.7}$$

其中,Δf 是过渡区域归一化(用采样率)的宽度[即 $\Delta f = (F_{sc} - F_{pc})/F_s$]。Herrmann 等(1973)提出了一个更加准确的公式:

$$\hat{M} = \frac{D_\infty(\delta_1, \delta_2) - f(\delta_1, \delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f} + 1 \tag{11.6.8}$$

其中,$D_\infty(\delta_1, \delta_2)$ 和 $f(\delta_1, \delta_2)$ 定义如下:

$$\begin{aligned} D_\infty(\delta_1, \delta_2) = &[0.005\,309(\lg\delta_1)^2 + 0.071\,14(\lg\delta_1) \\ &- 0.4761]\lg\delta_2 \\ &- [0.002\,66(\lg\delta_1)^2 + 0.5941\lg\delta_1 + 0.4278] \end{aligned} \tag{11.6.9}$$

$$f(\delta_1, \delta_2) = 11.012 + 0.512\,44[\lg\delta_1 - \lg\delta_2] \tag{11.6.10}$$

那么,后面接着抽取器的单个 FIR 滤波器所需要的大约长度为(利用凯泽公式)

$$\hat{M} = \frac{-10\lg 10^{-6} - 13}{14.6(5/8000)} + 1 \approx 5152$$

另外，我们考虑 $D_1 = 25$ 和 $D_2 = 2$ 的两级抽取过程。在第 1 级中，我们有如下技术指标：

$$\text{通带}: 0 \leqslant F \leqslant 75$$

$$\text{过渡带}: 75 < F \leqslant 240$$

$$\Delta f = \frac{165}{8000}$$

$$\delta_{11} = \frac{\delta_1}{2}, \qquad \delta_{21} = \delta_2$$

注意到，我们已经把通带纹波 δ_1 降低了 1/2，保证了在两个级联滤波器中的总的通带纹波不会超过 δ_1。另一方面，在两级中，阻带纹波保持在 δ_2 不变。那么根据凯泽公式得到 M_1 的估计为

$$\hat{M}_1 = \frac{-10\lg \delta_{11}\delta_{21} - 13}{14.6\Delta f} + 1 \approx 167$$

对于第 2 级，我们有 $F_2 = F_1/160$，并且技术指标为

$$\text{通带}: 0 \leqslant F \leqslant 75$$

$$\text{过渡带}: 75 < F \leqslant 80$$

$$\Delta f = \frac{5}{320}$$

$$\delta_{12} = \frac{\delta_1}{2}, \qquad \delta_{22} = \delta_2$$

故第 2 个滤波器的长度 M_2 的估计值为

$$\hat{M}_2 \approx 220$$

因此，两个滤波器的总长度大约为 $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 387$。这表明滤波器的长度降为原来的 1/13 以下。

我们建议读者对 $D_1 = 10$ 和 $D_2 = 5$ 重复上面的计算过程。

从例 11.6.1 中的计算可以看出，滤波器长度的减少是由于增大了出现在式(11.6.7)和式(11.6.8)的分母中的因子 Δf。通过以多级抽取来降低采样率，我们就可以增大过渡区的宽度。

在多级内插器的情形下，第 i 级的输出中的采样率为

$$F_{i-1} = I_i F_i, \qquad i = J, J-1, \cdots, 1$$

并且当输入采样率为 F_J 时，输出速率为 $F_0 = IF_J$。相应的频带技术指标为

$$\text{通带}: 0 \leqslant F \leqslant F_p$$

$$\text{过渡带}: F_p < F \leqslant F_i - F_{sc}$$

下面的例题说明了多级内插器的优势。

例 11.6.2　让我们考虑例 11.6.1 中描述的滤波问题的逆过程，其中信号的通带为 $0 \leqslant F \leqslant 75$，过渡带为 $75 \leqslant F \leqslant 80$。我们希望以因子 50 内插。通过选取 $I_1 = 2$ 和 $I_2 = 25$，我们得到例 11.6.1 中抽取问题的转置形式。于是，我们可以简单地将两级抽取器进行转置，得到具有 $I_1 = 2$ 和 $I_2 = 25$，$\hat{M}_1 \approx 220$，$\hat{M}_2 \approx 167$ 的两级内插器。

11.7　带通信号的采样率转换

在这一节中，我们考虑带通信号的抽取和内插问题。我们注意到任一带通信号都转化成一个等效的低通信号(见 6.5.2 节)，而低通信号的采样率可以用已经讨论过的技术进行转换。但是对

于带通离散时间信号,人们关心的是一个更简单并且更广泛应用的方法,即整数频带搬迁。该方法类似于在 6.4 节讨论过的用于连续时间带通信号的方法。

具体地说,假设我们希望以因子 D 对具有整数位置的带通信号进行抽取,该信号的谱限制在频率区间

$$(k-1)\frac{\pi}{D} < |\omega| < k\frac{\pi}{D} \tag{11.7.1}$$

其中,k 是一正整数。利用带通滤波器

$$H_{BP}(\omega) = \begin{cases} 1, & (k-1)\frac{\pi}{D} < |\omega| < k\frac{\pi}{D} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{11.7.2}$$

来消除期望频率区间以外的频率成分。然后以因子 D 对滤波后的信号 $v(n)$ 直接抽取,得到每 $2\pi/D$ rad 周期折叠的带通频谱 $V(\omega)$,如图 11.7.1(a)所示。抽取后信号 $y(m)$ 的谱可以通过压缩频率轴 $\omega_y = D\omega_x$ 得到。具有奇数频带位置($k=3$)的带通信号处理过程如图 11.7.1 所示,而具有偶数频带位置($k=4$)的带通信号处理过程如图 11.7.2 所示。k 为奇数时,信号存在一个倒置频谱,如同连续时间情形[见图 6.4.1(b)]。该倒置可以通过简单处理 $y'(m) = (-1)^m y(m)$ 消去。注意,一旦违背了式(11.7.1)给定的带宽约束,就会出现信号混叠。

以整数因子 I 进行带通内插过程是带通抽取的逆过程,可以用类似的方式实现。通过在 $x(n)$ 的样本间插入零的上采样过程在频带 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 内产生 I 个镜像。利用带通滤波器选取期望的镜像。这可视为反转图 11.7.1 的过程。注意,内插过程为我们提供了实现频谱频率转换的机会。

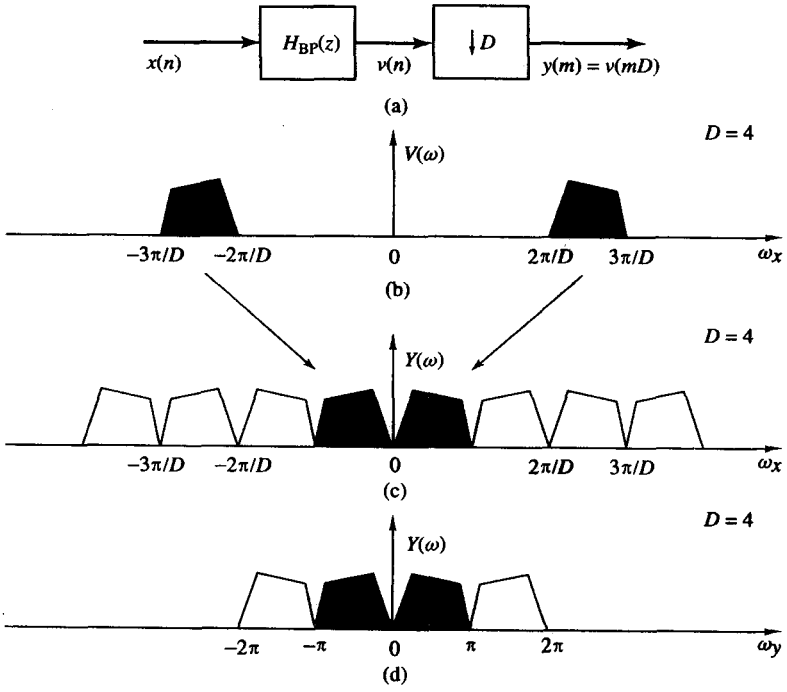


图 11.7.1 整数频带位置(奇整数位置)带通抽取的谱解释

最后,以有理因子 I/D 对带通信号进行采样率转换可以通过级联抽取器和内插器来实现,该设计取决于参数 D 和 I 的选取。为了分离出感兴趣的频带,通常在采样转换器前利用一个带通滤波器。注意,通过选取 $D=I$,该方法为我们提供了一个实现信号频率转换的非调制方法。

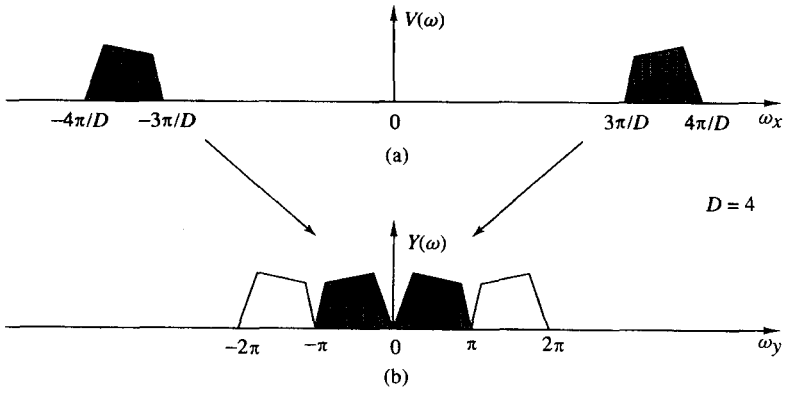


图 11.7.2　整数频带位置(偶整数位置)带通抽取的谱解释

11.8　以任意因子的采样率转换

利用多相结构高效地实现采样率转换,需要采样率 F_x 和 F_y 固定并且与有理因子 I/D 相关。但是,在某些应用中,该方法也许很低效,也许有时对精确的采样率转换方案不可行。

例如,假设我们需要以有理数 I/D 进行采样率转换,其中 I 是一个很大的整数(例如 $I/D = 1023/511$)。尽管我们可以按这个有理数精确地实现采样率转换,但是我们将需要一个具有 1023 个子滤波器的多相滤波器。由于我们需要存储大量的滤波器系数,显然该实现在存储方面是很低效的。

在某些应用中,当我们设计采样率转换器时,并不知道精确的转换速率,或者在转换过程期间,速率是连续变化的。例如,我们可能会遇到输入和输出样本由两个独立的时钟控制的场合。虽然定义一个有理数的标准转换率仍然是可能的,但是实际速率会有一点不同,随两个时钟间的频率差异而定。显然,这种情形下,就不可能设计一个精确的转换器。

原则上,我们可以利用式(11.1.9)把任意速率 F_x 转换成另一任意速率 F_y(固定的或可变的),为方便起见,在这里我们重复一下该公式:

$$y(mT_y) = \sum_{k=K_1}^{K_2} g(kT_x + \Delta_m T_x)x((k_m - k)T_x) \tag{11.8.1}$$

对每个输出样本,该方法需要计算一个新的冲激响应 $p_m(k) = g(kT_x + \Delta_m T_x)$。但是,如果 Δ_m 按有限精度测量,那么冲激响应只构成一个有限集合,当需要时可以预计算并从存储中加载。我们下面讨论按任意因子采样率转换的两种实际中的方法。

11.8.1　利用多相内插器任意重采样

如果我们利用具有 I 个子滤波器的多相内插器,那么可以得到间隔为 T_x/I 的样本。因此,级数 I 决定了内插过程的间隔。如果 T_x/I 足够小,那么信号的相继值就改变得不明显或改变小于量化步长,从而我们就可以利用最近的邻值(零阶保持插值)来确定任何位置 $t = nT_x + \Delta T_x$ ($0 \leqslant \Delta \leqslant 1$)的值。

额外的改善可以通过利用两点线性插值获得:

$$y(nT_x + \Delta T_x) = (1 - \Delta)x(n) + \Delta x(n + 1) \tag{11.8.2}$$

这些插值技术的性能在 6.5 节分析它们的频域特性时已讨论过。另外,实际中更详细的内容可以参考 Ramstad(1984)。

11.8.2 利用 Farrow 滤波器结构任意重采样

在实际中,我们通常利用因果 FIR 低通滤波器来实现有理因子的多相采样率转换器。如果我们利用具有 $M = KI$ 个系数的 FIR 滤波器,多相滤波器的系数可以通过如下映射得到:

$$p_i(n) = h(nI + i), \quad i = 0, 1, \cdots, I - 1 \tag{11.8.3}$$

该映射按自然顺序填充相继的列将一维序列 $h(n)$映射成 I 行 K 列的二维数组,具体如下:

$$\begin{array}{llllll} p_0(k) & \mapsto h(0) & h(I) & \cdots & h((K-1)I) \\ p_1(k) & \mapsto h(1) & h(I+1) & \cdots & h((K-1)I+1) \\ & \vdots & & & \\ p_i(k) & \mapsto h(i) & h(I+i) & \cdots & h((K-1)I+i) \\ p_{i+1}(k) & \mapsto h(i+1) & h(I+i+1) & \cdots & \\ & \vdots & & & \\ p_{I-1}(k) & \mapsto h(I-1) & h(2I-1) & \cdots & h(KI-1) \end{array} \tag{11.8.4}$$

多相滤波器 $p_i(n)$用于计算等距 I 位置 $t = nT_x + i(T_x/I)$的样本,$i = 0, 1, \cdots, I-1$,覆盖每个输入样本区间。假设现在我们想计算 $t = nT_x + \Delta T_x$ 处的样本,其中 $\Delta \neq i/I$ 并且 $0 \leqslant \Delta \leqslant 1$。这需要一个不存在的多相子滤波器,记为 $p_\Delta(k)$,其出现在两个存在的子滤波器之间,即 $p_i(k)$和 $p_{i+1}(k)$。该系数的集合将在第 i 行和第 $i+1$ 行创建出一行。我们注意到式(11.8.4)的每列由一段 I 个连续的冲激响应 $h(n)$的样本构成,并且覆盖一个样本间隔 T_x。假定我们可以利用 L 阶多项式逼近每一列的系数集合

$$B_k(\Delta) = \sum_{\ell=0}^{L} b_\ell^{(k)} \Delta^\ell, \quad k = 0, 1, \cdots, K-1 \tag{11.8.5}$$

我们注意到计算 $\Delta = i/I$ 处的式(11.8.5)可以得到 $p_i(k)$多相子滤波器的系数。多项式的类型(拉格朗日、切比雪夫等)和阶数 L 适当选取可以避免相对于原滤波器 $h(n)$的性能下降。在 $t = nT_x + \Delta T_x$ 处的样本通过下式确定:

$$y((n+\Delta)T_x) = \sum_{k=0}^{K-1} B_k(\Delta) x((n-k)T_x), \quad 0 \leqslant \Delta \leqslant 1 \tag{11.8.6}$$

其中,所需要的滤波器系数利用式(11.8.5)计算得到。如果我们把多项式(11.8.5)代入滤波器公式(11.8.6),并且改变求和顺序,可得

$$\begin{aligned} y((n+\Delta)T_x) &= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L} b_\ell^{(k)} \Delta^\ell x((n-k)T_x) \\ &= \sum_{\ell=0}^{L} \Delta^\ell \sum_{k=0}^{K-1} b_\ell^{(k)} x((n-k)T_x) \end{aligned}$$

最后一个等式可写成

$$y((n+\Delta)T_x) = \sum_{\ell=0}^{L} v(\ell) \Delta^\ell \tag{11.8.7}$$

其中,

$$v(\ell)=\sum_{k=0}^{K-1}b_{\ell}^{(k)}x((n-k)T_x),\quad \ell=0,1,\cdots,L \tag{11.8.8}$$

式(11.8.7)可解释为输出序列的泰勒展开式,其中 $v(\ell)$是输入序列确定的相继局部导数。关系式(11.8.8)可以利用具有如下系统函数的 FIR 滤波结构实现:

$$H_{\ell}(z)=\sum_{k=0}^{K-1}b_{\ell}^{(k)}z^{-k} \tag{11.8.9}$$

多项式(11.8.7)最高效的计算可以利用有名的 Horner 法则,当 $L=4$ 时,具体如下:

$$\begin{aligned}y(\Delta)&=c_0+c_1\Delta+c_2\Delta^2+c_3\Delta^3+c_4\Delta^4\\&=c_0+\Delta(c_1+\Delta(c_2+\Delta(c_3+\Delta c_4)))\end{aligned} \tag{11.8.10}$$

该应用的实现框图如图 11.8.1 所示,即著名的 Farrow 结构(Farrow 1988)。Farrow 结构进行信号值之间的内插实质上是在滤波器系数间内插。更详细的文献可参考 Gardner(1993),Erup 等(1993),Ramstad(1984),Harris(1997)和 Laakso 等(1996)。

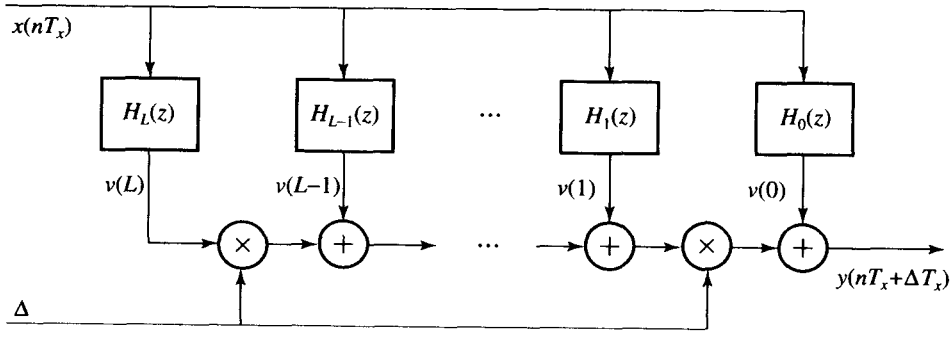


图 11.8.1　Farrow 结构的以任意因子转换采样率的框图

11.9　多速率信号处理的应用

多速率信号处理有很多实际应用,这一节我们将介绍这些应用中的一部分。

11.9.1　移相器的设计

假设我们希望设计一个网络,按分数样本延迟信号 $x(n)$。让我们假定延迟采样间隔 T_x 为一个有理分数(如 $d=(k/I)T_x$,其中 k 和 I 为互质的正整数)。在频域中,该延迟对应于以下形式的线性相移:

$$\Theta(\omega)=-\frac{k\omega}{I} \tag{11.9.1}$$

全通线性相位滤波器的设计相对比较困难。但是,我们可以利用采样率转换方法,在信号没有引入任何明显失真的情况下,准确地实现延迟$(k/I)T_x$。具体地,我们考虑图 11.9.1 中的系统。首先利用一个标准的内插器以因子 I 提高采样率,接着利用低通滤波器消除内插信号谱的镜像,再按采样率 IF_x 将低通滤波器的输出延迟 k 个样本,最后按因子 $D=I$ 抽取延迟信号。这样我们就得到了期望延迟$(k/I)T_x$。

内插器的一个有效实现是多相滤波器,如图 11.9.2 所示。通过将转接器的初始位置放在第 k

个滤波器的输出端,可以实现延迟 k 个样本。由于按 $D=I$ 的抽取意味着从多相滤波器的每 I 个样本取出 1 个,故可将转接器的位置固定在第 k 个子滤波器的输出端。于是,仅仅利用多相滤波器就引入了一个额外的$(M-1)/2$样本的延迟,其中 M 是滤波器冲激响应的延迟。

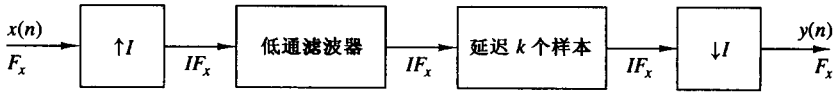


图 11.9.1 离散时间信号中产生延迟的方法

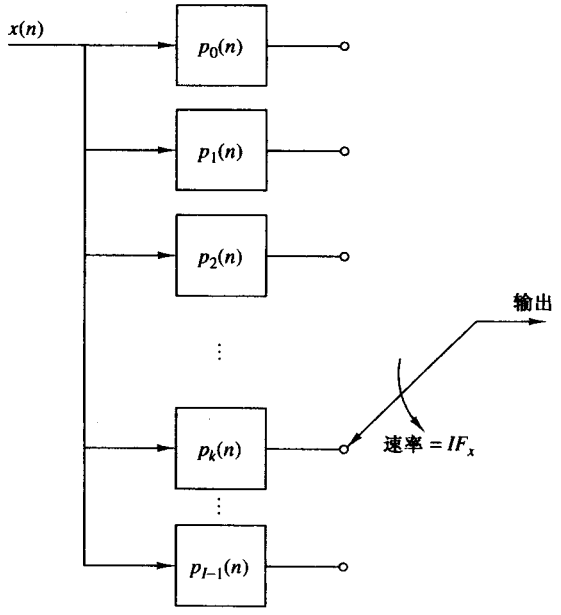


图 11.9.2 图 11.9.1 中系统的多相滤波器结构的实现

最后,我们要提醒的是,如果期望延迟不是样本间隔 T_x 的有理因子,那么利用 11.8 节介绍的方法可以得到该延迟。

11.9.2 不同采样率数字系统的接口技术

实际中,我们经常遇到由两个独立运转的时钟控制的数字系统。该问题的模拟解决方法是将第一个系统的信号转换成模拟信号,然后,在第二个系统的输入端利用该系统的时钟对信号重新采样。但是,一种更为简单的方法是通过数字方法利用本章描述的基本采样率转换的方法实现接口技术。

具体地说,让我们考虑连接具有独立时钟的两个系统,如图 11.9.3 所示。系统 A 以速率 F_x 被送到一个以因子 I 提高采样率的内插器中,然后,将内插器的输出以速率 IF_x 送到一个数字采样保持电路,该电路以最高采样率 IF_x 连接系统 B;最后,按系统 B 的时钟速率 DF_y 从数字采样保持电路读出信号并送入系统 B。于是,采样保持装置的输出速率和输入速率不同步。

在 $D=I$ 和两个时钟速率相近但不同的特殊情况下,采样保持装置输出端的一些样本有时可以重复或放弃。假如内插器或抽取器的因子很大,则可以将该方法引起的信号失真量保持得很小。通过在数字采样保持装置中利用线性内插,我们可进一步减小失真,从而减小内插器因子的大小。

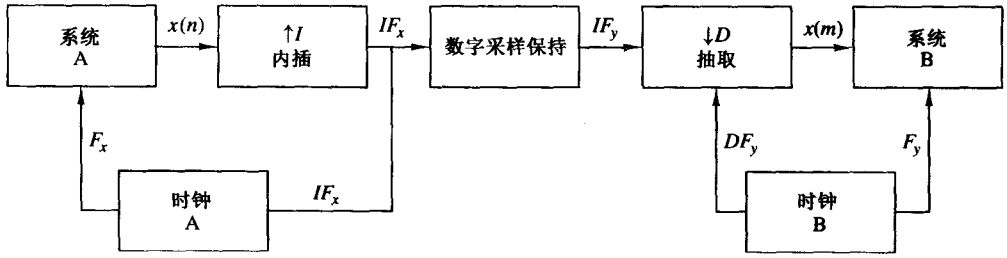


图 11.9.3　连接两个具有不同采样率的数字系统

11.9.3　窄带低通滤波器的实现

在 11.6 节中我们证明了采样率转换的多级实现通常提供一种更加有效的实现，特别是当滤波器的技术指标非常严格时(如窄通带和窄过渡带)。在类似条件下，低通线性相位 FIR 滤波器在多级抽取器-内插器结构中可能是更加有效的实现。更具体些，我们可以利用以因子 D 抽取的多级实现，接着以因子 I 内插的多级实现，其中 $I = D$。

我们利用设计一个低通滤波器的例子来说明设计步骤，滤波器的技术指标与例 11.6.1 的相同。

例 11.9.1　设计一个满足如下技术指标的线性相位 FIR 滤波器：

采样率：　8000 Hz

通带：　$0 \leqslant F \leqslant 75$ Hz

过渡带：　$75\ \text{Hz} \leqslant F \leqslant 80$ Hz

阻带：　$80\ \text{Hz} \leqslant F \leqslant 4000$ Hz

通带纹波：　$\delta_1 = 10^{-2}$

阻带纹波：　$\delta_2 = 10^{-4}$

解：如果将该滤波器设计成单速率线性相位 FIR 滤波器，那么满足技术指标的滤波器长度为(根据凯泽公式)

$$\hat{M} \approx 5152$$

现在，假定我们基于 $D = I = 100$ 的抽取器和内插器来进行该低通滤波器的多速率实现。抽取器-内插器的单级实现所需要滤波器的长度为

$$\hat{M}_1 = \frac{-10\lg(\delta_1\delta_2/2) - 13}{14.6\Delta f} + 1 \approx 5480$$

但是，利用相应的多相滤波器实现抽取器和内插器结构的滤波器，可以显著降低计算复杂度。如果我们利用线性相位(对称性)抽取和内插滤波器，那么多相滤波器的使用可以将乘法的比率降到原来的 1/100。

利用两级抽取接两级内插，可以得到一个更加显著有效的实现。例如，假定我们选取 $D_1 = 50$，$D_2 = 2$，$I_1 = 2$，$I_2 = 50$，那么所需要滤波器的长度为

$$\hat{M}_1 = \frac{-10\lg(\delta_1\delta_2/4) - 13}{14.6\Delta f} + 1 \approx 177$$

$$\hat{M}_1 = \frac{-10\lg(\delta_1\delta_2/4) - 13}{14.6\Delta f} + 1 \approx 233$$

于是，在总滤波器长度方面，我们降低了 $2(5480)/2(177 + 233) \approx 13.36$ 倍。另外，通过利用多相滤波器，我们可以进一步降低乘法比率。对第 1 级抽取来说，在乘法比率上降低为 50，同时在第 2 级，乘法比率降低 100。通过增加抽取和内插的级数可以进一步降低乘法比率。

11.9.4 语音信号子带编码

为了传输和存储,已经研究出了很多有效的以数字形式表示语音信号的技术。由于语音的大部分能量在较低频率中,因此,与较高频带相比,我们打算利用更多的位对较低频带编码。子带编码就是一种很好的方法,它将语音信号细分成几个频带,然后对每个频带单独进行数字编码。

频带细分的一个例子如图 11.9.4(a)所示。我们假定语音信号以每秒 F_s 个样本的速率采样。第一步频率细分将信号频谱划分为两个等宽的段,即低通信号($0 \leqslant F \leqslant F_s/4$)和高通信号($F_s/4 \leqslant F \leqslant F_s/2$)。第二步频率细分将第一步得到的低通信号划分成两个等宽频带,即低通信号($0 \leqslant F \leqslant F_s/8$)和高通信号($F_s/8 \leqslant F \leqslant F_s/4$)。最后,第三步频率细分将第二步得到的低通信号划分成两个等宽频带。这样,信号被划分成 4 个频带,覆盖 3 个倍频程,如图 11.9.4(b)所示。

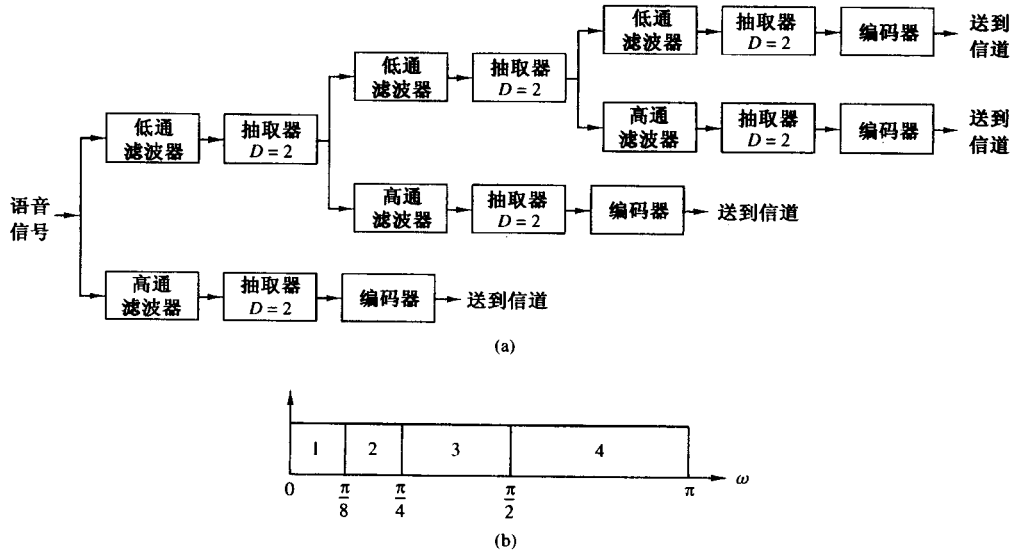


图 11.9.4 子带语音编码器的框图

频率细分后,以因子 2 进行抽取。通过对 4 个子带中的信号样本分配不同的位数,可以降低数字化语音的比特率。

在子带编码中,要达到好的性能,滤波器的设计非常重要。子带信号的抽取所带来的混叠必须是可忽略的。很明显,我们不能利用如图 11.9.5(a)所示的砖形滤波器特性,因为该滤波器是物理上不可实现的。解决混叠问题的一个非常实用的方法是利用正交镜像滤波器(QMF),其频率响应特性如图 11.9.5(b)所示。这些滤波器将在 11.11 节讨论。

从本质上讲,子带编码语音信号的综合方法是编码过程的逆过程。在相邻的低通和高通频带内,对信号内插、滤波和组合,如图 11.9.6 所示。信号的综合中,对信号的每一倍频程,利用一对 QMF。

子带编码也是一种在图像信号处理中实现数据压缩的有效方法。通过对每一子带信号进行子带编码和矢量量化,Safranek 等(1988)得到了每个像素用大约 1/2 比特的编码图像,而未编码的图像中每个像素需用 8 比特。

一般来说,当信号能量集中在频带的某一特定区域时,信号的子带编码在信号的数字表示中就是一种实现带宽压缩的有效方法。多速率信号处理为子带编码器提供有效的实现方法。

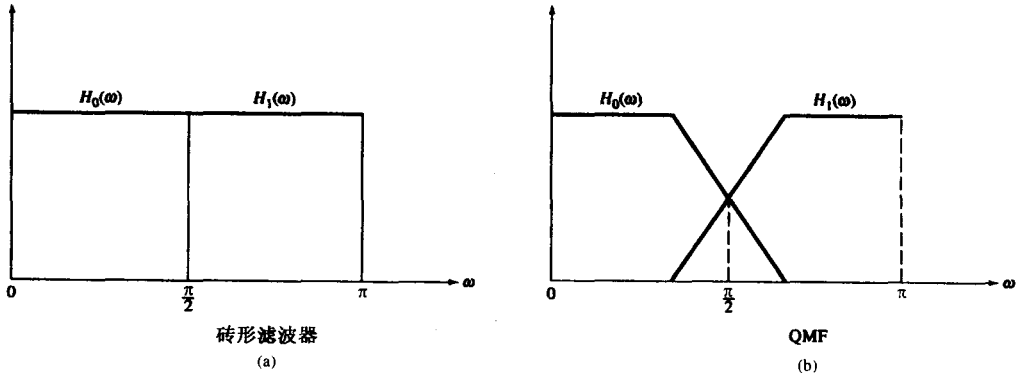


图 11.9.5　子带编码的滤波器特性

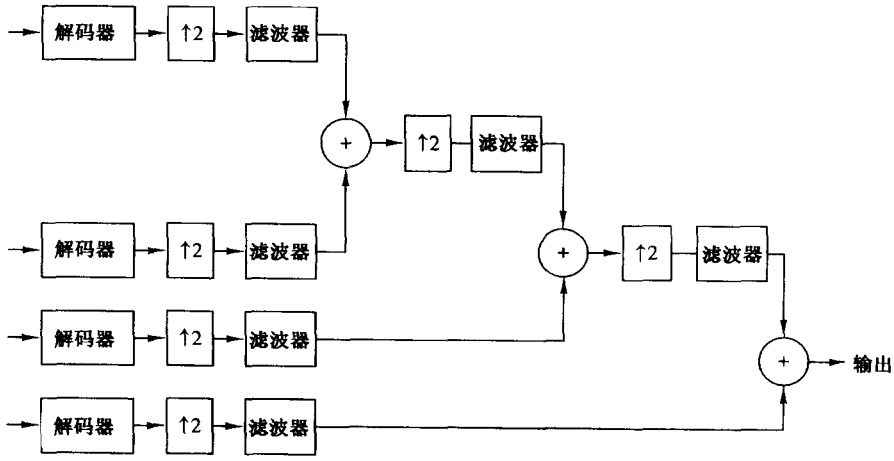


图 11.9.6　子带编码信号的综合

11.10　数字滤波器组

一般来说，滤波器组可以分为两类：分析滤波器组和综合滤波器组。分析滤波器组由一组系统函数为$\{H_k(z)\}$的滤波器按图 11.10.1(a)排列成并行组构成，该滤波器组的频率响应特性将信号分成相应个数的子带。另一方面，综合滤波器组由一组系统函数为$\{G_k(z)\}$、相应输出为$\{y_k(n)\}$的滤波器按图 11.10.1(b)排列组成，将各滤波器的输出加起来构成信号$\{x(n)\}$。

滤波器组经常用来实现谱分析和信号综合。当在序列$\{x(n)\}$的离散傅里叶变换(DFT)的计算中使用滤波器组时，称滤波器组为 DFT 滤波器组。由 N 个滤波器$\{H_k(z), k=0,1,\cdots,N-1\}$组成的分析滤波器组称为均匀 DFT 滤波器，如果$\{H_k(z), k=0,1,\cdots,N-1\}$是从原型滤波器 $H_0(z)$ 导出的，其中

$$H_k(\omega)=H_0\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right),\qquad k=1,2,\cdots,N-1 \tag{11.10.1}$$

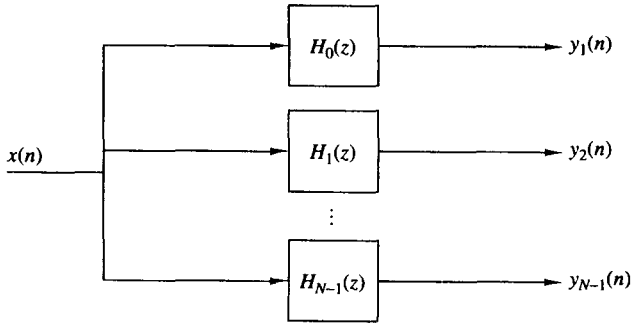
因此滤波器$\{H_k(z), k=0,1,\cdots,N-1\}$的频率特性可以简单地通过以 $2\pi/N$ 的倍数均匀地平移原型滤波器地频率响应得到。在时域，利用冲激响应表征滤波器，可表示为

$$h_k(n) = h_0(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/N}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{11.10.2}$$

其中，$h_0(n)$是原型滤波器的冲激响应，一般来说是 FIR 滤波器或者 IIR 滤波器。如果 $H_0(z)$表示原型滤波器的系统函数，那么第 k 个滤波器的系统函数为

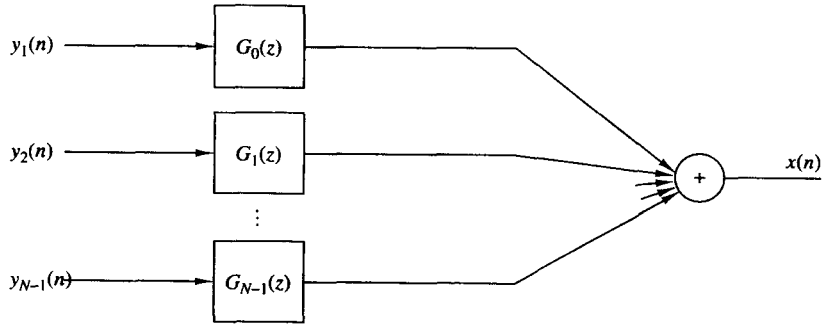
$$H_k(z) = H_0(z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/N}), \qquad 1 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{11.10.3}$$

图 11.10.2 提供了 N 个滤波器的频率响应的概念示意图。



分析滤波器组

(a)



综合滤波器组

(b)

图 11.10.1 数字滤波器组

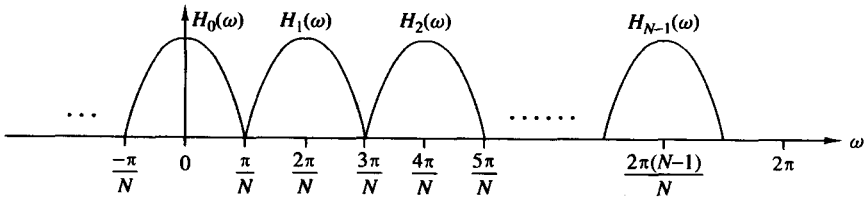


图 11.10.2 N 个滤波器的频率响应特性

均匀 DFT 分析滤波器组可以按图 11.10.3(a)来实现，其中通过用复指数 $\exp(-\mathrm{j}2\pi nk/N)$，$k = 1, \cdots, N-1$，乘上 $x(n)$，并将所得结果经过一个冲激响应为 $h_0(n)$的低通滤波器，可以将信号序列 $\{x(n)\}$中的频率成分按频率变换到低通。由于低通滤波器的带宽相对较窄，故可以按因子 $D \leqslant N$ 抽取信号。所得到的抽取输出信号可表示为

$$X_k(m)=\sum_n h_0(mD-n)x(n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N},\qquad \begin{matrix}k=0,1,\cdots,N-1\\ m=0,1,\cdots\end{matrix}\tag{11.10.4}$$

其中，$\{X_k(m)\}$是 DFT 在频率 $\omega_k=2\pi k/N$ 处的样本。

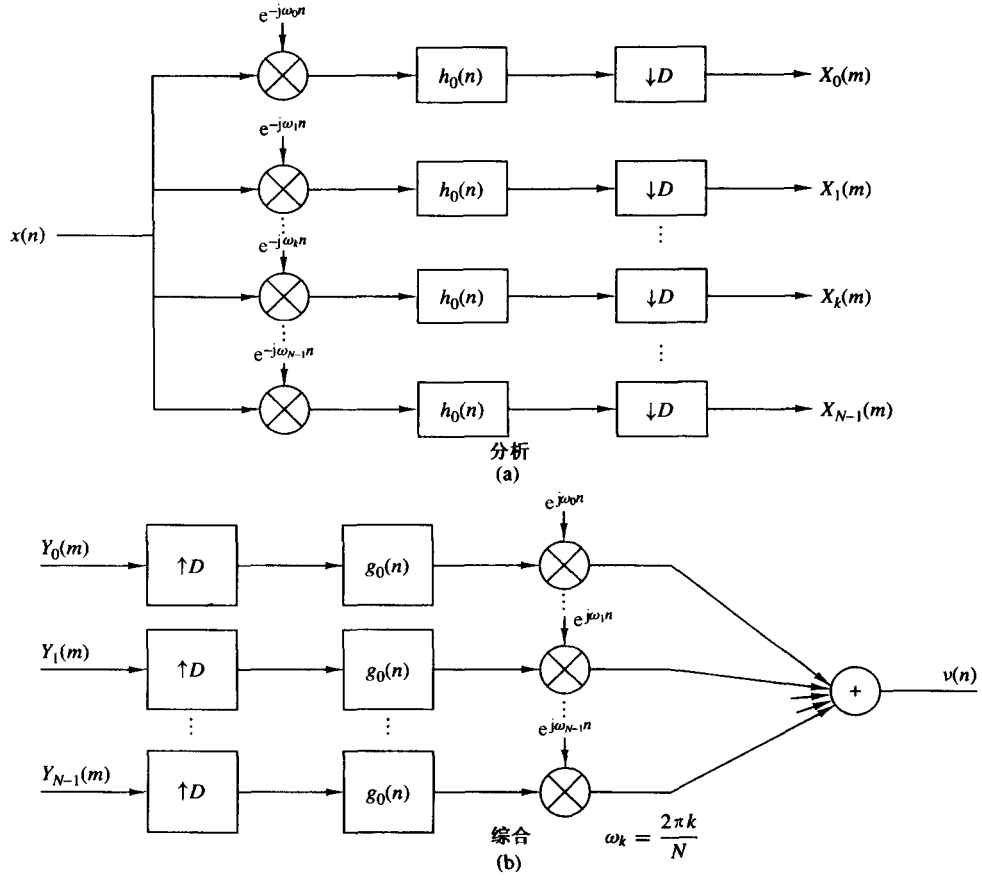


图 11.10.3　均匀 DFT 滤波器组

滤波器组中每个元素的相应综合滤波器如图 11.10.3(b)，其中输入信号序列$\{Y_k(m),k=0,1,\cdots,N-1\}$以因子 $I=D$ 上采样，接着滤波以消除镜像，再通过乘上复指数$\{\exp(\mathrm{j}2\pi nk/N),k=0,1,\cdots,N-1\}$变换到频域。将 N 个滤波器的频率变换后的信号加起来。这样我们得到序列

$$\begin{aligned}v(n)&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/N}\left[\sum_m Y_k(m)g_0(n-mI)\right]\\&=\sum_m g_0(n-mI)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y_k(m)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/N}\right]\\&=\sum_m g_0(n-mI)y_n(m)\end{aligned}\tag{11.10.5}$$

其中，因子 $1/N$ 是归一化因子，$\{y_n(m)\}$表示$\{Y_k(m)\}$对应的 DFT 序列的样本，$\{g_0(n)\}$是内插滤波器的冲激响应，并且 $I=D$。

分析滤波器组的输出$\{X_k(n)\}$和综合滤波器组的输入$\{Y_k(m)\}$之间的关系取决于应用。通常,$\{Y_k(m)\}$是$\{X_k(m)\}$的修正形式,其中具体的修正由应用确定。

图 11.10.4 给出了分析与综合滤波器组的另一种实现。滤波器实现为具有如下冲激响应的带通滤波器:

$$h_k(n) = h_0(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/N}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{11.10.6}$$

对每个带通滤波器的输出按因子 D 抽取,并用 $\exp(-\mathrm{j}2\pi mk/N)$乘上 DFT 序列$\{X_k(m)\}$。我们可以利用复指数调制将信号的谱从 $\omega_k = 2\pi k/N$ 移到 $\omega_0 = 0$。因此,该实现与图 11.10.3 的实现是等效的。分析滤波器组的输出可写成

$$X_k(m) = \left[\sum_n x(n)h_0(mD-n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k(mD-n)/N}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mkD/N} \tag{11.10.7}$$

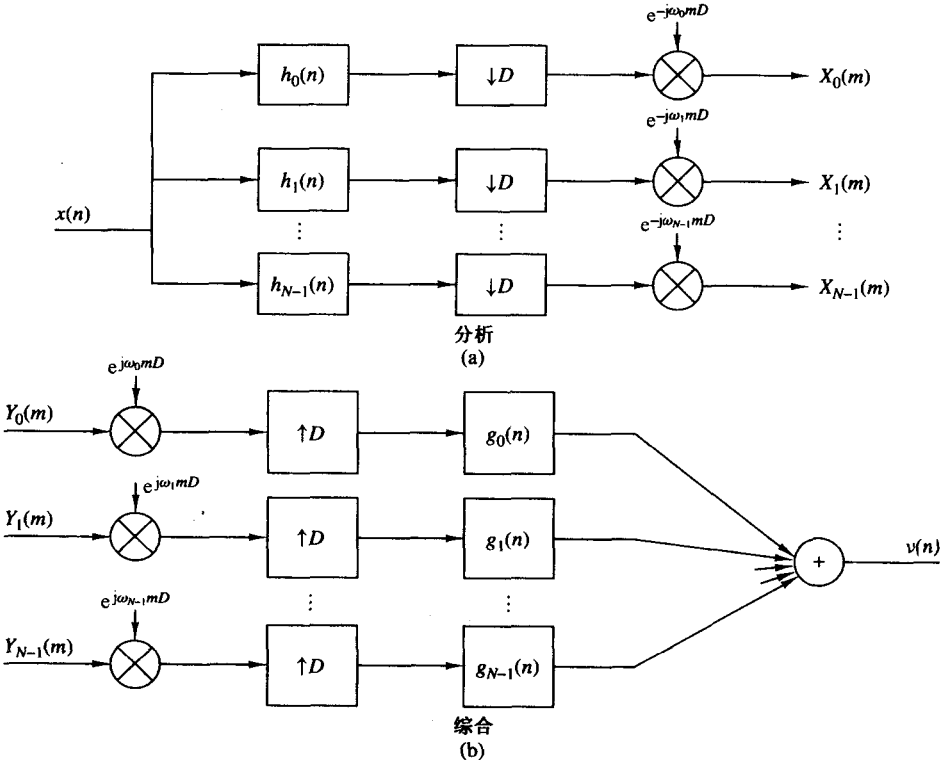


图 11.10.4 均匀 DFT 滤波器组的另一种实现

滤波器组相应的综合器可以按图 11.10.4(b)实现,其中输入序列先乘上复指数$[\exp(\mathrm{j}2\pi kmD/N)]$,接着以因子 $I = D$ 上采样,然后所得序列经过具有如下冲激响应的带通内插器:

$$g_k(n) = g_0(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/N} \tag{11.10.8}$$

其中,$\{g_0(n)\}$是原型滤波器的冲激响应。这些滤波器的输出加起来得到

$$v(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_m [Y_k(m)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kmI/N}]g_k(n-mI)\right\} \tag{11.10.9}$$

其中,$I = D$。

在数字滤波器组的实现中，通过利用适用于抽取和内插的多相滤波器可以高效计算。特别有趣的情形是当选取抽取因子 D 等于频带数 N 时。当 $D=N$ 时，我们称滤波器组为精密采样的。

11.10.1　均匀滤波器组的多相结构

对于分析滤波器组，我们定义一组 $N=D$ 个具有如下冲激响应的多相滤波器：

$$p_k(n)=h_0(nN-k), \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{11.10.10}$$

并且相应的抽取序列组为

$$x_k(n)=x(nN+k), \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{11.10.11}$$

注意，$\{p_k(n)\}$的定义意味着用于抽取器的转接器是按顺时针旋转的。

为了得到基于利用多相滤波器的分析滤波器组的结构，可以通过把式(11.10.10)和式(11.10.11)代入式(11.10.7)，并重新排列和的形式，得到

$$X_k(m)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l} p_n(l)x_n(m-l)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N}, \qquad k=0,1,\cdots,D-1 \tag{11.10.12}$$

其中，$N=D$。注意到里层的求和表示$\{p_n(l)\}$和$\{x_n(l)\}$的卷积，而外层的求和表示滤波器输出的 N 点 DFT。对应于这一计算的滤波器结构如图 11.10.5 所示。转接器的每一次扫描形成 N 个输出，我们把来自 N 个多相滤波器的输出记为$\{r_n(m), n=0,1,\cdots,N-1\}$，对该序列进行 N 点 DFT 得到谱样本$\{X_k(m)\}$。对于大的 N 值，FFT 算法为 DFT 的计算提供了高效实现。

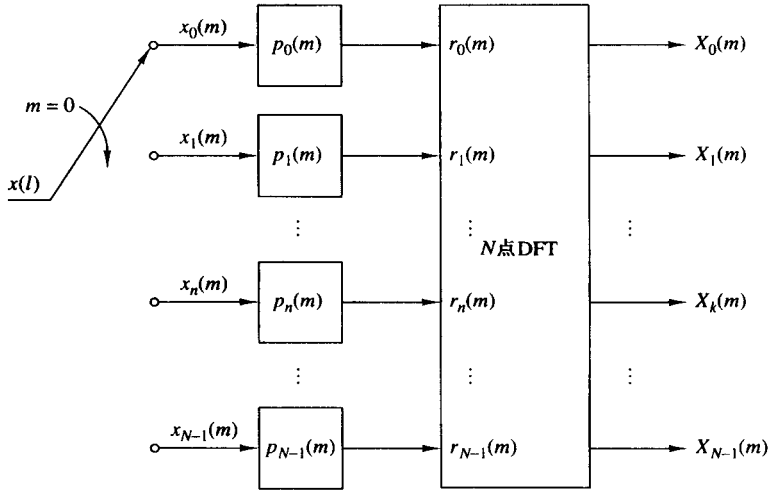


图 11.10.5　计算式(11.10.12)的数字滤波器组结构

现在，假定按应用规定的某种方式对谱样本$\{X_k(m)\}$进行修改以便得到$\{Y_k(m)\}$，基于多相滤波器结构的综合滤波器组可以类似方式得到。首先，我们定义作为内插滤波器的 N 个($D=I=N$)多相滤波器的冲激响应为

$$q_k(n)=g_0(nN+k), \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{11.10.13}$$

而相应的输出信号为

$$v_k(n)=v(nN+k), \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{11.10.14}$$

注意到$\{q_k(n)\}$的定义意味着用于抽取器的转接器是按逆时针旋转的。

将式(11.10.13)代入式(11.10.5),我们可以将第 l 个多相滤波器的输出 $v_l(n)$ 表示为

$$v_l(n)=\sum_m q_l(n-m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y_k(m)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kl/N}\right],\qquad l=0,1,\cdots,N-1 \tag{11.10.15}$$

括号中的项是 $\{Y_k(m)\}$ 的 N 点 IDFT,我们记为 $\{y_l(m)\}$。故

$$v_l(n)=\sum_m q_l(n-m)y_l(m),\qquad l=0,1,\cdots,N-1 \tag{11.10.16}$$

对应于式(11.10.16)的综合结构如图 11.10.6 所示。有趣的是,注意到通过按式(11.10.13)定义多相内插滤波器,图 11.10.6 的结构就是图 11.10.5 中多相分析滤波器的转置。

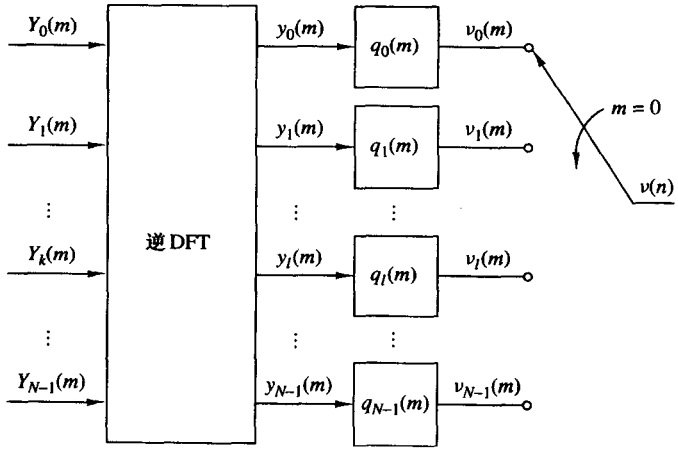


图 11.10.6 计算式(11.10.16)的数字滤波器结构

在对数字滤波器组的讨论中,我们考虑了一类重要的当 $D=N$ 时的精密采样 DFT 滤波器组。在实际中,可以选取其他的 D 和 N,但是滤波器的实现会变得更复杂。特别重要的是过采样 DFT 滤波器组,其中 $N=KD$,D 表示抽取因子,K 是规定过采样因子的整数。在这种情况下,可以证明,通过利用 N 个子滤波器和 N 点 DFT 以及 N 点 IDFT 可以实现适用于分析和综合滤波器的多相滤波器结构。

11.10.2 复用转接器

数字滤波器组的一个应用是在数字复用转接器的设计和实现中。数字复用转接器是用于时分复用(TDM)信号和频分复用(FDM)信号之间转换的设备。

在实现 TDM 到 FDM 转换的复用转换器中,输入信号 $\{x(n)\}$ 是由 L 个信号组成的时分复用信号,它们通过转换器开关分隔。对 L 个信号中的每一个在不同的载波频率上进行调制,得到用来发送的 FDM 信号。而在实现 FDM 到 TDM 转换的复用转接器中,综合信号通过滤波被分成 L 个成分,接着将它们时分复用。

在电话系统中,单边带传输利用标准的 4 kHz 带宽的通带。为了形成带宽为 48 kHz 的基本群信道,通常将 12 路 4 kHz 的信号在频域叠在一起。通过将多组的频率转换到相邻的频带,可形成更大带宽的 FDM 信号。我们将把讨论局限在 12 路 FDM 和 TDM 的数字复用转接器上。

首先考虑 FDM 到 TDM 的转换。将模拟 FDM 信号经过一个 A/D 转换器,如图 11.10.7(a)所示。利用单边调制器将数字信号解调到基带信号。对每个解调器的输出做抽取并将抽取值送到 TDM 系统的转接器。

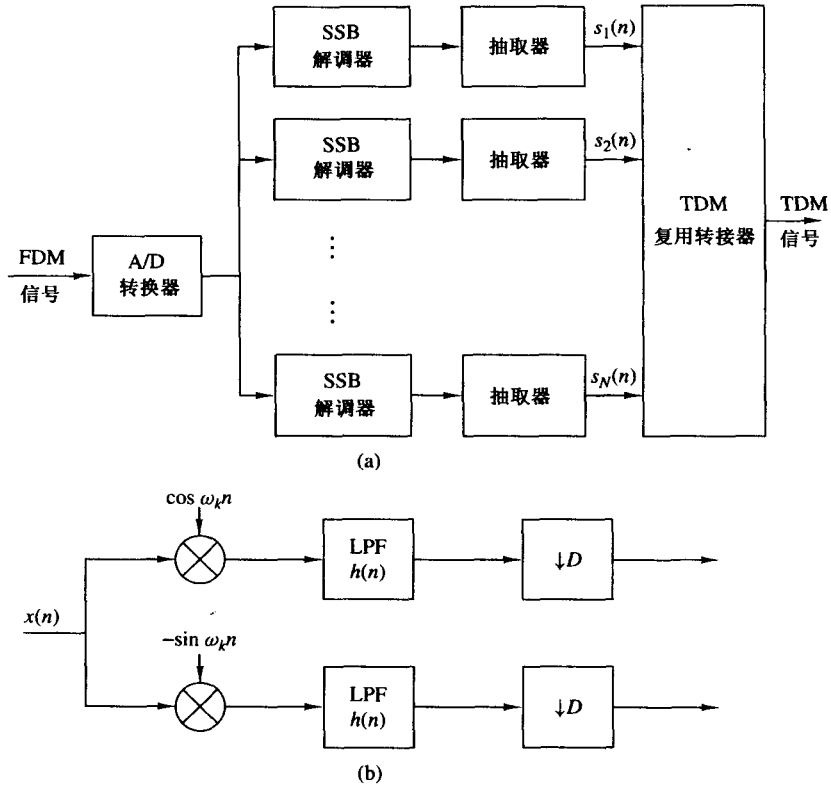


图 11.10.7　FDM 到 TDM 复用转接器的框图

具体地说，假定以 96 kHz 的奈奎斯特速率对 12 路 FDM 信号采样，并将采样信号经过一个滤波器组解调器。在 FDM 解调器中，基本构件块由频率转换器、低通滤波器和抽取器组成，如图 11.10.7(b)所示。频率转换可以通过前面描述的 DFT 滤波器组有效地实现。低通滤波器和抽取器可以通过利用多相滤波器结构有效地实现。因此，FDM 到 TDM 转换器的基本结构具有一个 DFT 滤波器组分析器的形式。由于每一信道中的信号占 4 kHz 的带宽，故其奈奎斯特速率为 8 kHz，因此，可以按因子 12 抽取多相滤波器的输出。这样，TDM 转接器的运转速率为 12×8 kHz 即 96 kHz。

在 TDM 到 FDM 的转换中，12 路 TDM 信号被分成 12 个单独信号，其中每个信号都是 8 kHz 的速率。对每路信号按因子 12 内插，然后利用单边调制器进行频率变换，如图 11.10.8 所示。对 12 个单边调制器的输出信号求和，再送到 D/A 转换器。于是我们得到了用于发送的 FDM 模拟信号。如同 FDM 到 TDM 转换的情形，可以将内插器和调制滤波器结合起来，并利用多相滤波器来有效地实现。频率转换也可以通过 DFT 来完成。因此，TDM 到 FDM 的转换器包含了前面讨论 DFT 滤波器组综合时介绍的基本原理。

11.11　双通道正交镜像滤波器组

正交镜像滤波器(QMF)在应用中的基本构件模块就是双通道 QMF 组，如图 11.11.1 所示。这是一个在“信号分析”部分有两个抽取器并且“信号综合”部分有两个内插器的多速率数字滤波器结构。分析部分的低通和高通滤波器的冲激响应分别为 $h_0(n)$和 $h_1(n)$。类似地，综合部分的低通和高通滤波器的冲激响应分别为 $g_0(n)$和 $g_1(n)$。

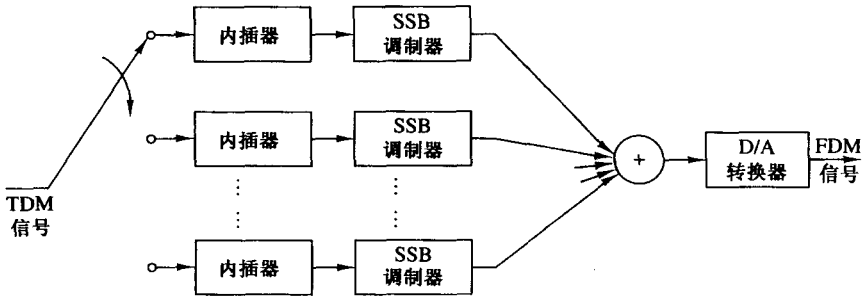


图 11.10.8 TDM 到 FDM 复用转接器的框图

两个抽取器输出端的信号的傅里叶变换为

$$X_{a0}(\omega)=\frac{1}{2}\left[X\left(\frac{\omega}{2}\right)H_0\left(\frac{\omega}{2}\right)+X\left(\frac{\omega-2\pi}{2}\right)H_0\left(\frac{\omega-2\pi}{2}\right)\right]$$
$$X_{a1}(\omega)=\frac{1}{2}\left[X\left(\frac{\omega}{2}\right)H_1\left(\frac{\omega}{2}\right)+X\left(\frac{\omega-2\pi}{2}\right)H_1\left(\frac{\omega-2\pi}{2}\right)\right] \tag{11.11.1}$$

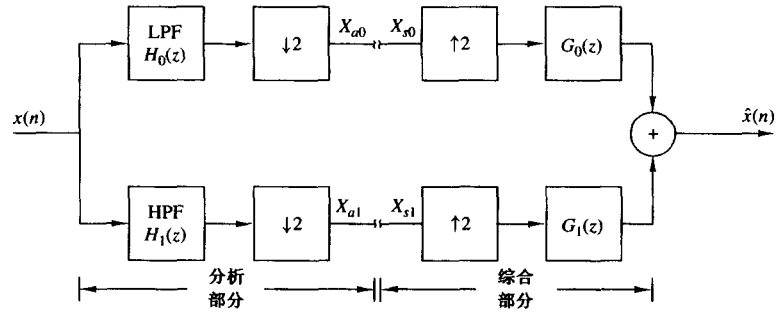


图 11.11.1 双通道 QMF 组

如果 $X_{s0}(\omega)$和 $X_{s1}(\omega)$表示综合部分的两个输入,那么输出为

$$\hat{X}(\omega)=X_{s0}(2\omega)G_0(\omega)+X_{s_1}(2\omega)G_1(\omega) \tag{11.11.2}$$

现在,假设我们将分析滤波器和相应的综合滤波器连接起来,即 $X_{a0}(\omega)=X_{s0}(\omega)$并且 $X_{a1}(\omega)=X_{s1}(\omega)$。然后,将式(11.11.1)代入式(11.11.2),可得

$$\begin{aligned}\hat{X}(\omega)&=\frac{1}{2}\left[H_0(\omega)G_0(\omega)+H_1(\omega)G_1(\omega)\right]X(\omega)\\&\quad+\frac{1}{2}\left[H_0(\omega-\pi)G_0(\omega)+H_1(\omega-\pi)G_1(\omega)\right]X(\omega-\pi)\end{aligned} \tag{11.11.3}$$

式(11.11.3)的第一项就是从 QMF 组得到的期望信号输出。第二项表示混叠效应,是我们希望消除的。

在 z 变换域,式(11.11.3)可表示为

$$\begin{aligned}\hat{X}(z)&=\frac{1}{2}\left[H_0(z)G_0(z)+H_1(z)G_1(z)\right]X(z)\\&\quad+\frac{1}{2}\left[H_0(-z)G_0(z)+H_1(-z)G_1(z)\right]X(-z)\\&=Q(z)X(z)+A(z)X(-z)\end{aligned} \tag{11.11.4}$$

其中，定义

$$Q(z)=\frac{1}{2}[H_0(z)G_0(z)+H_1(z)G_1(z)]$$
$$A(z)=\frac{1}{2}[H_0(-z)G_0(z)+H_1(-z)G_1(z)] \tag{11.11.5}$$

11.11.1　消除混叠效应

为了消除混叠，我们需要令 $A(z)=0$，即

$$H_0(-z)G_0(z)+H_1(-z)G_1(z)=0 \tag{11.11.6}$$

在频域，该条件变成

$$H_0(\omega-\pi)G_0(\omega)+H_1(\omega-\pi)G_1(\omega)=0 \tag{11.11.7}$$

通过按以下方式选取，该条件可以很容易满足：

$$G_0(\omega)=H_1(\omega-\pi),\qquad G_1(\omega)=-H_0(\omega-\pi) \tag{11.11.8}$$

这样，式(11.11.3)的第二项就变为零，滤波器组是无混叠的。

为了详细阐述，我们假设 $H_0(\omega)$ 是一个低通滤波器而 $H_1(\omega)$ 是一个镜像高通滤波器，如图 11.11.2所示。于是，我们可将 $H_0(\omega)$ 和 $H_1(\omega)$ 表示为

$$H_0(\omega)=H(\omega)$$
$$H_1(\omega)=H(\omega-\pi) \tag{11.11.9}$$

其中，$H(\omega)$ 是一个低通滤波器的频率响应。在时域，相应的关系为

$$h_0(n)=h(n)$$
$$h_1(n)=(-1)^n h(n) \tag{11.11.10}$$

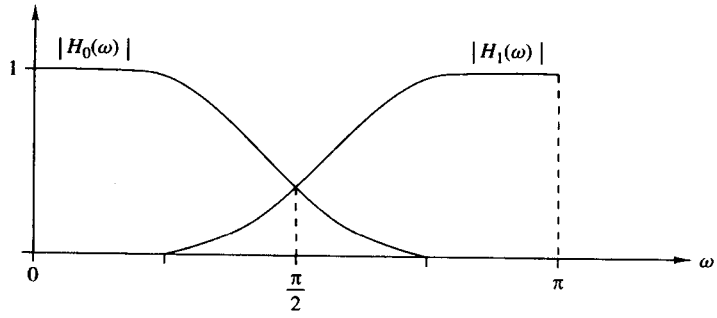


图 11.11.2　分析滤波器 $H_0(\omega)$ 和 $H_1(\omega)$ 的镜像特性

因此，$H_0(\omega)$ 和 $H_1(\omega)$ 关于频率 $\omega=\pi/2$ 镜像对称，如图 11.11.2 所示。结合式(11.11.8)中的约束，我们选择低通滤波器 $G_0(\omega)$ 为

$$G_0(\omega)=H(\omega) \tag{11.11.11}$$

并且高通滤波器 $G_1(\omega)$ 为

$$G_1(\omega)=-H(\omega-\pi) \tag{11.11.12}$$

在时域，这些关系式变成

$$g_0(n)=h(n)$$
$$g_1(n)=(-1)^n h(n) \tag{11.11.13}$$

在 z 变换域,消除混叠的关系式为

$$\begin{aligned} H_0(z) &= H(z) \\ H_1(z) &= H(-z) \\ G_0(z) &= H(z) \\ G_1(z) &= -H(-z) \end{aligned} \tag{11.11.14}$$

11.11.2 准确重构的条件

根据 $A(z)=0$,我们现在考虑除了相差一个任意延时外 QMF 组的输出 $x(n)$与输入 $x(n)$对于所有可能的输入都是相同的条件。当该条件满足时,滤波器组称为准确重构 QMF 组。于是,我们需要

$$Q(z)=\frac{1}{2}[H_0(z)G_0(z)+H_1(z)G_1(z)]=z^{-k} \tag{11.11.15}$$

通过利用关系式(11.11.14),准确重构的条件可表示成

$$H^2(z)-H^2(-z)=2z^{-k} \tag{11.11.16}$$

或等价为

$$H^2(\omega)-H^2(\omega-\pi)=2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k} \tag{11.11.17}$$

因此,对于准确重构,双通道 QMF 组中的低通滤波器的频率响应 $H(\omega)$必须满足幅度条件

$$\left|H^2(\omega)-H^2(\omega-\pi)\right|=C \tag{11.11.18}$$

其中,C 是个正常数,例如 $C=2$。我们注意到,如果 $H(\omega)$满足式(11.11.18)中的幅度条件,并且设计成具有线性相位,那么 QMF 的输出 $x(n)$就是输入序列 $x(n)$的简单延迟。然而,线性相位并不是准确重构的必要条件。

11.11.3 QMF 组的多相形式

双通道无混叠 QMF 组可以通过多相滤波器有效地实现。为了这个目标,$H_0(z)$和 $H_1(z)$可表示为

$$\begin{aligned} H_0(z) &= P_0(z^2)+z^{-1}P_1(z^2) \\ H_1(z) &= P_0(z^2)-z^{-1}P_1(z^2) \end{aligned} \tag{11.11.19}$$

其中,我们利用到了式(11.11.14)给出的关系。

类似地,利用式(11.11.14)中的关系,可得滤波器 $G_0(z)$和 $G_1(z)$的多相表达式为

$$\begin{aligned} G_0(z) &= P_0(z^2)+z^{-1}P_1(z^2) \\ G_1(z) &= -\left[P_0(z^2)-z^{-1}P_1(z^2)\right] \end{aligned} \tag{11.11.20}$$

于是,我们得到 QMF 组的多相实现,如图 11.11.3(a)所示。相应的计算上高效的多相实现如图 11.11.3(b)所示。

11.11.4 线性相位 FIR QMF 组

现在,让我们考虑线性相位滤波器 $H(\omega)$的使用。$H(\omega)$可表示为

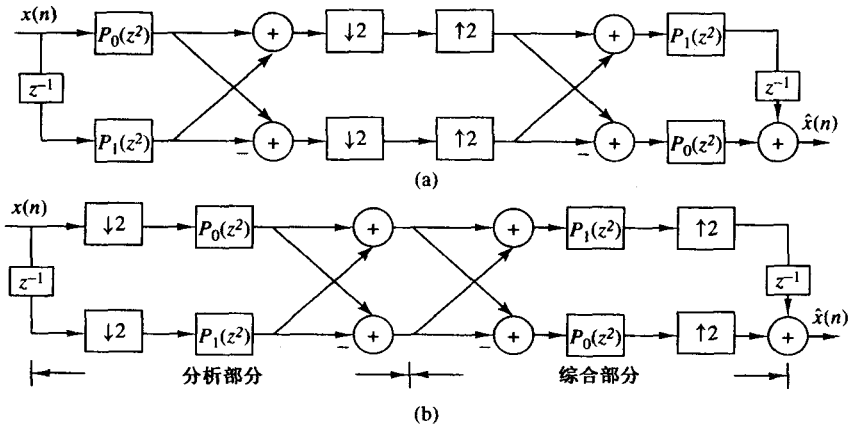


图 11.11.3　双通道 QMF 组的多相实现

$$H(\omega) = H_r(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)/2} \tag{11.11.21}$$

其中，N 是滤波器长度。于是

$$\begin{aligned} H^2(\omega) &= H_r^2(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)} \\ &= |H(\omega)|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)} \end{aligned} \tag{11.11.22}$$

并且

$$\begin{aligned} H^2(\omega-\pi) &= H_r^2(\omega-\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\pi)(N-1)} \\ &= (-1)^{N-1}|H(\omega-\pi)|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)} \end{aligned} \tag{11.11.23}$$

因此，应用线性相位 FIR 滤波器的双通道 QMF 的整体系统函数为

$$\frac{\hat{X}(\omega)}{X(\omega)} = \left[|H(\omega)|^2 - (-1)^{N-1}|H(\omega-\pi)|^2\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)} \tag{11.11.24}$$

注意到整体滤波器具有 $N-1$ 个样本的延迟，并且幅度响应为

$$M(\omega) = |H(\omega)|^2 - (-1)^{N-1}|H(\omega-\pi)|^2 \tag{11.11.25}$$

我们还注意到当 N 是奇数时，$M(\pi/2)=0$，因为 $|H(\pi/2)| = |H(3\pi/2)|$。对于一个 QMF 设计，这是一个不可实现的特性。另一方面，当 N 是偶数时，

$$M(\omega) = |H(\omega)|^2 + |H(\omega-\pi)|^2 \tag{11.11.26}$$

它可以避免在 $\omega=\pi/2$ 处出现零值的问题。对于 N 为奇数，理想的双通道 QMF 应该满足条件

$$M(\omega) = |H(\omega)|^2 + |H(\omega-\pi)|^2 = 1 \quad \text{对于所有}\ \omega \tag{11.11.27}$$

它由式(11.11.25)推出。遗憾的是，唯一满足式(11.11.27)的频率响应函数就是价值不大的函数 $|H(\omega)|^2 = \cos^2 a\omega$。相应地，任何有价值的线性相位 FIR 滤波器 $H(\omega)$都会引起一些幅度失真。

通过优化 FIR 滤波器的系数，QMF 中的有价值的线性相位 FIR 滤波器引起的幅度失真可以最小化。一种特别有效的方法就是选择适当的 $H(\omega)$的系数，使得当最小化(或约束)$H(\omega)$的阻带能量时 $M(\omega)$尽可能平坦。该应用引出了最小化积分误差

$$J = w\int_{\omega_s}^{\pi}|H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega + (1-w)\int_0^{\pi}[M(\omega)-1]^2\mathrm{d}\omega \tag{11.11.28}$$

其中，w 是在区间 $0 < w < 1$ 内的权重因子。进行优化时，滤波器的冲激响应约束为对称的(线性相位)。该优化通过数字计算机数值上很容易进行。该应用已经被 Johnston(1980)，Jain 和 Crochiere (1984)用来设计双通道 QMF。Johnston(1980)已经把优化滤波器系数制作成表格。

11.11.5 IIR QMF 组

作为线性相位 FIR 滤波器的一个补充，我们也可以设计满足式(11.11.18)给出的全通约束的 IIR 滤波器。为了这个目的，椭圆滤波器提供了特别有效的实现。由于 QMF 可能会产生一些相位失真，故 QMF 输出端的信号可以通过一个全通相位均衡器来最小化相位失真。

11.11.6 准确重构双通道 FIR QMF 组

我们发现前面描述的线性相位 FIR 滤波器和 IIR 滤波器，在双通道 QMF 组中都可以进行准确重构。然而，就像 Smith 和 Barnwell(1984)指出的，通过设计一个长度为 $2N-1$ 的线性相位 FIR 半带滤波器 $H(\omega)$就可以实现准确重构。

一个半带滤波器定义为一个零相位 FIR 滤波器，其冲激响应 $\{b(n)\}$满足条件

$$b(2n) = \begin{cases} 常数, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{11.11.29}$$

因此除了 $n=0$ 处，所有偶序号的样本都等于零。从零相位的要求可以推出 $b(n) = b(-n)$。该滤波器的频率响应为

$$B(\omega) = \sum_{n=-K}^{K} b(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{11.11.30}$$

其中，K 是奇数。更进一步，$B(\omega)$满足条件：对于所有频率，$B(\omega) + B(\pi - \omega)$是个常数。半带滤波器的典型频率冲激响应如图 11.11.4 所示。我们注意到滤波器的响应是关于 $\pi/2$ 对称的，频带截止频率 ω_p 和 ω_s 关于 $\omega = \pi/2$ 对称，并且通带和阻带的峰值误差是相等的。我们还注意到通过延迟 K 个样本，该滤波器可以变成因果的。

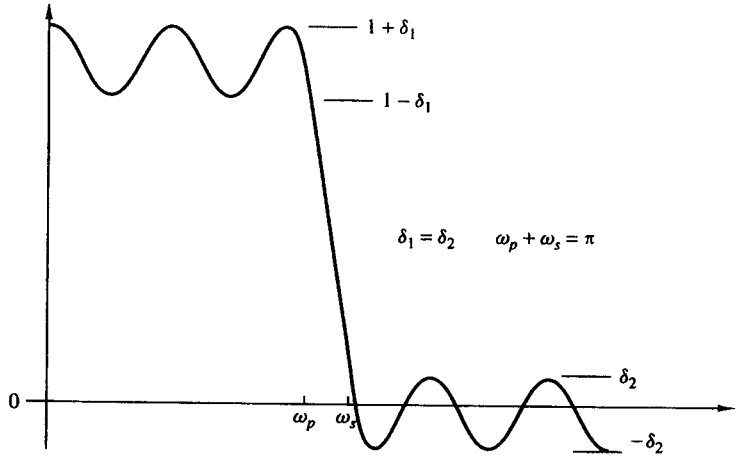


图 11.11.4 FIR 半带滤波器的频率响应特性

现在，假设我们设计一个长度为 $2N-1$ 的 FIR 半带滤波器，其频率响应如图 11.11.5(a)所示，其中 N 是偶数。根据 $B(\omega)$，我们构造另一个半带滤波器，具有频率响应

$$B_+(\omega) = B(\omega) + \delta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)} \tag{11.11.31}$$

如图 11.11.5(b)所示。注意到 $B_+(\omega)$是非负的,故其谱分解为

$$B_+(z) = H(z)H(z^{-1})z^{-(N-1)} \tag{11.11.32}$$

或等效为

$$B_+(\omega) = |H(\omega)|^2 e^{-j\omega(N-1)} \tag{11.11.33}$$

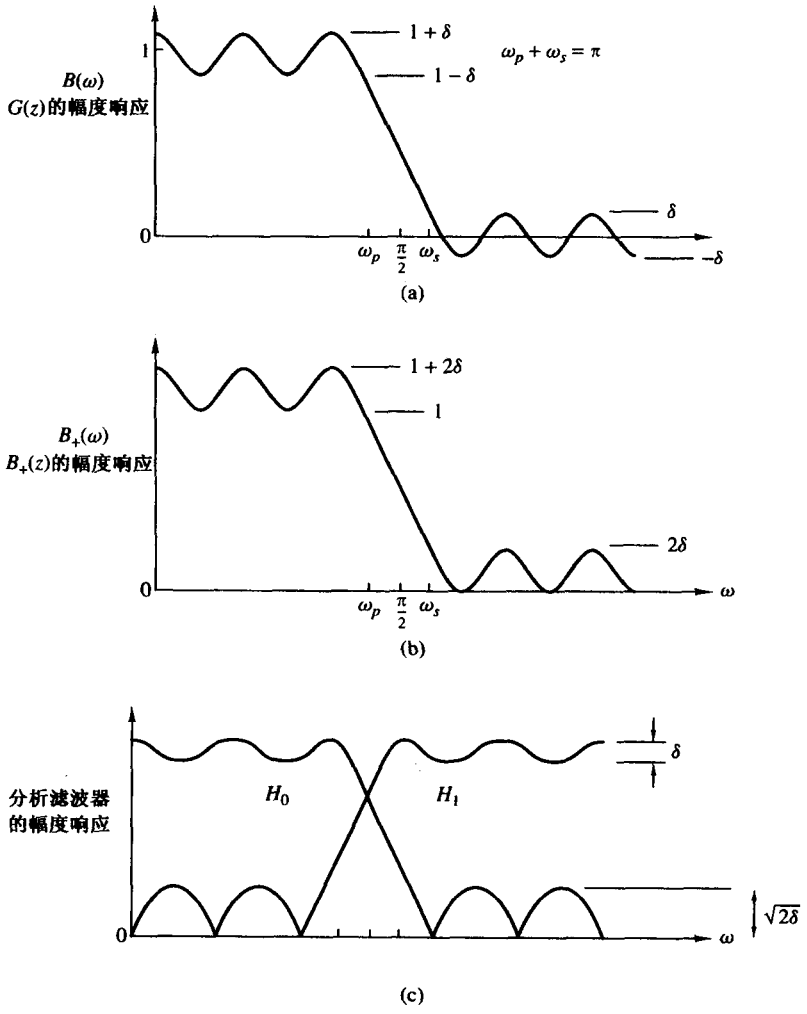


图 11.11.5　FIR 半带滤波器 $B(\omega)$和 $B_+(\omega)$的频率响应特性[摘自 Vaidyanathan(1987)]

其中,$H(\omega)$是长度为 N 的具有实系数的 FIR 滤波器的频率响应。由于 $B_+(\omega)$关于 $\omega = \pi/2$ 对称,故可得

$$B_+(z) + (-1)^{N-1}B_+(-z) = \alpha z^{-(N-1)} \tag{11.11.34}$$

或等效为

$$B_+(\omega) + (-1)^{N-1}B_+(\omega - \pi) = \alpha e^{-j\omega(N-1)} \tag{11.11.35}$$

其中,α 是个常数。于是,将式(11.11.32)代入式(11.11.34),可得

$$H(z)H(z^{-1}) + H(-z)H(-z^{-1}) = \alpha \tag{11.11.36}$$

由于 $H(z)$满足式(11.11.36),并且当 $G_0(z)=H_1(-z)$同时 $G_1(z)=-H_0(-z)$时混叠可消除,故可推出选取 $H_1(z),G_0(z),G_1(z)$的条件为

$$\begin{aligned}H_0(z)&=H(z)\\H_1(z)&=-z^{-(N-1)}H_0(-z^{-1})\\G_0(z)&=z^{-(N-1)}H_0(z^{-1})\\G_1(z)&=z^{-(N-1)}H_1(z^{-1})=-H_0(-z)\end{aligned}\tag{11.11.37}$$

这样混叠失真就可以消除,并且由于 $\hat{X}(\omega)/X(\omega)$是个常数,故 QMF 可以实现准确重构,即 $x(n)=\alpha x(n-N+1)$。然而,我们注意到 $H(z)$不是线性相位滤波器。双通道 QMF 组中的 FIR 滤波器 $H_0(z),H_1(z),G_0(z)$和 $G_1(z)$都可以按前面描述的多相滤波器的形式有效地实现。

11.11.7 子带编码中的双通道 QMF 组

在 11.9.4 节,我们描述了一种对语音信号有效编码的方法,它基于把信号划分成几个子带并对各子带分别编码。例如,在图 11.9.4 中,我们给出了一个信号分成四个子带的划分,即 $0\leqslant F\leqslant F_s/16$, $F_s/16<F\leqslant F_s/8$, $F_s/8<F\leqslant F_s/4$ 和 $F_s/4<F\leqslant F_s/2$,其中 F_s 是采样率。利用三个双通道 QMF 分析部分,就可以实现划分四个子带。经过编码并信道传输后,每个子带信号被解码并利用三个双通道 QMF 的综合部分进行重构。利用四个子带的子带编码系统结构如图 11.11.6 所示。

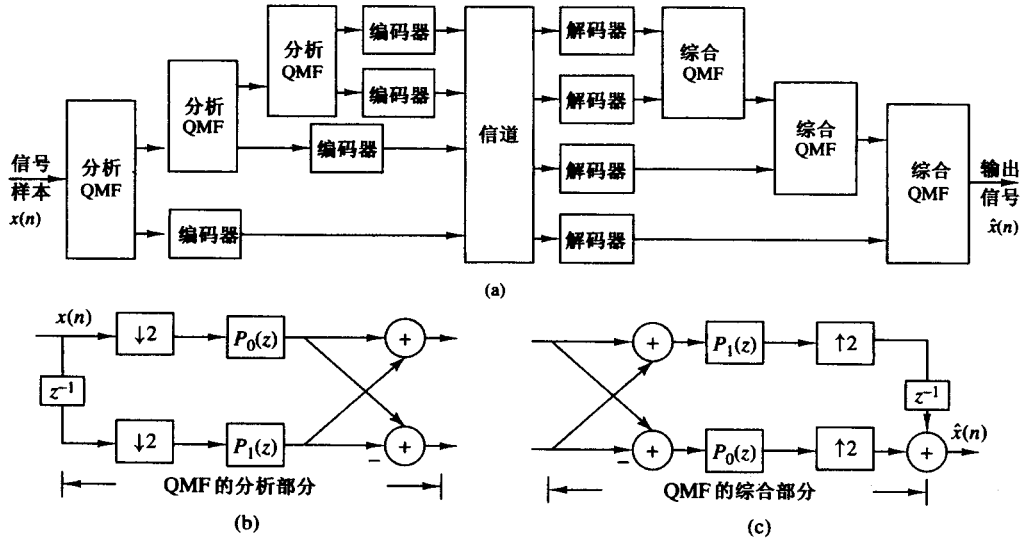


图 11.11.6 利用双通道 QMF 组的子带编码系统

11.12 M 通道 QMF 组

在本节中,我们考虑将 QMF 组一般化到 M 通道。图 11.12.1 给出了一个 M 通道 QMF 组的结构,其中 $x(n)$是分析部分的输入,$x_k^{(a)}(n),0\leqslant k\leqslant M-1$ 是分析滤波器的输出,$x_k^{(s)}(n),0\leqslant k\leqslant M-1$是综合滤波器的输入,$\hat{x}(n)$是综合部分的输出。

从分析滤波器得到的 M 个输出在 z 换域可表示为

$$X_k^{(a)}(z)=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}H_k\left(z^{1/M}W_M^m\right)X\left(z^{1/M}W_M^m\right),\quad 0\leqslant k\leqslant M-1\tag{11.12.1}$$

其中，$W_M = e^{-j2\pi/M}$。综合部分的输出为

$$\hat{X}(z) = \sum_{k=0}^{M-1} X_k^{(s)}(z^M)\, G_k(z) \tag{11.12.2}$$

类似双通道 QMF 组，我们设定 $X_k^{(a)}(z) = X_k^{(s)}(z)$。然后，如果把式(11.12.1)代入式(11.12.2)，可得

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} G_k(z)\left[\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} H_k(zW_M^m)\, X(zW_M^m)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1}\left[\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} G_k(z) H_k(zW_M^m)\right] X(zW_M^m)\end{aligned} \tag{11.12.3}$$

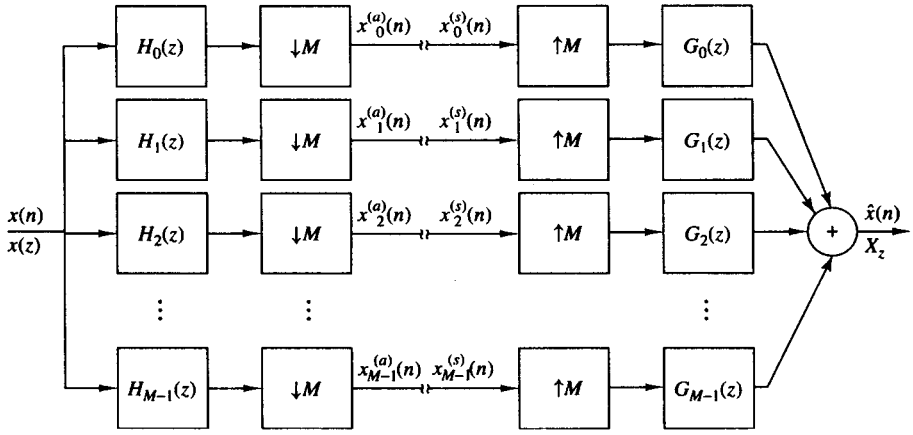


图 11.12.1　M 通道 QMF 组

为方便起见，定义括号里的项为

$$R_m(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} G_k(z) H_k(zW_M^m), \quad 0 \leqslant m \leqslant M-1 \tag{11.12.4}$$

于是，式(11.12.3)可表示为

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \sum_{m=0}^{M-1} R_m(z) X(zW_N^m) \\ &= R_0(z)X(z) + \sum_{m=1}^{M-1} R_m(z) X(zW_M^m)\end{aligned} \tag{11.12.5}$$

我们注意到式(11.12.5)的第一项是 QMF 组的无混叠成分，而第二项是混叠成分。

11.12.1　无混叠和准确重构的条件

根据式(11.12.5)，显然通过强制以下条件，混叠可以消除：

$$R_m(z) = 0, \quad 1 \leqslant m \leqslant M-1 \tag{11.12.6}$$

由于消除了产生混叠的项，M 通道 QMF 组变成了一个线性时不变系统，并且满足输入输出关系

$$\hat{X}(z) = R_0(z)X(z) \tag{11.12.7}$$

其中,

$$R_0(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)G_k(z) \tag{11.12.8}$$

因此,M 通道 QMF 组准确重构的条件变成

$$R_0(z) = Cz^{-k} \tag{11.12.9}$$

其中,C 和 k 是正的常数。

11.12.2 M 通道 QMF 组的多相形式

M 通道 QMF 组的一个有效实现,可以通过应用多相滤波器得到。为了得到分析滤波器组的多相形式,第 k 个滤波器 $H_k(z)$ 表示为

$$H_k(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m}P_{km}(z), \qquad 0 \leqslant k \leqslant M-1 \tag{11.12.10}$$

我们可以把该 M 多相滤波器的方程写成矩阵形式

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{P}(z^M)\boldsymbol{a}(z) \tag{11.12.11}$$

其中,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(z) &= [H_0(z)\ H_1(z)\ \cdots\ H_{M-1}(z)]^t\\ \boldsymbol{a}(z) &= \left[1\ z^{-1}\ z^{-2}\ \cdots\ z^{-(M-1)}\right]^t\end{aligned} \tag{11.12.12}$$

并且

$$\boldsymbol{P}(z) = \begin{bmatrix} P_{00}(z) & P_{01}(z) & \cdots & P_{0M-1}(z)\\ P_{10}(z) & P_{11}(z) & \cdots & P_{1M-1}(z)\\ \vdots & & & \\ P_{M-1\,0}(z) & P_{M-1\,1}(z) & \cdots & P_{M-1\,M-1}(z)\end{bmatrix} \tag{11.12.13}$$

分析滤波器组的多相形式如图 11.12.2(a)所示,并且在应用第一稀有恒等式后我们得到如图 11.12.2(b)所示的结构。

综合部分可以按相似的方式构造。假设我们利用第 II 类型(转置)的形式(见习题 11.15)表示多相形式的滤波器 $\{G_k(z)\}$,于是

$$G_k(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)}Q_{km}(z^M), \qquad 0 \leqslant k \leqslant M-1 \tag{11.12.14}$$

当用矩阵形式表示时,式(11.12.14)变成

$$\boldsymbol{G}(z) = z^{-(M-1)}\boldsymbol{Q}^t(z^M)\boldsymbol{a}(z^{-1}) \tag{11.12.15}$$

其中,$\boldsymbol{a}(z)$ 在式(11.12.12)中定义,并且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(z) &= [G_0(z)\quad G_1(z)\quad \cdots\quad G_{M-1}(z)]^t\\ \boldsymbol{Q}(z) &= \begin{bmatrix} Q_{00}(z) & Q_{01}(z) & \cdots & Q_{0\,M-1}(z)\\ Q_{10}(z) & Q_{11}(z) & \cdots & Q_{1\,M-1}(z)\\ \vdots & & & \\ Q_{M-1\,0}(z) & Q_{M-1\,1}(z) & \cdots & Q_{M-1\,M-1}(z)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{11.12.16}$$

因此，M 通道 QMF 组的综合部分可以按图 11.11.3 实现。通过组合图 11.12.2(b)和图 11.12.3(b)，我们得到完整的 M 通道 QMF 组的多相结构，如图 11.12.4 所示。

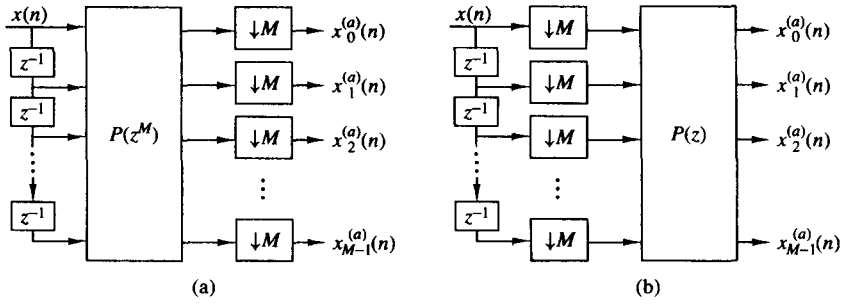


图 11.12.2　(a)和(b)分别为应用第一稀有恒等式前后 M 通道 QMF 组分析部分的多相结构

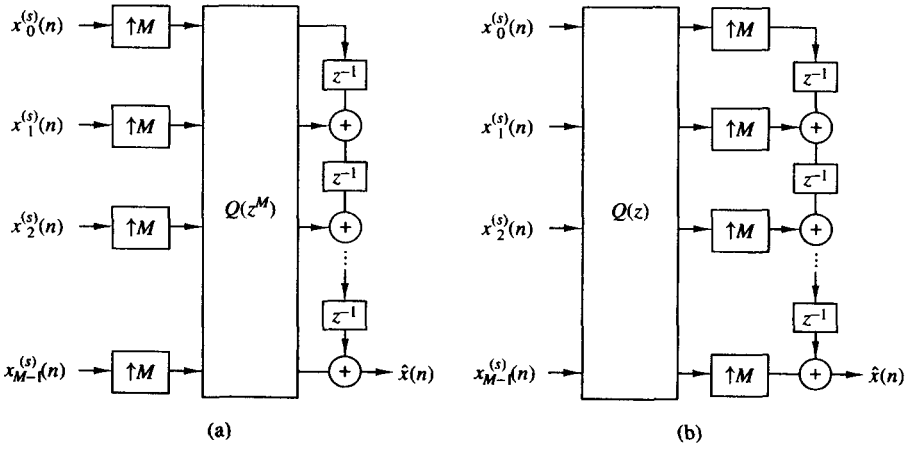


图 11.12.3　(a)和(b)分别为应用第一稀有恒等式前后 M 通道 QMF 组综合部分的多相结构

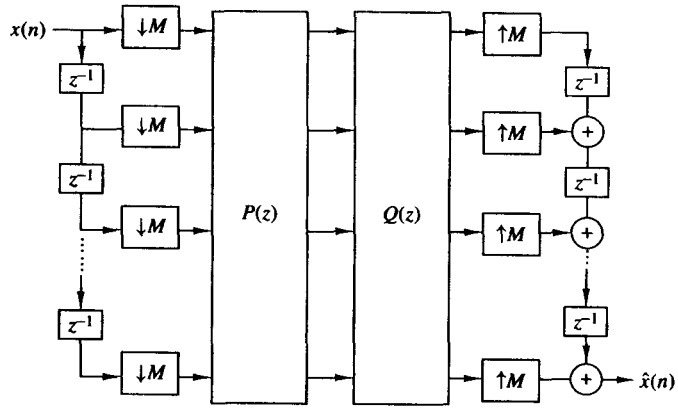


图 11.12.4　M 通道 QMF 组的多相实现

根据图 11.12.4 的 M 通道 QMF 组的结构，我们发现准确重构的条件可以重新表示为

$$\boldsymbol{Q}(z)\boldsymbol{P}(z) = Cz^{-k}\boldsymbol{I} \tag{11.12.17}$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 是 $M\times M$ 单位矩阵。因此，如果多相矩阵 $\boldsymbol{P}(z)$已知，那么多相综合矩阵 $\boldsymbol{Q}(z)$为

$$\boldsymbol{Q}(z)=Cz^{-k}[\boldsymbol{P}(z)]^{-1} \tag{11.12.18}$$

例 11.12.1 假设一个三通道准确重构 FIR QMF 组的多相矩阵为

$$\boldsymbol{P}(z^3)=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&3&1\\1&2&1\end{bmatrix}$$

请确定该 QMF 组中的分析和综合滤波器。

解：由式(11.12.11)给出的分析滤波器为

$$\begin{bmatrix}H_0(z)\\H_1(z)\\H_2(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&3&1\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\z^{-1}\\z^{-2}\end{bmatrix}$$

故

$$H_0(z)=1+z^{-1}+2z^{-2},\qquad H_1(z)=2+3z^{-1}+z^{-2},\qquad H_2(z)=1+2z^{-1}+z^{-2}$$

$\boldsymbol{P}(z^3)$的逆为

$$[\boldsymbol{P}(z^3)]^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&3&-5\\-1&-1&3\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

将该逆放大 2 倍，可得

$$\boldsymbol{Q}(z^3)=2[\boldsymbol{P}(z^3)]^{-1}$$

于是，通过应用式(11.12.15)，得到综合滤波器为

$$\begin{bmatrix}G_0(z)\\G_1(z)\\G_2(z)\end{bmatrix}=z^{-2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\3&-1&-1\\-5&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\z\\z^2\end{bmatrix}$$

因此，

$$G_0(z)=1-z^{-1}+z^{-2}\qquad G_1(z)=-1-z^{-1}+3z^{-2}\qquad G_3(z)=1+3z^{-1}-5z^{-2}$$

通过选取分析滤波器 $H_k(z)$为仿酉的多相结构，Vaidyanathan(1992)进行了 M 通道准确重构 QMF 组的设计研究，即

$$\tilde{\boldsymbol{P}}(z)\boldsymbol{P}(z)=d\boldsymbol{I},\qquad d>0 \tag{11.12.19}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{P}}(z)$是 $\boldsymbol{P}(z)$的仿共轭。即 $\tilde{\boldsymbol{P}}(z)$由 $\boldsymbol{P}(1/z)$的转置和用复共轭替换 $\boldsymbol{P}(z)$的系数构成。于是，综合部分的多相滤波器满足

$$\boldsymbol{Q}(z)=Cz^{-k}\tilde{\boldsymbol{P}}(z),\qquad C>0,k>0 \tag{11.12.20}$$

可以证明[见 Vaidyanathan 等(1989)]任意因果的 L 阶 FIR 仿酉矩阵 $\boldsymbol{P}(z)$都可以表示成乘积形式

$$\boldsymbol{P}(z)=\boldsymbol{V}_L(z)\,\boldsymbol{V}_{L-1}(z)\cdots\boldsymbol{V}_1(z)\boldsymbol{U} \tag{11.12.21}$$

其中，$\boldsymbol{U}$ 是酉矩阵并且$\{\boldsymbol{V}_m(z)\}$是具有如下形式的仿酉矩阵：

$$\boldsymbol{V}_m(z)=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{v}_m\boldsymbol{v}_m^H+z^{-1}\boldsymbol{v}_m\boldsymbol{v}_m^H \tag{11.12.22}$$

其中，$\boldsymbol{v}_m$ 是归一化的 M 维矢量。于是，综合滤波器的设计变成通过最小化一个目标函数来优化 $\boldsymbol{v}_m$ 和 $\boldsymbol{u}_i$ 的元素。该目标函数可以一般化为式(11.11.28)给出的双通道 QMF 目标函数。实际上，我们可以通过利用非线性优化技术来确定 $\boldsymbol{v}_m$ 和 $\boldsymbol{u}_i$ 的元素，从而最小化目标函数

$$J=\sum_{k=0}^{M-1}\int_{\text{第}k\text{个带阻}}|H_k(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{11.12.23}$$

于是,矢量 $\boldsymbol{v}_m$ 和 $\boldsymbol{u}_i$ 完全确定 $\boldsymbol{P}(z)$,进一步确定分析滤波器 $H_k(z)$。接着综合滤波器就可以通过式(11.12.20)确定。

例如,考虑设计一个准确重构的三通道 QMF 组,其具有如图 11.12.5 所示的幅度响应。根据上面描述的设计流程得到的分析滤波器的幅度响应如图 11.12.6 所示。该滤波器的长度为 $N=14$。我们发现该滤波器的阻带衰减接近 20 dB。

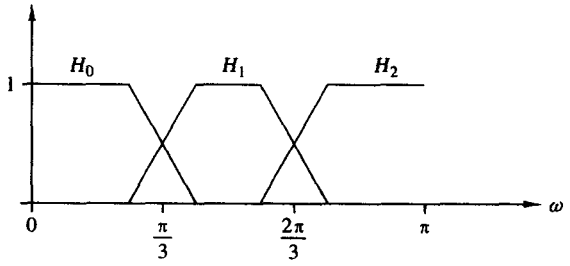


图 11.12.5　$M=3$ 时 QMF 组的分析滤波器的幅度响应

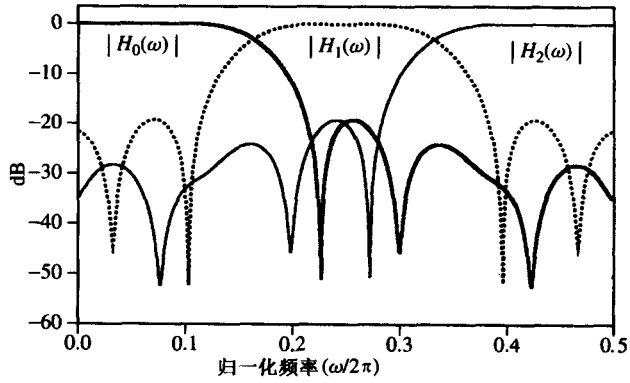


图 11.12.6　$M=3$ 时 FIR 准确重构 QMF 组的优化分析滤波器的幅度响应[摘自《多速率系统和滤波器组》,Vaidyanathan,©1993,Prentice-Hall,经出版者同意重印]

11.13　小结与参考文献

在数字信号处理的应用中,经常需要进行采样率的转换。这一章中,我们首先阐述了按整数因子降低采样率(抽取)和提高采样率(内插),接着讨论了如何将这两个过程组合起来得到按任一有理因子的采样率转换。随后,我们描述了实现按任意因子的采样率转换的方法。当重采样的信号是带通信号的特殊情形下,我们描述了多种进行采样率转换的方法。

一般来说,实现采样率转换需要利用线性时不变滤波器。我们描述了实现这种滤波器的方法,包括实现起来特别简单的一类多相滤波器结构。我们还介绍了在满足技术指标的前提下利用多速率转换的多级实现来简化滤波器复杂性的方法。

我们还描述了许多利用多速率信号处理的应用,包括窄带滤波器、移相器、滤波器组、子带语音编码器、正交镜像滤波器和复用多路转接器。这些仅仅是实际中遇到的利用多速率信号处理的许多应用中的几个。

多速率信号处理的第一次详细论述出现在 Crochiere 和 Rabiner(1983)的书中。在技术文献方面,我们引用了 Schafer 和 Rabiner(1973)、Crochiere 和 Rabiner(1975,1976,1981,1983)的著作。利用内插方法实现按任意因子转换采样率在 Ramstad(1984)的著作中有论述。Vetterli(1987)和 Vaidyanathan(1990,1993)对包括正交镜像滤波器在内的多速率数字滤波器和滤波器组做了全面的论述,其中引用很多应用的参考文献。Scheuermann 和 Gockler(1981)的著作中给出了数字复用多路转接方法的详尽综述。语音信号子带编码在许多出版物中都有阐述,Crochiere(1977,1981)以及 Garland 和 Esteban(1980)在这方面做了开拓性的研究。子带编码也应用到图像编码,我们提及的 Vetterli(1984)、Woods 和 O'Neil(1986)、Smith 和 Eddins(1988)、Safranek 等(1988)的著作,仅仅是几个例子。最后,我们想强调的是多速率信号处理将继续是一个非常活跃的研究领域。

习题

11.1 一个模拟信号 $x_a(t)$的频带限制为 900 Hz≤ F ≤1100 Hz,其作为图 P11.1 所示系统的输入。在系统中,$H(\omega)$是截止频率为 F_c = 125 Hz 的理想低通滤波器。

(a) 确定并画出信号 $x(n)$,$w(n)$,$v(n)$和 $y(n)$的谱。

(b) 说明可以通过以周期 T = 4 ms 对 $x_a(t)$采样得到 $y(n)$。

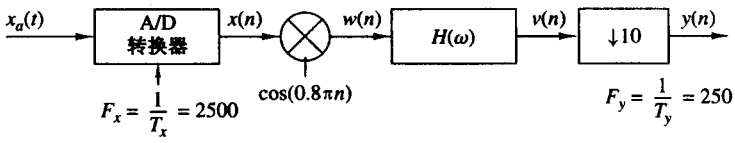


图 P11.1

11.2 考虑信号 $x(n) = a^n u(n)$,$|a| < 1$。

(a) 确定谱 $X(\omega)$。

(b) 将抽取器应用于 $x(n)$,按因子 2 降低速率,确定输出谱。

(c) 说明(b)中得到的谱就是 $x(2n)$的傅里叶变换。

11.3 序列 $x(n)$是通过以周期 T 对一个模拟信号采样得到的。由这一序列,利用方程

$$y(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{1}{2}\left[x\left(\dfrac{n-1}{2}\right) + x\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\right], & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

所描述的线性内插方法产生一个新的采样周期为 $T/2$ 的信号。

(a) 说明利用基本的信号处理元件可以实现该线性内插方程。

(b) 当 $x(n)$的谱为

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant |\omega| \leqslant 0.2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

时,确定 $y(n)$的谱。

(c) 当 $x(n)$的谱为

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0.7\pi \leqslant |\omega| \leqslant 0.9\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

时,确定 $y(n)$的谱。

11.4 考虑具有如下傅里叶变换的信号 $x(n)$:

$$X(\omega)=0, \qquad \omega_n<|\omega|\leqslant\pi$$
$$f_m<|f|\leqslant\frac{1}{2}$$

(a) 说明如果采样率为 $\omega_s=2\pi/D\geqslant 2\omega_m$ ($f_s=1/D\geqslant 2f_m$)，那么信号 $x(n)$就可以从其样本 $x(mD)$重构。

(b) 说明 $x(n)$可以利用如下公式重构：

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kD)h_r(n-kD)$$

其中，

$$h_r(n)=\frac{\sin(2\pi f_c n)}{2\pi n}, \qquad \begin{matrix} f_m<f_c<f_s-f_m \\ \omega_m<\omega_c<\omega_s-\omega_m \end{matrix}$$

(c) 说明可将(b)中的带限内插视为两步：第一，通过在抽取信号 $x_a(n)=x(nD)$的相继样本间插入$(D-1)$个零样本达到按因子 D 提高采样率；第二，利用截止频率为 ω_c 的理想低通滤波器对所得信号滤波。

11.5 本习题中，我们将解释实际离散信号的采样和抽取的概念。为此，考虑具有如图 P11.5 所示傅里叶变换 $X(\omega)$的信号 $x(n)$。

(a) 按采样周期 $D=2$ 对 $x(n)$采样，得到信号

$$x_s(n)=\begin{cases} x(n), & n=0,\pm2,\pm4,\cdots \\ 0, & n=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots \end{cases}$$

计算并画出信号 $x_s(n)$以及其傅里叶变换 $X_s(\omega)$。由 $x_s(n)$可以重构出 $x(n)$吗？如何重构？

(b) 按因子 $D=2$ 抽取 $x(n)$，得到信号

$$x_d(n)=x(2n), \qquad \text{所有}n$$

证明 $X_d(\omega)=X_s(\omega/2)$。画出信号 $x_d(n)$及其傅里叶变换 $X_d(\omega)$。当我们抽取 $x_s(n)$时，会丢失信息吗？

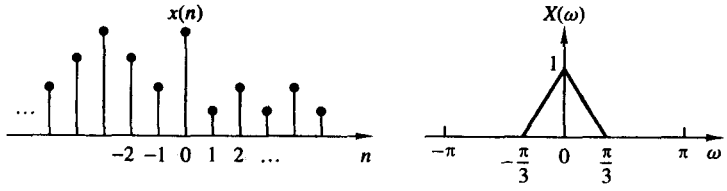


图 P11.5

11.6 设计一个以因子 $D=5$ 对输入信号 $x(n)$下采样的抽取器。如果 FIR 滤波器通带 $0\leqslant\omega\leqslant\pi/5$ 内的纹波为 0.1 dB，阻带至少有 30 dB 的衰减，用 Remez 算法确定其系数。另外请确定实现该抽取器的相应的多相滤波器结构。

11.7 设计一个以因子 $I=2$ 对输入信号上采样的内插器。如果 FIR 滤波器通带 $0\leqslant\omega\leqslant\pi/2$ 内的纹波为 0.1 dB，阻带至少有 30 dB 的衰减，用 Remez 算法确定其系数。另外，请确定实现该内插器的相应的多相滤波器结构。

11.8 设计一个以因子$\frac{2}{5}$降低采样率的采样率转换器。如果 FIR 滤波器通带纹波为 0.1 dB，阻带至少有 30 dB 的衰减，用 Remez 算法确定其系数。请指出时变系数集 $g(n,m)$和该采样率转换器的多相滤波器实现的系数。

11.9 考虑图 P11.9 给出的两种不同的内插器和抽取器级联的方法

(a) 如果 $D=I$,那么请证明两种结构的输出是不同的。因此,一般来说,两个系统是不同的。

(b) 证明当且仅当 D 和 I 互素时,两个系统才是相同的。

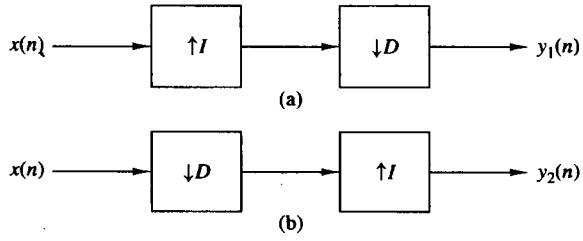


图 P11.9

11.10 证明图 P11.10 给出的两个抽取器和内插器结构的等价性(稀有恒等式)。见 Vaidyanathan(1990)。

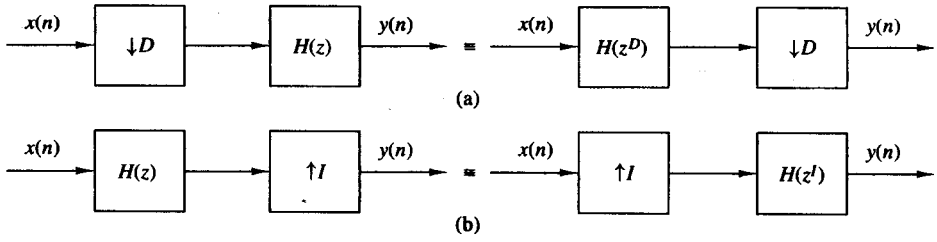


图 P11.10

11.11 考虑具有如下系统函数的一个任意数字滤波器:

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

(a) 通过将 $h(n)$分成偶序号样本 $h_0(n)=h(2n)$和奇序号样本 $h_1(n)=h(2n+1)$,实现 $H(z)$的双成分多相分解。证明 $H(z)$可表示为

$$H(z)=H_0(z^2)+z^{-1}H_1(z^2)$$

并确定 $H_0(z)$和 $H_1(z)$。

(b) 将(a)的结果一般化,证明 $H(z)$可以分解为具有如下系统函数的 D 成分多相滤波器结构:

$$H(z)=\sum_{k=0}^{D-1}z^{-k}H_k(z^D)$$

请确定 $H_k(z)$。

(c) 对具有如下系统函数的 IIR 滤波器:

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

请确定双成分分解的 $H_0(z)$和 $H_1(z)$。

11.12 将序列 $x(n)$以 $I=2$ 上采样,再经过一个 LTI 系统 $H_1(z)$,最后以 $D=2$ 下采样。我们可以用一个单 LTI 系统 $H_2(z)$替换该过程吗? 如果可以,请确定该系统的系统函数。

11.13 画出以下有理采样率转换的信号及其相应谱:(a) $I/D=5/3$ 和(b) $I/D=3/5$。假定输入信号 $x(n)$的谱覆盖整个区间为 $-\pi\leqslant\omega_x\leqslant\pi$。

11.14 我们希望设计一个 $D=8$ 的高效非递归抽取器,利用因式

$$H(z)=[(1+z^{-1})(1+z^{-2})(1+z^{-4})\cdots(1+z^{-2^{K-1}})]^5$$

(a) 利用系统函数为 $H_k(z)=(1+z^{-1})^5$ 的滤波器得出一个有效的实现。

(b) 证明每一级得到的抽取器都可以通过利用多相分解更有效地实现。

11.15 让我们考虑另一种通过定义新的多相滤波器 $Q_m(z^N)$ 的多相分解

$$H(z)=\sum_{m=0}^{N-1}z^{-(N-1-m)}Q_m(z^N)$$

该多相分解称为 II 型，以区别于基于多相滤波器 $P_m(z^N)$ 的卷积分解。

(a) 证明 II 型多相滤波器 $Q_m(z^N)$ 与多相滤波器 $P_m(z^N)$ 的关系为

$$Q_m(z^N)=P_{N-1-m}(z^N)$$

(b) 大致画出基于多相滤波器 $Q_m(z^N)$ 的 $H(z)$ 的多相滤波器结构，并证明该结构是一种额外转置形式。

11.16 确定图 11.5.9 中抽取器在 $I=3$ 时的转置形式。

11.17 设计一个满足如下技术指标的两级抽取器：

$$D=100$$
通带：$0\leqslant F\leqslant 50$
过渡带：$50\leqslant F\leqslant 55$
输入采样率：10 000 Hz
纹波：$\delta_1=10^{-1},\delta_2=10^{-3}$

11.18 设计一个基于单级和双级多速率结构的线性相位 FIR 滤波器，要求满足以下技术指标：

采样率：10 000 Hz
通带：$0\leqslant F\leqslant 60$
过渡带：$60\leqslant F\leqslant 65$
纹波：$\delta_1=10^{-1},\delta_2=10^{-3}$

11.19 证明满足式(11.11.35)的半带滤波器总是奇函数，并且偶系数都是零。

11.20 设计一个单级和双级的内插器，满足以下指标：

$$I=20$$
输入采样率：10 000 Hz
通带：$0\leqslant F\leqslant 90$
过渡带：$90\leqslant F\leqslant 100$
纹波：$\delta_1=10^{-2},\delta_2=10^{-3}$

11.21 利用式(11.10.15)，导出图 11.10.6 所示多相综合结构所对应的方程。

11.22 证明以整数因子 I 提高采样率的 L 级内插器的转置等效于以因子 $D=I$ 降低采样率的 L 级抽取器。

11.23 大致画出实现序列 $x(n)$ 超前 $(k/I)T_x$ 的多相滤波器的结构。

11.24 对 I 阶内插器，证明以下表达式。

(a) 冲激响应 $h(n)$ 可表示为

$$h(n)=\sum_{k=0}^{I-1}p_k(n-k)$$

其中，

$$p_k(n)=\begin{cases}p_k(n/I), & n=0,\pm I,\pm 2I,\cdots\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(b) $H(z)$可表示为

$$H(z)=\sum_{k=0}^{I-1}z^{-k}p_k(z)$$

(c)
$$P_k(z)=\frac{1}{I}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{I-1}h(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi l(n-k)/I}z^{-(n-k)/I}$$

$$P_k(\omega)=\frac{1}{I}\sum_{l=0}^{I-1}H\left(\omega-\frac{2\pi l}{I}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-2\pi l)k/I}$$

11.25 考虑以因子 I 对信号内插。系统函数为 $H(z)$的内插滤波器可以通过基于另一种分解(Ⅱ型)的多相滤波器结构来实现,即

$$H(z)=\sum_{m=0}^{I-1}z^{-(I-1-m)}Q_m(z^I)$$

确定并画出应用多相滤波器 $Q_m(z),0\leqslant m\leqslant I-1$ 的内插器的结构。

11.26 在 11.10.1 节描述的均匀 DFT 滤波器组的多相滤波器结构中,分析部分的多相滤波器通过等式(11.10.10)定义。为了取代该定义,我们假定低通原型滤波器的 N 带多相滤波器 $H_0(z)$为

$$H_0(z)=\sum_{i=0}^{N-1}z^{-i}P_i(z^N)$$

其中,

$$P_i(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h_0(nN+i)z^{-n},\qquad 0\leqslant i\leqslant N-1$$

则

$$H_k(z)=H_0(z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/N})=H_0(zW_N^k)$$

其中,$W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N}$

(a) 证明滤波器 $H_k(z),1\leqslant k\leqslant N-1$ 可表示为

$$H_k(z)=\begin{bmatrix}1 & W_N^{-k} & W_N^{-2k} & \cdots & W_N^{-(N-1)k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_0(z^N)\\ z^{-1}P_1(z^N)\\ \vdots\\ z^{-(N-1)}P_{N-1}(z^N)\end{bmatrix}$$

(b) 证明

$$\begin{bmatrix}H_0(z)\\ H_1(z)\\ \vdots\\ H_{N-1}(z)\end{bmatrix}=N\boldsymbol{W}^{-1}\begin{bmatrix}P_0(z^N)\\ z^{-1}P_1(z^N)\\ \vdots\\ z^{-(N-1)}P_{N-1}(z^N)\end{bmatrix}$$

其中,$\boldsymbol{W}$ 是 DFT 矩阵

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{(N-1)}\\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)}\end{bmatrix}$$

(c) 画出该均匀 DFT 滤波器组的分析部分。

(d) 确定并画出该均匀 DFT 滤波器的综合部分。

11.27 在四通道均匀 DFT 滤波器组中的原型滤波器通过以下系统函数表征：

$$H_0(z) = 1 + z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-4}$$

(a) 确定在分析部分的滤波器 $H_1(z)$, $H_2(z)$和 $H_3(z)$的系统函数。

(b) 确定综合部分的滤波器的系统函数。

(c) 大致画出该均匀 DFT 滤波器组的分析和综合部分。

11.28 考虑下面 FIR 滤波器的系统函数：

$$H(z) = -3 + 19z^{-2} + 32z^{-3} + 19z^{-4} - 3z^{-6}$$

(a) 证明 $H(z)$是线性相位滤波器。

(b) 证明 $H(z)$是半带滤波器。

(c) 画出该滤波器的幅度和冲激响应。

11.29 双通道 QMF 的分析滤波器 $H_0(z)$具有系统函数

$$H_0(z) = 1 + z^{-1}$$

(a) 确定多相滤波器 $P_0(z^2)$和 $P_1(z^2)$。

(b) 确定分析滤波器 $H_1(z)$并大致画出应用多相滤波器的双通道分析部分。

(c) 确定综合滤波器 $G_0(z)$和 $G_1(z)$,并大致画出基于多相滤波器的整个双通道 QMF。

(d) 证明 QMF 组可以进行准确重构。

11.30 三通道 QMF 组的分析滤波器具有系统函数

$$H_0(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$H_1(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2}$$

$$H_2(z) = 1 - z^{-2}$$

(a) 确定多相矩阵 $P(z^3)$并给出该滤波器的形如式(11.12.11)的表达式。

(b) 确定可以实现准确重构的综合滤波器 $G_0(z)$, $G_1(z)$和 $G_2(z)$。

(c) 大致画出应用多相滤波器的三通道 QMF 组的分析和综合部分。

11.31 目标频率分析。考虑图 P11.31(a)中的系统。

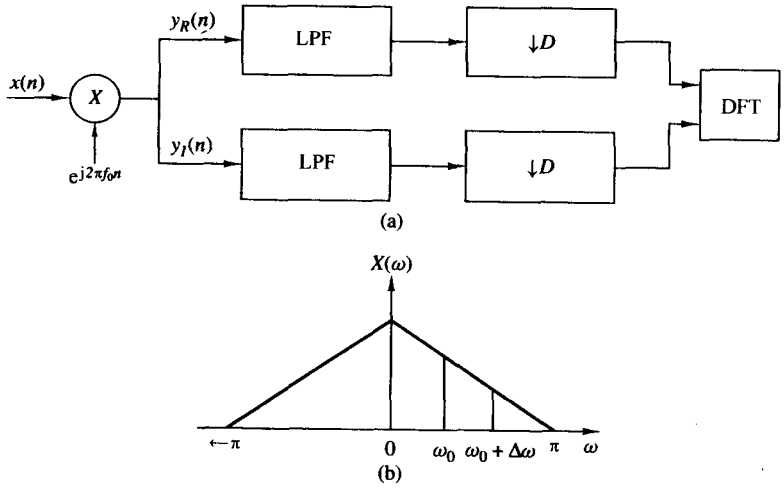


图 P11.31

(a) 当输入信号 $x(n)$的谱如图 P11.31(b)所示时,大致画出信号 $y(n)=y_R(n)+jy_I(n)$的谱。

(b) 假设我们对分析频带 $f_0 \leqslant f \leqslant f_0+\Delta f$ 的频率感兴趣,其中 $f_0=\pi/6$ 而 $\Delta f=\pi/3$。为了保留包含在该频带内的信息,确定所需要的低通滤波器的截止频率和抽取因子 D。

(c) 假定

$$x(n)=\sum_{k=0}^{p-1}\left(1-\frac{k}{2p}\right)\cos 2\pi f_k n$$

其中,$p=40$ 且 $f_k=k/p(k=0,1,\cdots,p-1)$。计算并画出 $x(n)$的 1024 点 DFT。

(d) 针对(c)中给定的信号 $x(n)$,利用一个设计适当的低通线性相位 FIR 滤波器得到抽取信号 $s(n)=s_R(n)+js_I(n)$,重复(b)。

(e) 计算 $s(n)$的 1024 点 DFT,并研究指出是否已得到所期望的结果。

第 12 章　线性预测和最优线性滤波器

用来执行信号估计的滤波器设计是一个在设计通信系统、控制系统、地球物理和许多其他应用和学科中经常出现的问题。在本章中，我们将从统计观点阐述最优滤波器的设计问题。滤波器将局限于线性滤波器，且最优准则基于均方误差最小化。因此，在最优滤波器的确定过程中，只需要平稳过程的二阶统计量（自相关函数和互相关函数）。

本章包括用于线性预测的最优滤波器的设计。线性预测是数字信号处理的一个特别重要的课题，并且在多种领域有广泛的应用，如语音信号处理、图像处理和通信系统的噪声抑制等。正如我们将观察到的，确定最优预测滤波器需要求解一组具有特别对称性的线性方程组。为了求解这一线性方程组，我们介绍两种算法，即 Levinson-Durbin 算法和 Schur 算法，它们通过利用对称性的有效计算过程来对方程组求解。

本章最后一节阐述了一种称为维纳滤波器的重要类型的最优滤波器。维纳滤波器已广泛地应用于涉及到加性噪声污染的信号估计中。

12.1　随机信号、相关函数和功率谱

我们首先从时域和频域的统计平均的角度回顾随机信号的特征。假设读者有概率理论和随机过程的背景知识，并且达到了 Helstrom(1990)，Peebles(1987)和 Stark 与 Woods(1994)的书中的水平。

12.1.1　随机过程

自然界中的许多物理现象从统计角度来看都是很好表示的。例如，气象现象如天气温度和气压流动的随机波动可以认为是时间的函数。由广播或电视接收器之类的电子设备的电阻产生的热噪声电压也是随机波动的。这些仅仅是随机信号的一部分例子。这些信号经常建模为无限长并且无限能量的信号。

假定我们利用波形集合对应世界上不同城市的天气温度。对每个城市有一个相应波形，该波形是时间的函数，如图 12.1.1 所示。所有可能波形的集合称为一个时间函数的全体，或称为随机过程。任一个具体城市的温度对应的波形称为随机过程的一个实现或一个样本函数。

类似地，任何一个电阻产生的热噪声电压是所有电阻集合产生的噪声电压波形的随机过程的一个实现或一个样本函数。

一个随机过程的所有可能噪声波形的集合（全体）记为 $X(t,S)$，其中 t 表示时间序号而 S 表示所有可能样本函数的集合（样本空间）。全体中的一个单一波形记为 $x(t,s)$。通常，为了记法方便，我们去掉变量 s（或 S），这样随机过程就记为 $X(t)$，而一个单一实现记为 $x(t)$。

在将随机过程 $X(t)$ 定义为样本函数的集合后，让我们考虑过程在任意时刻集合 $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$ 的值，其中 n 是任意正整数。一般来说，样本 $X_{t_i} \equiv x(t_i)$，$i = 1,2,\cdots,n$ 是 n 个随机变量，这些随机变量在统计上由它们的联合概率密度函数（PDF）表征，即对于任意 n，其记为 $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n})$。

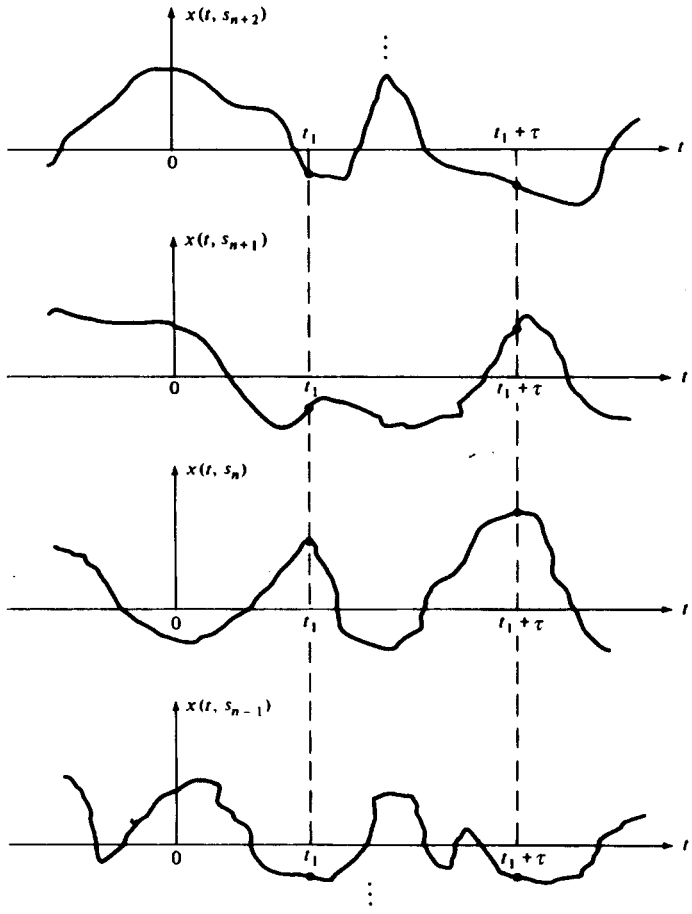


图 12.1.1 一个随机过程的样本函数

12.1.2 平稳随机过程

假定我们有随机过程 $X(t)$在 n 个时刻 $t=t_i, i=1,2,\cdots,n$ 的 n 个样本,并且对第一个集合时间上平移间隔 τ 得到具有 n 个样本的另一集合。于是第二个集合的样本为 $X_{t_i+\tau}\equiv X(t_i+\tau), i=1,2,\cdots,n$,如图 12.1.1 所示。第二个集合的 n 个随机变量通过联合概率密度函数 $p(x_{t_1+\tau},\cdots,x_{t_n+\tau})$表征。两个集合变量的联合概率密度函数可能相同也可能不相同。当它们相同时,对于所有 τ 和所有 n,

$$p(x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_n})=p(x_{t_1+\tau},x_{t_2+\tau},\cdots,x_{t_n+\tau}) \tag{12.1.1}$$

则该随机过程称为在严格意义上是平稳的。也就是说,当取样点在时间轴上平移时,平稳随机过程的统计特性是不变的。另一方面,当联合概率密度函数不相同时,随机过程就是非平稳的。

12.1.3 统计(集合)平均

让我们考虑随机过程 $X(t)$在时刻 $t=t_i$ 取样。$X(t_i)$是一个具有概率密度函数 $p(x_{t_i})$的随机变量。该随机变量的 l 阶矩定义为 $X^l(t_i)$的期望值,即

$$E(X_{t_i}^l)=\int_{-\infty}^{\infty}x_{t_i}^l p(x_{t_i})\mathrm{d}x_{t_i} \tag{12.1.2}$$

一般来说，如果 X_{t_i} 的概率密度函数取决于 t_i，那么 l 阶矩的值由时刻 t_i 决定。当过程平稳时，对所有 τ 都有 $p(x_{t_i+\tau}) = p(x_{t_i})$。因此其概率密度函数与时间无关，更进一步，其 l 阶矩也与时间无关（一个常数）。

下面我们考虑两个随机变量 $X_{t_i} = X(t_i)$，$i = 1,2$，对应于 $X(t)$在时刻 $t = t_1$ 和时刻 $t = t_2$ 的样本。X_{t_1} 和 X_{t_2} 之间的统计（集合）相关通过联合矩

$$E(X_{t_1}X_{t_2}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1}x_{t_2}p(x_{t_1}x_{t_2})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \tag{12.1.3}$$

来衡量。联合矩由时刻 t_1 和 t_2 决定，记为 $\gamma_{xx}(t_1,t_2)$，它是随机过程的自相关函数。当过程 $X(t)$ 平稳时，二元对 (X_{t_1}, X_{t_2}) 的联合概率密度和二元对 $(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau})$ 的联合概率密度对于任意 τ 都是相同的。这表明 $X(t)$的自相关函数取决于时间差 $t_1 - t_2 = \tau$。因此，对于一个平稳实随机过程，其自相关函数为

$$\gamma_{xx}(\tau) = E[X_{t_1+\tau}X_{t_1}] \tag{12.1.4}$$

另一方面，

$$\gamma_{xx}(-\tau) = E(X_{t_1-\tau}X_{t_1}) = E(X_{t_1'}X_{t_1'+\tau}) = \gamma_{xx}(\tau) \tag{12.1.5}$$

故 $\gamma_{xx}(\tau)$是偶函数。我们同时注意到 $\gamma_{xx}(0) = E(X_{t_1}^2)$是随机过程的平均功率。

存在着满足过程均值是常数且自相关函数满足 $\gamma_{xx}(t_1,t_2) = \gamma_{xx}(t_1 - t_2)$的非平稳过程。该过程称为广义平稳的过程。显然，广义平稳条件上没有严格意义的平稳那样苛刻。我们将只需要过程是广义平稳的。

和自相关函数有关的是自协方差函数，定义为

$$\begin{aligned} c_{xx}(t_1,t_2) &= E\{[X_{t_1} - m(t_1)][X_{t_2} - m(t_2)]\} \\ &= \gamma_{xx}(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) \end{aligned} \tag{12.1.6}$$

其中，$m(t_1) = E(X_{t_1})$和 $m(t_2) = E(X_{t_2})$分别是 X_{t_1} 和 X_{t_2} 的均值。当过程平稳时，

$$c_{xx}(t_1,t_2) = c_{xx}(t_1 - t_2) = c_{xx}(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) - m_x^2 \tag{12.1.7}$$

其中，$\tau = t_1 - t_2$。更进一步，过程的方差 $\sigma_x^2 = c_{xx}(0) = \gamma_{xx}(0) - m_x^2$。

12.1.4　联合随机过程的统计平均

令 $X(t)$和 $Y(t)$是两个随机过程，并令 $X_{t_i} \equiv X(t_i)$，$i = 1,2,\cdots,n$ 和 $Y_{t_j'} \equiv Y(t_j')$，$j = 1,2,\cdots,m$ 分别表示时刻 $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$ 和 $t_1' > t_2' > \cdots > t_m'$ 的随机变量。对于任何时刻集合 $\{t_i\}$ 和 $\{t_j'\}$，任意正整数值 m 和 n，两个集合的随机变量统计上是由联合概率密度函数

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n}, y_{t_1'}, y_{t_2'}, \cdots, y_{t_m'})$$

表征的。

$X(t)$和 $Y(t)$的互相关函数记为 $\gamma_{xy}(t_1,t_2)$，它由联合矩

$$\gamma_{xy}(t_1,t_2) \equiv E(X_{t_1}Y_{t_2}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1}y_{t_2}p(x_{t_1},y_{t_2})\mathrm{d}x_{t_1}\mathrm{d}y_{t_2} \tag{12.1.8}$$

定义，而互协方差为

$$c_{xy}(t_1,t_2)=\gamma_{xy}(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_y(t_2) \tag{12.1.9}$$

当该随机过程是联合且独立平稳的过程时,我们可得 $\gamma_{xy}(t_1,t_2)=\gamma_{xy}(t_1-t_2)$和 $c_{xy}(t_1,t_2)=c_{xy}(t_1-t_2)$。这种情况下,

$$\gamma_{xy}(-\tau)=E(X_{t_1}Y_{t_1+\tau})=E(X_{t_1'-\tau}Y_{t_1'})=\gamma_{yx}(\tau) \tag{12.1.10}$$

对所有选择的 t_i,t_i'以及所有正整数 n,m,当且仅当

$$p(x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_n},y_{t_1'},y_{t_2'},\cdots,y_{t_m'})=p(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})p(y_{t_1'},\cdots,y_{t_m'})$$

随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$称为统计上是无关的,如果

$$\gamma_{xy}(t_1,t_2)=E(X_{t_1})E(Y_{t_2}) \tag{12.1.11}$$

则该过程称为是不相关的,因此 $c_{xy}(t_1,t_2)=0$。

复值随机过程 $Z(t)$定义为

$$Z(t)=X(t)+\mathrm{j}Y(t) \tag{12.1.12}$$

其中,$X(t)$和 $Y(t)$是随机过程。复值随机变量 $Z_{t_i}\equiv Z(t_i)$,$i=1,2,\cdots$的联合概率密度函数由二元对(X_{t_i},Y_{t_i}),$i=1,2,\cdots,n$ 的联合概率密度函数给出。因此,表征 Z_{t_i},$i=1,2,\cdots,n$ 的概率密度函数为

$$p(x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_n},y_{t_1},y_{t_2},\cdots,y_{t_n})$$

复值随机过程 $Z(t)$会在低通窄带随机信号或噪声的低通等效的相位和正交分量的表示中遇到。该过程的一个重要特性就是其自相关函数,该自相关函数定义为

$$\begin{aligned}\gamma_{zz}(t_1,t_2)&=E(Z_{t_1}Z_{t_2}^*)\\&=E[(X_{t_1}+\mathrm{j}Y_{t_1})(X_{t_2}-\mathrm{j}Y_{t_2})]\\&=\gamma_{xx}(t_1,t_2)+\gamma_{yy}(t_1,t_2)+\mathrm{j}[\gamma_{yx}(t_1,t_2)-\gamma_{xy}(t_1,t_2)]\end{aligned} \tag{12.1.13}$$

当随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$是联合且独立平稳的过程时,$Z(t)$的自相关函数变为

$$\gamma_{zz}(t_1,t_2)=\gamma_{zz}(t_1-t_2)=\gamma_{zz}(\tau)$$

其中,$\tau=t_1-t_2$。式(12.1.13)的复共轭为

$$\gamma_{zz}^*(\tau)=E(Z_{t_1}^*Z_{t_1-\tau})=\gamma_{zz}(-\tau) \tag{12.1.14}$$

现在,假定 $Z(t)=X(t)+\mathrm{j}Y(t)$和 $W(t)=U(t)+\mathrm{j}V(t)$为两个复值随机过程。它们的互相关函数定义为

$$\begin{aligned}\gamma_{zw}(t_1,t_2)&=E(Z_{t_1}W_{t_2}^*)\\&=E[(X_{t_1}+\mathrm{j}Y_{t_1})(U_{t_2}-\mathrm{j}V_{t_2})]\\&=\gamma_{xu}(t_1,t_2)+\gamma_{yv}(t_1,t_2)+\mathrm{j}[\gamma_{yu}(t_1,t_2)-\gamma_{xv}(t_1,t_2)]\end{aligned} \tag{12.1.15}$$

当 $X(t),Y(t),U(t)$和 $V(t)$两两平稳时,式(12.1.15)中的互相关函数变为时间差 $\tau=t_1-t_2$ 的函数。另外,我们可得

$$\gamma_{zw}^*(\tau)=E(Z_{t_1}^*W_{t_1-\tau})=E(Z_{t_1+\tau}^*W_{t_1})=\gamma_{wz}(-\tau) \tag{12.1.16}$$

12.1.5 功率谱密度

平稳随机过程是一个无限能量信号,故其傅里叶变换不存在。随机过程的谱特性可根据维纳

-辛钦定理,通过计算自相关函数的傅里叶变换得到。于是,功率随频率的分布通过以下函数给出:

$$\Gamma_{xx}(F)=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{xx}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F\tau}\mathrm{d}\tau \tag{12.1.17}$$

其傅里叶逆变换为

$$\gamma_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_{xx}(F)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F\tau}\mathrm{d}F \tag{12.1.18}$$

我们注意到

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}(0)&=\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_{xx}(F)\mathrm{d}F\\&=E(X_t^2)\geqslant 0\end{aligned} \tag{12.1.19}$$

由于 $E(X_t^2)=\gamma_{xx}(0)$表示随机过程的平均功率,即 $\Gamma_{xx}(F)$下方的面积,所以可推出 $\Gamma_{xx}(F)$是功率分布的频率的函数。因此,$\Gamma_{xx}(F)$称为随机过程的功率谱密度。

如果随机过程是实的,那么 $\gamma_{xx}(\tau)$是实偶的,因此 $\Gamma_{xx}(F)$也是实偶的。如果随机过程是复值的,那么 $\gamma_{xx}(\tau)=\gamma_{xx}^*(-\tau)$,从而有

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}^*(F)&=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{xx}^*(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F\tau}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{xx}^*(-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{xx}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F\tau}\mathrm{d}\tau=\Gamma_{xx}(F)\end{aligned}$$

因此,$\Gamma_{xx}(F)$总是实的。

功率谱密度的定义可以扩展到两个联合平稳随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$,它们的互相关函数为 $\gamma_{xy}(\tau)$。$\gamma_{xy}(\tau)$的傅里叶变换为

$$\Gamma_{xy}(F)=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{xy}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F\tau}\mathrm{d}\tau \tag{12.1.20}$$

称之为互功率谱密度。很容易得到 $\Gamma_{xy}^*(F)=\Gamma_{yx}(-F)$。对于实随机过程,该条件变为 $\Gamma_{yx}(F)=\Gamma_{xy}(-F)$。

12.1.6　离散时间随机信号

连续时间随机信号的特性很容易移到离散时间随机信号上。这样的信号通常可通过对连续时间随机信号进行均匀采样得到。

离散时间随机过程 $X(n)$由样本序列 $x(n)$的全体组成。$X(n)$的统计特性和 $X(t)$的特性相似,只是多了 n 是一个整数(时间)变量的约束。为了保持一致,下面列出本书中用到的重要的矩的形式。

$X(n)$的 l 阶矩定义为

$$E(X_n^l)=\int_{-\infty}^{\infty}x_n^l p(x_n)\mathrm{d}x_n \tag{12.1.21}$$

而自相关序列为

$$\gamma_{xx}(n,k)=E(X_nX_k)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_nx_k p(x_n,x_k)\mathrm{d}x_n\mathrm{d}x_k \tag{12.1.22}$$

类似地,自协方差为

$$c_{xx}(n,k)=\gamma_{xx}(n,k)-E(X_n)E(X_k) \tag{12.1.23}$$

对于一个平稳过程,我们有特殊的形式($m=n-k$)

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}(n-k)&=\gamma_{xx}(m)\\ c_{xx}(n-k)&=c_{xx}(m)=\gamma_{xx}(m)-m_x^2\end{aligned} \tag{12.1.24}$$

其中,$m_x=E(X_n)$是随机过程的均值。方差定义为 $\sigma_2=c_{xx}(0)=\gamma_{xx}(0)-m_x{}^2$。

对于复值平稳过程 $Z(n)=X(n)+\mathrm{j}Y(n)$,我们有

$$\gamma_{zz}(m)=\gamma_{xx}(m)+\gamma_{yy}(m)+\mathrm{j}[\gamma_{yx}(m)-\gamma_{xy}(m)] \tag{12.1.25}$$

并且两个复值平稳过程的互相关序列为

$$\gamma_{zw}(m)=\gamma_{xu}(m)+\gamma_{yv}(m)+\mathrm{j}[\gamma_{yu}(m)-\gamma_{xv}(m)] \tag{12.1.26}$$

相对于连续时间随机过程的情况,离散时间随机过程的能量无限而平均功率有限,有限的平均功率为

$$E(X_n^2)=\gamma_{xx}(0) \tag{12.1.27}$$

根据维纳-辛钦定理,我们通过计算自相关序列 $\gamma_{xx}(m)$的傅里叶变换得到离散时间随机过程的功率谱密度,即

$$\Gamma_{xx}(f)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_{xx}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm} \tag{12.1.28}$$

其傅里叶逆变换关系为

$$\gamma_{xx}(m)=\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi fm}\mathrm{d}f \tag{12.1.29}$$

我们观察得到平均功率为

$$\gamma_{xx}(0)=\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(f)\mathrm{d}f \tag{12.1.30}$$

因此 $\Gamma_{xx}(f)$是功率分布关于频率的函数,即 $\Gamma_{xx}(f)$是随机过程 $X(n)$的功率谱密度。我们之前列出的 $\Gamma_{xx}(F)$的特性也适合于 $\Gamma_{xx}(f)$。

12.1.7 离散时间随机过程的时间平均

尽管我们已经通过均值和自相关序列等统计平均的形式表征了一个随机过程,但在实际中,我们通常得到的是随机过程的一个单一实现。让我们考虑从一个单一实现得到随机过程的平均的问题。为了达到该目的,随机过程必须是遍历的。

通过定义,一个随机过程 $X(n)$是遍历的,如果所有的统计平均都可以从该过程的一个单一样本函数以概率 1 来确定。事实上,只要从一个单一实现得到的时间平均等于统计(全体)平均,那么该随机过程就是遍历的。在该条件下,我们可以利用一个单一实现的时间平均来估计全体平均。

为了说明这一点,让我们考虑从一个单一实现 $x(n)$来估计随机过程的均值和自相关函数。由于我们只是对这两个矩感兴趣,所以就用这些参数来定义遍历。若想对下面介绍的均值遍历和自相关遍历有更具体的了解,读者可以参考 Papoulis(1984)的书。

12.1.8　均值遍历过程

给定一个具有如下均值的平稳随机过程：

$$m_x = E(X_n)$$

我们可以得到如下形式的时间平均：

$$\hat{m}_x = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n) \tag{12.1.31}$$

一般来说，我们认为式(12.1.31)中的 $\hat{m}_x$ 是统计均值的一个估计，但其值对于随机过程的不同实现变化很大。因此 $\hat{m}_x$ 是一个具有概率密度函数 $p(\hat{m}_x)$ 的随机变量。让我们对 $X(n)$ 的所有可能实现计算 $\hat{m}_x$ 的期望值。由于求和与期望是线性操作，我们可以交换它们的次序，故得

$$E(\hat{m}_x) = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} E[x(n)] = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} m_x = m_x \tag{12.1.32}$$

由于该估计的平均值等于统计平均，故我们说估计 $\hat{m}_x$ 是无偏的。

下面，我们计算 $\hat{m}_x$ 的方差。由于

$$\mathrm{var}(\hat{m}_x) = E(|\hat{m}_x|^2) - |m_x|^2$$

而

$$\begin{aligned} E(|\hat{m}_x|^2) &= \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N} E[x^*(n)x(k)] \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N} \gamma_{xx}(k-n) \\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-2N}^{2N}\left(1-\frac{|m|}{2N+1}\right)\gamma_{xx}(m) \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(\hat{m}_x) &= \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-2N}^{2N}\left(1-\frac{|m|}{2N+1}\right)\gamma_{xx} - |m_x|^2 \\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-2N}^{2N}\left(1-\frac{|m|}{2N+1}\right)c_{xx}(m) \end{aligned} \tag{12.1.33}$$

如果当 $N\to\infty$ 时 $\mathrm{var}(m_x)\to 0$，那么该估计以概率 1 收敛到统计平均 m_x。因此，过程 $X(n)$ 是均值遍历的，如果

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{m=-2N}^{2N}\left(1-\frac{|m|}{2N+1}\right)c_{xx}(m) = 0 \tag{12.1.34}$$

在该条件下，估计值 $\hat{m}_x$ 在 $N\to\infty$ 时的极限将等于统计平均，即

$$m_x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n) \tag{12.1.35}$$

因此，时间平均的均值在 $N\to\infty$ 时的极限等于集合均值。

保证式(12.1.34)成立的一个充分条件是

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_{xx}(m)| < \infty \tag{12.1.36}$$

其中,可以推出当 $m\to\infty$ 时 $c_{xx}(m)\to 0$。该条件对于大多数现实世界里遇到的零均值过程都是成立的。

12.1.9 相关遍历过程

现在,让我们考虑从一个单一实现得到自相关函数 $\gamma_{xx}(m)$ 的估计。沿用我们前面的记号,我们把该估计(一般来说针对于复值信号)记为

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x^*(n)x(n+m) \tag{12.1.37}$$

再次,我们认为对于任意给定下标 m 的 $r_{xx}(m)$ 是一个随机变量,因为它是具体实现的函数。其期望值(对所有实现的平均值)为

$$\begin{aligned} E[r_{xx}(m)] &= \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} E[x^*(n)x(n+m)] \\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} \gamma_{xx}(m) = \gamma_{xx}(m) \end{aligned} \tag{12.1.38}$$

因此,时间平均自相关的期望值等于统计平均。故我们得到 $\gamma_{xx}(m)$ 的一个无偏估计。

为了确定估计 $r_{xx}(m)$ 的方差,我们计算 $|r_{xx}(m)|^2$ 的期望值,并且减去平均值的平方,即

$$\mathrm{var}[r_{xx}(m)] = E[|r_{xx}(m)|^2] - |\gamma_{xx}(m)|^2 \tag{12.1.39}$$

而

$$E[|r_{xx}(m)|^2] = \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N} E[x^*(n)x(n+m)x(k)x^*(k+m)] \tag{12.1.40}$$

$x^*(n)x(n+m)x(k)x^*(k+m)$ 部分的期望值正好是一个随机过程的自相关序列,定义为

$$v_m(n) = x^*(n)x(n+m)$$

因此,式(12.1.40)可以表示为

$$\begin{aligned} E[|r_{xx}(m)|^2] &= \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N} \gamma_{vv}^{(m)}(n-k) \\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-2N}^{2N}\left(1-\frac{|n|}{2N+1}\right)\gamma_{vv}^{(m)}(n) \end{aligned} \tag{12.1.41}$$

而其方差为

$$\mathrm{var}[r_{xx}(m)] = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-2N}^{2N}\left(1-\frac{|n|}{2N+1}\right)\gamma_{vv}^{(m)}(n) - |\gamma_{xx}(m)|^2 \tag{12.1.42}$$

如果当 $N\to\infty$ 时 $\mathrm{var}[r_{xx}(m)]\to 0$,那么估计 $r_{xx}(m)$ 以概率 1 收敛到统计自相关 $\gamma_{xx}(m)$。在这些条件下,该过程是相关遍历的,并且时间平均相关等于统计平均,即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x^*(n)x(n+m)=\gamma_{xx}(m) \tag{12.1.43}$$

按我们对随机信号的看法，假定随机过程是均值遍历和相关遍历的，因此我们可以通过该过程的一个单一实现得到均值和自相关的时间平均。

12.2　平稳随机过程的修正表示

在这一节中，我们将证明广义平稳随机过程可以表示为一个白噪声过程激励的因果可逆线性系统的输出。系统为因果可逆这一条件允许我们使用逆系统的输出白噪声过程表示广义平稳随机过程。

让我们考虑具有相关序列$\{\gamma_{xx}(m)\}$和功率谱密度$\Gamma_{xx}(f)(|f|\leqslant\frac{1}{2})$的广义平稳过程$\{x(n)\}$。假定$\Gamma_{xx}(f)$对所有满足$|f|\leqslant\frac{1}{2}$的$f$是实连续的，自相关序列$\{\gamma_{xx}(m)\}$的$z$变换为

$$\Gamma_{xx}(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_{xx}(m)z^{-m} \tag{12.2.1}$$

由此我们通过计算$\Gamma_{xx}(z)$在单位圆上的值(即代入$z=\exp(j2\pi f)$)可以得到功率谱密度。

现在假定$\lg\Gamma_{xx}(z)$在包含单位圆的z平面中的环形区域内(即$r_1<|z|<r_2$，其中$r_1<1, r_2>1$)是可解析的(具有所有阶导数)，那么$\lg\Gamma_{xx}(z)$可展开为 Laurent 级数的形式

$$\lg\Gamma_{xx}(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}v(m)z^{-m} \tag{12.2.2}$$

其中，$\{v(m)\}$是级数展开式中的系数。我们可认为序列$\{v(m)\}$具有z变换$V(z)=\lg\Gamma_{xx}(z)$。等价地，我们可以在单位圆上计算$\Gamma_{xx}(z)$，

$$\lg\Gamma_{xx}(f)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}v(m)e^{-j2\pi fm} \tag{12.2.3}$$

因此，$\{v(m)\}$是周期函数$\lg\Gamma_{xx}(f)$的傅里叶级数展开式中的傅里叶系数。故

$$v(m)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[\lg\Gamma_{xx}(f)]e^{j2\pi fm}\,df,\qquad m=0,\pm1,\cdots \tag{12.2.4}$$

由于$\Gamma_{xx}(f)$是f的实偶函数，我们可得$v(m)=v(-m)$。

由式(12.2.2)可得

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(z)&=\exp\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}v(m)z^{-m}\right]\\&=\sigma_w^2H(z)H(z^{-1})\end{aligned} \tag{12.2.5}$$

其中，根据定义，$\sigma_w^2=\exp[v(0)]$且

$$H(z)=\exp\left[\sum_{m=1}^{\infty}v(m)z^{-m}\right],\qquad |z|>r_1 \tag{12.2.6}$$

如果在单位圆上计算式(12.2.5)，我们可得功率谱密度的等价表达式

$$\Gamma_{xx}(f)=\sigma_w^2|H(f)|^2 \tag{12.2.7}$$

注意到

$$\lg\Gamma_{xx}(f)=\lg\sigma_w^2+\lg H(f)+\lg H^*(f)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}v(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm}$$

从式(12.2.6)给出的 $H(z)$的定义,可知式(12.2.3)中傅里叶级数的因果部分与 $H(z)$相关联,而非因果部分与 $H(z^{-1})$相关联。傅里叶级数的系数$\{v(m)\}$是倒谱系数,如 4.2.7 节所定义的,序列$\{v(m)\}$称为序列$\{\gamma_{xx}(m)\}$的倒谱。

具有式(12.2.6)给出的系统函数 $H(z)$的滤波器在区域$|z|>r_1<1$ 上是可解析的。因此,在这一区域,它具有因果泰勒级数展开式

$$H(z)=\sum_{m=0}^{\infty}h(n)z^{-n} \tag{12.2.8}$$

如果激励信号是功率谱密度为 σ_w^2 的白噪声序列 $w(n)$,则该滤波器的输出是功率谱密度为 $\Gamma_{xx}(f)=\sigma_w^2|H(f)|^2$的平稳随机过程$\{x(n)\}$。反之,通过将$\{x(n)\}$经过一个系统函数为 $1/H(z)$的线性滤波器,可以将功率谱密度为 $\Gamma_{xx}(f)$的平稳随机过程$\{x(n)\}$转换成白噪声过程。我们称该滤波器为噪声白化滤波器,其输出记为$\{w(n)\}$,称为与平稳随机过程$\{x(n)\}$有关的修正过程。两者的关系如图 12.2.1 所示。

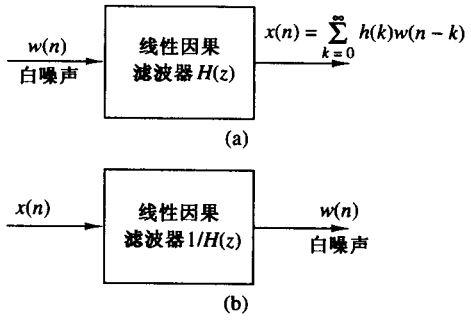


图 12.2.1 (a)从白噪声生成随机过程 $x(n)$的滤波器及其(b)逆滤波器

平稳随机过程$\{x(n)\}$表示为用白噪声序列$\{w(n)\}$激励具有式(12.2.8)给定的系统函数 $H(z)$的 IIR 滤波器的输出,该表示被称为 Wold 表示。

12.2.1 有理功率谱

现在我们把注意力局限在这样一种情形,即平稳随机过程$\{x(n)\}$的功率谱密度为有理函数,表示为

$$\Gamma_{xx}(z)=\sigma_w^2\frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})},\qquad r_1<|z|<r_2 \tag{12.2.9}$$

其中,多项式 $B(z)$和 $A(z)$的根位于 z 平面的单位圆内。因此,根据白噪声序列$\{w(n)\}$产生随机过程$\{x(n)\}$的线性滤波器 $H(z)$也是有理函数,可表示为

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{q}b_kz^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p}a_kz^{-k}}\qquad |z|>r_1 \tag{12.2.10}$$

其中,$\{b_k\}$和$\{a_k\}$是滤波器的系数,分别确定 $H(z)$的零点和极点位置。因此,$H(z)$是一个因果、稳定和最小相位的线性系统,其倒数 $1/H(z)$也是一个因果、稳定和最小相位的线性系统。所以,随机过程$\{x(n)\}$唯一地表示了修正过程$\{w(n)\}$的统计特性,反之亦然。

对于具有式(12.2.10)给定的有理系统函数 $1/H(z)$的线性系统，输出 $x(n)$和输入 $w(n)$通过如下差分方程相联系：

$$x(n)+\sum_{k=1}^{p}a_k x(n-k)=\sum_{k=0}^{q}b_k w(n-k) \tag{12.2.11}$$

我们将区分三种特定情况。

自回归(AR)过程。 $b_0=1, b_k=0, k>0$。这种情况下，线性滤波器 $H(z)=1/A(z)$是一个全极点滤波器，表示输入输出关系的差分方程为

$$x(n)+\sum_{k=1}^{p}a_k x(n-k)=w(n) \tag{12.2.12}$$

这样，产生修正过程的噪声白化滤波器是一个全零点滤波器。

滑动平均(MA)过程。 $a_k=0, k\geqslant 1$。这种情况下，线性滤波器 $H(z)=B(z)$是一个全零点滤波器，输入输出关系的差分方程为

$$x(n)=\sum_{k=0}^{q}b_k w(n-k) \tag{12.2.13}$$

MA 过程的噪声白化滤波器是一个全极点滤波器。

自回归滑动平均(ARMA)过程。 这种情况下，线性滤波器 $H(z)=B(z)/A(z)$在 z 平面内既有极点也有零点，相应的差分方程由式(12.2.11)给定。从 $x(n)$产生修正过程的逆系统也是一个形如 $1/H(z)=A(z)/B(z)$的极点-零点系统。

12.2.2　滤波器参数和自相关序列的关系

当平稳随机过程的功率谱密度为有理函数时，自相关序列$\{\gamma_{xx}(m)\}$和通过白噪声序列 $w(n)$滤波产生过程的线性滤波器 $H(z)$的参数$\{a_k\}$和$\{b_k\}$存在基本关系。用 $x^*(n-m)$乘上式(12.2.11)中的差分方程，并对所得的方程两边求期望，可得这一关系。于是，我们可得

$$\begin{aligned}E[x(n)x^*(n-m)]=&-\sum_{k=1}^{p}a_k E[x(n-k)x^*(n-m)]\\&+\sum_{k=0}^{q}b_k E[w(n-k)x^*(n-m)]\end{aligned} \tag{12.2.14}$$

因此，

$$\gamma_{xx}(m)=-\sum_{k=1}^{p}a_k\gamma_{xx}(m-k)+\sum_{k=0}^{q}b_k\gamma_{wx}(m-k) \tag{12.2.15}$$

其中，$\gamma_{wx}(m)$是 $w(n)$和 $x(n)$之间的互相关序列。

互相关 $\gamma_{wx}(m)$和滤波器的冲激响应有关，即

$$\begin{aligned}\gamma_{wx}(m)&=E[x^*(n)w(n+m)]\\&=E\left[\sum_{k=0}^{\infty}h(k)w^*(n-k)w(n+m)\right]\\&=\sigma_w^2 h(-m)\end{aligned} \tag{12.2.16}$$

其中,在最后一步,我们利用了序列 $w(n)$为白噪声这一事实。故

$$\gamma_{wx}(m)=\begin{cases}0, & m>0\\ \sigma_w^2 h(-m), & m\leqslant 0\end{cases} \tag{12.2.17}$$

将式(12.2.17)和式(12.2.15)结合起来,我们可得期望的关系式

$$\gamma_{xx}(m)=\begin{cases}-\sum_{k=1}^{p}a_k\gamma_{xx}(m-k), & m>q\\ -\sum_{k=1}^{p}a_k\gamma_{xx}(m-k)+\sigma_w^2\sum_{k=0}^{q-m}h(k)b_{k+m}, & 0\leqslant m\leqslant q\\ \gamma_{xx}^*(-m), & m<0\end{cases} \tag{12.2.18}$$

这就是 $\gamma_{xx}(m)$和参数$\{a_k\}$,$\{b_k\}$之间的非线性关系。

一般来说,式(12.2.18)中的关系式适用于 ARMA 过程。对于 AR 过程,式(12.2.18)可简化为

$$\gamma_{xx}(m)=\begin{cases}-\sum_{k=1}^{p}a_k\gamma_{xx}(m-k), & m>0\\ -\sum_{k=1}^{p}a_k\gamma_{xx}(m-k)+\sigma_w^2, & m=0\\ \gamma_{xx}^*(-m), & m<0\end{cases} \tag{12.2.19}$$

于是,我们得到了 $\gamma_{xx}(m)$和参数$\{a_k\}$之间的线性关系。这些方程称为 Yule-Walker 方程,可表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(-1) & \gamma_{xx}(-2) & \cdots & \gamma_{xx}(-p)\\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(-1) & \cdots & \gamma_{xx}(-p+1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \gamma_{xx}(p) & \gamma_{xx}(p-1) & \gamma_{xx}(p-2) & \cdots & \gamma_{xx}(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ a_1\\ \vdots\\ a_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_w^2\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \tag{12.2.20}$$

其中的相关矩阵是 Toeplitz 矩阵,因此,可以利用在 12.4 节介绍的算法有效求逆。

最后,在式(12.2.18)中,令 $a_k=0,1\leqslant k\leqslant p$ 和 $h(k)=b_k,0\leqslant k\leqslant q$,我们可得 MA 过程情况下的自相关序列,即

$$\gamma_{xx}(m)=\begin{cases}\sigma_w^2\sum_{k=0}^{q}b_k b_{k+m}, & 0\leqslant m\leqslant q\\ 0, & m>q\\ \gamma_{xx}^*(-m), & m<0\end{cases} \tag{12.2.21}$$

12.3 前向和后向线性预测

线性预测是数字信号处理中一个具有许多实际应用的重要课题。在这一节,我们考虑平稳随机过程的时间上前向或后向线性预测的问题。这种预测导出格型滤波器结构和参数信号模型的一些有趣的联系。

12.3.1 前向线性预测

让我们先研究根据平稳随机过程的过去观测值预测过程的未来值的问题。具体地说,我们考虑一步前向线性预测器,它将过去值 $x(n-1),x(n-2),\cdots,x(n-p)$的加权线性组合值作为$x(n)$的预测值。故 $x(n)$的线性预测值为

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_p(k)x(n-k) \tag{12.3.1}$$

其中，$\{-a_p(k)\}$表示线性组合中的权重。这些权重称为 p 阶一步前向线性预测器的预测系数。$x(n)$定义中的负号是为了数学上的方便性，并同技术文献中的通用做法保持一致。

$x(n)$的值和预测值 $\hat{x}(n)$之间的差称为前向预测误差，记为 $f_p(n)$：

$$\begin{aligned} f_p(n) &= x(n) - \hat{x}(n) \\ &= x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k)x(n-k) \end{aligned} \tag{12.3.2}$$

我们将线性预测视为线性滤波器的等效形式，其中在滤波器中嵌入了预测器，如图 12.3.1 所示。我们称其为具有输入序列$\{x(n)\}$和输出序列$\{f_p(n)\}$的预测误差滤波器。预测误差滤波器的一个等效实现形式如图 12.3.2 所示。该实现是一个具有如下系统函数的直接型 FIR 滤波器：

$$A_p(z) = \sum_{k=0}^{p} a_p(k)z^{-k} \tag{12.3.3}$$

其中，由定义有 $a_p(0) = 1$。

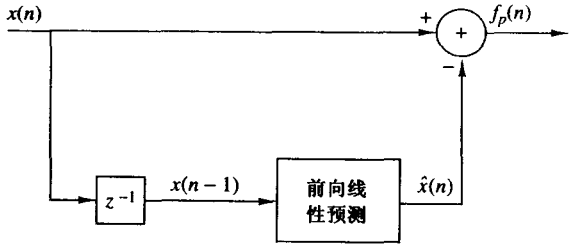


图 12.3.1　前向线性预测

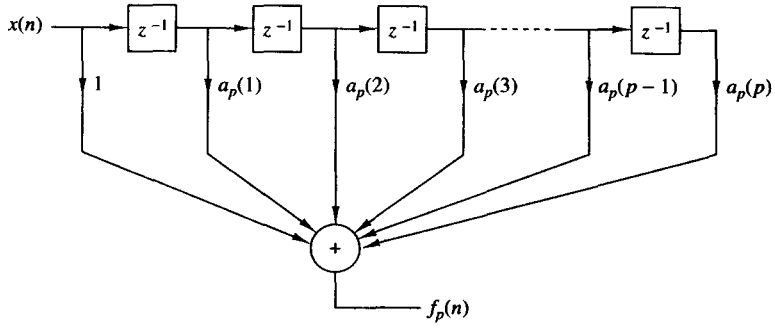


图 12.3.2　预测误差滤波器

正如 9.2.4 节所证明的，直接型 FIR 滤波器与全零点格型滤波器等效。格型滤波器通常可以用下面的一组阶递推方程来描述：

$$\begin{aligned} f_0(n) &= g_0(n) = x(n) \\ f_m(n) &= f_{m-1}(n) + K_m g_{m-1}(n-1) \qquad m = 1, 2, \cdots, p \\ g_m(n) &= K_m^* f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \qquad m = 1, 2, \cdots, p \end{aligned} \tag{12.3.4}$$

其中，$|K_m|$是反射系数，$g_m(n)$是将在下一节定义的后向预测误差。注意，对于复值的数据，K_m 的共轭用在 $g_m(n)$的方程中。图 12.3.3 给出了一个 p 级格型滤波器的框图形式，用于计算式(12.3.4)表示的典型级。

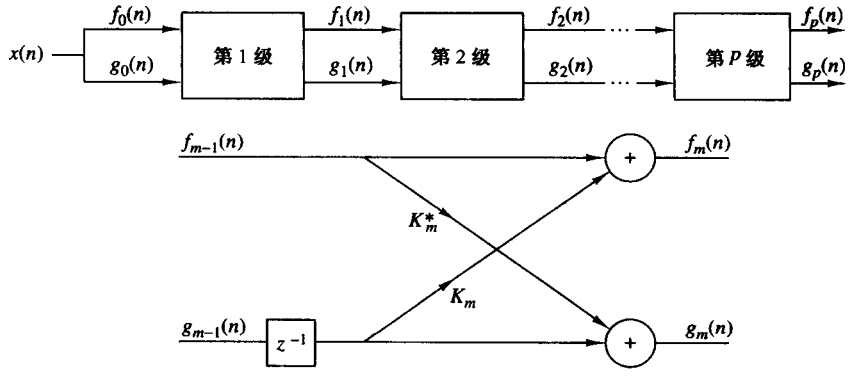


图 12.3.3 p 级格型滤波器

由于直接型预测误差 FIR 滤波器和 FIR 格型滤波器直接等效，故 p 级格型滤波器的输出可表示为

$$f_p(n) = \sum_{k=0}^{p} a_p(k)x(n-k), \qquad a_p(0) = 1 \tag{12.3.5}$$

由于式(12.3.5)是一个卷积和，故 z 变换的关系为

$$F_p(z) = A_p(z)X(z) \tag{12.3.6}$$

或等效于

$$A_p(z) = \frac{F_p(z)}{X(z)} = \frac{F_p(z)}{F_0(z)} \tag{12.3.7}$$

前向线性预测误差 $f_p(n)$的均方值为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p^f &= E[|f_p(n)|^2] \\ &= \gamma_{xx}(0) + 2\Re\left[\sum_{k=1}^{p} a_p^*(k)\gamma_{xx}(k)\right] + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} a_p^*(l)a_p(k)\gamma_{xx}(l-k) \end{aligned} \tag{12.3.8}$$

$\mathcal{E}_p^f$ 是预测器系数的二次函数，对其最小化可导出线性方程组：

$$\gamma_{xx}(l) = -\sum_{k=1}^{p} a_p(k)\gamma_{xx}(l-k), \qquad l = 1, 2, \cdots, p \tag{12.3.9}$$

这些方程称为线性预测器系数的正规方程组。最小均方预测误差就是

$$\min[\mathcal{E}_p^f] \equiv E_p^f = \gamma_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k)\gamma_{xx}(-k) \tag{12.3.10}$$

在下一节中，我们将上面的结果推广到按相反方向(即时间后向)的预测序列的值的问题。

12.3.2 后向线性预测

假定有来自平稳随机过程的数据序列 $x(n), x(n-1), \cdots, x(n-p+1)$，我们希望预测该过程

的值 $x(n-p)$。这种情况下，我们利用 p 阶一步后向线性预测器。因此有

$$\hat{x}(n-p) = -\sum_{k=0}^{p-1} b_p(k)x(n-k) \tag{12.3.11}$$

值 $x(n-p)$和估计值 $\hat{x}(n-p)$之差称为后向预测误差，记为 $g_p(n)$：

$$\begin{aligned} g_p(n) &= x(n-p) + \sum_{k=0}^{p-1} b_p(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{p} b_p(k)x(n-k), \qquad b_p(p) = 1 \end{aligned} \tag{12.3.12}$$

后向预测器可用如图 12.3.1 所示的直接型 FIR 滤波器结构或格型结构实现。图 12.3.3 中的格型滤波器同时提供了后向线性预测器和前向线性预测器。

后向线性预测器的加权系数是前向线性预测器系数的复共轭，但是它们以相反的顺序出现。于是我们可得

$$b_p(k) = a_p^*(p-k), \qquad k = 0, 1, \cdots, p \tag{12.3.13}$$

在 z 域，式(12.3.12)的卷积和为

$$G_p(z) = B_p(z)X(z) \tag{12.3.14}$$

或等效于

$$B_p(z) = \frac{G_p(z)}{X(z)} = \frac{G_p(z)}{G_0(z)} \tag{12.3.15}$$

其中，$B_p(z)$表示系数为 $b_p(k)$的 FIR 滤波器的系统函数。

由于 $b_p(k) = a^*(p-k)$，$G_p(z)$与 $A_p(z)$有关，

$$\begin{aligned} B_p(z) &= \sum_{k=0}^{p} b_p(k)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_p^*(p-k)z^{-k} \\ &= z^{-p}\sum_{k=0}^{p} a_p^*(k)z^{k} \\ &= z^{-p}A_p^*(z^{-1}) \end{aligned} \tag{12.3.16}$$

式(12.3.16)意味着系统函数为 $B_p(z)$的 FIR 滤波器的零点仅仅是 $A_p(z)$零点的(共轭)互换，$B_p(z)$称为 $A_p(z)$的互换多项式或逆多项式。

现在我们已经确立了前向和后向一步预测器的这些有趣的关系，让我们回到式(12.3.4)中的递推格型方程，并把它们变换到 z 域。于是

$$\begin{aligned} F_0(z) &= G_0(z) = X(z) \\ F_m(z) &= F_{m-1}(z) + K_m z^{-1}G_{m-1}(z), \qquad m = 1, 2, \cdots, p \\ G_m(z) &= K_m^* F_{m-1}(z) + z^{-1}G_{m-1}(z), \qquad m = 1, 2, \cdots, p \end{aligned} \tag{12.3.17}$$

如果每个等式都除以 $X(z)$,我们可以得到如下形式的期望结果:

$$\begin{aligned} A_0(z) &= B_0(z) = 1 \\ A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \qquad m = 1, 2, \cdots, p \\ B_m(z) &= K_m^* A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z), \qquad m = 1, 2, \cdots, p \end{aligned} \tag{12.3.18}$$

因此,一个格型滤波器通过矩阵方程在 z 域可以描述为

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m z^{-1} \\ K_m^* & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ B_{m-1}(z) \end{bmatrix} \tag{12.3.19}$$

(12.3.18)中的 $A_m(z)$和 $B_m(z)$的关系使得我们能够从反射系数$\{K_m\}$得到直接型 FIR 滤波器的系数$\{a_m(k)\}$,反之亦然。这些关系式已经在 9.2.4 节的式(9.2.51)~式(9.2.53)中给出。

具有参数 $K_1, K_2, \cdots, K_p$ 的格型结构对应于 p 个分别具有系统函数 $A_1(z), A_2(z), \cdots, A_p(z)$的直接型 FIR 滤波器的集合。比较有趣的是,注意到表示该集合的 p 个直接型 FIR 滤波器只需要 $p(p+1)/2$个滤波器系数。相应地,格型形式的表示只需要 p 个反射系数$\{K_i\}$。格型能提供 p 个 FIR 滤波器的集合的一种更简洁的表示的原因是,格型扩展一级不会改变前面级的参数。另一方面,对一个具有$(p-1)$级的格型扩展到第 p 级等效于对 FIR 滤波器的长度增加一个系数。所得的具有系统函数 $A_p(z)$的 FIR 滤波器的系数完全不同于具有系统函数 $A_{p-1}(z)$的低阶 FIR 滤波器的系数。

递推地确定滤波器系数$\{a_p(k)\}$的公式很容易从多项式关系式(12.3.18)推出。于是

$$\begin{aligned} A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \\ \sum_{k=0}^{m} a_m(k) z^{-k} &= \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1}(k) z^{-k} + K_m \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1}^*(m-1-k) z^{-(k+1)} \end{aligned} \tag{12.3.20}$$

通过对照 z^{-1}的同次幂的系数,并且注意到对于 $m = 1, 2, \cdots, p$ 有 $a_m(0) = 1$,我们可得 FIR 滤波器系数的期望递推方程为

$$\begin{aligned} a_m(0) &= 1 \\ a_m(m) &= K_m \\ a_m(k) &= a_{m-1}(k) + K_m a_{m-1}^*(m-k) \\ &= a_{m-1}(k) + a_m(m) a_{m-1}^*(m-k), \qquad \begin{matrix} 1 \leqslant k \leqslant m-1 \\ m = 1, 2, \cdots, p \end{matrix} \end{aligned} \tag{12.3.21}$$

从直接型 FIR 滤波器系数$\{a_p(k)\}$到格型反射系数$\{K_i\}$的转换公式也是很简单的。对于 p 级格型我们立即得到反射系数 $K_p = a_p(p)$。为了得到 $K_{p-1}, \cdots, K_1$,我们需要知道当 $m = p-1, \cdots, 1$ 时多项式 $A_m(z)$。从式(12.3.19)我们可得

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - |K_m|^2}, \qquad m = p, \cdots, 1 \tag{12.3.22}$$

这正好是一个降步递推关系式。因此我们从 $A_{p-1}(z)$开始计算所有低次数的多项式 $A_m(z)$,并且从关系式 $K_m = a_m(m)$得到期望的格型反射系数。我们注意到,对于 $m = 1, 2, \cdots, p-1$,只要$\{K_m\} \neq 1$,计算就会继续。根据关于多项式的这种降步递推关系,得到递推或直接计算 K_m, $m = p-1, \cdots, 1$ 的公式是相对容易的。对于 $m = p-1, \cdots, 1$,我们有

$$\begin{aligned} K_m &= a_m(m) \\ a_{m-1}(k) &= \frac{a_m(k) - K_m b_m(k)}{1 - |K_m|^2} \\ &= \frac{a_m(k) - a_m(m)a_m^*(m-k)}{1 - |a_m(m)|^2} \end{aligned} \tag{12.3.23}$$

这正是有关多项式 $A_m(z)$的 Schur-Cohn 稳定性检验中的递推公式。

正如已经指出的，如果任何一个格型参数 $|K_m| = 1$，那么式(12.3.23)中的递推方程将终止。假设出现了这种情况，则表明多项式 $A_{m-1}(z)$有一个位于单位圆上的根。这样的根可以从 $A_{m-1}(z)$中因子分解出去，对于降阶系统继续迭代过程式(12.3.23)。

最后，让我们考虑最小化后向线性预测器的均方误差。后向预测误差为

$$\begin{aligned} g_p(n) &= x(n-p) + \sum_{k=0}^{p-1} b_p(k)x(n-k) \\ &= x(n-p) + \sum_{k=1}^{p} a_p^*(k)x(n-p+k) \end{aligned} \tag{12.3.24}$$

并且其均方值为

$$\mathcal{E}_p^b = E[|g_p(n)|^2] \tag{12.3.25}$$

对于预测系数最小化$\mathcal{E}_p^b$ 得到与式(12.3.9)一样的线性方程组。因此，最小均方误差(MSE)为

$$\min[\mathcal{E}_p^b] \equiv E_p^b = E_p^f \tag{12.3.26}$$

它由式(12.3.10)给定。

12.3.3　格型前向和后向预测器的最优反射系数

在 12.3.1 节和 12.3.2 节中，我们推导出了提供预测器系数能最小化预测误差均方值的线性方程组。在这一节中，我们考虑格型预测器中反射系数的最优化问题以及用前向和后向预测误差表示反射系数的问题。

格型滤波器的前向预测误差可表示为

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + K_m g_{m-1}(n-1) \tag{12.3.27}$$

对 $E[|f_m(n)|^2]$关于反射系数 K_m 最小化可得

$$K_m = \frac{-E[f_{m-1}(n)g_{m-1}^*(n-1)]}{E[|g_{m-1}(n-1)|^2]} \tag{12.3.28}$$

或等效为

$$K_m = \frac{-E[f_{m-1}(n)g_{m-1}^*(n-1)]}{\sqrt{E_{m-1}^f E_{m-1}^b}} \tag{12.3.29}$$

其中，$E_{m-1}^f = E_{m-1}^b = E[|g_{m-1}(n-1)|^2] = E[|f_{m-1}(n)|^2]$。

我们注意到，格型预测器中反射系数的最优选择为格型中前向和后向误差之间(归一化)互相关系数的负值①。由于从式(12.3.28)显然可得$|K_m| \leqslant 1$，故最小化预测误差的均方值可以递推地

① 格型中前向和后向误差之间的归一化互相关系数(即$\{-K_m\}$)通常称为部分相关(PARCOR)系数。

表示为

$$E_m^f = (1 - |K_m|^2)E_{m-1}^f \tag{12.3.30}$$

它是一个单调递减序列。

12.3.4 AR过程和线性预测的关系

AR(p)过程的参数本质上和同一过程的 p 阶预测器有关。为了找出该关系,我们注意到在AR(p)过程中,通过式(12.2.19)或式(12.2.20)中的 Yule-Walker 方程,自相关序列$\{\gamma_{xx}(m)\}$与参数$\{a_k\}$关联起来。p 阶预测器的相应方程在式(12.3.9)和式(12.3.10)中给出。

直接比较这两组关系式可以得出,AR(p)过程的参数$\{a_k\}$和 p 阶预测器的系数$\{a_p(k)\}$之间存在一一对应关系。事实上,如果基本过程$\{x(n)\}$是 AR(p),则 p 阶预测器的预测系数与$\{a_k\}$一致。而且,在 p 阶预测器 E_p^f 中,最小均方差(MMSE)一致,σ_w^2 为白噪声过程的方差。在这种情况下,预测误差滤波器是一个产生修正序列$\{w(n)\}$的噪声白化滤波器。

12.4 正规方程的解

在前面的章节中,我们发现前向预测误差均方值的最小化可以推出式(12.3.9)给出的预测器系数的一组线性方程。这些方程,称为正规方程,可以表示为以下紧凑形式:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{p} a_p(k)\gamma_{xx}(l-k) = 0 \qquad l = 1, 2, \cdots, p \\ &a_p(0) = 1 \end{aligned} \tag{12.4.1}$$

得到的 MMSE 可以用式(12.3.10)表示。如果我们将式(12.3.10)增加到式(12.4.1)表示的正规方程中,就得到扩展正规方程,可表示为

$$\sum_{k=0}^{p} a_p(k)\gamma_{xx}(l-k) = \begin{cases} E_p^f, & l = 0 \\ 0, & l = 1, 2, \cdots, p \end{cases} \tag{12.4.2}$$

我们还注意到,如果随机过程是 AR(p)过程,那么 MMSE $E_p^f = \sigma_w^2$。

在这一节中,我们将介绍两种有效求解正规方程组的计算方法。其中的一种算法称为 Levinson-Durbin 算法,它首先由 Levinson(1947)提出,然后由 Durbin(1959)修正。该算法适合于串行处理,其计算复杂性为 $O(p^2)$。第二种算法要归功于 Schur(1917),它计算反射系数的复杂度也是 $O(p^2)$,但对于并行处理器,其计算可以在 $O(p)$次完成。两种算法都利用了自相关矩阵中固有的 Toeplitz 对称性质。

我们首先从讨论 Levinson-Durbin 算法开始。

12.4.1 Levinson-Durbin 算法

Levinson-Durbin 算法是一种对于求解式(12.4.1)中正规方程的预测系数的高效算法。该算法利用了自相关矩阵的特殊对称性:

$$\boldsymbol{\Gamma}_p = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}^*(1) & \cdots & \gamma_{xx}^*(p-1) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \cdots & \gamma_{xx}^*(p-2) \\ \vdots & \vdots & & \\ \gamma_{xx}(p-1) & \gamma_{xx}(p-2) & \cdots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \tag{12.4.3}$$

注意到 $\Gamma_p(i,j)=\Gamma_p(i-j)$，故该自相关矩阵是 Toeplitz 矩阵。由于 $\boldsymbol{\Gamma}_p(i,j)=\boldsymbol{\Gamma}_p^*(j,i)$，该矩阵也是厄密共轭的。

Levinson-Durbin 方法求解的关键是，利用矩阵的 Toeplitz 性质，递推地处理。先从阶数 $m=1$（一个系数）的预测器开始，再递推地增加阶数，使用低阶的解得出下一个高阶解。通过求解式(12.4.1)得到第 1 阶预测器的解为

$$a_1(1)=-\frac{\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)} \tag{12.4.4}$$

而得到的 MMSE 为

$$\begin{aligned} E_1^f &= \gamma_{xx}(0)+a_1(1)\gamma_{xx}(-1) \\ &= \gamma_{xx}(0)[1-|a_1(1)|^2] \end{aligned} \tag{12.4.5}$$

回忆可知 $a_1(1)=K_1$ 是格型滤波器的第 1 个反射系数。

下一步就是求解第 2 阶预测器的系数$\{a_2(1),a_2(2)\}$并且用 $a_1(1)$来表示解除。从式(12.4.1)得到的两个方程为

$$\begin{aligned} a_2(1)\gamma_{xx}(0)+a_2(2)\gamma_{xx}^*(1) &= -\gamma_{xx}(1) \\ a_2(1)\gamma_{xx}(1)+a_2(2)\gamma_{xx}(0) &= -\gamma_{xx}(2) \end{aligned} \tag{12.4.6}$$

通过利用式(12.4.4)的解来估计 $\gamma_{xx}(1)$，我们得到解

$$\begin{aligned} a_2(2) &= -\frac{\gamma_{xx}(2)+a_1(1)\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)[1-|a_1(1)|^2]} \\ &= -\frac{\gamma_{xx}(2)+a_1(1)\gamma_{xx}(1)}{E_1^f} \\ a_2(1) &= a_1(1)+a_2(2)a_1^*(1) \end{aligned} \tag{12.4.7}$$

这样我们就得到了第 2 阶预测器的系数。再次，我们注意到 $a_2(2)=K_2$ 为格型滤波器的第二个反射系数。

按这种方式，我们可以利用第 $m-1$ 阶预测器的系数表示出第 m 阶预测器的系数。因此，我们可以将系数矢量 $\boldsymbol{a}_m$ 写成两个矢量的和，即

$$\boldsymbol{a}_m=\begin{bmatrix} a_m(1) \\ a_m(2) \\ \vdots \\ a_m(m) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{m-1} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_{m-1} \\ \cdots \\ K_m \end{bmatrix} \tag{12.4.8}$$

其中 $\boldsymbol{a}_{m-1}$是第 $m-1$ 阶预测器的系数矢量，而矢量 $\boldsymbol{d}_{m-1}$和标量 K_m 待确定。让我们将 $m\times m$ 的自相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{xx}$划分为

$$\boldsymbol{\Gamma}_m=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{m-1} & \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{b*} \\ \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt} & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \tag{12.4.9}$$

其中，$\boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt}=[\gamma_{xx}(m-1)\ \gamma_{xx}(m-2)\ \cdots\ \gamma_{xx}(1)]=(\boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{b})^t$，星号 $*$ 表示复共轭，而 $\boldsymbol{\gamma}_m^t$ 表示 $\boldsymbol{\gamma}_m$ 的转置。$\boldsymbol{\gamma}_{m-1}$的上标 b 表示矢量 $\boldsymbol{\gamma}_{m-1}^t=[\gamma_{xx}(1)\ \gamma_{xx}(2)\ \cdots\ \gamma_{xx}(m-1)]$的元素倒序排列。

方程 $\boldsymbol{\Gamma}_m\boldsymbol{a}_m=-\boldsymbol{\gamma}_m$ 的解可以表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{m-1} & \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{b*} \\ \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt} & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_{m-1} \\ K_m \end{bmatrix} \right\} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{m-1} \\ \gamma_{xx}(m) \end{bmatrix} \tag{12.4.10}$$

这是 Levinson-Durbin 算法中的关键一步。从式(12.4.10),我们得到两个方程,即

$$\boldsymbol{\Gamma}_{m-1}\boldsymbol{a}_{m-1} + \boldsymbol{\Gamma}_{m-1}\boldsymbol{d}_{m-1} + K_m\boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{b*} = -\boldsymbol{\gamma}_{m-1} \tag{12.4.11}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt}\boldsymbol{a}_{m-1} + \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt}\boldsymbol{d}_{m-1} + K_m\gamma_{xx}(0) = -\gamma_{xx}(m) \tag{12.4.12}$$

由于 $\boldsymbol{\Gamma}_{m-1}\mathbf{a}_{m-1} = -\boldsymbol{\gamma}_{m-1}$,故式(12.4.11)得出解

$$\boldsymbol{d}_{m-1} = -K_m\boldsymbol{\Gamma}_{m-1}^{-1}\boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{b*} \tag{12.4.13}$$

其中,$\boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{b*}$表示 $\boldsymbol{\gamma}_{m-1}$的元素取共轭并按倒序排列。因此,式(12.4.13)的解变为

$$\boldsymbol{d}_{m-1} = K_m\boldsymbol{a}_{m-1}^{b*} = K_m \begin{bmatrix} a_{m-1}^*(m-1) \\ a_{m-1}^*(m-2) \\ \vdots \\ a_{m-1}^*(1) \end{bmatrix} \tag{12.4.14}$$

现在,可以利用式(12.4.12)的标量方程来求解出 K_m。如果我们利用式(12.4.14)消去式(12.4.12)中的 $\boldsymbol{d}_{m-1}$,则可得

$$K_m[\gamma_{xx}(0) + \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt}\boldsymbol{a}_{m-1}^{b*}] + \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt}\boldsymbol{a}_{m-1} = -\gamma_{xx}(m)$$

故

$$K_m = -\frac{\gamma_{xx}(m) + \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt}\boldsymbol{a}_{m-1}}{\gamma_{xx}(0) + \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt}\boldsymbol{a}_{m-1}^{b*}} \tag{12.4.15}$$

因此,通过将式(12.4.14)和式(12.4.15)的解代入式(12.4.8),我们得到有关预测器系数的理想递推 Levinson-Durbin 算法为

$$a_m(m) = K_m = -\frac{\gamma_{xx}(m) + \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt}\boldsymbol{a}_{m-1}}{\gamma_{xx}(0) + \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt}\boldsymbol{a}_{m-1}^{b*}} = -\frac{\gamma_{xx}(m) + \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt}\boldsymbol{a}_{m-1}}{E_{m-1}^f} \tag{12.4.16}$$

$$\begin{aligned} a_m(k) &= a_{m-1}(k) + K_m a_{m-1}^*(m-k) \\ &= a_{m-1}(k) + a_m(m)a_{m-1}^*(m-k), \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \cdots, m-1 \\ m = 1, 2, \cdots, p \end{matrix} \end{aligned} \tag{12.4.17}$$

读者应该注意到,式(12.4.17)中的递推关系与根据多项式 $A_m(z)$和 $B_m(z)$得到的有关预测器系数的递推关系式(12.3.21)等价。此外,K_m 是格型预测器的第 m 级中的反射系数。这一结果清楚地说明了由 Levinson-Durbin 算法得到的系数不仅可以作为最优格型预测滤波器的系数,而且可以作为最优直接格型预测滤波器的系数。

最后,让我们确定有关 MMSE 的表达式。对于 m 阶预测器,我们有

$$\begin{aligned} E_m^f &= \gamma_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{m} a_m(k)\gamma_{xx}(-k) \\ &= \gamma_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{m}[a_{m-1}(k) + a_m(m)a_{m-1}^*(m-k)]\gamma_{xx}(-k) \\ &= E_{m-1}^f[1 - |a_m(m)|^2] = E_{m-1}^f(1 - |K_m|^2), \qquad m = 1, 2, \cdots, p \end{aligned} \tag{12.4.18}$$

其中，$E_0^f = \gamma_{xx}(0)$。由于反射系数满足性质 $|K_m| \leqslant 1$，因此预测器序列的 MMSE 满足条件

$$E_0^f \geqslant E_1^f \geqslant E_2^f \geqslant \cdots \geqslant E_p^f \tag{12.4.19}$$

到此，对求解线性方程组 $\boldsymbol{\Gamma}_m \boldsymbol{a}_m = -\boldsymbol{\gamma}_m$，$m = 0,1,\cdots,p$ 的 Levinson-Durbin 算法的推导就结束了。我们注意到线性方程组有一个特殊性质，即右边的矢量也作为一个矢量出现在 $\boldsymbol{\Gamma}_m$ 中。在更加一般的情况下，在右边出现的矢量是一些其他矢量，例如 $\boldsymbol{c}_m$，线性方程组可以递推地求解，方法是通过引入另一个递推方程来求解更加一般的线性方程 $\boldsymbol{\Gamma}_m \boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{c}_m$。该结果就是扩展的 Levinson-Durbin 算法（见习题 12.12）。

由式(12.4.17)给定的 Levinson-Durbin 算法从第 m 级到第 $m+1$ 级需要 $O(m)$次乘法和加法运算。因此，对于 p 级来说，为了求出预测滤波器系数或反射系数，Levinson-Durbin 递推算法的总运算量大约为 $1+2+3+\cdots+p(p+1)/2$ 或为 $O(p^2)$，与之相比，如果我们不利用相关矩阵的 Toeplitz 性质，则总的运算量为 $O(p^3)$。

如果在一台串行计算机或信号处理器上实现 Levinson-Durbin 算法，则所需要的计算时间为 $O(p^2)$时间单位。另一方面，如果处理是在并行处理机上实现的，并且为了充分利用算法中的并行性，所用处理器个数不受限，则计算式(12.4.17)所要求的乘法和加法都可以同时实现。因此，该计算可以在 $O(p)$时间单位量级内完成。但是，式(12.4.16)计算反射系数需要花费另外的时间。确实，涉及到矢量 $\boldsymbol{a}_{m-1}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_{m-1}^b$ 的内积可以利用并行处理器同时计算。然而，这些积的加法不能同时完成，而是需要 $O(\lg p)$时间单位。所以，当用 p 个并行处理器实现时，Levinson-Durbin 算法中的计算可以在 $O(p\lg p)$时间单位内完成。

在下一节中，我们将介绍由 Schur(1917)提出的另一种算法，该算法避免了计算内积，因此更适用于反射系数的并行计算。

12.4.2　Schur 算法

Schur 算法和确定相关矩阵正定性的递推检验有着内在的联系。具体地说，让我们考虑由式(12.4.2)给出的增广正规方程有关的自相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{p+1}$。根据该矩阵的元素，我们可以生成函数

$$R_0(z) = \frac{\gamma_{xx}(1)z^{-1} + \gamma_{xx}(2)z^{-2} + \cdots + \gamma_{xx}(p)z^{-p}}{\gamma_{xx}(0) + \gamma_{xx}(1)z^{-1} + \cdots + \gamma_{xx}(p)z^{-p}} \tag{12.4.20}$$

并递推地定义函数序列 $R_m(z)$为

$$R_m(z) = \frac{R_{m-1}(z) - R_{m-1}(\infty)}{z^{-1}[1 - R_{m-1}^*(\infty)R_{m-1}(z)]}, \qquad m = 1,2,\cdots \tag{12.4.21}$$

Schur 定理指出，相关矩阵为正定的充分必要条件是对于 $m = 1,2,\cdots,p$，$|R_m(\infty)| < 1$。

下面，让我们证明自相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{p+1}$ 的正定性条件和等效的格型滤波器中的反射系数满足条件 $|K_m| < 1$，$m = 1,2,\cdots,p$ 是等效的。

首先，我们注意到 $R_0(\infty) = 0$，然后由式(12.4.21)，我们得到

$$R_1(z) = \frac{\gamma_{xx}(1) + \gamma_{xx}(2)z^{-1} + \cdots + \gamma_{xx}(p)z^{-p+1}}{\gamma_{xx}(0) + \gamma_{xx}(1)z^{-1} + \cdots + \gamma_{xx}(p)z^{-p}} \tag{12.4.22}$$

因此，$R_1(\infty) = \gamma_{xx}(1)/\gamma_{xx}(0)$。注意到，$R_1(\infty) = -K_1$。

其次，我们按照式(12.4.21)计算 $R_2(z)$并求出其在 $z = \infty$ 的值。于是，可得

$$R_2(\infty) = \frac{\gamma_{xx}(2) + K_1\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)(1 - |K_1|^2)}$$

我们再次注意到 $R_2(\infty)=-K_2$。继续上述过程,我们发现,对于 $m=1,2,\cdots,p$, $R_m(\infty)=-K_m$。因此,条件 $|R_m(\infty)|<1, m=1,2,\cdots,p$ 与条件 $|K_m|<1, m=1,2,\cdots,p$ 是一致的,并且保证了自相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{p+1}$ 的正定性。

由于反射系数可以从函数序列 $R_m(z), m=1,2,\cdots,p$ 得到,故我们得到了另一种求解正规方程的方法,即 Schur 算法。

Schur 算法。让我们首先重写 $R_m(z)$ 为

$$R_m(z)=\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}, \qquad m=0,1,\cdots,p \tag{12.4.23}$$

其中,

$$\begin{aligned} P_0(z)&=\gamma_{xx}(1)z^{-1}+\gamma_{xx}(2)z^{-2}+\cdots+\gamma_{xx}(p)z^{-p}\\ Q_0(z)&=\gamma_{xx}(0)+\gamma_{xx}(1)z^{-1}+\cdots+\gamma_{xx}(p)z^{-p}\end{aligned} \tag{12.4.24}$$

由于 $K_0=0$ 和 $K_m=-R_m(\infty), m=1,2,\cdots,p$,递推方程式(12.4.21)可以推出下面关于多项式 $P_m(z)$ 和 $Q_m(z)$ 的递推方程:

$$\begin{bmatrix} P_m(z)\\ Q_m(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & K_{m-1}\\ K_{m-1}^*z^{-1} & z^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{m-1}(z)\\ Q_{m-1}(z)\end{bmatrix}, \qquad m=1,2,\cdots,p \tag{12.4.25}$$

故我们可得

$$\begin{aligned} P_1(z)&=P_0(z)=\gamma_{xx}(1)z^{-1}+\gamma_{xx}(2)z^{-2}+\cdots+\gamma_{xx}(p)z^{-p}\\ Q_1(z)&=z^{-1}Q_0(z)=\gamma_{xx}(0)z^{-1}+\gamma_{xx}(1)z^{-2}+\cdots+\gamma_{xx}(p)z^{-p-1}\end{aligned} \tag{12.4.26}$$

并且

$$K_1=-\left.\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}\right|_{z=\infty}=-\frac{\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)} \tag{12.4.27}$$

接下来通过从式(12.4.25)确定 $P_2(z)$ 和 $Q_2(z)$, $P_2(z)$ 除以 $Q_2(z)$ 并计算在 $z=\infty$ 处的结果,就可以得到反射系数 K_2。于是,我们求出

$$\begin{aligned} P_2(z)&=P_1(z)+K_1Q_1(z)\\ &=[\gamma_{xx}(2)+K_1\gamma_{xx}(1)]z^{-2}+\cdots\\ &\quad+[\gamma_{xx}(p)+K_1\gamma_{xx}(p-1)]z^{-p}\\ Q_2(z)&=z^{-1}[Q_1(z)+K_1^*P_1(z)]\\ &=[\gamma_{xx}(0)+K_1^*\gamma_{xx}(1)]z^{-2}+\cdots\\ &\quad+[\gamma_{xx}(p-2)+K_1^*\gamma_{xx}(p-1)]z^{-p}\end{aligned} \tag{12.4.28}$$

其中,舍弃了含 z^{-p-1} 的项。于是我们观察到式(12.4.25)中的递推方程和式(12.4.21)是等价的。

基于这些关系式,Schur 算法可以描述为下面的递推过程。

初始化。形成 $2\times(p+1)$ 的生成元矩阵

$$\boldsymbol{G}_0=\begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(2) & \cdots & \gamma_{xx}(p)\\ \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(2) & \cdots & \gamma_{xx}(p)\end{bmatrix} \tag{12.4.29}$$

其中第一行的元素是 $P_0(z)$ 的系数,而第二行的元素是 $Q_0(z)$ 的系数。

第 1 步。将生成元矩阵的第二行向右移一个位置，舍弃该行的最后一个元素。在空出的位置补零，于是我们得到一个新的生成元矩阵

$$\boldsymbol{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(2) & \cdots & \gamma_{xx}(p) \\ 0 & \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(1) & \cdots & \gamma_{xx}(p-1) \end{bmatrix} \tag{12.4.30}$$

第二列的元素之比得到反射系数 $K_1 = -\gamma_{xx}(1)/\gamma_{xx}(0)$。

第 2 步。将生成元矩阵乘上 2×2 矩阵

$$\boldsymbol{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & K_1 \\ K_1^* & 1 \end{bmatrix} \tag{12.4.31}$$

于是，我们得到

$$\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{xx}(2) + K_1\gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(p) + K_1\gamma_{xx}(p-1) \\ 0 & \gamma_{xx}(0) + K_1^*\gamma_{xx}(1) & \cdots & \gamma_{xx}(p-1) + K_1^*\gamma_{xx}(p) \end{bmatrix} \tag{12.4.32}$$

第 3 步。将 $\mathbf{V}_1\mathbf{G}_1$ 的第二行向右移一个位置，这样形成一个新的生成元矩阵

$$\boldsymbol{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{xx}(2) + K_1\gamma_{xx}(1) & \cdots & \gamma_{xx}(p) + K_1\gamma_{xx}(p-1) \\ 0 & 0 & \gamma_{xx}(0) + K_1^*\gamma_{xx}(1) & \cdots & \gamma_{xx}(p-2) + K_1^*\gamma_{xx}(p-1) \end{bmatrix} \tag{12.4.33}$$

$\boldsymbol{G}_2$ 的第三列的元素间的负比值就是 $\boldsymbol{K}_2$。

重复第 2 步和第 3 步，直到我们已经求出所有的 p 个反射系数。一般来说，第二步中的 2×2 矩阵为

$$\boldsymbol{V}_m = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m^* & 1 \end{bmatrix} \tag{12.4.34}$$

并且 $\boldsymbol{V}_m$ 乘上 $\boldsymbol{G}_m$ 得到 $\boldsymbol{V}_m\boldsymbol{G}_m$。第 3 步中将 $\boldsymbol{V}_m\boldsymbol{G}_m$ 的第二行向右移一个位置，这样就形成一个新的生成元矩阵 $\boldsymbol{G}_{m+1}$。

我们观察到每次迭代中第二行的平移操作等价于式(12.4.25)中的第二个递推方程乘上一个延时算子 z^{-1}。我们也注意到，多项式 $P_m(z)$除以多项式 $Q_m(z)$并计算所得的商在 $z = \infty$的值，与除 $\boldsymbol{G}_m$ 的第 $m+1$ 列元素是等价的。p 个反射系数的计算可以利用并行处理器在$O(p)$时间单元内完成。下面我们描述一个进行这些计算的流水线结构。

另一种说明 Schur 算法与 Levinson-Durbin 算法和相应格型预测器的关系的方法是，当输入序列是相关序列$\{\gamma_{xx}(m), m = 0, 1, \cdots\}$时确定格型滤波器所得到的输出。于是，格型滤波器的第一个输入是 $\gamma_{xx}(0)$，第二个输入是 $\gamma_{xx}(1)$，等等[即 $f_0(n) = \gamma_{xx}(n)$]。第一级经过延时后，我们有 $g_0(n-1) = \gamma_{xx}(n-1)$。因此，对于 $n = 1$，比值 $f_0(1)/g_0(0) = \gamma_{xx}(1)/\gamma_{xx}(0)$，为反射系数 K_1 的负值。另一方面，我们可以将这一关系式写成

$$f_0(1) + K_1 g_0(0) = \gamma_{xx}(1) + K_1\gamma_{xx}(0) = 0$$

更进一步，$g_0(0) = \gamma_{xx}(0) = E_0^f$。当 $n = 2$ 时，根据式(12.3.4)，第二级的输入为

$$f_1(2) = f_0(2) + K_1 g_0(1) = \gamma_{xx}(2) + K_1\gamma_{xx}(1)$$

在第二级中，经过一个单位的延迟后，我们有

$$g_1(1) = K_1^* f_0(1) + g_0(0) = K_1^*\gamma_{xx}(1) + \gamma_{xx}(0)$$

现在比值 $f_1(2)/g_1(1)$为

$$\frac{f_1(2)}{g_1(1)}=\frac{\gamma_{xx}(2)+K_1\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)+K_1^*\gamma_{xx}(1)}=\frac{\gamma_{xx}(2)+K_1\gamma_{xx}(1)}{E_1^f}=-K_2$$

于是

$$f_1(2)+K_2g_1(1)=0$$

$$g_1(1)=E_1^f$$

按照上述方法继续,我们可以证明在第 m 级格型的输入处,比值 $f_{m-1}(m)/g_{m-1}(m-1)=-K_m$ 并且 $g_{m-1}(m-1)=E_{m-1}^f$。因此,根据 Levinson 算法得到的格型滤波器系数和根据 Schur 算法得到的系数是一致的。更进一步,格型滤波器结构为计算格型预测器的反射系数提供了一种方法。

实现 Schur 算法的一种流水线结构。 Kung 和 Hu(1983)开发出了实现 Schur 算法的流水线格型处理器。该处理器由 p 级格型组成,其中每级包含两个处理元件(PE),我们指定 $A_1,A_2,\cdots,A_p$ 表示上面的 PE,$B_1,B_2,\cdots,B_p$ 表示下面的 PE,如图 12.4.1 所示。将除法任务分配给称为 A_1 的 PE,其余的 PE 在每次迭代(一个时钟周期)内进行一次乘法和一次加法运算。

最初,给上面的 PE 加载上生成元矩阵 $\boldsymbol{G}_0$ 的第一行元素,如图 12.4.1 所示。下面的 PE 加载上生成元矩阵 $\boldsymbol{G}_0$ 的第二行元素。计算过程从除法 PE 即 A_1 开始,计算出第一个反射系数 $K_1=-\gamma_{xx}(1)/\gamma_{xx}(0)$。同时 K_1 的值被送到上分支和下分支所有的 PE 中。

计算过程的第 2 步是同时更新所有处理元件的内容。上下 PE 的内容更新如下:

$$\text{PE } A_m\text{: } A_m\leftarrow A_m+K_1B_m,\quad m=2,3,\cdots,p$$
$$\text{PE } B_m\text{: } B_m\leftarrow B_m+K_1^*A_m,\quad m=1,2,\cdots,p$$

第 3 步,将上面的 PE 的内容左移一个位置。于是我们得到

$$\text{PE } A_m\text{: } A_{m-1}\leftarrow A_m,\qquad m=2,3,\cdots,p$$

这时,PE A_1 包含 $\gamma_{xx}(2)+K_1\gamma_{xx}(1)$,而 PE B_1 包含 $\gamma_{xx}(0)+K_1^*\gamma_{xx}(1)$。因此,处理器 A_1 已经准备好从计算第二个反射系数 $K_2=-A_1/B_1$ 开始第二次循环。计算过程的第 3 步从重复计算除法 A_1/B_1 开始,直至所有 p 个反射系数都被算出。注意,每次迭代的最小均方误差 E_m^f 由 PE B_1 提供。

如果用 τ_d 表示 PE A_1 完成一次(复数)除法所需要的时间,τ_{ma} 表示完成一次(复数)乘法和一次加法所需要的时间,那么利用 Schur 算法计算所有 p 个反射系数所需要的时间为 $p(\tau_d+\tau_{ma})$。

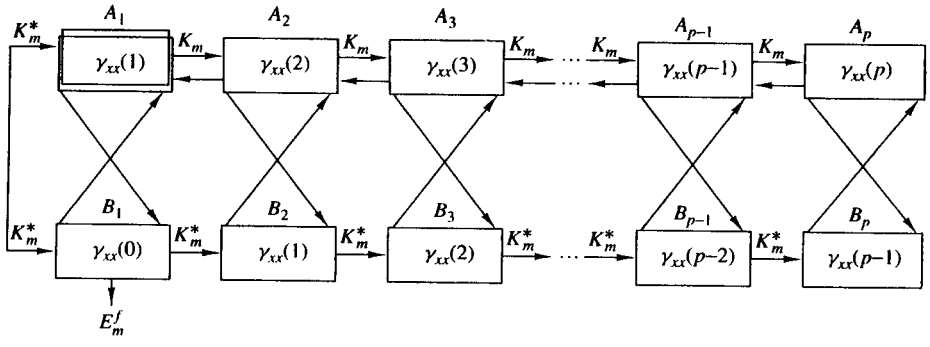


图 12.4.1 计算反射系数的流水线并行处理器

12.5　线性预测误差滤波器的性质

线性预测滤波器具有一些重要性质，下面我们将进行介绍。我们从证明前向预测误差滤波器是最小相位的滤波器开始。

前向预测误差滤波器的最小相位性质。我们已经证明了反射系数$\{K_i\}$是相关系数，并且对所有的 i，有$|K_i|\leqslant 1$。我们利用这一条件和关系 $E_m^f=(1-|K_m|^2)E_{m-1}^f$证明预测误差滤波器的零点都在单位圆内或都在单位圆上。

首先，我们证明，如果 $E_p^f>0$，则对每个 i 都有零点$|z_i|<1$。证明可利用归纳法完成。显然，对于 $p=1$，预测误差滤波器的系统函数为

$$A_1(z)=1+K_1z^{-1} \tag{12.5.1}$$

因此 $z_1=-K_1$ 并且 $E_1^f=(1-|K_1|^2)E_0^f>0$。现在，假定对于 $p-1$ 该假设成立，因此，如果 z_i 是 $A_p(z)$的一个根，则根据式(12.3.16)和式(12.3.18)可得

$$\begin{aligned}A_p(z_i)&=A_{p-1}(z_i)+K_pz_i^{-1}B_{p-1}(z_i)\\&=A_{p-1}(z_i)+K_pz_i^{-p}A_{p-1}^*\left(\frac{1}{z_i}\right)=0\end{aligned} \tag{12.5.2}$$

故

$$\frac{1}{K_p}=-\frac{z_i^{-p}A_{p-1}^*(1/z_i)}{A_{p-1}(z_i)}\equiv Q(z_i) \tag{12.5.3}$$

我们注意到函数 $Q(z)$是全通的。一般来说，形式为

$$P(z)=\prod_{k=1}^{N}\frac{zz_k^*+1}{z+z_k},\qquad |z_k|<1 \tag{12.5.4}$$

的全通函数满足性质：当$|z|<1$时$|P(z)|>1$，$|z|=1$时$|P(z)|=1$，$|z|>1$时$|P(z)|<1$。由于 $Q(z)=-P(z)/z$，可以推出如果$|Q(z)|>1$，则$|z_i|<1$。显然，这种情况是因为 $Q(z_i)=1/K_p$ 和 $E_p^f>0$。

另一方面，假定 $E_{p-1}^f>0$ 并且 $E_p^f=0$。这种情况下，$|K_p|=1$ 并且$|Q(z_i)|=1$。因为 MMSE 等于零，则随机过程 $x(n)$称为可预测的或确定性的。具体地说，形式为

$$x(n)=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k e^{j(n\omega_k+\theta_k)} \tag{12.5.5}$$

的纯正弦随机过程，其中相位$\{\theta_k\}$在统计上无关并且均匀分布在区间$(0,2\pi)$上，其自相关为

$$\gamma_{xx}(m)=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k^2e^{jm\omega_k} \tag{12.5.6}$$

而功率谱密度为

$$\Gamma_{xx}(f)=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k^2\delta(f-f_k),\qquad f_k=\frac{\omega_k}{2\pi} \tag{12.5.7}$$

对于阶数 $p\geqslant M$ 的预测器来说，该过程是可预测的。

为了验证阐述的有效性,考虑将这一过程经过阶数为 $p \geqslant M$ 的预测误差滤波器。在该滤波器的输出中的 MSE 为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p^f &= \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f)|A_p(f)|^2 \mathrm{d}f \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{M} \alpha_k^2 \delta(f - f_k)\right] |A_p(f)|^2 \mathrm{d}f \\ &= \sum_{k=1}^{M} \alpha_k^2 |A_p(f_k)|^2\end{aligned} \tag{12.5.8}$$

通过将预测误差滤波器 p 个零点中的 M 个选为与频率 $\{f_k\}$ 一致,可以使 MSE $\mathcal{E}_p^f$ 为零。其余 $p-M$ 个零点可以任意选取,只要在单位圆内即可。

最后,读者可以证明,如果随机过程的谱由连续功率谱密度和离散谱混合构成,则预测误差滤波器所有的根必定在单位圆内。

后向预测误差滤波器的最大相位性质。 p 阶后向预测误差滤波器的系统函数为

$$B_p(z) = z^{-p} A_p^*(z^{-1}) \tag{12.5.9}$$

因此,$B_p(z)$ 的根是系统函数为 $A_p(z)$ 的前向预测误差滤波器的根的互易。所以,如果 $A_p(z)$ 是最小相位的,则 $B_p(z)$ 是最大相位的。然而,如果过程 $x(n)$ 是可预测的,那么 $B_p(z)$ 的所有根都位于单位圆上。

白化性质。 假定随机过程 $x(n)$ 是一个 AR(p) 平稳随机过程,它是方差为 σ_w^2 的白噪声经过一个具有如下系统函数的全极点滤波器产生的:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \tag{12.5.10}$$

则 p 阶预测误差滤波器的系统函数为

$$A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) z^{-k} \tag{12.5.11}$$

其中,预测器系数 $a_p(k) = a_k$。预测误差滤波器的响应为一个白噪声序列 $\{w(n)\}$。这种情况下,预测误差滤波器白化输入随机过程 $x(n)$,且称为白化滤波器,如 12.3.4 节所述。

更一般地说,即使输入过程 $x(n)$ 不是一个 AR 过程,预测误差滤波器也会尝试消去输入过程信号样本间的相关性。随着预测器阶数的增加,预测器的输出 $\hat{x}(n)$ 变得更接近 $x(n)$,因此差值 $f(n) = \hat{x}(n) - x(n)$ 近似为一个白噪声序列。

后向预测误差的正交性。 从 FIR 格型滤波器不同级得到的后向预测误差 $\{g_m(k)\}$ 是正交的。也就是说,

$$E[g_m(n) g_l^*(n)] = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant l \leqslant m-1 \\ E_m^b, & l = m \end{cases} \tag{12.5.12}$$

通过将 $g_m(n)$ 和 $g_l^*(n)$ 代入式(12.5.12),并且求出期望就可以很容易证明该性质。即

$$E[g_m(n)g_l^*(n)] = \sum_{k=0}^{m} b_m(k) \sum_{j=0}^{l} b_l^*(j) E[x(n-k)x^*(n-j)]$$
$$= \sum_{j=0}^{l} b_l^*(j) \sum_{k=0}^{m} b_m(k) \gamma_{xx}(j-k) \tag{12.5.13}$$

但是,后向线性预测器的正规方程要求

$$\sum_{k=0}^{m} b_m(k)\gamma_{xx}(j-k) = \begin{cases} 0, & j = 1, 2, \cdots, m-1 \\ E_m^b, & j = m \end{cases} \tag{12.5.14}$$

因此,

$$E[g_m(n)g_l^*(n)] = \begin{cases} E_m^b = E_m^f, & m = l \\ 0, & 0 \leqslant l \leqslant m-1 \end{cases} \tag{12.5.15}$$

其他性质。在 FIR 格型滤波器中,有许多其他的关于前向和后向预测误差的有趣性质。它们都是对于实值的数据而言的,具体证明将作为练习留给读者完成。

(a) $E[f_m(n)x(n-i)] = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$

(b) $E[g_m(n)x(n-i)] = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1$

(c) $E[f_m(n)x(n)] = E[g_m(n)x(n-m)] = E_m$

(d) $E[f_i(n)f_j(n)] = E_{\max}(i, j)$

(e) $E[f_i(n)f_j(n-t)] = 0, \quad \begin{cases} 1 \leqslant t \leqslant i-j, & i > j \\ -1 \geqslant t \geqslant i-j, & i < j \end{cases}$

(f) $E[g_i(n)g_j(n-t)] = 0, \quad \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant i-j, & i > j \\ 0 \geqslant t \geqslant i-j+1, & i < j \end{cases}$

(g) $E[f_i(n+i)f_j(n+j)] = \begin{cases} E_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

(h) $E[g_i(n+i)g_j(n+j)] = E_{\max(i,j)}$

(i) $E[f_i(n)g_j(n)] = \begin{cases} K_j E_i, & i \geqslant j, \quad i, j \geqslant 0, \quad K_0 = 1 \\ 0, & i < j \end{cases}$

(j) $E[f_i(n)g_i(n-1)] = -K_{i+1}E_i$

(k) $E[g_i(n-1)x(n)] = E[f_i(n+1)x(n-1)] = -K_{i+1}E_i$

(l) $E[f_i(n)g_j(n-1)] = \begin{cases} 0, & i > j \\ -K_{j+1}E_i, & i \leqslant j \end{cases}$

12.6　AR 格型和 ARMA 格梯型滤波器

在 12.3 节我们已经说明了全零点 FIR 格型滤波器和线性预测的关系。线性预测器的传递函数为

$$A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) z^{-k} \tag{12.6.1}$$

当用一个输入随机过程$\{x(n)\}$作为激励时,产生的输出随着 $p \to \infty$ 近似于白噪声序列。另一方面,如果输入过程是一个 AR(p)过程,则 $A_p(z)$的输出是白的。由于当用一个白噪声序列激励时,$A_p(z)$产生一个 MA(p)过程,因此全零点格型有时也称为 MA 格型。

在下一节中,我们将研究关于逆滤波器 $1/A_p(z)$的格型结构(被称为 AR 格型)和有关 ARMA 过程的格梯型结构。

12.6.1 AR 格型结构

考虑一个具有如下系统函数的全极点系统:

$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p}a_p(k)z^{-k}} \tag{12.6.2}$$

该 IIR 系统的差分方程为

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{p}a_p(k)y(n-k)+x(n) \tag{12.6.3}$$

现在,假定我们互换输入和输出[即将式(12.6.3)中的 $x(n)$和 $y(n)$交换位置],得到差分方程

$$x(n)=-\sum_{k=1}^{p}a_p(k)x(n-k)+y(n)$$

或等效为

$$y(n)=x(n)+\sum_{k=1}^{p}a_p(k)x(n-k) \tag{12.6.4}$$

注意到式(12.6.4)是系统函数为 $A_p(z)$的 FIR 系统的差分方程。所以,通过交换输入和输出,可以将全极点 IIR 系统转换成全零点系统。

基于上述观察,我们可以通过交换输入和输出的位置,以一个 MA(p)格型得到一个 AR(p)格型结构。由于 MA(p)格型使 $y(n)=f_p(n)$作为输出,并且输入为 $x(n)=f_0(n)$,我们令

$$\begin{aligned}x(n)&=f_p(n)\\ y(n)&=f_0(n)\end{aligned} \tag{12.6.5}$$

这些定义表明可以按降阶的次序计算$\{f_m(n)\}$。通过重新排列式(12.3.4)中关于$\{f_m(n)\}$的递推方程,可通过 $f_m(n)$求出 $f_{m-1}(n)$。于是,我们得到

$$f_{m-1}(n)=f_m(n)-K_m g_{m-1}(n-1),\qquad m=p,p-1,\cdots,1$$

关于 $g_m(n)$的方程仍然不变。综合这些变化的结果得到方程组

$$\begin{aligned}x(n)&=f_p(n)\\ f_{m-1}(n)&=f_m(n)-K_m g_{m-1}(n-1)\\ g_m(n)&=K_m^* f_{m-1}(n)+g_{m-1}(n-1)\\ y(n)&=f_0(n)=g_0(n)\end{aligned} \tag{12.6.6}$$

AR(p)格型的相应结构如图 12.6.1 所示。注意到全极点格型结构具有关于输入 $g_0(n)$和输出 $g_p(n)$的全零点路径,这与 MA(p)格型结构的全零点路径是一致的。这不是巧合,因为在这两种格型结构中关于 $g_m(n)$的方程是相同的。

我们也注意到 AR(p)和 MA(p)格型结构是通过相同的参数来表征的,这些参数称为反射系数$\{K_i\}$。因此,式(12.3.21)和式(12.3.23)中给出的用于全零点系统 $A_p(z)$直接型实现的系统参数$\{a_p(k)\}$与 MA(p)格型结构的格型参数$\{K_i\}$之间转换的方程,也适用于全极点结构。

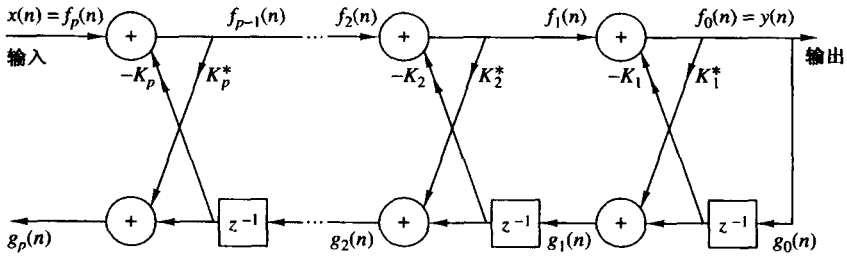


图 12.6.1　全极点系统的格型结构

12.6.2　ARMA 过程和格梯型滤波器

全极点格型结构为实现包含极点和零点的 IIR 系统的格型结构提供了基本的构建模块。为了构造适合的结构，让我们考虑一个具有如下系统函数的 IIR 系统：

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{q}c_q(k)z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p}a_p(k)z^{-k}}=\frac{C_q(z)}{A_p(z)} \tag{12.6.7}$$

不失一般性，我们假设 $p\geqslant q$。

将该系统视为一个全极点系统后面级联一个全零点系统，这样该系统就可以通过如下差分方程描述：

$$\begin{aligned}v(n)&=-\sum_{k=1}^{p}a_p(k)v(n-k)+x(n)\\ y(n)&=\sum_{k=0}^{q}c_q(k)v(n-k)\end{aligned} \tag{12.6.8}$$

从式(12.6.8)我们发现输出 $y(n)$是全极点系统延迟输出的简单线性组合。

由于将以前的输出线性组合起来出现了零点，所以我们可以把全极点格型系统作为基本构建模块来构造极点-零点系统。显然，我们发现在全极点格型滤波器中，$g_m(n)$可以表示为当前输出和过去输出的线性组合。事实上，系统

$$H_b(z)\equiv\frac{G_m(z)}{Y(z)}=B_m(z) \tag{12.6.9}$$

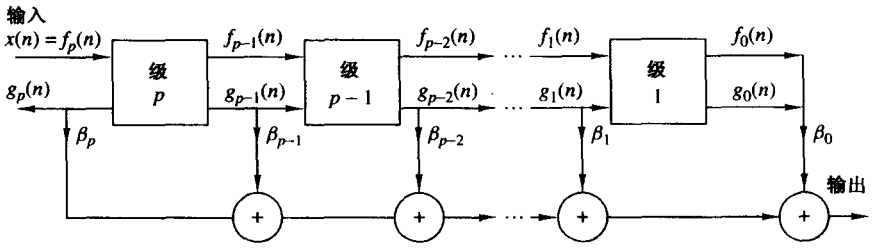
是一个全零点系统，故$\{g_m(n)\}$的任何一个线性组合也是一个全零点滤波器。

让我们先考虑一个全极点格型滤波器，其系数为 K_m，$1\leqslant m\leqslant p$，并增加一个通过取$\{g_m(n)\}$的加权线性组合作为输出的梯型。结果得到一个具有格梯型结构的极点-零点滤波器，如图 12.6.2 所示。其输出为

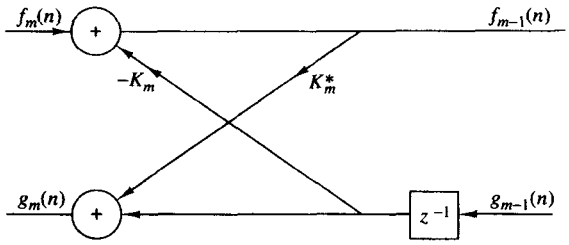
$$y(n)=\sum_{k=0}^{q}\beta_k g_k(n) \tag{12.6.10}$$

其中，$\{\beta_k\}$是确定系统零点的参数。对应于式(12.6.10)的系统函数为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{k=0}^{q}\beta_k\frac{G_k(z)}{X(z)} \tag{12.6.11}$$



(a) 极点-零点系统



(b) 第m级格型

图 12.6.2 极点-零点系统的格梯型结构

由于 $X(z)=F_p(z)$并且 $F_0(z)=G_0(z)$,因此式(12.6.11)可表示为

$$H(z)=\sum_{k=0}^{q}\beta_k\frac{G_k(z)}{G_0(z)}\frac{F_0(z)}{F_p(z)}=\frac{1}{A_p(z)}\sum_{k=0}^{q}\beta_k B_k(z) \tag{12.6.12}$$

于是

$$C_q(z)=\sum_{k=0}^{q}\beta_k B_k(z) \tag{12.6.13}$$

这就是用于确定加权系数$\{\beta_k\}$所期望的关系式,如同前面 9.3.5 节所给出的一样。

给定多项式 $C_q(z)$和 $A_p(z)$,其中 $p\geqslant q$,首先根据系数$\{a_p(k)\}$确定反射系数$\{k_i\}$。我们也可利用式(12.3.22)中的降步递推公式得到多项式 $B_k(z)$, $k=1,2,\cdots,p$。然后,梯型参数可以通过式(12.6.13)得到,可表示为

$$\begin{aligned}C_m(z)&=\sum_{k=0}^{m-1}\beta_k B_k(z)+\beta_m B_m(z)\\&=C_{m-1}(z)+\beta_m B_m(z)\end{aligned} \tag{12.6.14}$$

或等价为

$$C_{m-1}(z)=C_m(z)-\beta_m B_m(z),\qquad m=p,p-1,\cdots,1 \tag{12.6.15}$$

通过后向执行这个递推公式,我们可得到所有低次多项式 $C_m(z)$, $m=p-1,\cdots,1$。由于 $b_m(m)=1$,根据式(12.6.15),参数 β_m 可以通过如下设定来得到:

$$\beta_m=c_m(m),\qquad m=p,p-1,\cdots,1,0$$

当利用白噪声序列激励格梯型滤波器结构时,就产生一个 ARMA(p,q)过程,该过程的功率谱密度为

$$\Gamma_{xx}(f)=\sigma_w^2\frac{|C_q(f)|^2}{|A_p(f)|^2} \tag{12.6.16}$$

而其自相关函数满足式(12.2.18),其中 σ_w^2 为输入白噪声序列的方差。

12.7　用于滤波和预测的维纳滤波器

在许多实际应用中,我们已知一个期望信号$\{s(n)\}$与非期望的噪声或干扰信号$\{w(n)\}$叠加构成的输入信号$\{x(n)\}$,要求我们设计一个抑制非期望的干扰成分的滤波器。这种情况下,目标是设计一个系统,让其保留期望信号$\{s(n)\}$的特征的同时,过滤掉附加的干扰。

在这一节中,我们将阐述在加性噪声情况下的信号估计问题。我们将滤波器约束在冲激响应为$\{h(n)\}$的线性滤波器范围内,设计滤波器使其输出逼近某个指定的期望信号序列$\{d(n)\}$。图 12.7.1说明了线性估计问题。

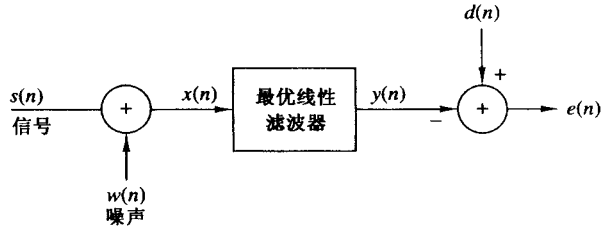


图 12.7.1　线性估计问题的模型

滤波器的输入序列为 $x(n)=s(n)+w(n)$,其输出序列为 $y(n)$。期望信号和滤波器输出序列之差为误差序列,可表示为 $e(n)=d(n)-y(n)$。

我们区分三种特殊情况:

1. 如果 $d(n)=s(n)$,则线性估计问题被认为是滤波问题。
2. 如果 $d(n)=s(n+D)$,其中 $D>0$,那么线性估计问题被认为是信号预测问题。注意到这与本章前面考虑的预测问题不同,其中 $d(n)=x(n+D)$,$D\geqslant 0$。
3. 如果 $d(n)=s(n-D)$,其中 $D>0$,则线性估计问题可认为是信号平滑问题。

我们的讨论集中在滤波和预测问题上。

最优化滤波器冲激响应$\{h(n)\}$的准则定为均方误差最小化。该准则简单,且数字上易于处理。

基本的假设是序列$\{s(n)\}$,$\{w(n)\}$和$\{d(n)\}$是零均值广义平稳过程,并假定线性滤波器是FIR滤波器或IIR滤波器。如果是IIR滤波器,我们假定可利用过去无限的输入数据。我们从最优FIR滤波器的设计开始,在最小均方误差(MMSE)意义上的最优线性滤波器称为维纳滤波器。

12.7.1　FIR 维纳滤波器

假定滤波器的长度为 M,系数为$\{h_k,0\leqslant k\leqslant M-1\}$。这样其输出 $y(n)$就和有效数据记录 $x(n),x(n-1),\cdots,x(n-M+1)$有关,可表示为

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M-1}h(k)x(n-k) \tag{12.7.1}$$

期望输出 $d(n)$和 $y(n)$之间误差的均方值为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_M &= E|e(n)|^2 \\ &= E\left|d(n)-\sum_{k=0}^{M-1}h(k)x(n-k)\right|^2\end{aligned} \tag{12.7.2}$$

由于式(12.7.2)是滤波器系数的二次方程,故最小化 $\mathcal{E}_M$ 产生一组线性方程:

$$\sum_{k=0}^{M-1}h(k)\gamma_{xx}(l-k)=\gamma_{dx}(l),\qquad l=0,1,\cdots,M-1 \tag{12.7.3}$$

其中,$\gamma_{xx}(k)$是输入序列$\{x(n)\}$的自相关,$\gamma_{dx}(k)=E[d(n)x^*(n-k)]$是期望序列$\{d(n)\}$和输入序列$\{x(n),0\leqslant n\leqslant M-1\}$的互相关。用于确定最优滤波器的线性方程组称为 Wiener-Hopf 方程。这些方程也称为正规方程,在本章开始的线性一般预测中我们曾遇到过。

一般来说,式(12.7.3)中的方程可以矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{\Gamma}_M\boldsymbol{h}_M=\boldsymbol{\gamma}_d \tag{12.7.4}$$

其中,$\boldsymbol{\Gamma}_M$ 是一个 $M\times M$(Hermitian)Toeplitz 矩阵,其元素 $\Gamma_{lk}=\gamma_{xx}(l-k)$;$\boldsymbol{\gamma}_d$ 是一个 $M\times 1$ 的互相关矢量,其元素为 $\gamma_{dx}(l)$,$l=0,1,\cdots,M-1$。最优滤波器系数的解为

$$\boldsymbol{h}_{\text{opt}}=\boldsymbol{\Gamma}_M^{-1}\boldsymbol{\gamma}_d \tag{12.7.5}$$

而通过维纳滤波器得到的最小 MSE 为

$$\text{MMSE}_M=\min_{\boldsymbol{h}_M}\mathcal{E}_M=\sigma_d^2-\sum_{k=0}^{M-1}h_{\text{opt}}(k)\gamma_{dx}^*(k) \tag{12.7.6}$$

或等价为

$$\text{MMSE}_M=\sigma_d^2-\boldsymbol{\gamma}_d^{*t}\boldsymbol{\Gamma}_M^{-1}\boldsymbol{\gamma}_d \tag{12.7.7}$$

其中,$\sigma_d^2=E|d(n)|^2$。

让我们考虑式(12.7.3)的一些特例。如果我们正处理滤波问题,即 $d(n)=s(n)$。更进一步,如果 $s(n)$和 $w(n)$是不相关的随机序列,实际中通常也是这种情况,那么

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}(k)&=\gamma_{ss}(k)+\gamma_{ww}(k)\\ \gamma_{dx}(k)&=\gamma_{ss}(k)\end{aligned} \tag{12.7.8}$$

并且正规方程式(12.7.3)变成

$$\sum_{k=0}^{M-1}h(k)[\gamma_{ss}(l-k)+\gamma_{ww}(l-k)]=\gamma_{ss}(l),\qquad l=0,1,\cdots,M-1 \tag{12.7.9}$$

如果我们正在处理预测问题,即 $d(n)=s(n+D)$,其中 $D>0$。假设 $s(n)$和 $w(n)$是不相关的随机序列,那么可得

$$\gamma_{dx}(k)=\gamma_{ss}(l+D) \tag{12.7.10}$$

于是维纳预测滤波器的方程变成

$$\sum_{k=0}^{M-1}h(k)[\gamma_{ss}(l-k)+\gamma_{ww}(l-k)]=\gamma_{ss}(l+D),\qquad l=0,1,\cdots,M-1 \tag{12.7.11}$$

在所有这些情况下,求逆的相关矩阵都是 Toeplitz 矩阵。因此(广义的)Levinson-Durbin 算法可以用来求解最优滤波器的系数。

例 12.7.1　考虑信号 $x(n)=s(n)+w(n)$，其中 $s(n)$是一个满足如下差分方程的 AR(1)过程：

$$s(n)=0.6s(n-1)+v(n)$$

其中，$\{v(n)\}$是方差为 $\sigma_v^2=0.64$ 的白噪声序列，而$\{w(n)\}$是方差为 $\sigma_w^2=1$ 的白噪声序列。我们将设计一个长度为 $M=2$ 的维纳滤波器来估计$\{s(n)\}$。

解：由于$\{s(n)\}$是通过用白噪声激励单极点滤波器得到的，故 $s(n)$的功率谱密度为

$$\begin{aligned}\Gamma_{ss}(f)&=\sigma_v^2|H(f)|^2\\&=\frac{0.64}{|1-0.6e^{-j2\pi f}|^2}\\&=\frac{0.64}{1.36-1.2\cos 2\pi f}\end{aligned}$$

其相应的自相关序列$\{\gamma_{ss}(m)\}$为

$$\gamma_{ss}(m)=(0.6)^{|m|}$$

滤波器系数的方程为

$$2h(0)+0.6h(1)=1$$

$$0.6h(0)+2h(1)=0.6$$

这些方程的解得到结果

$$h(0)=0.451,\qquad h(1)=0.165$$

其相应的最小 MSE 为

$$\begin{aligned}\mathrm{MMSE}_2&=1-h(0)\gamma_{ss}(0)-h(1)\gamma_{ss}(1)\\&=1-0.451-(0.165)(0.6)\\&=0.45\end{aligned}$$

该误差通过增加维纳滤波器的长度可以进一步减小(见习题 12.35)。

12.7.2　线性均方估计的正交性原理

通过将正交性原理应用于线性均方估计，可以直接得到关于最优滤波器系数的正规方程式(12.7.3)。简单地陈述为，如果选取滤波器系数$\{h(k)\}$使得误差与估计中的每个数据点都正交，那么式(12.7.2)中的均方误差 $\mathcal{E}_M$ 将最小化，

$$E[e(n)x^*(n-l)]=0,\qquad l=0,1,\cdots,M-1 \tag{12.7.12}$$

其中，

$$e(n)=d(n)-\sum_{k=0}^{M-1}h(k)x(n-k) \tag{12.7.13}$$

反之，如果滤波器的系数满足式(12.7.12)，那么得到的 MSE 是最小的。

当从几何角度观察时，滤波器的输出即估计

$$\hat{d}(n)=\sum_{k=0}^{M-1}h(k)x(n-k) \tag{12.7.14}$$

是由数据$\{x(k),0\leqslant k\leqslant M-1\}$张成的子空间中的一个矢量，误差 $e(n)$是从 $d(n)$到 $\hat{d}(n)$的一个矢量[即 $d(n)=e(n)+\hat{d}(n)$]，如图 12.7.2 所示。正交性原理表明当 $e(n)$和数据子空间垂直时[即 $e(n)$和每个数据点 $x(k),0\leqslant k\leqslant M-1$ 正交时]，长度 $\mathcal{E}_M=E|e(n)|^2$ 是最小的。

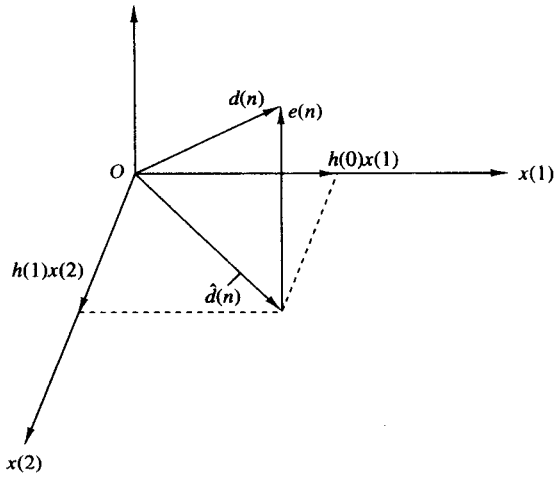


图 12.7.2 线性 MSE 问题的几何解释

我们注意到,如果估计 $\hat{d}(n)$中的数据$\{x(n)\}$是线性无关的,那么从正规方程式(12.7.3)得到的解是唯一的。在这种情况下,相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 是非奇异的。另一方面,如果数据是线性相关的,那么 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 的秩小于 M,故解不是唯一的。这种情况下,估计 $\hat{d}(n)$可以表示为线性无关数据点的简化集合的线性组合,其点数等于 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 的秩。

由于 MSE 是通过选取滤波器系数满足正交性原理来达到最小化的,因此残差的最小 MSE 就是

$$\mathrm{MMSE}_M = E[e(n)\mathrm{d}^*(n)] \tag{12.7.15}$$

它产生式(12.7.6)给出的结果。

12.7.3 IIR 维纳滤波器

在上一节中,我们将滤波器限制为 FIR,并得到了一组 M 个关于最优滤波器系数的线性方程。在这一节中,我们允许滤波器是无限时宽的(IIR),并且数据序列也是无限的。因此,滤波器的输出为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{12.7.16}$$

选取适当的滤波器系数使得期望输出 $d(n)$和 $y(n)$间的均方误差最小化,即

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\infty &= E|e(n)|^2 \\ &= E\left|\mathrm{d}(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)\right|^2 \end{aligned} \tag{12.7.17}$$

利用正交性原理得到 Wiener-Hopf 方程

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(k)\gamma_{xx}(l-k) = \gamma_{\mathrm{d}x}(l), \qquad l \geqslant 0 \tag{12.7.18}$$

通过应用条件式(12.7.15)可以很容易得到残差的 MMSE。于是

$$\mathrm{MMSE}_\infty = \min_{h} \mathcal{E}_\infty = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{\infty} h_{\mathrm{opt}}(k)\gamma_{dx}^*(k) \tag{12.7.19}$$

Wiener-Hopf 方程式(12.7.18)无法通过 z 变换直接求解，因为该方程仅对于 $l \geqslant 0$ 成立。我们将基于平稳随机过程 $\{x(n)\}$ 的修正表示来求解最优 IIR 维纳滤波器。

回顾可知，具有自相关 $\gamma_{xx}(k)$ 和功率谱密度 $\Gamma_{xx}(f)$ 的平稳随机过程 $\{x(n)\}$，可以用一个等效的修正过程 $\{i(n)\}$ 表示。而修正过程 $\{i(n)\}$ 是将 $\{x(n)\}$ 经过一个系统函数为 $1/G(z)$ 的噪声白化滤波器得到的，其中 $G(z)$ 是 $\Gamma_{xx}(z)$ 的谱因子分解的最小相位部分：

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_i^2 G(z) G(z^{-1}) \tag{12.7.20}$$

因此 $G(z)$ 在区域 $|z| > r_1$ 是解析的，其中 $r_1 < 1$。

现在，我们将维纳滤波器视为白化滤波器 $1/G(z)$ 级联上另一个滤波器 $Q(z)$，其中 $Q(z)$ 的输出 $y(n)$ 与最优维纳滤波器的输出是一致的。由于

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} q(k) i(n-k) \tag{12.7.21}$$

并且 $e(n) = d(n) - y(n)$，因此应用正交性原理得到的 Wiener-Hopf 方程为

$$\sum_{k=0}^{\infty} q(k) \gamma_{ii}(l-k) = \gamma_{di}(l), \qquad l \geqslant 0 \tag{12.7.22}$$

但由于 $\{i(n)\}$ 是白过程，因此可得除了 $l = k$ 外 $\gamma_{ii}(l-k) = 0$。于是得到的解为

$$q(l) = \frac{\gamma_{di}(l)}{\gamma_{ii}(0)} = \frac{\gamma_{di}(l)}{\sigma_i^2}, \qquad l \geqslant 0 \tag{12.7.23}$$

序列 $\{q(l)\}$ 的 z 变换为

$$\begin{aligned} Q(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} q(k) z^{-k} \\ &= \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{di}(k) z^{-k} \end{aligned} \tag{12.7.24}$$

如果用 $\Gamma_{di}(z)$ 表示双边互相关序列 $\gamma_{di}(k)$ 的 z 变换，

$$\Gamma_{di}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{di}(k) z^{-k} \tag{12.7.25}$$

并且定义 $[\Gamma_{di}(z)]_+$ 为

$$[\Gamma_{di}(z)]_+ = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{di}(k) z^{-k} \tag{12.7.26}$$

则

$$Q(z) = \frac{1}{\sigma_i^2} [\Gamma_{di}(z)]_+ \tag{12.7.27}$$

为了确定 $[\Gamma_{di}(z)]_+$，我们从噪声白化滤波器的输出开始，该输出可表示为

$$i(n) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) x(n-k) \tag{12.7.28}$$

其中，$\{v(k), k \geqslant 0\}$ 是噪声白化滤波器的冲激响应，

$$\frac{1}{G(z)} \equiv V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k} \tag{12.7.29}$$

于是

$$\begin{aligned} \gamma_{di}(k) &= E[d(n)i^*(n-k)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} v(m) E[d(n)x^*(n-m-k)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} v(m) \gamma_{dx}(k+m) \end{aligned} \tag{12.7.30}$$

互相关序列 $\gamma_{di}(k)$的 z 变换为

$$\begin{aligned} \Gamma_{di}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} v(m) \gamma_{dx}(k+m) \right] z^{-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} v(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{dx}(k+m) z^{-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} v(m) z^{m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{dx}(k) z^{-k} \\ &= V(z^{-1}) \Gamma_{dx}(z) = \frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})} \end{aligned} \tag{12.7.31}$$

因此,

$$Q(z) = \frac{1}{\sigma_i^2} \left[\frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})} \right]_+ \tag{12.7.32}$$

最后,最优 IIR 维纳滤波器的系统函数为

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}}(z) &= \frac{Q(z)}{G(z)} \\ &= \frac{1}{\sigma_i^2 G(z)} \left[\frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})} \right]_+ \end{aligned} \tag{12.7.33}$$

综上所述,求解最优 IIR 维纳滤波器要求我们首先完成 $\Gamma_{xx}(z)$的谱因子分解以得到最小相位成分 $G(z)$,然后求出 $\Gamma_{dx}(z)/G(z^{-1})$的因果部分。下面的例题将说明此过程。

例 12.7.2 求例 12.7.1 中的信号的最优 IIR 维纳滤波器。

解: 对于该信号,我们有

$$\Gamma_{xx}(z) = \Gamma_{ss}(z) + 1 = \frac{1.8(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z)}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.6z)}$$

其中 $\sigma_i^2 = 1.8$,并且

$$G(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}}$$

互相关 $\gamma_{dx}(m)$的 z 变换为

$$\Gamma_{dx}(z)=\Gamma_{ss}(z)=\frac{0.64}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$$

于是

$$\left[\frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})}\right]_+=\left[\frac{0.64}{(1-\frac{1}{3}z)(1-0.6z^{-1})}\right]_+$$

$$=\left[\frac{0.8}{1-0.6z^{-1}}+\frac{0.266z}{1-\frac{1}{3}z}\right]_+$$

$$=\frac{0.8}{1-0.6z^{-1}}$$

最优 IIR 滤波器的系统函数为

$$H_{\text{opt}}(z)=\frac{1}{1.8}\left(\frac{1-0.6z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right)\left(\frac{0.8}{1-0.6z^{-1}}\right)$$

$$=\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

并且其冲激响应为

$$h_{\text{opt}}(n)=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n,\qquad n\geqslant 0$$

我们用滤波器的频域特征表示式(12.7.19)的最小 MSE 来结束本节的介绍。首先,我们注意到,$\sigma_d^2\equiv E|d(n)|^2$ 恰好是自相关序列$\{\gamma_{dd}(k)\}$在 $k=0$ 处的值。由于

$$\gamma_{dd}(k)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C\Gamma_{dd}(z)z^{k-1}\mathrm{d}z \tag{12.7.34}$$

从而可推出

$$\sigma_d^2=\gamma_{dd}(0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C\frac{\Gamma_{dd}(z)}{z}\mathrm{d}z \tag{12.7.35}$$

其中,围线积分是 $\Gamma_{dd}(z)$在收敛域内沿着一条围绕原点的闭合路径的积分。

然后,通过应用帕塞瓦定理,很容易将式(12.7.19)中的第二项变换到频域。由于 $k<0$ 时有 $h_{\text{opt}}(k)=0$,故有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{\text{opt}}(k)\gamma_{dx}^*(k)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C H_{\text{opt}}(z)\Gamma_{dx}(z^{-1})z^{-1}\mathrm{d}z \tag{12.7.36}$$

其中,C 是位于 $H_{\text{opt}}(z)$和 $\Gamma_{dx}(z^{-1})$的公共收敛区域内围绕原点的闭合围线。

通过将式(12.7.35)和式(12.7.36)结合起来,可得到所期望的 MMSE_∞ 的表达式为

$$\text{MMSE}_\infty=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C[\Gamma_{dd}(z)-H_{\text{opt}}(z)\Gamma_{dx}(z^{-1})]z^{-1}\mathrm{d}z \tag{12.7.37}$$

例 12.7.3　对于例 12.7.2 所推导的最优维纳滤波器,其最小 MSE 为

$$\text{MMSE}_\infty=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C\left[\frac{0.3555}{(z-\frac{1}{3})(1-0.6z)}\right]\mathrm{d}z$$

在单位圆内 $z=\frac{1}{3}$处有一个单极点。通过计算在该极点的留数,可得

$$\mathrm{MMSE}_{\infty} = 0.444$$

我们观察到,该 MMSE 只比例 12.7.1 的最优双抽头维纳滤波器的 MMSE 稍微小一些。

12.7.4 非因果维纳滤波器

在上一节中,我们将最优维纳滤波器约束为因果滤波器[即对于 $n<0, h_{\mathrm{opt}}(n)=0$]。在这一节中,我们将舍弃这一约束条件,并且允许滤波器生成的输出 $y(n)$中可以同时包含序列$\{x(n)\}$的无限过去值和无限未来值,即

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{12.7.38}$$

但得到的滤波器是物理上不可实现的。我们也可将该滤波器视为平滑滤波器,利用信号的无限未来值对期望信号 $d(n)$的估计 $\hat{d}(n)=y(n)$做平滑。

应用正交性原理,可得到非因果滤波器的 Wiener-Hopf 方程为

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\gamma_{xx}(l-k) = \gamma_{dx}(l), \qquad -\infty < l < \infty \tag{12.7.39}$$

而相应的 $\mathrm{MMSE}_{\mathrm{nc}}$为

$$\mathrm{MMSE}_{\mathrm{nc}} = \sigma_d^2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\gamma_{dx}^*(k) \tag{12.7.40}$$

由于式(12.7.39)对于 $-\infty < l < \infty$都成立,因此可以对该方程直接进行变换,得到最优非因果维纳滤波器为

$$H_{\mathrm{nc}}(z) = \frac{\Gamma_{dx}(z)}{\Gamma_{xx}(z)} \tag{12.7.41}$$

相应的 $\mathrm{MMSE}_{\mathrm{nc}}$在 z 域可以简单地表示为

$$\mathrm{MMSE}_{\mathrm{nc}} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C [\Gamma_{dd}(z) - H_{\mathrm{nc}}(z)\Gamma_{dx}(z^{-1})]z^{-1}\mathrm{d}z \tag{12.7.42}$$

在下面的例题中,我们将把最优非因果滤波器的形式和上一节得到的最优因果滤波器进行比较。

例 12.7.4 对于例 12.7.1 中信号特征来说,最优非因果滤波器可以用式(12.7.41)表示,其中

$$\Gamma_{dx}(z) = \Gamma_{ss}(z) = \frac{0.64}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$$

并且

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(z) &= \Gamma_{ss}(z) + 1 \\ &= \frac{2(1-0.3z^{-1}-0.3z)}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}\end{aligned}$$

于是,

$$H_{\mathrm{nc}}(z) = \frac{0.3555}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)}$$

该滤波器显然是非因果的。

由该滤波器得到的最小 MSE 可以通过计算式(12.7.42)确定。被积函数为

$$\frac{1}{z}\Gamma_{ss}(z)[1-H_{nc}(z)]=\frac{0.3555}{(z-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3}z)}$$

在单位圆内的唯一极点是 $z=\frac{1}{3}$。故留数为

$$\left.\frac{0.3555}{1-\frac{1}{3}z}\right|_{z=\frac{1}{3}}=\frac{0.3555}{8/9}=0.40$$

因此，最优非因果维纳滤波器得到的最小可达 MSE 为

$$\mathrm{MMSE}_{nc}=0.40$$

注意，正如我们所期望的那样，这比因果滤波器的 MMSE 要小。

12.8　小结与参考文献

本章的主要焦点是为线性预测和滤波设计最优线性系统。最优性的准则是指定的理想滤波器输出和实际滤波器输出之间的均方误差最小化。

在线性预测的阐述中，我们证明了前向和后向预测误差方程规定了一个格型滤波器，其参数为反射系数$\{K_m\}$，与直接型 FIR 线性预测器和相应的预测误差滤波器的滤波器系数$\{a_m(k)\}$有直接的联系。最优滤波器的系数$\{K_m\}$和$\{a_m(k)\}$很容易从正规方程的解得到。

我们描述了两种用于求解正规方程的有效算法，分别是 Levinson-Durbin 算法和 Schur 算法。这两种算法都适合于线性方程组的 Toeplitz 系统，并且在单处理器上执行的计算复杂性为 $O(p^2)$。然而，当完全并行处理时，Schur 算法在 $O(p)$时间内求出正规方程的解，而 Levinson-Durbin 算法需要 $O(p\lg p)$的时间。

除了从线性预测得到全零点格型滤波器外，我们也推导了 AR 格型（全极点）滤波器结构和 ARMA 格梯型（极点-零点）滤波器结构。最后，我们还阐述了一类最优线性滤波器的设计，称为维纳滤波器。

线性估计理论的发展历史超过了 40 年。Kailath（1974）对前 30 年做出了历史性的评价。Wiener（1949）对统计上平稳的信号的最优线性滤波的开拓性工作是格外重要的。Kalman（1960），Kalman 和 Bucy（1961）等将维纳滤波理论扩展到有随机输入的动态系统。在 Meditch（1960），Brown（1983）以及 Chui 和 Chen（1987）的书中都论述了卡尔曼滤波器。在 Kailath（1981）的专著中同时论述了维纳和卡尔曼滤波器。

目前有大量关于线性预测和格型滤波器的参考文献。Makhoul（1975，1978）和 Friedlander（1982a，b）发表了这些课题的综述性期刊文章。Haykin（1991），Markel 和 Gray（1976），以及 Tretter（1976）的著作也对这些课题做了广泛论述。线性预测在谱分析中的应用可以在 Kay（1988）和 Marple（1987）等的专著中找到。而线性预测在地球物理和自适应滤波器的应用可以在 Robinson 和 Treitel（1980）以及 Haykin（1991）等的专著中分别找到。

递推求解正规方程的 Levinson-Durbin 算法首先由 Levinson（1947）提出，后来经 Durbin（1959）改进。Delsarte 和 Genin（1986），Krishna（1988）等对这种经典算法提出了一些称为分裂 Levinson 算法的改进算法。这些算法利用了次 Toeplitz 相关矩阵中的加性对称性，减少了大约 1/2 的乘法运算次数。

Schur 算法首先由 Schur（1917）在发表的一篇德文文章中阐述。这篇文章的英语译文出现在 Gohberg（1986）的书中。Schur 算法和多项式$\{A_m(z)\}$有着内在的联系，可以解释为正交多项式。在 Szegö（1967），Grenander 和 Szegö（1958），以及 Geronimus（1958）等的著作中，对正交多项式做了论述。Vieira（1977）的论文和 Kailath 等（1978），Delsarte 等（1978），以及 Youla 和 Kazanjian（1978）的著作提供

了一些关于正交多项式的其他成果。Kailath(1985,1986)提供了 Schur 算法的综述,并给出了该算法与正交多项式和 Levinson-Durbin 算法之间的联系。Kuny 和 Hu(1983)的著作描述了基于 Schur 算法用于计算反射系数的流水线并行处理结构以及求解线性方程的 Toeplitz 体系的有关问题。最后,我们要提到的是如 Krishna(1988)所描述的,通过进一步利用 Toeplitz 矩阵的对称性质,可以进一步提高 Schur 算法的计算效率。于是,就导出了所谓的分裂 Schur 算法,该算法与分裂 Levinson 算法类似。

习题

12.1 AR 过程$\{x(n)\}$的功率谱密度为

$$\Gamma_{xx}(\omega)=\frac{\sigma_w^2}{|A(\omega)|^2}=\frac{25}{|1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}|^2}$$

其中,σ_w^2 为输入序列的方差。(a)求当激励为白噪声时产生 AR 过程的差分方程;(b)求白化滤波器的系统函数。

12.2 一个自相关为$\{\gamma_{xx}(m)\}$的 ARMA 过程,其 z 变换为

$$\Gamma_{xx}(z)=9\frac{(z-\frac{1}{3})(z-3)}{(z-\frac{1}{2})(z-2)},\quad \frac{1}{2}<|z|<2$$

(a) 求以白噪声为输入序列产生$\{x(n)\}$的滤波器 $H(z)$。$H(z)$是唯一吗? 请解释。

(b) 求适合序列$\{x(n)\}$的一个稳定线性白化滤波器。

12.3 考虑由如下差分方程产生的 ARMA 过程:

$$x(n)=1.6x(n-1)-0.63x(n-2)+w(n)+0.9w(n-1)$$

(a) 求白化滤波器的系统函数以及其零点和极点;

(b) 求$\{x(n)\}$的功率谱密度。

12.4 考虑一个系统函数为

$$H(z)=A_3(z)=1+\frac{13}{24}z^{-1}+\frac{5}{8}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}$$

的 FIR 滤波器,求对应于该滤波器的格型系数。

12.5 考虑一个系统函数为

$$H(z)=A_2(z)=1+2z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}$$

的 FIR 滤波器,求对应于该滤波器的格型滤波器的反射系数$\{K_m\}$。

12.6 (a) 求具有如下反射系数的 FIR 格型滤波器的零点并画出零点草图:

$$K_1=\frac{1}{2},\qquad K_2=-\frac{1}{3},\qquad K_3=1$$

(b) 令 $K_3=-1$,重复(a)。

(c) 现在你已经发现所有的零点都在单位圆上,请问该结果能一般化吗? 如何一般化?

12.7 求由格型系数 $K_1=0.6$,$K_2=0.3$,$K_3=0.5$ 和 $K_4=0.9$ 所描述的 FIR 滤波器的冲激响应。

12.8 在 12.3.4 节中,我们指出了因果 AR(p)过程的噪声白化滤波器 $A_p(z)$是一个 p 阶的前向线性预测误差滤波器。请证明 p 阶后向线性预测误差滤波器对应于非因果 AR(p)过程的白化滤波器。

12.9 对于一个预测将来的 m 个样本($m>1$)的 p 阶前向预测器(m 步前向预测器),利用正交原理求正规方程以及最小 MSE。请画出预测误差滤波器的草图。

12.10 对于一个 m 阶后向预测器,重复习题 12.9。

12.11 确定一个 Levinson-Durbin 迭代算法，以求解后向预测误差滤波器的系数。利用结果证明前向和后向预测器的系数可以迭代地表示为

$$\boldsymbol{a}_m = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + K_m \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_m = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + K_m^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

12.12 在 12.4.1 节中描述的 Levinson-Durbin 算法用来求解线性方程

$$\boldsymbol{\Gamma}_m \boldsymbol{a}_m = -\boldsymbol{\gamma}_m$$

其中，自相关序列既是方程右边矢量的元素又是矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的元素。现在，我们考虑更一般的求解线性方程

$$\boldsymbol{\Gamma}_m \boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{c}_m$$

其中 $\boldsymbol{c}_m$ 是任意矢量，且矢量 $\boldsymbol{b}_m$ 与后向预测器的系数无关。如果给定一个递推的扩展 Levinson-Durbin 算法：

$$b_m(m) = \frac{c(m) - \boldsymbol{\gamma}_{m-1}^{bt} \boldsymbol{b}_{m-1}}{E_{m-1}^f}$$

$$b_m(k) = b_{m-1}(k) - b_m(m) a_{m-1}^*(m-k), \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \cdots, m-1 \\ m = 1, 2, \cdots, p \end{matrix}$$

其中，$b_1(1) = c(1)/\gamma_{xx}(0) = c(1)/E_0^f$，$a_m(k)$由式(12.4.17)给出。请证明利用该算法可以得到方程 $\boldsymbol{\Gamma}_m \boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{c}_m$ 的解。从而，求解方程 $\boldsymbol{\Gamma}_m \boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{c}_m$ 需要另一个递推公式。

12.13 对于 m 步前向和后向预测器，利用扩展的 Levinson-Durbin 算法递推求解正规方程。

12.14 考虑由如下方程产生的 AR(3)过程：

$$x(n) = \tfrac{14}{24} x(n-1) + \tfrac{9}{24} x(n-2) - \tfrac{1}{24} x(n-3) + w(n)$$

其中，$w(n)$是一个方差为 σ_w^2 的平稳白噪声过程。

(a) 求 $p = 3$ 的最优线性预测器的系数。

(b) 求自相关序列 $\gamma_{xx}(m)$，$0 \leqslant m \leqslant 5$。

(c) 求对应于 $p = 3$ 的线性预测器的反射系数。

12.15 一个 ARMA(1,1)过程的自相关序列 $\gamma_{xx}(m)$的 z 变换为

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z) H(z^{-1})$$

$$\Gamma_{xx}(z) = \frac{4\sigma_w^2}{9} \frac{5 - 2z - 2z^{-1}}{10 - 3z^{-1} - 3z}$$

(a) 求最小相位的系统函数 $H(z)$。

(b) 求一个混合相位稳定系统的系统函数 $H(z)$。

12.16 考虑一个具有如下系数矢量的 FIR 滤波器：

$$[1 \quad -2r\cos\theta \quad r^2]$$

(a) 求对应的 FIR 格型滤波器的反射系数。

(b) 求当 $r \to 1$ 时反射系数的极限值。

12.17 一个 AR(3)过程可以通过如下预测系数表示：

$$a_3(1) = -1.25, \qquad a_3(2) = 1.25, \qquad a_3(3) = -1$$

(a) 求反射系数。

(b) 求 $0 \leqslant m \leqslant 3$ 时的 $\gamma_{xx}(m)$。

(c) 求均方预测误差。

12.18 一个随机过程的自相关序列为

$$\gamma_{xx}(m)=\begin{cases}1, & m=0\\ -0.5, & m=\pm 1\\ 0.625, & m=\pm 2\\ -0.6875, & m=\pm 3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 $m=1,2,3$ 时预测误差滤波器的系统函数 $A_m(z)$、反射系数 $\{K_m\}$ 和相应的均方预测误差。

12.19 一个 AR 过程 $x(n)$ 的自相关序列为

$$\gamma_{xx}(m)=\left(\frac{1}{4}\right)^{|m|}$$

(a) 求 $x(n)$ 的差分方程。

(b) 请问你的答案唯一吗？如果不唯一，请给出其他可能的结果。

12.20 对于一个具有如下自相关序列的 AR 过程，重复习题 12.19：

$$\gamma_{xx}(m)=a^{|m|}\cos\frac{\pi m}{2}$$

其中，$0<a<1$。

12.21 一个 FIR 滤波器具有系统函数

$$A_p(z)=1+\sum_{k=1}^{p}a_p(k)z^{-k}$$

并且对于 $1 \leqslant k \leqslant p-1$ 反射系数 $|K_k|<1$ 而 $|K_p|>1$，请证明该滤波器是最大相位的[即 $A_p(z)$ 的所有根都在单位圆外]。

12.22 请证明变换

$$\boldsymbol{V}_m=\begin{bmatrix}1 & K_m\\ K_m^* & 1\end{bmatrix}$$

在 Schur 算法中满足如下特殊属性：

$$\boldsymbol{V}_m\boldsymbol{J}\boldsymbol{V}_m^{\dagger}=(1-|K_m|^2)\boldsymbol{J}$$

其中，

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{V}_m$ 称为 J 旋转矩阵。它的作用是沿着第一坐标轴方向旋转 $\boldsymbol{G}_m$ 的行(Kailath, 1985)。

12.23 请证明 12.5 节给出的预测误差滤波器的额外性质(a) ~ (l)。

12.24 请将 12.5 节给出的预测误差滤波器的额外性质(a) ~ (l)扩展到适合复值信号。

12.25 根据 Schur 算法，通过自相关 $\{\gamma_{xx}(m)\}$ 确定反射系数 K_3，并将你的结果与通过 Levinson-Durbin 算法得到的 K_3 的表达式进行比较。

12.26 对于功率谱密度为 $\Gamma_{xx}(f)$ 的平稳随机过程 $\{x(n)\}$，考虑一个无限长度($p=\infty$)的一步前向预测器。证明预测误差滤波器的均方误差可表示为

$$E_{\infty}^{f}=2\pi\exp\left\{\int_{-1/2}^{1/2}\ln\Gamma_{xx}(f)\,\mathrm{d}f\right\}$$

12.27 当输入信号的一阶自回归过程为

$$x(n) = ax(n-1) + w(n)$$

时，求无限长度($p = \infty$)的 m 步前向预测器的输出和所得的均方误差。

12.28 一个 AR(3)过程$\{x(n)\}$通过自相关序列 $\gamma_{xx}(0) = 1, \gamma_{xx}(1) = \frac{1}{2}, \gamma_{xx}(2) = \frac{1}{8}$和 $\gamma_{xx}(3) = \frac{1}{64}$表示。

(a) 利用 Schur 算法确定 3 个反射系数 K_1, K_2 和 K_3。

(b) 画出由白噪声激励来合成$\{x(n)\}$的格型滤波器的草图。

12.29 多项式$\{A_m(z)\}$是阶数为 $m, m = 0,1,\cdots,p$ 的前向预测误差滤波器的系统函数，请证明这些多项式在单位圆 h 可以解释为正交的。为了达到这一目的，假定 $\Gamma_{xx}(f)$是一个零均值随机过程$\{x(n)\}$的功率谱密度，令$\{A_m(z)\}, m = 0,1,\cdots,p$ 为对应预测误差滤波器的系统函数。请证明多项式$\{A_m(z)\}$满足正交特性

$$\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f) A_m(f) A_n^*(f) \mathrm{d}f = E_m^f \delta_{mn}, \qquad m, n = 0, 1, \cdots, p$$

12.30 求通过格型系数 $K_1 = 0.6, K_2 = 0.3, K_3 = 0.5$ 和 $K_4 = 0.9$ 描述的全极点滤波器的系统函数。

12.31 求具有如下系统函数的系统的参数并画出其格梯型结构：

$$H(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.72z^{-2}}$$

12.32 考虑信号 $x(n) = s(n) + w(n)$，其中 $s(n)$是一个满足如下差分方程的 AR(1)过程：

$$s(n) = 0.8s(n-1) + v(n)$$

其中，$\{v(n)\}$是方差为 $\sigma_v^2 = 0.49$ 的白噪声序列，而$\{w(n)\}$是方差为 $\sigma_w^2 = 1$ 的白噪声序列，并且过程$\{v(n)\}$和$\{w(n)\}$不相关。

(a) 求自相关序列$\{\gamma_{ss}(m)\}$和$\{\gamma_{xx}(m)\}$。

(b) 设计一个长度 $M = 2$ 的维纳滤波器来估计$\{s(n)\}$。

(c) 求 $M = 2$ 时的 MMSE。

12.33 对于习题 12.32 给出的信号，求其最优因果 IIR 维纳滤波器和相应的 MMSE_∞。

12.34 对于习题 12.32 给出的信号，求其非因果 IIR 维纳滤波器的系统函数和相应的 $\mathrm{MMSE}_{\mathrm{nc}}$。

12.35 对于例题 12.7.1 中的信号，求其 $M = 3$ 的最优因果 FIR 维纳滤波器和相应的 MMSE_3。比较 MMSE_3 和 MMSE_2，并说明差异。

12.36 一个 AR(2)过程通过如下差分方程定义：

$$x(n) = x(n-1) - 0.6x(n-2) + w(n)$$

其中，$\{w(n)\}$是一个方差为 σ_w^2 的白噪声过程。请利用 Yule-Walker 方程求解自相关 $\gamma_{xx}(0)$，$\gamma_{xx}(1)$和 $\gamma_{xx}(2)$的值。

12.37 一个被观察的随机过程$\{x(n)\}$由一个形如

$$s(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_p(k) s(n-k) + v(n)$$

的 AR(p)过程$\{w(n)\}$和一个方差为 σ_w^2 的白噪声过程叠加而成。随机过程$\{v(n)\}$是方差为 σ_v^2 的白过程，并且序列$\{v(n)\}$和$\{w(n)\}$不相关。

请证明该观察过程$\{x(n) = s(n) + w(n)\}$是 ARMA(p, q)过程，并求相应系统函数的分子多项式的系数(MA 部分)。

第 13 章　自适应滤波器

在第 12 章中，基于信号的二阶统计特性知识，我们描述了滤波器设计技术。与此相反，还有很多种数字信号处理的应用不能先验指定这些统计特性。正如本章所要描述的，这类应用有信道均衡、回声消除以及其他因素之间的系统模型等，均采用了可调整系数的滤波器，称为自适应滤波器。这样的滤波器结合了允许滤波器系数适应于信号统计特性的算法。

在过去的 25 年，自适应滤波器引起了研究学者的很多关注。于是，已经开发出很多对于自适应滤波可有效计算的算法。本章描述两种基本的算法：最小二乘(LMS)法，它基于梯度优化来确定系数；另外一类是递归的最小二乘方算法，包括 FIR 直接型和格型实现。在描述这些算法之前，我们先给出几种自适应滤波器成功用于受噪声或其他干扰信号估计的实际应用。

13.1　自适应滤波器的应用

自适应滤波器已经广泛应用于通信系统、控制系统和各种其他通信系统中。在这类系统中，被滤波信号的统计特性是先验未知的，或缓慢时变的(非平稳信号)。自适应滤波器的很多应用已经在文献中进行了描述。一些很值得引人注目的应用包括：(1)自适应天线系统，自适应滤波器用于光束控制，且用于在波束方向图中提供空值以除去不必要的干扰[Widrow, Mantey 和 Griffiths (1967)]；(2)数字通信接收器，其中自适应滤波器用于提供符号间干扰的均衡，并用于通道标识(参见文献 Lucky(1965)，Proakis 和 Miller(1969)，Gersho(1969)，George，Bowen 和 Storey(1971)，Proakis (1970; 1975)，Magee 和 Proakis(1973)，Picinbono(1978)，Nichols，Giordano 和 Proakis(1977))；(3)自适应消噪技术，其中自适应滤波器用于估计和消除有用信号中的噪声分量(参见文献 Widrow 等(1975)，Hsu 和 Giordano(1978)，以及 Ketchum 和 Proakis(1982))；(4)系统模型，其中自适应滤波器作为模型用于估计一个未知系统特性。这些正是应用自适应滤波器比较熟悉的例子。

虽然 IIR 和 FIR 滤波器已经被考虑用于自适应滤波，但 FIR 滤波器是目前最广泛最实用的滤波器。这种优先选择的理由很简单：FIR 滤波器只有可调整的零点；因此，不存在与自适应滤波器相关联的稳定性问题，即具有可调整的极点和零点。但这并不说明自适应滤波器永远是稳定的。相反，滤波器的稳定性很严格依赖于算法的系数调整，这一内容将在 13.2 节和 13.3 节讨论。

对于各种可能的 FIR 滤波器结构，直接型和格型是在自适应滤波中使用的结构。图 13.1.1 展示了具有可调整系数 $h(n)$的直接型 FIR 滤波器结构。另一方面，在 FIR 格型结构中的可调整参数是反射系数 K_n。

在使用自适应滤波器时，要考虑的一个重要问题就是优化可调整滤波器参数的准则。这一准则不仅能够提供滤波器性能的有意义测量，还必须生成一个实际可实现的算法。

例如，在一个数字通信系统中，一个有用的性能指标就是平均出错概率。因此，在实现一个自适应均衡器时，我们可能考虑选择均衡器系数以最小化平均错误概率，作为我们优化准则的基础。然而，遗憾的是，这一准则的性能指标(平均错误概率)是滤波器系数和信号统计特性的高度非线性函数。结果，优化这样一个性能指标的自适应滤波器的实现是复杂而不现实的。

在某些情况下，作为滤波器参数的非线性函数，一个性能指标处理很多相对最小值(或最大值)，以至于不能肯定是否自适应滤波器已经收敛于最优解或某一个相对最小值(或最大值)。对

于这些理由，某些所期望的性能指标如数字通信系统中的平均出错概率必须在地面上反射，以至于无法实现。

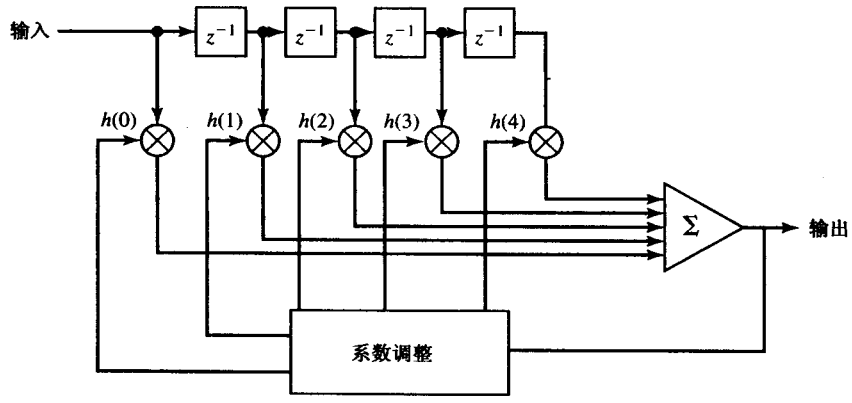


图 13.1.1　直接型自适应 FIR 滤波器

在自适应滤波的应用程序中，可提供较好性能测量的两个准则是：最小二乘方准则(the least-squares criterion)及其统计意义上的对等公式，即均方误差(MSE, mean-square-error)准则。最小二乘方(和 MSE)准则产生了一个二次性能指标，并将其作为滤波器系数的函数，因此只有单个最小值。用于调整滤波器系数的算法相对容易实现，这将在 13.2 节和 13.3 节描述。

下一节描述自适应滤波器的几种应用，作为 13.2 节和 13.3 节中所导出的数学算法的开发动机。我们发现在这些例子中可很方便地使用直接型 FIR 结构。虽然我们不会开发用于自动调整本节滤波器系数的递归算法，但是将滤波器系数优化过程公式化，作为一个最小二乘方优化问题是有指导意义的。该开发可用来建立下面两节推导算法的公共框架。

13.1.1　系统标识或系统模型

在该问题的公式表示中，有一个称为“设备”(plant)的未知系统是我们所希望标识的。该系统由具有 M 个可调整系数的 FIR 滤波器模型化。设备和模型均由输入序列 $x(n)$激励。如果 $y(n)$代表设备的输出，而 $\hat{y}(n)$代表模型的输出，即

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{13.1.1}$$

我们可以形成误差序列

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n), \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{13.1.2}$$

并选择系数 $h(k)$，以最小化

$$\mathscr{E}_M = \sum_{n=0}^{N} \left[y(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \right]^2 \tag{13.1.3}$$

其中，$N+1$ 是观察数目。

最小二乘方准则生成了线性方程组用于确定滤波器系数，即

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)r_{xx}(l-k) = r_{yx}(l), \qquad l = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{13.1.4}$$

在式(13.1.4)中，$r_{xx}(l)$是序列 $x(n)$的自相关，而 $r_{yx}(l)$是输入序列与系统输出之间的互相关。

求解式(13.1.4),可得到该模型的滤波器系数。由于滤波器参数可以从系统输入和输出的测量数据中直接得到,无需设备的先验知识,因此,我们称 FIR 滤波器模型为自适应滤波器。

如果我们的目的只是利用 FIR 模型标识系统,那么式(13.1.4)的求解就已足够。然而,在控制系统应用中,被模型化的系统可能是时变的,它们会随着时间的改变而慢慢改变,并且我们拥有模型的目的是最终利用它来设计一个控制器以控制该设备。更进一步,测量噪声通常在设备的输出端表示,该噪声引入了测量中的不确定性,并干扰了模型中滤波器系数的估计,这种方案在图 13.1.2 中说明。在这种情况下,自适应滤波器必须在设备的输出端测量噪声存在情况下的标识和跟踪设备的时变特征。在 13.2 节和 13.3 节描述的算法,对于系统标识问题都是适用的。

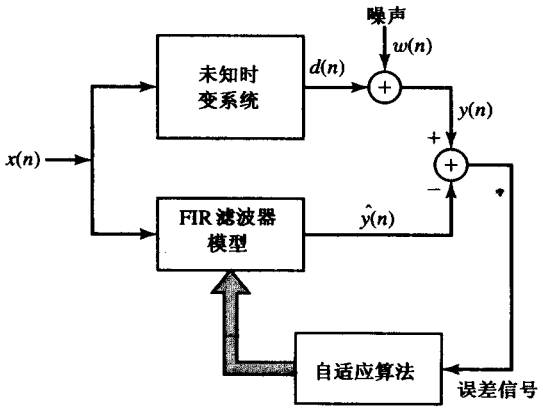


图 13.1.2 用于系统标识的自适应滤波器

13.1.2 自适应通道均衡器

图 13.1.3 给出了数字通信系统的方框图,其中自适应均衡器用于补偿由传输中介(通道)而引起的失真。信息符号 $a(n)$的数字序列用于传输滤波器,其输出是

$$s(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a(k)p(t-kT_s) \tag{13.1.5}$$

其中,$p(t)$是在传输器中滤波器的脉冲响应,而 T_s 是信息符号间的时间间隔;即 $1/T_s$ 是符号率。为了便于讨论,我们假定 $a(n)$是多级序列,n 取值为 $\pm1,\pm3,\pm5,\cdots,\pm(K-1)$,其中 K 是可能的符号值数目。

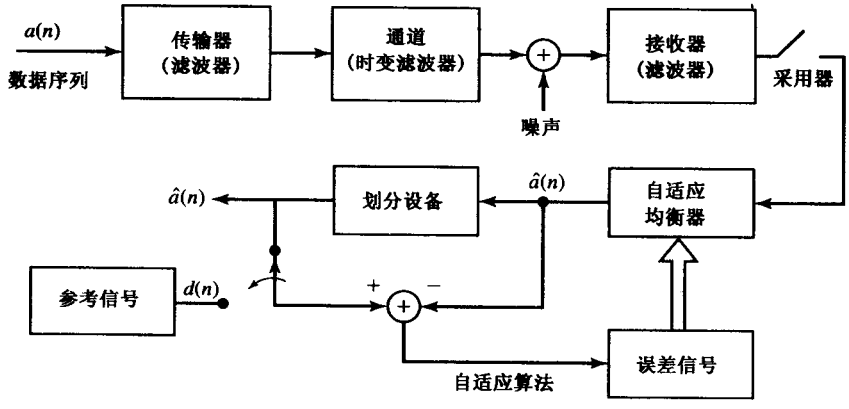


图 13.1.3 用于自适应通道均衡器的自适应滤波的应用

典型地,将脉冲 $p(t)$设计成具有图 13.1.4 所示的特征。注意到 $p(t)$在 $t=0$ 的振幅 $p(0)=1$,且在 $t=nT_s$ 处有 $p(nT_s)=0,n=\pm1,\pm2,\cdots$。结果,每隔 T_s 秒顺序传输的连续脉冲与在另一个时间点 $t=nT_s$ 采用的脉冲不会产生干扰。因此 $a(n)=s(nT_s)$。

该通道通常能很好地模型化为一个线性滤波器,从而使脉冲失真,于是引起符号间干扰。例

如,在电话通道中,整个系统中使用滤波器用于分离不同频率范围的独立信号。这些滤波器引起相位和振幅失真。图 13.1.5 说明了在脉冲 $p(t)$ 上的信道失真效果,因为它可能出现在某个电话信道的输出端。现在,我们观察到每隔 T_s s 取得的样本受到几个相邻符号的干扰侵蚀。失真信号同时被叠加上噪声干扰,其通常是宽带噪声。

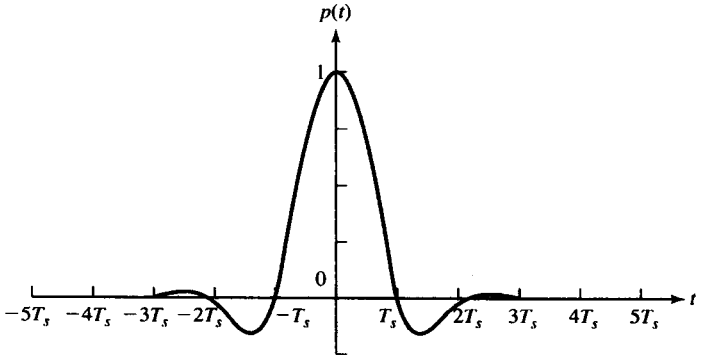


图 13.1.4　以 $1/T_s$ 每秒符号的速率进行符号的数字传输时的脉冲形状

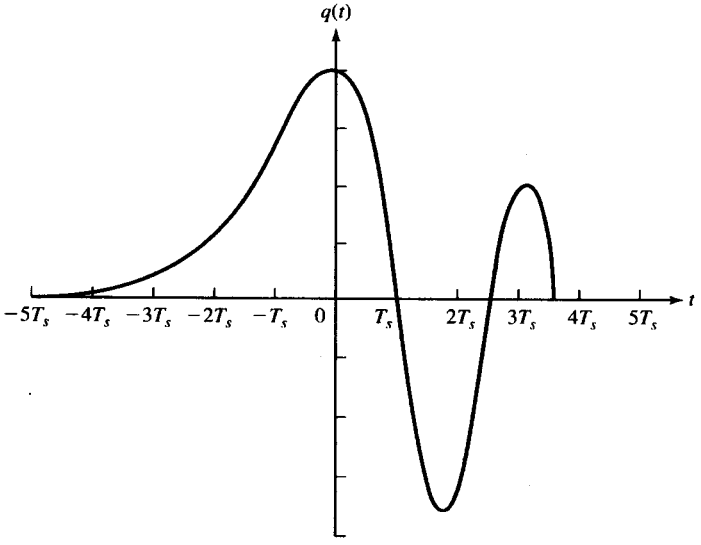


图 13.1.5　图 13.1.4 中信号脉冲的信道失真效果

在通信系统的接收端,信号首先通过一个滤波器,主要用于消除信号所占用频带外的噪声。我们可以假设这种滤波器是一个线性相位的 FIR 滤波器,它限制了噪声的带宽,但引起了信道干扰信号的可以忽略的附加干扰。

在该滤波器输出端的接收信号样本反映了符号间干扰和叠加噪声的存在。如果我们瞬间忽略信道中可能的时变,那么可以将接收端的样本输出表达为

$$\begin{aligned} x(nT_s) &= \sum_{k=0}^{\infty} a(k)q(nT_s - kT_s) + w(nT_s) \\ &= a(n)q(0) + \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{\infty} a(k)q(nT_s - kT_s) + w(nT_s) \end{aligned} \tag{13.1.6}$$

其中,$w(t)$代表噪声信号,$q(t)$代表在接收滤波器输出端的失真脉冲。

为了简化讨论,我们假定样本 $q(0)$是按照接收端的自动控制增益(AGC)方式归一化的。于是,由式(13.1.6)给出的样本信号可以表达为

$$x(n) = a(n) + \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{\infty} a(k)q(n-k) + w(n) \tag{13.1.7}$$

其中,$x(n) \equiv x(nT_s)$,$q(n) \equiv q(nT_s)$以及 $w(n) \equiv w(nT_s)$。式(13.1.7)中的 $a(n)$项是第 n 个样本例子所需要的符号。第 2 项

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{\infty} a(k)q(n-k)$$

组成了由信道失真引起的符号间干扰,并且 $w(n)$代表了系统中的加性噪声。

一般来说,包含在样本值 $q(n)$中的信道失真效果在接收端通常是未知的。进一步,信道可能随时间缓慢变化,因此符号间干扰效果是时变的。自适应量化器的目的是用来补偿信号的信道失真,使合成信号能够被可靠检测。我们假设均衡器是一个具有 M 个可调整系数 $h(n)$的 FIR 滤波器。其输出可以表达为

$$\hat{a}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n+D-k) \tag{13.1.8}$$

其中,D 是通过滤波器对信号进行处理的一些名义上的延迟,而 $\hat{a}(n)$代表第 n 个信息符号的估计。最初,均衡器通过传递一个已知数据序列 $d(n)$进行训练。于是,均衡器输出 $\hat{a}(n)$与 $d(n)$进行比较,并且误差生成用于优化滤波器系数。

如果我们再采用最小二乘方误差准则,选择系数 $h(k)$对量值最小化

$$\mathscr{E}_M = \sum_{n=0}^{N}[d(n) - \hat{a}(n)]^2 = \sum_{n=0}^{N}\left[d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n+D-k)\right]^2 \tag{13.1.9}$$

优化的结果是线性方程组的形式

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)r_{xx}(l-k) = r_{dx}(l-D), \qquad l = 0, 1, 2, \cdots, M-1 \tag{13.1.10}$$

其中,$r_{xx}(l)$是序列 $x(n)$的自相关,而 $r_{dx}(l)$是期望序列 $d(n)$和接收序列 $x(n)$的互相关。

虽然式(13.1.10)的解实际上是由递归得到的(如下列两节所演示),但在理论上,我们观察到这些方程生成了用于均衡器初始调整的系数值。在短训期之后,即对于大多数通道通常持续时间小于 1 s,发送器开始传递信息序列 $a(n)$。为了跟踪信道中可能的时变,在接收数据时,均衡器系数必须以自适应的方式连续调整。正如图 13.1.3 所示,这通常在判决设备的输出端在判决为正确的情况下完成,并且用断决来代替参考信号 $d(n)$,从而产生误差信号。这种方法在判决误差很少发生的情况下很有效(如每 100 个符号不足一个判决误差)。偶然的判决误差只引起均衡器系数的少量误调整。在 13.2 节和 13.3 节,我们将描述递归调整均衡器系数的自适应算法。

13.1.3 电话通道数据传输中的回声消除

在电话通道的数据传输中,调制解调(调制器/解调器)用于提供数字数据序列和模拟信道之间的接口。图 13.1.6 所示的是一个通信系统的方框图。其中,标号为 A 和 B 的两个终端,使用两个调

制解调器 A 和 B 将数据传输到电话通道的接口。正如图中所示，一个数字序列 $a(n)$从终端 A 传输到终端 B 时，另一个数据序列 $b(n)$从终端 B 传输到终端 A。这种双向同时传输称为全双工传输。

正如所描述的，两个传输信号可以表示为

$$s_A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a(k)p(t-kT_s) \tag{13.1.11}$$

$$s_B(t)=\sum_{k=0}^{\infty}b(k)p(t-kT_s) \tag{13.1.12}$$

其中，$p(t)$是一种如图 13.1.4 所示的脉冲。

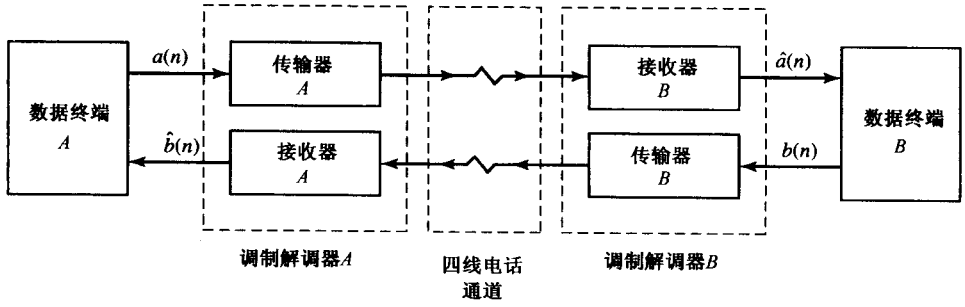


图 13.1.6　电话通道中的全双工数据传输

当用户从电话公司租赁了一条私人电话线，用于终端 A 和 B 之间传输时，所提供的电话线是四股线，相当于拥有两条专用电话线(两股)通道，一个(线对)用于传输数据，另一个(线对)用于从其他方向接收数据。在这种情况下，两条传输路径是孤立的，因此在两个信号路径之间没有“串音”或相互干扰。通过在每个调制解调器的接收端使用前已描述的自适应均衡器可补偿信道失真。

图 13.1.6 所示系统的主要问题是租用四股电话通道的代价问题。如果通信量很高并且电话通道连续使用或频繁使用，如银行交易系统或航空定票系统，则图 13.1.6 所示的系统可能是有效代价的。否则，将不是。

对于低容量、不频繁数据传输的另一种解决方法是使用拨号交换电话网络。在这种情况下，在租户和本地电话局之间的本地通信链路是双绞线，称为本地环。在中心局，租户的双绞线连接到主干四线电话通道，即干线，通过一种称为 Hybrid 的设备互联到不同电话局。通过使用传输器藕合，调节 Hybrid 以提供在全双工操作中传输和接收通道之间的绝缘。然而，由于在 Hybrid 和电话通道之间的阻抗不匹配，孤立级别通常不够，结果在传输器一边的某些信号向后倾斜，并干扰了接收端信号，从而引起在电话通道上进行话音通信时经常听到的“回声”。

为了减轻话音传输中的回声，电话公司采用了一种叫回声抑制器的设备。在数据传输中，该方案是在每一个调制解调器中使用回声消除器。回声消除器作为一个可自动调整系数的自适应滤波器，正如横向均衡器的情况。

如果使用 Hybrid 将一个双线耦合到一个四线通道，并且在每一个调制解调器使用回声消除器来估计和减小回声，那么拨号交换电话网络可采用图 13.1.7 的形式。每一个调制解调器需要一个 Hybrid 从接收器隔离传输器，并耦合到双线本地环。Hybrid A 物理上位于租户 A 的中心局，而 Hybrid B 物理上位于租户 B 所连接的中心局。两个中心局通过四绞线连接，一对用于从 A 到 B 传输，另一对用于从 B 到 A 反向传输。由 Hybrid A 引起的终端 A 的回声称为近端回声，而 Hybrid B 引起的终端 A 的回声称为远端回声。两种类型的回声通常均出现在数据传输中，并且必须被回声消除器消除。

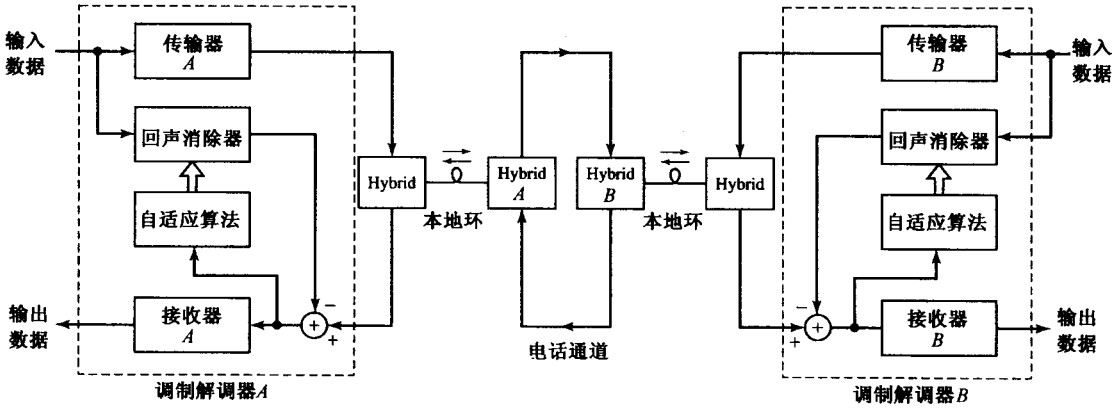


图 13.1.7 在调制解调中使用回声消除器的数字通信系统模型方框图

为便于讨论,假定我们忽略信道失真,只处理回声。在调制解调器端接收到的信号可以表达为

$$s_{RA}(t) = A_1 s_B(t) + A_2 s_A(t - d_1) + A_3 s_A(t - d_2) \tag{13.1.13}$$

其中,$s_B(t)$是在调制解调器 A 解调出的有用信号;$s_A(t - d_1)$是由 Hybrid A 产生的近端回声,$s_A(t - d_2)$是由 Hybrid B 产生的远端回声;$A_i, i = 1,2,3$ 是这三种信号分量的相应振幅;而 d_1 和 d_2 是与回声分量相关的延迟。干扰接收信号的更深层干扰是叠加噪声,所以在调制解调器 A 端的接收信号是

$$r_A(t) = s_{RA}(t) + w(t) \tag{13.1.14}$$

其中,$w(t)$代表叠加噪声过程。

自适应回声消除器试图自适应估计两种回声分量。如果系数是 $h(n), n = 0,1,\cdots,M-1$,其输出

$$\hat{s}_A(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)a(n-k) \tag{13.1.15}$$

是回声信号分量的估计。该估计从采用的接收信号中提取出来,而生成的误差信号可以在最小二乘方的意义上最小化,以优化调整回声消除器的系数。在调制解调器中有几种配置可能可以代替回声消除器,以形成相应的误差信号。图 13.1.8 说明了一种配置,其中消隐器输出是从输入为$r_A(t)$的接收滤波器输出中采样提取的。图 13.1.9 说明了另一种配置,其中回声消除器是以奈奎斯特率代替符号率而生成的样本;在这种情况下,用于调整系数的误差信号只是 $r_A(n)$、采用后的接收信号以及消隐器输出之间的差别。最后,图 13.1.10 说明了与自适应均衡器结合的消隐器操作。

在图 13.1.8 至图 13.1.10 显示的任何一种配置中,使用最小二乘方准则都会生成回声消除器系数的线性方程组。读者可自行导出对应于这三种配置的方程。

13.1.4 对宽带信号中的窄带干扰的抑制

我们现在讨论在实践中特别是在信号检测和数据通信中出现的问题。假定我们有一个信号序列 $v(n)$,由一个有用宽带信号序列 $w(n)$组成,并受叠加窄带干涉序列 $x(n)$干扰。这两个序列是不相关的。这些序列由模拟信号 $v(t)$以宽带信号 $w(t)$的奈奎斯特率(或更快)采样产生。图 13.1.11 说明了 $w(n)$和 $x(n)$的谱特征。通常,干扰$|X(f)|$在其所占据的窄频带内比$|W(f)|$大很多。

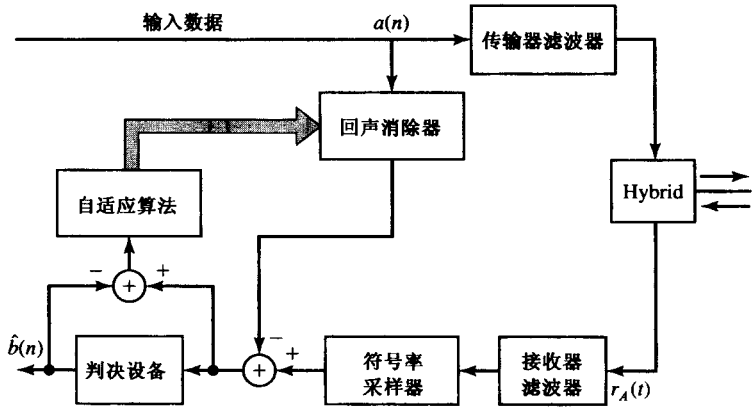


图 13.1.8　符号率回声消除器

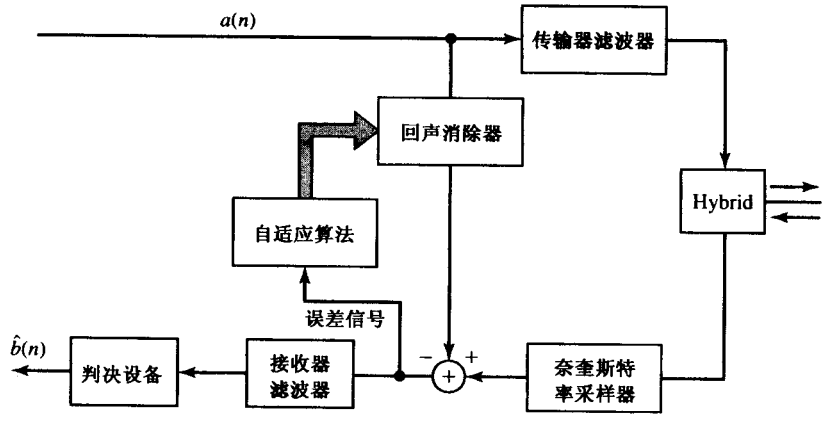


图 13.1.9　奈奎斯特率回声消除器

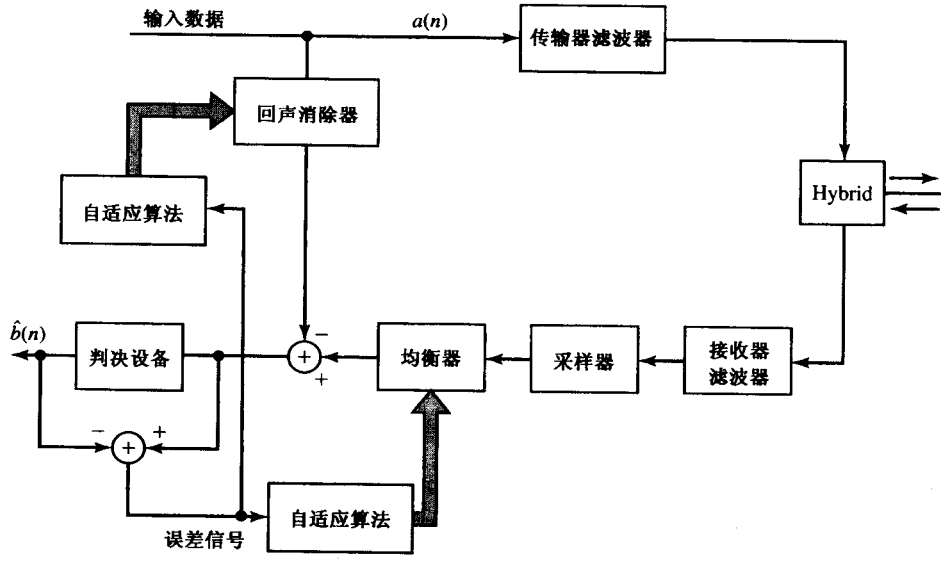


图 13.1.10　带自适应均衡器和回声消除器的调制解调器

在适合上述模型的数字通信和信号检测问题中,有用信号序列 $w(n)$经常是扩频信号,而窄带干扰代表了从频带的另一个用户来的信号,或来自试图干扰通信或检测系统的干扰发射台的恶意干扰。

从滤波的观点,我们的目标是采用一个滤波器抑制窄带干扰。效果上,这样一个滤波器会在$|X(f)|$所占用频带中有一个凹口,而实际上,由$|X(f)|$占用的频带是未知的。再者,如果干扰是非平稳的,其占用频带可能随着时间的变化而变化。因此,需要一个自适应滤波器。

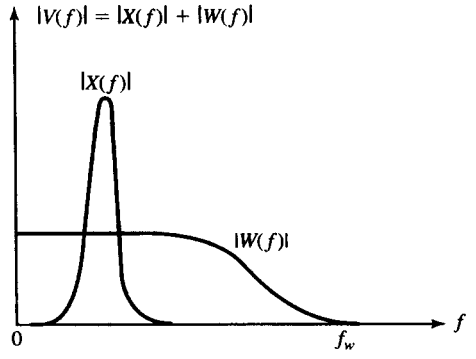


图 13.1.11 在宽带信号 $W(f)$中的强窄带干扰

从另一种观点,干扰的窄带特性允许我们从序列$v(n)$的过去样本估计 $x(n)$。由于 $x(n)$的带宽相比于序列 $w(n)$的带宽较窄,所以高采样率导致样本 $x(n)$高度相关。另一方面,由于样本采用 $w(n)$的奈奎斯特率,导致样本 $w(n)$不是高度相关。通过挖掘 $x(n)$与序列 $v(n)$的过去样本之间的高度相关性,可能会从 $v(n)$中提取到$x(n)$的估计。

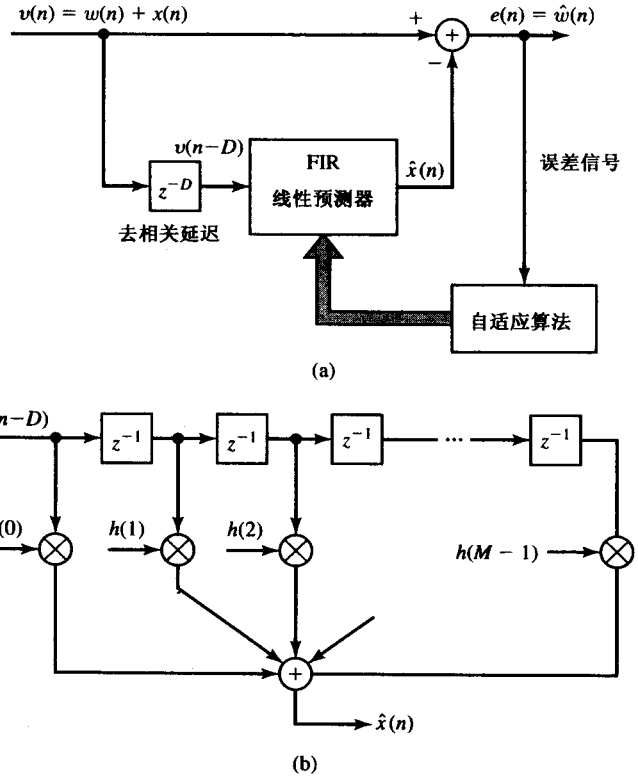


图 13.1.12 用于估计和抑制宽带信号中窄带干扰的自适应滤波器

一般配置如图 13.1.12 所示。信号 $v(n)$延迟了 D 样本,其中 D 选得足够大以至于分别包含在$v(n)$和 $v(n-D)$中的宽带信号分量 $w(n)$和 $w(n-D)$是不相关的。通常,选择 $D=1$ 或 2 就够了。延迟的信号序列 $v(n-D)$通过一个 FIR 滤波器,该滤波器基于 M 个样本 $v(n-G-k)$,$k=0,1,\cdots$,$M-1$ 的最好地表征为值 $x(n)$的线性预测器。线性预测器的输出是

$$\hat{x}(n)=\sum_{k=0}^{M-1}h(k)v(n-D-k) \tag{13.1.16}$$

从 $v(n)$中减去 $x(n)$的预测值，可生成 $w(n)$的估计，如图 13.1.12 所示。显然，估计 $\hat{x}(n)$的质量确定了窄带干扰抑制的效果。很明显，为了得到 $x(n)$的最好估计，延迟 D 必须保持尽可能足够小；而为了保证 $w(n)$和 $w(n-D)$是不相关的，延迟 D 必须足够大。

我们定义误差序列

$$\begin{aligned}e(n)&=v(n)-\hat{x}(n)\\&=v(n)-\sum_{k=0}^{M-1}h(k)v(n-D-k)\end{aligned} \tag{13.1.17}$$

如果我们应用最小二乘法来优化选择预测系数，则得到线性方程组

$$\sum_{k=0}^{M-1}h(k)r_{vv}(l-k)=r_{vv}(l+D),\qquad l=0,1,\cdots,M-1 \tag{13.1.18}$$

其中，$r_w(l)$是 $v(n)$的自相关序列。然而，注意到式(13.1.18)的右边可以表达为

$$\begin{aligned}r_{vv}(l+D)&=\sum_{n=0}^{N}v(n)v(n-l-D)\\&=\sum_{n=0}^{N}[w(n)+x(n)][w(n-l-D)+x(n-l-D)]\\&=r_{ww}(l+D)+r_{xx}(l+D)+r_{wx}(l+D)+r_{xw}(l+D)\end{aligned} \tag{13.1.19}$$

式(13.1.19)中的相关性是时间平均相关序列。$r_{ww}(l+D)$的期望值是

$$E[r_{ww}(l+D)]=0,\qquad l=0,1,\cdots,M-1 \tag{13.1.20}$$

由于 $w(n)$是宽带的并且 D 足够大，以至于 $w(n)$和 $w(n-D)$是不相关的。同时假定

$$E[r_{xw}(l+D)]=E[r_{wx}(l+D)]=0 \tag{13.1.21}$$

最后，

$$E[r_{xx}(l+D)]=\gamma_{xx}(l+D) \tag{13.1.22}$$

因此，$r_{vv}(l+D)$的期望值只是窄带信号 $x(n)$的统计自相关。更进一步，如果宽带信号与干扰信号是弱相关的，式(13.1.18)左边的自相关 $r_{vv}(l)$近似于 $r_{xx}(l)$。$w(n)$的主要影响是对 $r_{vv}(l)$的对角元素。结果，由式(13.1.18)的线性方程所确定的滤波器系数是干扰 $x(n)$的统计特性的函数。

图 13.1.12 中的总体滤波器结构是一种自适应的 FIR 预测误差滤波器，其系数为

$$h'(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ -h(k-D), & k=D,D+1,\cdots,D+M-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{13.1.23}$$

且频率响应为

$$H(\omega)=\sum_{k=0}^{M-1}h'(k+D)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k} \tag{13.1.24}$$

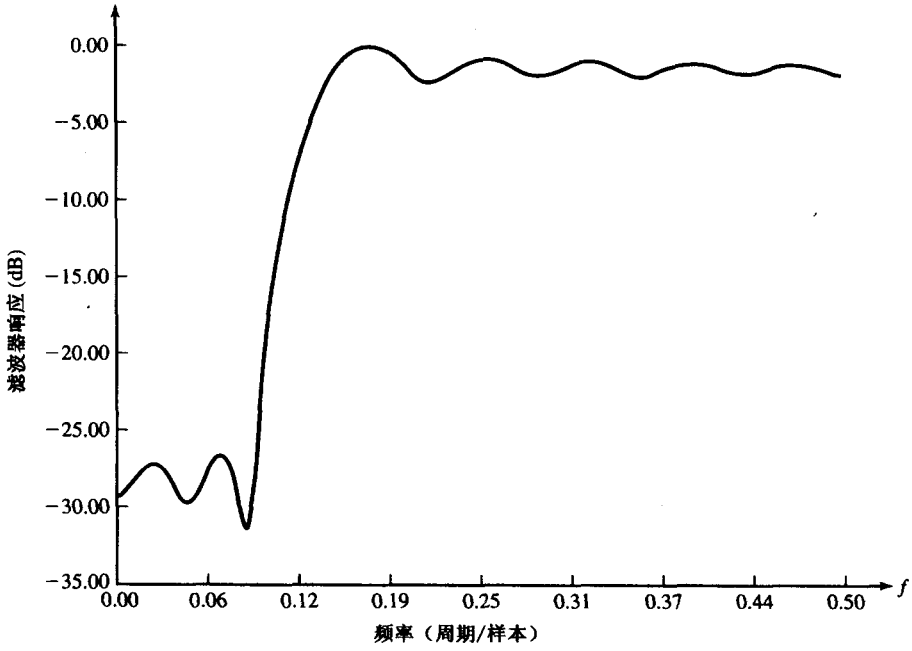


图 13.1.13 自适应凹口滤波器的频率响应特性

这种总体滤波器可作为干扰的凹口滤波器。例如,图 13.1.13 说明了具有 $M=15$ 个系数的自适应滤波器的频率响应的振幅,其试图抑制占用了有用扩频信号序列的 20%频带宽度的窄带干扰。通过叠加窄带干扰而伪随机生成的数据由 100 个随机相位、相同振幅的正弦信号组成,并生成一个伪噪声的扩频信号。滤波器系数通过解式(13.1.18)中的方程得到,其中 $D=1$,相关 $r_{vv}(l)$ 从数据获得。我们观察到,总体干扰抑制滤波器具有凹口滤波器的特征。凹口的深度依赖于宽带信号的干扰功率。干扰越强,凹口越深。

13.2 节和 13.3 节描述的算法适用于连续估计预测器系数,用于跟踪某个非平稳的窄带干扰信号。

13.1.5 自适应线谱增强器

在前一个例子中,自适应线性预测器用于估计窄带干扰,以便抑制从输入序列 $v(n)$来的干扰。一种自适应线谱增强器(ALE,Adaptive Line Enhancer)具有与图 13.1.12 中的干扰抑制滤波器相同的配置,但目的不同。

在自适应的线增强器中,$x(n)$是有用信号,并且 $w(n)$代表了一种屏蔽 $x(n)$的宽带噪声分量。有用信号 $x(n)$是一种谱线信号或一种相对窄带信号。图 13.1.12(b)中的先行预测器以一种与图 13.1.12(a)中完全相同的方式提供对窄带信号 $x(n)$的估计。显然,ALE(也就是 FIR 预测滤波器)是一种自调整的滤波器,在频率响应中的正弦频率处,或者在窄带信号 $x(n)$的频带中具有峰值。通过拥有窄带带宽,带外噪声 $w(n)$被抑制,因此与 $w(n)$中噪声功率有关的信号被增强。这就解释了为什么 FIR 预测器称为 ALE,其系数由式(13.1.18)的解得到。

13.1.6 自适应噪声消除

回声消除,在宽带信号中窄带干扰抑制和 ALE,与另一种形式的自适应滤波有关,即自适应噪声消除。这种自适应噪声取消器模型如图 13.1.14 所示。

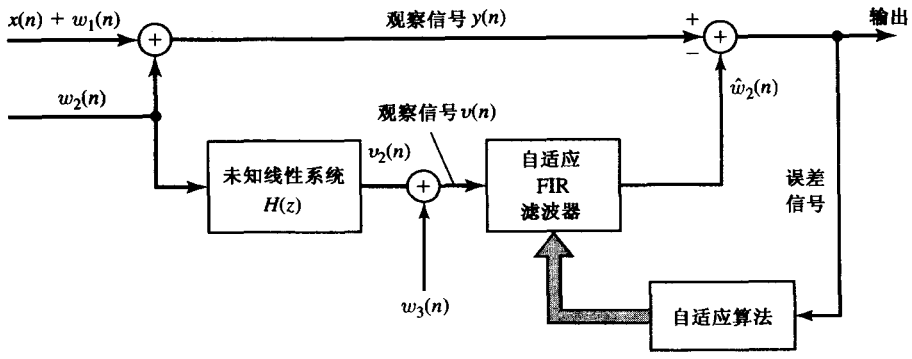


图 13.1.14　自适应噪声取消系统的例子

主要输入信号是由受到叠加噪声 $w_1(n)$和叠加干扰(噪声)$w_2(n)$破坏的有用信号序列 $x(n)$组成。这种叠加干扰(噪声)在经过一种未知线性系统滤波并生成 $v_2(n)$后仍然可以观察到,并进一步受到叠加噪声序列 $w_3(n)$的破坏。因此,我们有另外一种信号序列可用,表达为 $v(n)=v_2(n)+w_3(n)$。序列 $w_1(n)$,$w_2(n)$和 $w_3(n)$假定不是互相关并且零均值。

如图 13.1.14 所示,一种自适应 FIR 滤波器用于从次级信号 $v(n)$估计 $w_2(n)$,并从原始信号中减去估计 $w_2(n)$。代表了有用信号 $x(n)$估计的输出序列就是误差信号

$$\begin{aligned} e(n) &= y(n) - \hat{w}_2(n) \\ &= y(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)v(n-k) \end{aligned} \tag{13.1.25}$$

这种误差序列用于自适应调整 FIR 滤波器系数。

如果最小二乘方准则用于确定滤波器系数,则优化后的结果是线性方程组

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)r_{vv}(l-k) = r_{yv}(l), \qquad l = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{13.1.26}$$

其中,$r_{vv}(l)$是序列 $v(n)$的样本自相关(时间平均),而 $r_{yv}(l)$是序列 $y(n)$和 $v(n)$的样本互相关。显然,噪声消除问题类似于上面所描述的最后 3 个自适应滤波的应用。

13.1.7　语音信号的线性预测编码

在过去的四十年里,已经开发出各种用于语音信号的数字编码方法。例如,在电话系统中,两个常用的语音编码方法是脉码调制(PCM, pulse code modulation)和差分 PCM(DPCM)。这些均是波形编码方法的例子。另外一些波形编码方法也同时开发出来,例如,Δ 调制(DM)和自适应 DPCM。

由于数字语音信号最终是从源传到目的地,所以设计语音编码器的主要目的是将表示语音信号所需要的比特数达到最小,同时保持语音的可理解性。这一目的导致开发出一类低码率(每秒 10 000 比特以下)语音编码方法,主要集中在构造语音信号源的模型和传输模型参数上。在这些基于模型的语音编码系统中,自适应滤波得到了应用。我们现在描述一种非常有效的方法,称为线性预测编码(LPC, linear predictive coding)。

在 LPC 中,声域被模型化为一种线性全极点滤波器,其系统函数为

$$H(z) = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \tag{13.1.27}$$

其中,p 是极点数目,G 是滤波器因子,且 a_k 是确定极点的参数。有两个互斥的激励函数用于模型化浊音信号和清音信号。在一个短时基上,浊音是一个基频为 F_0 或基音周期为 $1/F_0$ 的周期信号,这取决于说话者。因此,浊音信号是通过用一个周期等于有用基音周期的周期脉冲训练去激励一个全极点滤波器模型而产生的。清音语音是通过将一个随机噪声生成器的输出去激励一个全极点滤波器模型而产生的。该模型如图 13.1.15 所示。

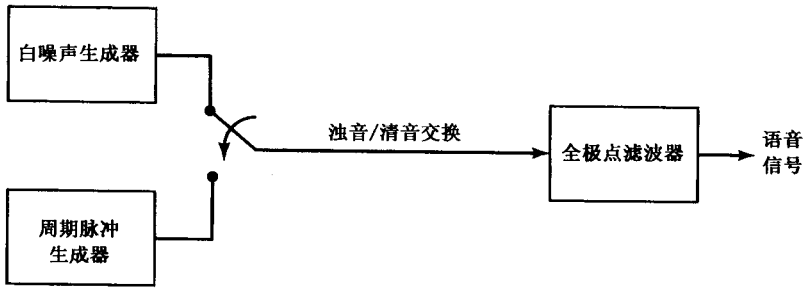


图 13.1.15 语音信号生成的方框模型

给定一个短时段语音信号,传输器中的语音编码器必须确定合适的激励函数、浊音的基音周期、增益参数 G 和系数 $\{a_k\}$。图 13.1.16 给出的方框图说明了源编码系统。该模型的参数是从数据自适应确定的。于是语音样本通过该模型来合成,并且通过计算实际序列和合成序列之间的差值生成误差信号序列(如图 13.1.16 所示)。误差信号和模型参数编码成二进制序列并传输到目的地。在接收端,语音信号是由模型和误差信号合成的。

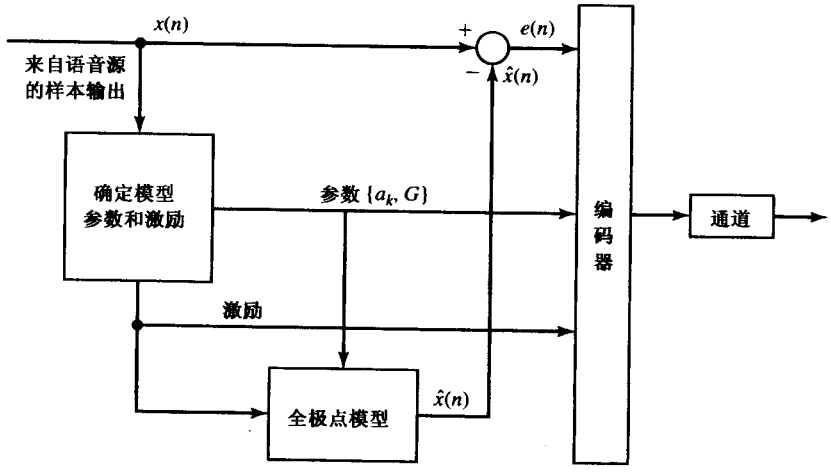


图 13.1.16 语音信号的源编码

全极点滤波器模型的参数通过线性预测方法很容易从语音样本确定。具体来说,考虑图 13.1.17 所示的系统,并假定我们有 N 个信号样本。FIR 滤波器的输出是

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) \tag{13.1.28}$$

并且观察样本 $x(n)$和估计 $\hat{x}(n)$之间的相应误差是

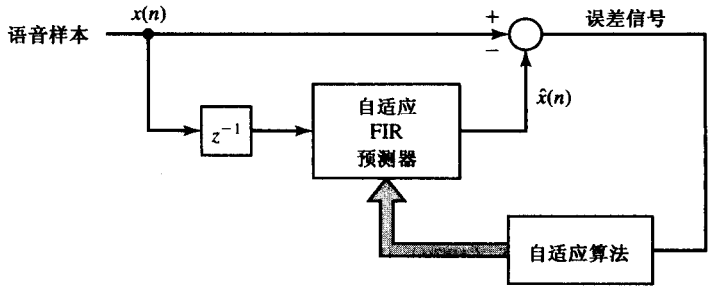


图 13.1.17　LPC 中的极点参数估计

$$e(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) \tag{13.1.29}$$

通过应用最小二乘法，我们可以确定模型参数 a_k。这种优化的结果是生成了线性方程组

$$\sum_{k=1}^{p} a_k r_{xx}(l-k) = r_{xx}(l), \qquad l = 1, 2, \cdots, p \tag{13.1.30}$$

其中，$r_{xx}(l)$是序列 $x(n)$的时间平均自相关。要得到该滤波器的增益参数，可注意到输入输出方程是

$$x(n) = \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + Gv(n) \tag{13.1.31}$$

其中，$v(n)$是输出序列。显然

$$\begin{aligned} Gv(n) &= x(n) - \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) \\ &= e(n) \end{aligned}$$

那么，

$$G^2 \sum_{n=0}^{N-1} v^2(n) = \sum_{n=0}^{N-1} e^2(n) \tag{13.1.32}$$

如果将输入激励通过设计归一化为单位能量，那么

$$\begin{aligned} G^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} e^2(n) \\ &= r_{xx}(0) - \sum_{k=1}^{p} a_k r_{xx}(k) \end{aligned} \tag{13.1.33}$$

于是，G^2 设置等于从最小均方优化生成的残余能量。

在这类开发中，我们已经描述了用线性预测器去自适应地确定极点参数，以及语音生成的全极点滤波器模型的增益。实际上，由于语音信号的非平稳特性，该模型可应用于短时段(10 ms ~ 20 ms)语音信号。通常，对于每一个短时段都可以确定一组新的参数。然而，使用从前一段测量得来的模型参数通常是有益的，可用来平滑在段到段的模型参数估计中所存在的锋利间断点。虽

然我们的讨论总体看来只是 FIR 滤波器结构,但是我们应该注意到语音合成通常是通过使用 FIR 格型结构和反射系数 K_i 来实现的。由于 K_i 的动态范围远比 a_k 的范围小,表示反射系数所需要的比特数更少。因此,K_i 通过通道传输。结果,使用全极点格型结构,在目的地很自然地形成了语音信号。

在用于语音编码的 LPC 方法中,我们没有考虑用于激励估计和基音周期估计的算法。有关选择合适的模型参数的算法的讨论,离题较远,因此省略。有关语音分析和合成方法的详情,有兴趣的读者可参考文献 Rabiner 和 Schafer(1978),以及 Hansen 和 Proakis(2000)。

13.1.8 自适应阵列

在前面的例子中,我们考虑了对单个数据序列执行的自适应滤波。然而,自适应滤波已经广泛适用于来自天线、水诊器和地震检波器的多个数据序列。其中,传感器(天线、水诊器或地震检波器)按某种特殊的空间配置安排。例如,考虑由五个元素组成的线性天线阵列,如图 13.1.18(a)所示。如果信号只是简单的线性相加,那么我们可得到序列

$$x(n)=\sum_{k=1}^{5}x_k(n) \tag{13.1.34}$$

由此导致了天线方向图如图 13.1.18(a)所示。现在,假定干扰信号是从对应于天线阵列中的某个旁瓣的方向接收到的。在信号组合之前通过对序列 $x_k(n)$适当地加权,有可能改变旁瓣模式,以至于阵列在干扰方向包含了一个空值,如图 13.1.18(b)所示。因此,我们得到

$$x(n)=\sum_{k=1}^{5}h_kx_k(n) \tag{13.1.35}$$

其中,h_k 是权重值。

在组合之前简单地对传感器信号输出引入延迟,我们可以同时改变或操纵天线主瓣的方向。因此,从 K 个传感器,可以得到如下形式的组合信号

$$x(n)=\sum_{k=1}^{K}h_kx_k(n-n_k) \tag{13.1.36}$$

其中,h_k 是权重值,n_k 相应于信号 $x(n)$中的 n_k 个样本延迟。权重的选择可用于在某个具体的方向置空。

一般来说,在组合之前我们可以简化每个序列的滤波器。在这样一种情况下,输出序列具有一般形式

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{k=1}^{K}y_k(n)\\&=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=0}^{M-1}h_k(l)x_k(n-n_k-l)\end{aligned} \tag{13.1.37}$$

其中,$h_k(l)$是滤波器的脉冲响应,用于处理第 k 个传感器输出,而 n_k 是控制波束方向图的延迟。

在 13.2.2 节描述的 LMS 算法经常用于自适应选择权重 h_k 或脉冲响应 $h_k(l)$。在 13.3 节描述的更强回归性的最小二乘法可以同时被用于解决多传感器(多通道)数据问题。

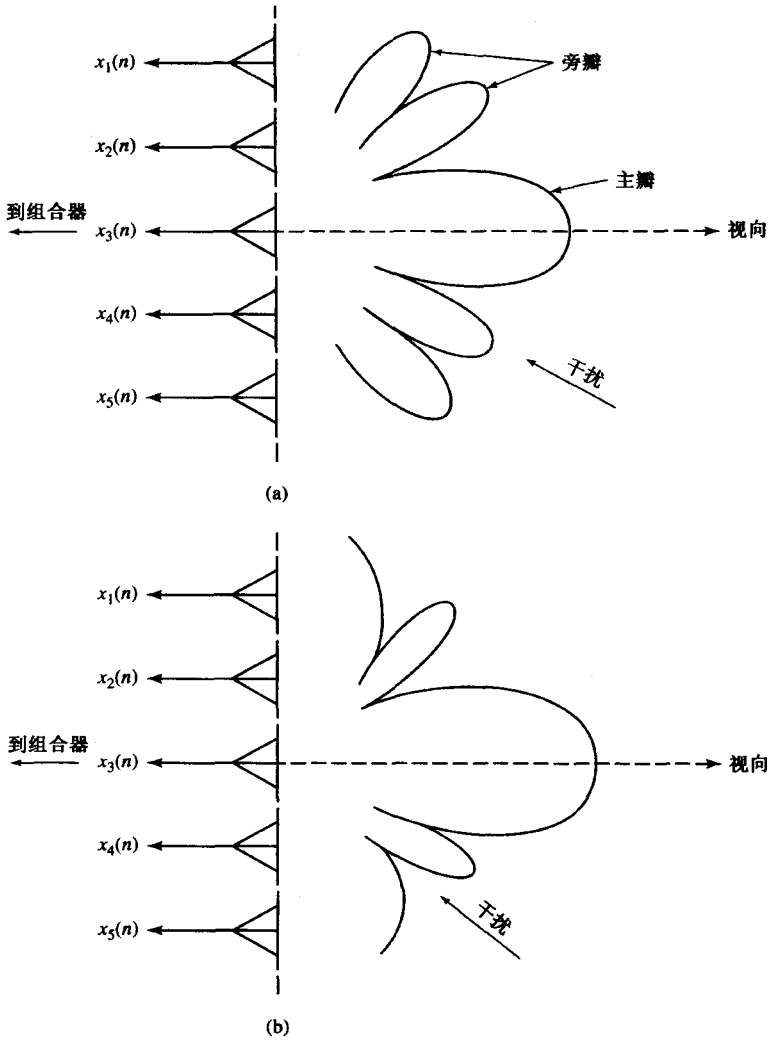


图 13.1.18　线性天线阵列：(a)具有天线模式的线性天线阵列；(b)在干扰方向用空值置换的线性天线阵列

13.2　自适应直接型 FIR 滤波器——LMS 算法

从前面章节的例子中可以看出，在所有自适应滤波的应用中，都存在一种通用的框架结构。由先前所采用的最小二乘方准则可以得出滤波器系数的线性方程组，表示为

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k) r_{xx}(l-k) = r_{dx}(l+D), \qquad l = 0, 1, 2, \cdots, M-1 \tag{13.2.1}$$

其中，$r_{xx}(l)$是序列 $x(n)$的自相关，$r_{dx}(l)$是序列 $d(n)$和 $x(n)$的互相关。延迟参数 D 在某些情况下为零，而其他情况则为非零。

我们注意到，自相关 $r_{xx}(l)$和互相关 $r_{dx}(l)$是从数据中获得的，因此它们表示了真实(统计)的自相关和互相关序列的估计，所以从式(13.2.1)得出的系数 $h(k)$只是真实系数的估计。估计的质量取决于用于估计 $r_{xx}(l)$和 $r_{dx}(l)$的数据记录的长度，这是自适应滤波器实现中必须要考虑的问题之一。

第二个必须要考虑的问题是潜在的随机过程 $x(n)$通常是非平稳的。例如,在信道均衡中,信道的频率响应特性可能是时变的,所以统计自相关和互相关序列以及它们的估计值也是时变的。这意味着自适应滤波器的系数必须随着时间而改变,以适应进入滤波器的信号的时变统计特性。这同时也表明,估计质量不能靠简单地增加用于估计自相关和互相关序列的样本数量而任意地提高。

还有几种方法能够使自适应滤波器的系数随着时间改变以跟踪时变信号的统计特性。最常用的方法是当收到每个新的信号样本时,在逐个样本的基础上递归地调整滤波器。第二种方法是在逐块的基础上估计 $r_{xx}(l)$和 $r_{dx}(l)$,而不是试图维持滤波器系数从一个数据块到另一个数据块的连续性。在这种方法中,块的尺寸必须相对较小,与数据的统计特征发生明显变化的时间间隔相比,数据块包含的时间间隔要短。除了这种块处理方法外,还可以设计其他的块处理方法以适应滤波器系数的块与块之间的连续性。

在介绍自适应滤波算法时,我们只考虑时间递归算法,这种算法在逐个样本的基础上更新滤波器系数。特别地,我们将介绍两种算法类型:LMS 算法,这种算法基于梯度搜索以跟踪时变信号的特征;递归类型的最小二乘方算法,该算法比 LMS 算法明显复杂,但是对信号统计特性的变化能够提供更快的收敛。

13.2.1 最小均方误差准则

用公式表示 FIR 滤波器系数的最优化,可以看成是基于均方误差最小化的估计问题,通常这种方法是最容易得出下面小节中讲述的 LMS 算法的。假设已知(可能是复值的)数据序列 $x(n)$是由平稳随机过程中的样本组成,其自相关序列为

$$\gamma_{xx}(m) = E[x(n)x^*(n-m)] \tag{13.2.2}$$

将观察数据 $x(n)$通过系数为 $h(n)$的 FIR 滤波器,$0 \leqslant n \leqslant M-1$,就可以从这些样本建立期望序列 $h(n)$的估计,滤波器的输出可以表示为

$$\hat{d}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{13.2.3}$$

其中,$\hat{d}(n)$表示为 $d(n)$的估计。估计误差定义为

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - \hat{d}(n) \\ &= d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \end{aligned} \tag{13.2.4}$$

作为滤波器系数的函数,均方误差为

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_M &= E[|e(n)|^2] \\ &= E\left[\left|d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)\right|^2\right] \\ &= E\left\{|d(n)|^2 - 2\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{M-1} h^*(l)d(n)x^*(n-l)\right] + \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{M-1} h^*(l)h(k)x^*(n-l)x(n-k)\right\} \\ &= \sigma_d^2 - 2\mathrm{Re}\left[\sum_{l=0}^{M-1} h^*(l)\gamma_{dx}(l)\right] + \sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{M-1} h^*(l)h(k)\gamma_{xx}(l-k) \end{aligned} \tag{13.2.5}$$

其中,定义 $\sigma_d^2 = E[|d(n)|^2]$。

我们注意到，MSE 是滤波器系数的二次函数，因此，关于系数最小化 $\mathscr{E}_M$ 将得出 M 元线性方程组，

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)\gamma_{xx}(l-k) = \gamma_{dx}(l), \qquad l = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{13.2.6}$$

式(13.2.6)是先前 12.7.1 节推导出的维纳-霍夫(Wiener-Hopf)方程，由该方程得出系数的滤波器称为维纳(Wiener)滤波器。

如果将式(13.2.6)与式(13.2.1)比较，那么很明显这些公式在形式上是类似的，在式(13.2.1)中，使用的是自相关和互相关的估计值来求解滤波器系数，而在式(13.2.6)中使用的是统计自相关和互相关。因此，在 MSE 意义上，式(13.2.6)得出的是最优的(维纳)滤波器系数，而式(13.2.1)得出的是最优系数的估计。

方程组(13.2.6)可以表示成矩阵的形式，

$$\boldsymbol{\Gamma}_M \boldsymbol{h}_M = \boldsymbol{\gamma}_d \tag{13.2.7}$$

其中，$\boldsymbol{h}_M$ 表示系数矢量，$\boldsymbol{\Gamma}_M$ 是元素为 Γ_{lk} 的 $M \times M$ 的(厄密，Hermitian)托普利兹(Toeplitz)矩阵，$\boldsymbol{\gamma}_d$ 是元素为 $\gamma_{dx}(l)$ 的 $M \times 1$ 的互相关矢量，$l = 0, 1, \cdots, M-1$。$\boldsymbol{h}_M$ 的复共轭表示为 $\boldsymbol{h}_M^*$，其转置矩阵表示为 $\boldsymbol{h}_M^t$。最优滤波器系数的解为

$$\boldsymbol{h}_{\text{opt}} = \boldsymbol{\Gamma}_M^{-1} \boldsymbol{\gamma}_d \tag{13.2.8}$$

式(13.2.8)达到最优系数时的最小 MSE 为

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_{M\min} &= \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{M-1} h_{\text{opt}}(k)\gamma_{dx}^*(k) \\ &= \sigma_d^2 - \boldsymbol{\gamma}_d^H \boldsymbol{\Gamma}_M^{-1} \boldsymbol{\gamma}_d \end{aligned} \tag{13.2.9}$$

其中，指数 H 表示共轭转置。

回忆可知，式(13.2.6)中的线性方程组也可以通过应用均方估计中的正交原理得到(见 12.7.2 节)。根据正交原理，当误差 $e(n)$ 在统计意义上与估计值 $\hat{d}(n)$ 正交时，即

$$E[e(n)\hat{d}^*(n)] = 0 \tag{13.2.10}$$

均方估计误差达到最小。但是式(13.2.10)中的条件意味着

$$E\left[\sum_{k=0}^{M-1} h(k)e(n)x^*(n-k)\right] = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)E[e(n)x^*(n-k)] = 0$$

或者等价地，

$$E[e(n)x^*(n-l)] = 0, \qquad l = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{13.2.11}$$

如果用式(13.2.4)给出的 $e(n)$ 的表达式代替式(13.2.11)中的 $e(n)$，并取数学期望，那么就得出了式(13.2.6)给出的方程。

因为 $\hat{d}(n)$ 与 $e(n)$ 正交，所以(最小)均方残差为

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_{M\min} &= E[e(n)d^*(n)] \\ &= E[|d(n)|^2] - \sum_{k=0}^{M-1} h_{\text{opt}}(k)\gamma_{dx}^*(k) \end{aligned} \tag{13.2.12}$$

这就是式(13.2.9)给出的结果。

利用莱文森-德宾(Levinson-Durbin)算法,式(13.2.8)给出的最优滤波器系数可以有效求解,然而,我们还应当考虑利用梯度方法迭归地求解 $\boldsymbol{h}_{opt}$,这就引出了用于自适应滤波的 LMS 算法。

13.2.2 LMS 算法

有许多数值方法可以用于求解式(13.2.6)或式(13.2.7)给出的线性方程组,以计算最优 FIR 滤波器系数。下面,我们来讲述设计用于寻找多变量函数最小值的递归方法,在这种方法中,性能指标就是式(13.2.5)给出的 MSE,它是滤波器系数的二次函数,因此,该函数具有唯一的最小值,也就是我们要通过迭代搜索求解的值。

我们暂且假定自相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 和互相关矢量 $\boldsymbol{\gamma}_d$ 是已知的,因此,$\mathscr{E}_M$ 是系数为 $h(n)$的已知函数,$0 \leqslant n \leqslant M-1$。用于递归计算滤波器系数以搜索 $\mathscr{E}_M$ 最小值的算法应具有的形式为

$$\boldsymbol{h}_M(n+1) = \boldsymbol{h}_M(n) + \frac{1}{2}\Delta(n)\boldsymbol{S}(n), \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{13.2.13}$$

其中,$\boldsymbol{h}_M(n)$是第 n 次迭代的滤波器系数矢量,$\Delta(n)$是第 n 次迭代的步长,$\boldsymbol{S}(n)$是第 n 次迭代的方向矢量,起始矢量 $\boldsymbol{h}_M(0)$是任意选择的。这里我们不介绍需要计算 $\boldsymbol{\Gamma}_M^{-1}$ 的方法,比如牛顿(Newton)方法,而只考虑基于梯度矢量的搜索方法。

最简单的寻找 $\mathscr{E}_M$ 最小值的递归方法是基于最陡下降(steepest-descent)搜索[见 Murray(1972)],在最陡下降算法中,方向矢量 $\boldsymbol{S}(n) = -\boldsymbol{g}(n)$,其中 $\boldsymbol{g}(n)$是第 n 次迭代的梯度矢量,定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(n) &= \frac{d\mathscr{E}_M(n)}{d\boldsymbol{h}_M(n)} \\ &= 2[\boldsymbol{\Gamma}_M\boldsymbol{h}_M(n) - \boldsymbol{\gamma}_d], \qquad n = 0, 1, 2, \cdots\end{aligned} \tag{13.2.14}$$

因此,在每次迭代时都要计算梯度矢量,并在梯度反方向上修改 $\boldsymbol{h}_M(n)$的值,这样基于最陡下降方法的递归算法就是

$$\boldsymbol{h}_M(n+1) = \boldsymbol{h}_M(n) - \frac{1}{2}\Delta(n)\boldsymbol{g}(n) \tag{13.2.15}$$

或者等价地,

$$\boldsymbol{h}_M(n+1) = [\boldsymbol{I} - \Delta(n)\boldsymbol{\Gamma}_M]\boldsymbol{h}_M(n) + \Delta(n)\boldsymbol{\gamma}_d \tag{13.2.16}$$

假如步长序列 $\Delta(n)$是绝对可和的,即当 $n \to \infty$时,$\Delta(n) \to 0$,那么当 $n \to \infty$时,算法将使 $\boldsymbol{h}_M(n)$收敛到极限值 $\boldsymbol{h}_{opt}$,由此得出,当 $n \to \infty$时,$\boldsymbol{g}(n) \to \boldsymbol{0}$。对于该结论,我们只进行陈述而不进行证明。

其他能够提供快速收敛的算法有共轭梯度(conjugate-gradient)算法和弗莱切-鲍威尔(Fletcher-Powell)算法,在共轭梯度算法中,方向矢量为

$$\boldsymbol{S}(n) = \beta(n-1)\boldsymbol{S}(n-1) - \boldsymbol{g}(n) \tag{13.2.17}$$

其中,$\beta(n)$是梯度矢量的标量函数[见 Beckman(1960)];在弗莱切-鲍威尔算法中,方向矢量为

$$\boldsymbol{S}(n) = -\boldsymbol{H}(n)\boldsymbol{g}(n) \tag{13.2.18}$$

其中,$\boldsymbol{H}(n)$是 $M \times M$ 的正定矩阵,它是迭代计算的,收敛于 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 的逆[见 Fletcher 和 Powell(1963)]。很明显,这三个算法在计算方向矢量的方式上是不同的。

这三个算法适用于 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_d$ 已知的情况,然而,正如前所述,在自适应滤波应用中,这种情况并非如此。当 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_d$ 未知时,我们可以用方向矢量的估计值 $\hat{\boldsymbol{S}}(n)$代替实际矢量 $\boldsymbol{S}(n)$。我们现在来考虑这种用于最陡下降算法的方法。

首先,我们注意到,式(13.2.14)给出的梯度矢量也可以用式(13.2.11)给出的正交条件进行表

示。实际上，式(13.2.11)中的条件等价于表达式

$$E[e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)] = \boldsymbol{\gamma}_d - \boldsymbol{\Gamma}_M \boldsymbol{h}_M(n) \tag{13.2.19}$$

其中，$\boldsymbol{X}_M(n)$是元素为 $x(n-l)$的矢量，$l=0,1,\cdots,M-1$，因此，梯度矢量仅仅是

$$\boldsymbol{g}(n) = -2E[e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)] \tag{13.2.20}$$

很明显，当误差与估计值 $\hat{d}(n)$中的数据正交时，梯度矢量 $\boldsymbol{g}(n)=\boldsymbol{0}$。

由式(13.2.20)就可以很简单地得出在第 n 次迭代时梯度矢量的无偏估计

$$\hat{\boldsymbol{g}}(n) = -2e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n) \tag{13.2.21}$$

其中，$e(n)=d(n)-\hat{d}(n)$，$\boldsymbol{X}_M(n)$是滤波器在第 n 次迭代时的 M 个信号的样本集合。这样用 $\hat{\boldsymbol{g}}(n)$代替 $\boldsymbol{g}(n)$，就得出算法

$$\boldsymbol{h}_M(n+1) = \boldsymbol{h}_M(n) + \Delta(n)e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n) \tag{13.2.22}$$

这称为随机梯度下降算法(stochastic-gradient-descent algorithm)，正如式(13.2.22)所给出，该算法具有变化的步长。

在自适应滤波实际应用中，通常使用固定步长的算法，这有两个原因：第一，固定步长算法无论是硬件还是软件都很容易实现；第二，固定步长适用于跟踪时变信号的统计特性，反之，若当 $n\to\infty$ 时，$\Delta(n)\to 0$，则不会出现对信号变化的自适应。正因如此，式(13.2.22)可以更改为另一种算法

$$\boldsymbol{h}_M(n+1) = \boldsymbol{h}_M(n) + \Delta e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n) \tag{13.2.23}$$

其中，Δ 现在就是固定的步长。该算法由威德罗(Widrow)和霍夫(Hoff)首次提出，就是现在众所周知的 LMS(least-mean-squares)算法，很明显，这是一种随机梯度(stochastic-gradient)算法。

LMS 算法相对比较易于实现，正因如此，它在许多自适应滤波应用中被广泛使用。它的性质与缺陷已经被彻底地研究出来。在下面的小节中，我们将简要介绍该算法的重要性质，主要关注收敛性、稳定性以及由于使用梯度矢量估计而引入的噪声。随后，我们还将它的性质与更复杂的递归最小二乘方算法进行比较。

13.2.3　随机梯度相关算法

在自适应滤波应用的文献与实现中，已经提出了几种基本 LMS 算法的变化算法。其中一种是，在调整滤波器系数之前，先对几次迭代的梯度矢量求平均，例如，K 个梯度矢量的平均为

$$\bar{\hat{\boldsymbol{g}}}(nK) = -\frac{2}{K}\sum_{k=0}^{K-1} e(nK+k)\boldsymbol{X}_M^*(nK+k) \tag{13.2.24}$$

每 K 次迭代，对应的用于更新滤波器系数的递归方程为

$$\boldsymbol{h}_M((n+1)K) = \boldsymbol{h}_M(nK) - \frac{1}{2}\Delta\bar{\hat{\boldsymbol{g}}}(nK) \tag{13.2.25}$$

实际上，正如加纳德(Gardner, 1984)所指出的，式(13.2.24)中的平均运算降低了梯度矢量估计的噪声。

另一种可选的方法是用低通滤波器对梯度矢量进行滤波，用滤波器的输出作为梯度矢量的估计，例如，一种用于梯度的简单低通滤波器产生的输出为

$$\hat{\boldsymbol{S}}(n) = \beta\hat{\boldsymbol{S}}(n-1) - \hat{\boldsymbol{g}}(n), \qquad \boldsymbol{S}(0) = -\hat{\boldsymbol{g}}(0) \tag{13.2.26}$$

其中，$\beta(0\leqslant\beta<1)$的选择决定了低通滤波器的带宽。当 β 接近单位 1 时，滤波器带宽较窄，能够对许多梯度矢量进行有效平均；另一方面，当 β 较小时，该低通滤波器具有较大的带宽，因此它对梯

度矢量提供的平均作用较小。用式(13.2.26)给出的滤波后的梯度矢量代替 $\hat{\boldsymbol{g}}(n)$,就得到滤波版的 LMS 算法,

$$\boldsymbol{h}_M(n+1)=\boldsymbol{h}_M(n)+\frac{1}{2}\Delta\hat{\boldsymbol{S}}(n) \tag{13.2.27}$$

Proakis(1974)对滤波-梯度(filtered-gradient)LMS 算法进行了分析。

利用误差信号序列 $e(n)$以及(或者)信号矢量 $\boldsymbol{X}_M(n)$分量所包含的符号信息,就可以得到式(13.2.23)给出的基本 LMS 算法的另外三个变化算法,因此这三个可行的变化算法为

$$\boldsymbol{h}_M(n+1)=\boldsymbol{h}_M(n)+\Delta\text{csgn}[e(n)]\boldsymbol{X}_M^*(n) \tag{13.2.28}$$

$$\boldsymbol{h}_M(n+1)=\boldsymbol{h}_M(n)+\Delta e(n)\text{csgn}[\boldsymbol{X}_M^*(n)] \tag{13.2.29}$$

$$\boldsymbol{h}_M(n+1)=\boldsymbol{h}_M(n)+\Delta\text{csgn}[e(n)]\text{csgn}[\boldsymbol{X}_M^*(n)] \tag{13.2.30}$$

其中,csgn[x]是复数符号函数,定义为

$$\text{csgn}[x]=\begin{cases}1+\text{j}, & \text{Re}(x)>0 \text{ 且 } \text{Im}(x)>0\\ 1-\text{j}, & \text{Re}(x)>0 \text{ 且 } \text{Im}(x)<0\\ -1+\text{j}, & \text{Re}(x)<0 \text{ 且 } \text{Im}(x)>0\\ -1-\text{j}, & \text{Re}(x)<0 \text{ 且 } \text{Im}(x)<0\end{cases}$$

csgn[$\boldsymbol{X}$]表示复数符号函数应用到矢量 $\boldsymbol{X}$ 的每个元素上。因为式(13.2.30)完全消除了乘法运算,并且式(13.2.28)和式(13.2.29)通过选择 Δ 为 1/2 的幂也可以完全消除乘法运算,所以 LMS 的这三个变化算法可以称为降低复杂度的 LMS 算法。计算复杂度降低的代价是滤波器系数收敛到它们的最优值的速度变慢。

LMS 算法的另一个版本称为归一化 LMS(NLMS)算法,这在实际中经常被应用,

$$\boldsymbol{h}_M(n+1)=\boldsymbol{h}_M(n)+\frac{\Delta}{\|\boldsymbol{X}_M(n)\|^2}e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n) \tag{13.2.31}$$

通过将步长除以数据矢量 $\boldsymbol{X}_M(n)$的模,NLMS 算法就等价于使用了变化的步长,其形式为

$$\Delta(n)=\frac{\Delta}{\|\boldsymbol{X}_M(n)\|^2} \tag{13.2.32}$$

因此,每次迭代的步长就与接收的数据矢量 $\boldsymbol{X}_M(n)$的能量成反比。在自适应滤波应用中,当输入到自适应滤波器的信号的动态范围较大时,这种缩放是有利的,例如,在用于慢衰落通信信道的自适应均衡器的实现中就会出现这种情况。在这样的应用中,增加一个较小的正常数到式(13.2.32)的分母中,有利于避免当 $\boldsymbol{X}_M(n)$的模很小时出现的数值不稳定,这样 NLMS 算法的另一个版本就可以使用如下形式的可变步长

$$\Delta(n)=\frac{\Delta}{\delta+\|\boldsymbol{X}_M(n)\|^2} \tag{13.2.33}$$

其中,δ 是较小的正数。

13.2.4 LMS 算法的性质

在这一节,我们来考虑式(13.2.23)给出的 LMS 算法的基本性质。特别地,我们主要关注它的收敛性、稳定性以及由于使用含有噪声的梯度矢量代替实际梯度矢量所产生的过量噪声。含有噪声的梯度矢量估计的使用意味着滤波器系数会随机波动,因此,对算法特性的分析应该从统计意义上进行。

通过确定 $\boldsymbol{h}_M(n)$的平均值是如何收敛到最优系数的,就可以研究 LMS 算法的收敛性与稳定

性。若对式(13.2.23)求数学期望值,则得出

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{h}}_M(n+1) &= \bar{\boldsymbol{h}}_M(n) + \Delta E[e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)] \\ &= \bar{\boldsymbol{h}}_M(n) + \Delta[\boldsymbol{\gamma}_d - \boldsymbol{\Gamma}_M\bar{\boldsymbol{h}}_M(n)] \\ &= (\boldsymbol{I} - \Delta\boldsymbol{\Gamma}_M)\bar{\boldsymbol{h}}_M(n) + \Delta\boldsymbol{\gamma}_d\end{aligned} \tag{13.2.34}$$

其中,$\bar{\boldsymbol{h}}_M(n) = E[\boldsymbol{h}_M(n)]$,$\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵。

式(13.2.34)中的递推关系可以用图 13.2.1 所示的闭环控制系统进行表示,该闭环系统的收敛速度和稳定性由选择的步长参数 Δ 进行调节。为了确定收敛特性,通过对平均系数矢量 $\bar{\boldsymbol{h}}_M(n)$ 进行线性变换,就能很方便地将式(13.2.34)给出的 M 个联立的差分方程分离开来。我们注意到自相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 是厄密的,这样就得出适当的变换。因此,$\boldsymbol{\Gamma}_M$ 可以表示为[见 Gantmacher(1960)]

$$\boldsymbol{\Gamma}_M = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^H \tag{13.2.35}$$

其中,$\boldsymbol{U}$ 是 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 的归一化模态矩阵(normalized modal matrix),$\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵,其对角元素为 λ_k,$0 \leqslant k \leqslant M-1$,它等于 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 的特性值。

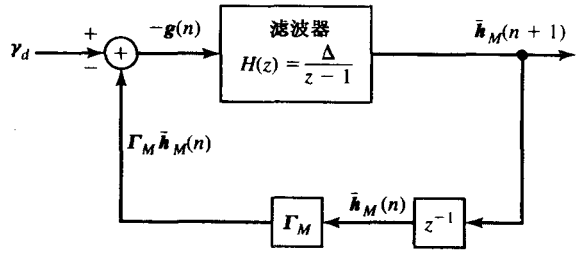


图 13.2.1　递推公式(13.2.34)的闭环控制系统表示

将式(13.2.35)代入到式(13.2.34),则式(13.2.34)就可以表示为

$$\bar{\boldsymbol{h}}_M^0(n+1) = (\boldsymbol{I} - \Delta\boldsymbol{\Lambda})\bar{\boldsymbol{h}}_M^0(n) + \Delta\boldsymbol{\gamma}_d^0 \tag{13.2.36}$$

其中,(正交)变换矢量为 $\bar{\boldsymbol{h}}_M^0(n) = \boldsymbol{U}^H\bar{\boldsymbol{h}}_M(n)$,并且 $\boldsymbol{\gamma}_d^0 = \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{\gamma}_d$。现在,式(13.2.36)中的这组 M 个一阶差分方程就分离开来了,它们的收敛性和稳定性由齐次方程

$$\bar{\boldsymbol{h}}_M^0(n+1) = (\boldsymbol{I} - \Delta\boldsymbol{\Lambda})\bar{\boldsymbol{h}}_M^0(n) \tag{13.2.37}$$

决定。

如果我们把注意力集中到式(13.2.37)中的第 k 个方程的解,那么就会发现

$$\bar{h}^0(k,n) = C(1-\Delta\lambda_k)^n u(n), \qquad k = 0,1,2,\cdots,M-1 \tag{13.2.38}$$

其中,C 是任意常数,$u(n)$是单位阶跃序列。很明显,假如

$$|1 - \Delta\lambda_k| < 1$$

或者等价地,

$$0 < \Delta < \frac{2}{\lambda_k}, \qquad k = 0,1,\cdots,M-1 \tag{13.2.39}$$

则 $\bar{h}^0(k,n)$以指数方式收敛到零。

式(13.2.39)给出的用于第 k 个归一化滤波器系数(闭环系统的第 k 种方式)的齐次差分方程的收敛条件必须满足所有的 $k = 0,1,\cdots,M-1$,所以,确保 LMS 算法系数矢量的平均值收敛的 Δ

值的范围为

$$0 < \Delta < \frac{2}{\lambda_{\max}} \tag{13.2.40}$$

其中,$\lambda_{\max}$是 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 的最大特征值。

因为 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 是自相关矩阵,所以它的特征值是非负的。因此,$\lambda_{\max}$的上界为

$$\lambda_{\max} < \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k = \text{trace}\, \boldsymbol{\Gamma}_M = M\gamma_{xx}(0) \tag{13.2.41}$$

其中,$\gamma_{xx}(0)$是输入信号功率,该值很容易从接收信号中估计出。所以,步长 Δ 的上界为 $2/M\gamma_{xx}(0)$。

从式(13.2.28)可以看出,当$|1-\Delta\lambda_k|$较小,即图 13.2.1 中的闭环系统的极点远离单位圆时,LMS 算法出现快速的收敛。然而,当 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 的最大特征值和最小特征值之间存在较大的差值时,我们不可能在达到期望条件的同时又满足式(13.2.39)中的上界,换言之,即使 Δ 值选取为 $1/\lambda_{\max}$,LMS 算法的收敛速度将由对应于最小特征值 $\lambda_{\min}$的衰落方式决定。对于这种方式,将 $\Delta = 1/\lambda_{\max}$代入式(13.2.28)中,得到

$$h_M^0(k,n) = C\left(1 - \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)^n u(n) \tag{13.2.42}$$

因此,$\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$最终决定了收敛速度。如果 $\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$很小(比单位 1 小很多),那么收敛速度就很慢,另一方面,若 $\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$接近单位 1,则算法收敛速度就较快。

LMS 算法的另一个重要特征是由于使用了梯度矢量的估计而存在噪声,梯度矢量估计值中的噪声使系数在它们的最优值上下随机波动,这样就导致了自适应滤波器输出端的 MMSE 的增大,因此,总的 MSE 为$\mathscr{E}_{M\min} + \mathscr{E}_\Delta$,其中$\mathscr{E}_\Delta$ 称为过量均方误差(excess mean-square error)。

对于给定的任何一组滤波器系数 $\boldsymbol{h}_M(n)$,自适应滤波器输出端的总 MSE 可以表示为

$$\mathscr{E}_t(n) = \mathscr{E}_{M\min} + (\boldsymbol{h}_M(n) - \boldsymbol{h}_{\text{opt}})^t \boldsymbol{\Gamma}_M (\boldsymbol{h}_M(n) - \boldsymbol{h}_{\text{opt}})^* \tag{13.2.43}$$

其中,$\boldsymbol{h}_{\text{opt}}$表示由式(13.2.8)定义的最优滤波器系数。$\mathscr{E}_t(n)$是迭代次数 n 的函数,其图形称为学习曲线(learning curve)。如果用式(13.2.35)代替 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 并进行前面所用的线性正交变换,那么就得出

$$\mathscr{E}_t(n) = \mathscr{E}_{M\min} + \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k \left|h^0(k,n) - h_{\text{opt}}^0(k)\right|^2 \tag{13.2.44}$$

其中,$h^0(k,n) - h_{\text{opt}}^0(k)$这项表示(在正交坐标系统中)第 k 个滤波器系数的误差。过量 MSE 定义为式(13.2.44)中第二项的期望值,

$$\mathscr{E}_\Delta = \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k E\left[\left|h^0(k,n) - h_{\text{opt}}^0(k)\right|^2\right] \tag{13.2.45}$$

为了推导过量 MSE $\mathscr{E}_\Delta$ 的表达式,假设滤波器系数 $\boldsymbol{h}_M(n)$的平均值已经收敛到它们的最优值 $\boldsymbol{h}_{\text{opt}}$,于是式(13.2.23)中给出的 LMS 算法的 $\Delta e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)$这项就是零均值噪声矢量,其协方差为

$$\text{cov}[\Delta e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)] = \Delta^2 E\left[|e(n)|^2 \boldsymbol{X}_M(n)\boldsymbol{X}_M^H(n)\right] \tag{13.2.46}$$

为了得到初步近似值,假定$|e(n)|^2$ 与信号矢量不相关。虽然这个假设并不是严格准确的,但是它简化了推导,并得出了有用的结果。(读者可以参考 Mazo(1979),Jones,Cavin 和 Reed(1982)以及 Gardner(1984)的著作,以在此假设下进行进一步的讨论)。于是,

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}[\Delta e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)] &= \Delta^2 E[|e(n)|^2]E[\boldsymbol{X}_M(n)\boldsymbol{X}_M^H(n)] \\ &= \Delta^2 \mathscr{E}_{M\min}\boldsymbol{\Gamma}_M\end{aligned} \tag{13.2.47}$$

对于与加性噪声正交的系数矢量 $\boldsymbol{h}_M^0(n)$，可以得出等式

$$\boldsymbol{h}_M^0(n+1) = (\boldsymbol{I} - \Delta\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{h}_M^0(n) + \Delta\boldsymbol{\gamma}_d^0 + \boldsymbol{w}^0(n) \tag{13.2.48}$$

其中，$\boldsymbol{w}^0(n)$是加性噪声矢量，它与噪声矢量 $\Delta e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)$存在变换关系

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}^0(n) &= \boldsymbol{U}^H[\Delta e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)] \\ &= \Delta e(n)\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{X}_M^*(n)\end{aligned} \tag{13.2.49}$$

很容易看出噪声矢量的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}[\boldsymbol{w}^0(n)] &= \Delta^2\mathscr{E}_{M\min}\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{\Gamma}_M\boldsymbol{U} \\ &= \Delta^2\mathscr{E}_{M\min}\boldsymbol{\Lambda}\end{aligned} \tag{13.2.50}$$

因此，$\boldsymbol{w}^0(n)$的 M 个分量是不相关的，每个分量的方差为 $\sigma_k^2 = \Delta^2\mathscr{E}_{M\min}\lambda_k$，$k = 0,1,\cdots,M-1$。

因为 $\boldsymbol{w}^0(n)$的噪声分量是不相关的，所以我们可以独立地考虑式(13.2.48)中的分离的差分方程，每个一阶差分方程表示一个冲激响应为$(1-\Delta\lambda_k)^n$ 的滤波器。当用噪声序列 $w_k^0(n)$激励这样的滤波器时，滤波器输出端的噪声的方差为

$$E\left[\left|h^0(k,n) - h_{\mathrm{opt}}^0(k)\right|^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(1-\Delta\lambda_k)^n(1-\Delta\lambda_k)^m E\left[w_k^0(n)w_k^{0*}(m)\right] \tag{13.2.51}$$

我们进行一下简化：假设噪声序列 $w_k^0(n)$是白噪声，于是式(13.2.51)就简化为

$$E\left[\left|h^0(k,n) - h_{\mathrm{opt}}^0(k)\right|^2\right] = \frac{\sigma_k^2}{1-(1-\Delta\lambda_k)^2} = \frac{\Delta^2\mathscr{E}_{M\min}\lambda_k}{1-(1-\Delta\lambda_k)^2} \tag{13.2.52}$$

如果将式(13.2.52)中的结果代入到式(13.2.45)，那么就得到过量 MSE 的表达式

$$\mathscr{E}_\Delta = \Delta^2\mathscr{E}_{M\min}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{\lambda_k^2}{1-(1-\Delta\lambda_k)^2} \tag{13.2.53}$$

如果对于所有的 k 假设 Δ 选择为 $\Delta\lambda_k \ll 1$，那么该表达式就可以简化。于是，

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_\Delta &\approx \Delta^2\mathscr{E}_{M\min}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{\lambda_k^2}{2\Delta\lambda_k} \\ &\approx \frac{1}{2}\Delta\mathscr{E}_{M\min}\sum_{k=0}^{M-1}\lambda_k \\ &\approx \frac{\Delta M\mathscr{E}_{M\min}\gamma_{xx}(0)}{2}\end{aligned} \tag{13.2.54}$$

其中，$\gamma_{xx}(0)$是输入信号的功率。

$\mathscr{E}_\Delta$ 的表达式表明了过量 MSE 正比于步长参数 Δ，因此，Δ 的选择必须基于快速的收敛和微小的过量 MSE 之间的折中。在实际中，我们希望$\mathscr{E}_\Delta < \mathscr{E}_{M\min}$，所以，

$$\frac{\mathscr{E}_\Delta}{\mathscr{E}_{M\min}} \approx \frac{\Delta M\gamma_{xx}(0)}{2} < 1$$

或者等价地,

$$\Delta < \frac{2}{M\gamma_{xx}(0)} \tag{13.2.55}$$

但是,这仅仅是先前得到的 λ_{max} 的上界。在稳态操作中,Δ 应该满足式(13.2.55)中的上界,否则过量 MSE 会造成自适应滤波器性能的明显退化。

前面对过量 MSE 的分析是基于滤波器系数的平均值已经收敛到最优解 $\boldsymbol{h}_{opt}$ 的假设。在这个条件下,步长 Δ 应当满足式(13.2.55)中的上界。另一方面,我们已经确定了平均系数的收敛要求 $\Delta < 2/\lambda_{max}$。当 Δ 的选择接近上界 $2/\lambda_{max}$ 时,可能会带来确定(已知)梯度算法的起始收敛,但这样的大值 Δ 常常会导致随机梯度 LMS 算法的不稳定。

许多学者都研究过 LMS 算法的起始收敛或者瞬时特性,他们的研究结果清楚地指出了步长必须根据自适应滤波器的长度按正比例缩短,如式(13.2.55)所示。式(13.2.55)给出的上界是确保随机梯度 LMS 算法起始收敛的必要条件。在实际中,通常选择 $\Delta < 1/M\gamma_{xx}(0)$。Sayed(2003),Gitlin 和 Weinstein(1979),以及 Ungerboeck(1972)都对 LMS 算法的瞬时特性和收敛性质进行了分析。

在 LMS 算法的数字实现中,步长参数的选择更为关键。在试图降低过量 MSE 时,有可能把步长降低到某一点,而在该点的总输出 MSE 实际上却增大了。这种情形出现在估计梯度分量 $e(n)x^*(n-l)$,$l=0,1,\cdots,M-1$,与小的步长参数 Δ 相乘后小于滤波器系数定点表示的最低有效位的一半。在这种情况中,自适应停止了。因此,重要的是步长应该足够大,以使得滤波器系数能够调整到 $\boldsymbol{h}_{opt}$ 附近。如果希望显著缩短步长,那么就需要增加滤波器系数的精度,典型地,滤波器系数可以使用 16 位精度,其中高 12 位有效位用于滤波数据的算术运算,低 4 位有效位用于提供自适应处理所需要的精度。因此,缩放的估计梯度分量 $\Delta e(n)x^*(n-l)$ 通常只影响最低有效位。实际上,因为在用于滤波数据算术运算的高有效位发生任何变化之前,低有效位必须发生一定的递增变化,所以增加的精度能够使噪声达到平衡。对于 LMS 算法数字实现中的舍入(round-off)误差的分析,读者请参考 Gitlin 和 Weinstein(1979),Gitlin,Meadors 和 Weinstein(1982)以及 Caraiscos 和 Liu(1984)的著作。

最后,还需要指出的是 LMS 算法适用于跟踪慢时变信号的统计特性,在这种情况下,最小 MSE 和最优系数矢量都将是时变的,换言之,$\mathscr{E}_{M\min}$ 是时间的函数,并且 M 维误差曲面也随着时间变量 n 移动。LMS 算法试图在 M 维空间中跟随移动的最小 $\mathscr{E}_{M\min}$,但是由于算法使用了(估计)梯度矢量,所以跟踪常常是滞后的。因此,LMS 算法还存在另一种形式的误差,称之为滞后误差(lag error),随着步长 Δ 的增大,它的均方值会降低。现在总的 MSE 可以表示为

$$\mathscr{E}_{total} = \mathscr{E}_{M\min} + \mathscr{E}_{\Delta} + \mathscr{E}_{l} \tag{13.2.56}$$

其中,$\mathscr{E}_l$ 表示由于滞后产生的 MSE。

在任何给定的非平稳自适应滤波问题中,如果以 Δ 的函数画出 $\mathscr{E}_{\Delta}$ 和 $\mathscr{E}_l$ 的图形,那么希望这些误差曲线的特性如图 13.2.2 所示。我们看到,$\mathscr{E}_{\Delta}$ 随着 Δ 的增大而增加,而 $\mathscr{E}_l$ 随着 Δ 的增大而降低。总的误差会出现一个最小值,该点就决定了步长参数的最优选择。

当信号的统计特性随时间出现快速变化时,自适应滤波器的性能主要由滞后误差决定,在这种情况下,即使使用了最大可能的 Δ 值,$\mathscr{E}_l \gg \mathscr{E}_{M\min} + \mathscr{E}_{\Delta}$。

例 13.2.1 当 LMS 算法用于通信信道的自适应均衡时,其学习曲线如图 13.2.3 所示。FIR 均衡器是以直接形式实现的,其长度为 $M=11$。自相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 的特征值范围为 $\lambda_{max}/\lambda_{min}=11$。通过 200 次的仿真运行,并对(估计的)MSE 求平均,就得到了这三条步长为 $\Delta=0.045,0.09$,和 0.115 的学习曲线。输入信号功率归一化为单位 1,因此,式(13.2.55)中的上界就等于 0.18。通过选择 $\Delta=0.09$(上界的一半),就得

到了快速衰落的学习曲线，如图 13.2.3 所示。如果将 Δ 除以 2 得到 0.045，那么收敛速度将会降低，但是过量 MSE 也降低了，因而在时变信号环境下，该算法表现出了更好的性能。最后，我们看到，选择的 Δ = 0.115 使得算法的输出 MSE 产生了不希望有的较大的波动。注意，Δ = 0.115 明显低于式(13.2.55)给出的上界。

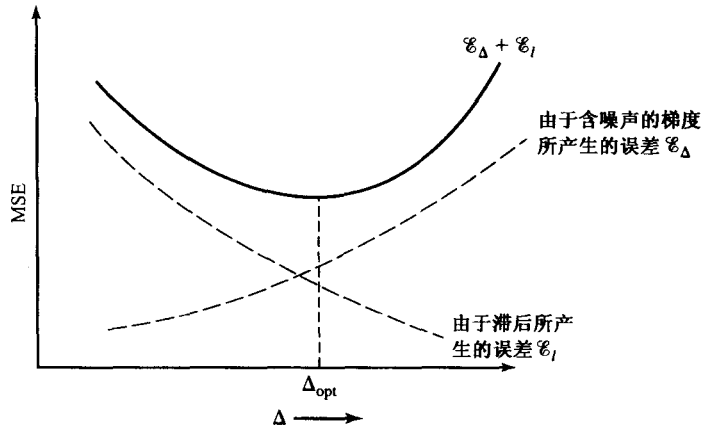


图 13.2.2　作为步长 Δ 函数的过量均方误差 $\mathcal{E}_\Delta$ 和滞后误差 $\mathcal{E}_l$ FIR 滤波器

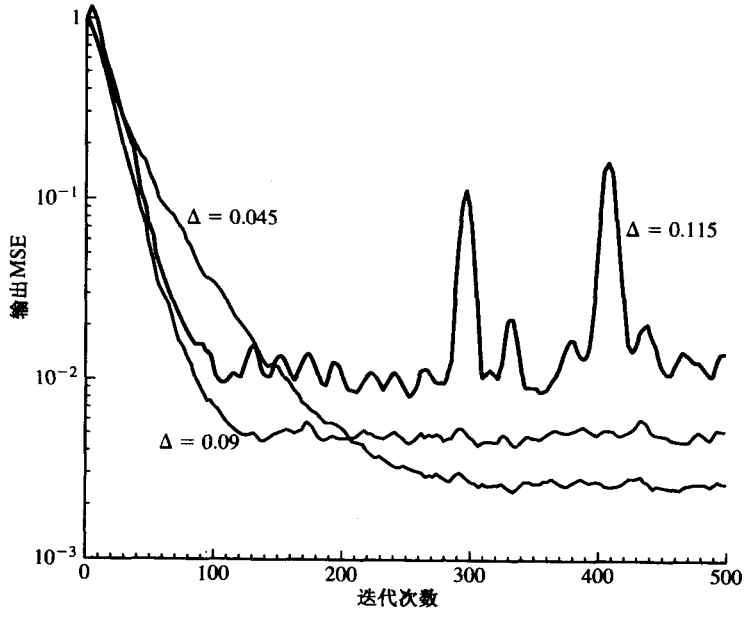


图 13.2.3　LMS 算法应用于自适应均衡器时的学习曲线，其中均衡器的长度 $M = 11$，信道的特征值范围为 $\lambda_{max}/\lambda_{min} = 11$

13.3　自适应直接型滤波器——RLS 算法

LMS 算法的主要优点在于它的计算简单，然而为此付出的代价是缓慢的收敛速度，特别是当自相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 的特征值具有较大的范围，即 $\lambda_{max}/\lambda_{min} \gg 1$ 时。从另一个观点来看，LMS 算法只有单一的可调的参数，即步长参数 Δ 用于控制收敛速度。因为出于稳定的目的，步长要限制低于式(13.2.55)中给出的上界，所以对应于较小特征值方式的收敛速度较慢。

为了得到较快的收敛,就需要设计出包含额外参数的更加复杂的算法。特别地,如果相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 具有不同的特征值 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{M-1}$,那么我们就应该使用含有 M 个参数的算法,每个特征值对应一个参数。在推导更快收敛的自适应滤波算法过程中,我们采用最小二乘方准则而不是基于 MSE 准则的统计方法,这样就要直接处理数据序列 $x(n)$,并从数据中得出相关性的估计。

13.3.1 RLS 算法

为了简化符号,最小二乘方算法可以很方便地表示成矩阵的形式。因为算法在时间上是递归的,所以在滤波器系数矢量和误差矢量上也要引入时间变量。因此,在 n 时刻的滤波器系数矢量定义为

$$\boldsymbol{h}_M(n)=\begin{bmatrix} h(0,n)\\ h(1,n)\\ h(2,n)\\ \vdots\\ h(M-1,n)\end{bmatrix} \tag{13.3.1}$$

其中,下标 M 表示滤波器的长度。同样,在 n 时刻输入到滤波器中的信号矢量表示为

$$\boldsymbol{X}_M(n)=\begin{bmatrix} x(n)\\ x(n-1)\\ x(n-2)\\ \vdots\\ x(n-M+1)\end{bmatrix} \tag{13.3.2}$$

假设当 $n<0$ 时,$x(n)=0$,这通常称为输入数据的前置加窗(prewindowing)。

递归最小二乘方问题现在可以描述如下:假设我们观察到的矢量为 $\boldsymbol{X}_M(l)$,$l=0,1,\cdots,n$,并且希望确定使误差幅度平方的加权和

$$\mathscr{E}_M=\sum_{l=0}^{n}w^{n-l}|e_M(l,n)|^2 \tag{13.3.3}$$

达到最小时的滤波器系数矢量 $\boldsymbol{h}_M(n)$。其中,误差定义为期望序列 $d(l)$和估计 $\hat{d}(l,n)$之间的差值,

$$\begin{aligned} e_M(l,n)&=d(l)-\hat{d}(l,n)\\ &=d(l)-\boldsymbol{h}_M'(n)\boldsymbol{X}_M(l)\end{aligned} \tag{13.3.4}$$

w 是范围为 $0<w<1$ 的加权因子。

使用因子 w 的目的是加重最近数据点的权值,这样使得滤波器系数能够适应时变的数据统计特性。这可以通过对过去的数据使用指数加权因子实现,或者还可以使用在整个窗口内均匀加权的有限长滑动窗口实现。我们发现使用指数加权因子,无论在数学上还是在实践上都非常方便。作为比较,指数加权窗口序列具有的有效记忆为

$$\bar{N}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}nw^n}{\sum_{n=0}^{\infty}w^n}=\frac{w}{1-w} \tag{13.3.5}$$

因此,该序列应当近似等价于长度为 $\bar{N}$ 的滑动窗口。

$\mathscr{E}_M$ 关于滤波器系数矢量 $\boldsymbol{h}_M(n)$的最小化可产生出线性方程组

$$\boldsymbol{R}_M(n)\boldsymbol{h}_M(n)=\boldsymbol{D}_M(n) \tag{13.3.6}$$

其中,$\boldsymbol{R}_M(n)$是信号(估计)相关矩阵,定义为

$$\boldsymbol{R}_M(n)=\sum_{l=0}^{n}w^{n-l}\boldsymbol{X}_M^*(l)\boldsymbol{X}_M^t(l) \tag{13.3.7}$$

$\boldsymbol{D}_M(n)$是(估计)互相关矢量

$$\boldsymbol{D}_M(n)=\sum_{l=0}^{n}w^{n-l}\boldsymbol{X}_M^*(l)d(l) \tag{13.3.8}$$

式(13.3.6)的解为

$$\boldsymbol{h}_M(n)=\boldsymbol{R}_M^{-1}(n)\boldsymbol{D}_M(n) \tag{13.3.9}$$

很明显,矩阵 $\boldsymbol{R}_M(n)$类似于统计自相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_M$,并且矢量 $\boldsymbol{D}_M(n)$类似于先前定义的互相关矢量 $\boldsymbol{\gamma}_d$。然而值得强调的是,$\boldsymbol{R}_M(n)$并不是托普利兹矩阵,而 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 却是。还要提及的是,对于小的 n 值,$\boldsymbol{R}_M(n)$可能是病态的,因而它的逆是不可计算的。在这种情况下,习惯上在初始化时要将 $\boldsymbol{R}_M(n)$加上矩阵 $\delta\boldsymbol{I}_M$,其中,$\boldsymbol{I}_M$ 是单位矩阵,δ 是小的正常数。给过去的数据加上指数权,$\delta\boldsymbol{I}_M$ 增加的影响就会随着时间而消失。

现在,假设已经得到了式(13.3.9)在 $n-1$ 时刻的解,即 $\boldsymbol{h}_M(n-1)$,并且想要计算 $\boldsymbol{h}_M(n)$,对于每个新的信号分量解 M 元方程组,这是无效的,也是不切实际的。替代的方法是递归地计算矩阵和矢量。首先,$\boldsymbol{R}_M(n)$可以递归地计算

$$\boldsymbol{R}_M(n)=w\boldsymbol{R}_M(n-1)+\boldsymbol{X}_M^*(n)\boldsymbol{X}_M^t(n) \tag{13.3.10}$$

式(13.3.10)称为 $\boldsymbol{R}_M(n)$的时间更新方程(time-update equation)。

因为需要 $\boldsymbol{R}_M(n)$的逆,所以我们用矩阵转化定理[见 Householder(1964)],

$$\boldsymbol{R}_M^{-1}(n)=\frac{1}{w}\left[\boldsymbol{R}_M^{-1}(n-1)-\frac{\boldsymbol{R}_M^{-1}(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n)\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{R}_M^{-1}(n-1)}{w+\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{R}_M^{-1}(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n)}\right] \tag{13.3.11}$$

这样,$\boldsymbol{R}_M^{-1}(n)$就可以递归地计算。

为了方便起见,定义 $\boldsymbol{P}_M(n)=\boldsymbol{R}_M^{-1}(n)$。还可以定义一个 M 维矢量 $\boldsymbol{K}_M(n)$,有时称之为卡尔曼增益矢量(Kalman gain vector),其形式为

$$\boldsymbol{K}_M(n)=\frac{1}{w+\mu_M(n)}\boldsymbol{P}_M(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n) \tag{13.3.12}$$

其中,$\mu_M(n)$是一个标量,定义为

$$\mu_M(n)=\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{P}_M(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n) \tag{13.3.13}$$

利用这些定义,式(13.3.11)就变为

$$\boldsymbol{P}_M(n)=\frac{1}{w}\left[\boldsymbol{P}_M(n-1)-\boldsymbol{K}_M(n)\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{P}_M(n-1)\right] \tag{13.3.14}$$

将式(13.3.14)右乘 $\boldsymbol{X}_M^*(n)$,于是,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_M(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)&=\frac{1}{w}\left[\boldsymbol{P}_M(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n)-\boldsymbol{K}_M(n)\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{P}_M(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n)\right]\\&=\frac{1}{w}\{[w+\mu_M(n)]\boldsymbol{K}_M(n)-\boldsymbol{K}_M(n)\mu_M(n)\}=\boldsymbol{K}_M(n)\end{aligned} \tag{13.3.15}$$

因此,卡尔曼增益矢量也可以定义为 $\boldsymbol{P}_M(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)$。

现在,我们利用矩阵转化定理推导用于递归计算滤波器系数的公式。因为

$$\boldsymbol{h}_M(n)=\boldsymbol{P}_M(n)\boldsymbol{D}_M(n) \tag{13.3.16}$$

并且

$$\boldsymbol{D}_M(n)=w\boldsymbol{D}_M(n-1)+d(n)\boldsymbol{X}_M^*(n) \tag{13.3.17}$$

所以,将式(13.3.14)和(13.3.17)代入式(13.3.9),得出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_M(n)&=\frac{1}{w}\left[\boldsymbol{P}_M(n-1)-\boldsymbol{K}_M(n)\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{P}_M(n-1)\right]\\&\quad\times\left[w\boldsymbol{D}_M(n-1)+d(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)\right]\\&=\boldsymbol{P}_M(n-1)\boldsymbol{D}_M(n-1)+\frac{1}{w}d(n)\boldsymbol{P}_M(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n)\\&\quad-\boldsymbol{K}_M(n)\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{P}_M(n-1)\boldsymbol{D}_M(n-1)\\&\quad-\frac{1}{w}d(n)\boldsymbol{K}_M(n)\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{P}_M(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n)\\&=\boldsymbol{h}_M(n-1)+\boldsymbol{K}_M(n)\left[d(n)-\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{h}_M(n-1)\right]\end{aligned} \tag{13.3.18}$$

我们看到,$\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{h}_M(n-1)$是自适应滤波器在 n 时刻的输出,该值是基于 $n-1$ 时刻的滤波器系数得到的。因为

$$\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{h}_M(n-1)=\hat{d}(n,n-1)\equiv\hat{d}(n) \tag{13.3.19}$$

并且

$$e_M(n,n-1)=d(n)-\hat{d}(n,n-1)\equiv e_M(n) \tag{13.3.20}$$

所以,由此得出,$\boldsymbol{h}_M(n)$的时间更新方程可以表示为

$$\boldsymbol{h}_M(n)=\boldsymbol{h}_M(n-1)+\boldsymbol{K}_M(n)e_M(n) \tag{13.3.21}$$

或者等价地,

$$\boldsymbol{h}_M(n)=\boldsymbol{h}_M(n-1)+\boldsymbol{P}_M(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)e_M(n) \tag{13.3.22}$$

为了总结,假设有最优滤波器系数 $\boldsymbol{h}_M(n-1)$、矩阵 $\boldsymbol{P}_M(n-1)$以及矢量 $\mathrm{X}_M(n-1)$。当得到新的信号分量 $x(n)$时,通过从 $\boldsymbol{X}_M(n-1)k$ 中去掉$x(n-M)$项并将添加 $x(n)$项作为第一个元素,就构成了矢量 $\boldsymbol{X}_M(n)$。于是,滤波器系数就按如下步骤递归计算:

1. 计算滤波器输出

$$\hat{d}(n)=\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{h}_M(n-1) \tag{13.3.23}$$

2. 计算误差

$$e_M(n)=d(n)-\hat{d}(n) \tag{13.3.24}$$

3. 计算卡尔曼增益矢量

$$\boldsymbol{K}_M(n)=\frac{\boldsymbol{P}_M(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n)}{w+\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{P}_M(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n)} \tag{13.3.25}$$

4. 更新相关矩阵的逆

$$\boldsymbol{P}_M(n)=\frac{1}{w}\left[\boldsymbol{P}_M(n-1)-\boldsymbol{K}_M(n)\boldsymbol{X}_M^t(n)\boldsymbol{P}_M(n-1)\right] \tag{13.3.26}$$

5. 更新滤波器系数矢量

$$\boldsymbol{h}_M(n) = \boldsymbol{h}_M(n-1) + \boldsymbol{K}_M(n)e_M(n) \tag{13.3.27}$$

由式(13.3.23)到式(13.3.27)指定的递归算法称为直接型递归最小二乘方(RLS)算法(the direct-form recursive least-squares algorithm)。通过设定 $\boldsymbol{h}_M(-1)=\boldsymbol{0}$ 以及 $\boldsymbol{P}_M(-1)=1/\delta\boldsymbol{I}_M$,对算法进行初始化,其中 δ 是小的正数。

由前面最优化产生的残数 MSE 为

$$\mathscr{E}_{M\min} = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}|d(l)|^2 - \boldsymbol{h}_M^t(n)\boldsymbol{D}_M^*(n) \tag{13.3.28}$$

由式(13.3.27)可以看到,滤波器系数以误差 $e_M(n)$ 乘以卡尔曼增益矢量 $\boldsymbol{K}_M(n)$ 的量随时间的变化而变化。因为 $\boldsymbol{K}_M(n)$ 是 M 维矢量,所以每个滤波器系数由 $\boldsymbol{K}_M(n)$ 中的一个元素控制。因此,就得到了快速收敛。相反,利用 LMS 算法调整的滤波器系数的更新方程为

$$\boldsymbol{h}_M(n) = \boldsymbol{h}_M(n-1) + \Delta\boldsymbol{X}^*(n)e_M(n) \tag{13.3.29}$$

它只有单一的参数 Δ 可用于系数调整速率的控制。

13.3.2　LDU 因式分解与平方根算法

RLS 算法在有限精度的算术实现中,对舍入误差较为敏感。舍入误差的主要问题出现在 $\boldsymbol{P}_M(n)$ 的更新上,为了解决这个问题,需要对相关矩阵 $\boldsymbol{R}_M(n)$ 或者它的逆 $\boldsymbol{P}_M(n)$ 进行分解。

为详细说明,我们现在考虑 $\boldsymbol{P}_M(n)$ 的 LDU(lower-triangular/diagonal/upper-triangular)分解,可写为

$$\boldsymbol{P}_M(n) = \boldsymbol{L}_M(n)\bar{\boldsymbol{D}}_M(n)\boldsymbol{L}_M^H(n) \tag{13.3.30}$$

其中,$\boldsymbol{L}_M(n)$ 是元素为 l_{ik} 的下三角矩阵,$\bar{\boldsymbol{D}}_M(n)$ 是元素为 δ_k 的对角矩阵,$\boldsymbol{L}_M^H(n)$ 是上三角矩阵,$\boldsymbol{L}_M(n)$ 的对角元素设置为单位 1(即 $l_{ii}=1$)。现在,我们可以确定一个公式来直接更新因子 $\boldsymbol{L}_M(n)$ 和 $\bar{\boldsymbol{D}}_M(n)$,而不是递归地计算 $\boldsymbol{P}_M(n)$,这样就避免了 $\boldsymbol{P}_M(n)$ 的计算。

通过将 $\boldsymbol{P}_M(n)$ 分解后的形式代入到式(13.3.26),就得到了期望的更新公式。因此,有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}_M(n)\bar{\boldsymbol{D}}_M(n)\boldsymbol{L}_M^H(n)\\&= \frac{1}{w}\boldsymbol{L}_M(n-1)\left[\bar{\boldsymbol{D}}_M(n-1) - \frac{1}{w+\mu_M(n)}\boldsymbol{V}_M(n-1)\boldsymbol{V}_M^H(n-1)\right]\boldsymbol{L}_M^H(n-1)\end{aligned} \tag{13.3.31}$$

其中,定义

$$\boldsymbol{V}_M(n-1) = \bar{\boldsymbol{D}}_M(n-1)\boldsymbol{L}_M^H(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n) \tag{13.3.32}$$

式(13.3.31)中方括号内的项是厄密矩阵,可以表示成 LDU 分解的形式

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{L}}_M(n-1)\hat{\bar{\boldsymbol{D}}}_M(n-1)\hat{\boldsymbol{L}}_M^H(n-1)\\&= \bar{\boldsymbol{D}}_M(n-1) - \frac{1}{w+\mu_M(n)}\boldsymbol{V}_M(n-1)\boldsymbol{V}_M^H(n-1)\end{aligned} \tag{13.3.33}$$

于是,如果将式(13.3.33)代入式(13.3.31),那么就得出

$$\boldsymbol{L}_M(n)\bar{\boldsymbol{D}}_M(n)\hat{\boldsymbol{L}}_M^H(n) = \frac{1}{w}\left[\boldsymbol{L}_M(n-1)\hat{\boldsymbol{L}}_M(n-1)\hat{\bar{\boldsymbol{D}}}_M(n-1)\hat{\boldsymbol{L}}_M^H(n-1)\boldsymbol{L}_M^H(n-1)\right] \tag{13.3.34}$$

因此,期望的更新关系式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_M(n) &= \boldsymbol{L}_M(n-1)\hat{\boldsymbol{L}}_M(n-1)\\ \bar{\boldsymbol{D}}_M(n) &= \frac{1}{w}\hat{\boldsymbol{D}}_M(n-1)\end{aligned} \tag{13.3.35}$$

为了求解因子 $\hat{\boldsymbol{L}}_M(n-1)$和 $\hat{\boldsymbol{D}}_M(n-1)$,需要分解式(13.3.33)右手边(RHS, right-hand side)的矩阵,这个因式分解可以由线性方程组进行表示

$$\sum_{k=1}^{j} l_{ik}d_k l_{jk}^* = p_{ij}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i-1, \qquad i \geqslant 2 \tag{13.3.36}$$

其中,$\{d_k\}$是 $\hat{\boldsymbol{D}}_M(n-1)$的元素,$\{l_{ik}\}$是 $\hat{\boldsymbol{L}}_M(n-1)$的元素,$\{p_{ij}\}$是式(13.3.33)右手边矩阵的元素。于是,$\{l_{ik}\}$和$\{d_k\}$的求解如下:

$$\begin{aligned} d_1 &= p_{11}\\ l_{ij}d_j &= p_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}d_k l_{jk}^*, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i-1, \quad 2 \leqslant i \leqslant M\\ d_i &= p_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |l_{ik}|^2 d_k, \qquad 2 \leqslant i \leqslant M \end{aligned} \tag{13.3.37}$$

由式(13.3.35)中的时间更新方程得到的最终算法直接取决于数据矢量 $\boldsymbol{X}_M(n)$而不是数据矢量的"平方",这样就避免了数据平方的运算,因此,舍入误差的影响就明显降低了。

无论是对 $\boldsymbol{R}_M(n)$还是对 $\boldsymbol{P}_M(n)$进行 LDU 因式分解所得到的 RLS 算法,都称为平方根 RLS 算法(square-root RLS algorithm)。Bierman(1977),Carlson 和 Culmone(1979)以及 Hsu(1982)也研究过这些算法,表 13.1 给出了刚刚讲述的基于对 $\boldsymbol{P}_M(n)$进行 LDU 分解的平方根 RLS 算法,其计算复杂度与 M^2 成正比。

13.3.3 快速 RLS 算法

正如前面所指出的,RLS 直接型算法和平方根算法的计算复杂度都正比于 M^2。另一方面,将在 13.4 节推导的 RLS 格型算法的计算复杂度正比于 M。基本上,格型算法避免了计算卡尔曼增益矢量 $\boldsymbol{K}_M(n)$时的矩阵乘法运算。

在 13.4 节推导 RLS 格型算法时,通过前向和后向预测公式,就有可能得出卡尔曼增益矢量的时间更新方程,而完全避免矩阵乘法运算。最终算法的复杂度正比于 M(乘法和除法),因此称之为直接型 FIR 滤波器的快速 RLS 算法(fast RLS algorithm)。

快速算法有许多版本,但是它们的差别较小,表 13.2 和表 13.3 给出了用于复值信号的两个版本。快速算法中使用的变量也列在了这些表中,这些变量的定义将在 13.4 节给出。版本 A 的计算复杂度为$(10M-4)$个(复数)乘法和除法,而版本 B 的复杂度为$(9M+1)$个乘法和除法,进一步将计算复杂度降低到 $7M$ 也是有可能的。例如,Carayannis, Manolakis 和 Kalouptsidis(1983)描述了一种称为 FAEST(fast a posteriori error sequential technique)的快速 RLS 算法,其计算复杂度为 $7M$。该算法将在 13.4 节介绍。复杂为 $7M$ 算法的其他版本也已经被提出,但是其中许多算法对舍入误差极其敏感,出现了不稳定的问题[Falconer 和 Ljung(1978); Carayannis, Manolakis 和 Kalouptsidis(1983; 1986)以及 Cioffi 和 Kailath(1984)]。Slock 和 Kailath 已经指出了如何只相对增加一点计算量就可以使这些快速$(7M)$算法稳定。13.4 节给出了两种稳定快速 RLS 算法。

表 13.1　平方根 RLS 算法的 LDU 形式

for $j = 1, \cdots, 2, \cdots, M$ do
　$f_j = x_j^*(n)$
end loop j
for $j = 1, 2, \cdots, M-1$ do
　for $i = j+1, j+2, \cdots, M$ do
　　$f_j = f_j + l_{ij}(n-1) f_i$
end loop j
for $j = 1, 2, \cdots, M$ do
　　$\bar{d}_j(n) = d_j(n-1)/w$
　　$v_j = \bar{d}_j(n) f_j$
end loop j
$\alpha_M = 1 + v_M f_M^*$
$d_M(n) = \bar{d}_M(n)/\alpha_M$
$\bar{k}_M = v_M$
for $j = M-1, M-2, \cdots, 1$ do
　$\bar{k}_j = v_j$
　$\alpha_j = \alpha_{j+1} + v_j f_j^*$
　$\lambda_j = f_j/\alpha_{j+1}$
　$d_j(n) = \bar{d}_j(n)\alpha_{j+1}/\alpha_1$
　for $i = M, M-1, \cdots, j+1$ do
　　$l_{ij}(n) = l_{ij}(n-1) + \bar{k}_i^* \lambda_j$
　　$\bar{k}_i = \bar{k}_i + v_j l_{ij}^*(n-1)$　　down to $j = 2$)
　end loop i
end loop j
$\bar{\boldsymbol{K}}_M(n) = [\bar{k}_1, \bar{k}_2, \cdots, \bar{k}_M]^t$
$e_M(n) = d(n) - \hat{d}(n)$
$\boldsymbol{h}_M(n) = \boldsymbol{h}_M(n-1) + [e_M(n)/\alpha_1]\bar{\boldsymbol{K}}_M(n)$

表 13.2　快速 RLS 算法:版本 A

$$
\begin{aligned}
f_{M-1}(n) &= x(n) + \boldsymbol{a}_{M-1}^t(n-1)\boldsymbol{X}_{M-1}(n-1) \\
g_{M-1}(n) &= x(n-M+1) + \boldsymbol{b}_{M-1}^t(n-1)\boldsymbol{X}_{M-1}(n) \\
\boldsymbol{a}_{M-1}(n) &= \boldsymbol{a}_{M-1}(n-1) - \boldsymbol{K}_{M-1}(n-1) f_{M-1}(n) \\
f_{M-1}(n,n) &= x(n) + \boldsymbol{a}_{M-1}^t(n)\boldsymbol{X}_{M-1}(n-1) \\
E_{M-1}^f(n) &= wE_{M-1}^f(n-1) + f_{M-1}(n) f_{M-1}^*(n,n) \\
\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{M-1}(n) \\ c_{\mathrm{MM}}(n) \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{K}_M(n) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{K}_{M-1}(n-1) \end{bmatrix} + \frac{f_{M-1}^*(n,n)}{E_{M-1}^f(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{a}_{M-1}(n) \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{K}_{M-1}(n) &= \frac{\boldsymbol{C}_{M-1}(n) - c_{\mathrm{MM}}(n)\boldsymbol{b}_{M-1}(n-1)}{1 - c_{\mathrm{MM}}(n) g_{M-1}(n)} \\
\boldsymbol{b}_{M-1}(n) &= \boldsymbol{b}_{M-1}(n-1) - \boldsymbol{K}_{M-1}(n) g_{M-1}(n) \\
\hat{d}(n) &= \boldsymbol{h}_M^t(n-1)\boldsymbol{X}_M(n) \\
e_M(n) &= d(n) - \hat{d}(n) \\
\boldsymbol{h}_M(n) &= \boldsymbol{h}_M(n-1) + \boldsymbol{K}_M(n) e_M(n)
\end{aligned}
$$

初始化

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{M-1}(-1) &= \boldsymbol{b}_{M-1}(-1) = \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{K}_{M-1}(-1) &= \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{h}_{M-1}(-1) &= \boldsymbol{0} \\
E_{M-1}^f(-1) &= \epsilon, \quad \epsilon > 0
\end{aligned}
$$

表 13.3 快速 RLS 算法:版本 B

$$f_{M-1}(n) = x(n) + \boldsymbol{a}'_{M-1}(n-1)\boldsymbol{X}_{M-1}(n-1)$$
$$g_{M-1}(n) = x(n-M+1) + \boldsymbol{b}'_{M-1}(n-1)\boldsymbol{X}_{M-1}(n)$$
$$\boldsymbol{a}_{M-1}(n) = \boldsymbol{a}_{M-1}(n-1) - \boldsymbol{K}_{M-1}(n-1)f_{M-1}(n)$$
$$f_{M-1}(n,n) = \alpha_{M-1}(n-1)f_{M-1}(n)$$
$$E^f_{M-1}(n) = wE^f_{M-1}(n-1) + \alpha_{M-1}(n-1)|f_{M-1}(n)|^2$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{M-1}(n)\\ c_{MM}(n)\end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{K}_M(n) = \begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{K}_{M-1}(n-1)\end{bmatrix} + \frac{f^*_{M-1}(n,n)}{E^f_{M-1}(n)}\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{a}_{M-1}(n)\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{K}_{M-1}(n) = \frac{\boldsymbol{C}_{M-1}(n) - c_{MM}(n)\boldsymbol{b}_{M-1}(n-1)}{1 - c_{MM}(n)g_{M-1}(n)}$$
$$\boldsymbol{b}_{M-1}(n) = \boldsymbol{b}_{M-1}(n-1) - \boldsymbol{K}_{M-1}(n)g_{M-1}(n)$$
$$\alpha_{M-1}(n) = \alpha_{M-1}(n-1)\left[\frac{1 - \frac{f_{M-1}(n)f^*_{M-1}(n,n)}{E^f_{M-1}(n)}}{1 - c_{MM}(n)g_{M-1}(n)}\right]$$
$$\hat{d}(n) = \boldsymbol{h}'_M(n-1)\boldsymbol{X}_M(n)$$
$$e_M(n) = d(n) - \hat{d}(n)$$
$$\boldsymbol{h}_M(n) = \boldsymbol{h}_M(n-1) + \boldsymbol{K}_M(n)e_M(n)$$

初始化

$$\boldsymbol{a}_{M-1}(-1) = \boldsymbol{b}_{M-1}(-1) = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{K}_{M-1}(-1) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{h}_{M-1}(-1) = \boldsymbol{0}$$
$$E^f_{M-1}(-1) = \epsilon > 0$$

13.3.4 直接型 RLS 算法的性质

相对于 LMS 算法,直接型 RLS 算法的主要优点在于其快速收敛性,这个特性如图 13.3.1 所示。该图展示了用于长度为 $M=11$ 的自适应 FIR 信道均衡器的 LMS 和直接型 RLS 算法的收敛速度,接收信号的统计自相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_M$ 的特征值比为 $\lambda_{max}/\lambda_{min}=11$,均衡器的所有系数初始化为零,LMS 算法的步长选择为 $\Delta=0.2$,该步长在收敛速度和过量 MSE 之间表现出良好的折中。

RLS 算法达到的快速收敛的优势是很明显的。RLS 算法在不到 70 次迭代(70 个信号样本)后就收敛了,而 LMS 算法在 600 次迭代后还没有收敛。在信号统计特性随时间快速变化的应用中,RLS 算法的这种快速收敛速度是非常重要的,例如,当信号强度与加性噪声相当或者更低时,电离层高频(HF,high-frequency)无线信道的时变统计特性会导致信号的频率衰落。在信号衰落过程中,LMS 和 RLS 两种算法都不能够跟踪信道特性。当信号从衰落中恢复时,信道特性通常跟衰落之前是有区别的。在这种情况下,LMS 算法适应新信道特性的速度比较缓慢;而另一方面,RLS 算法却能够快速跟踪这样快速变化的信号[Hsu(1982)]。

尽管 RLS 算法有较好的收敛速度,但是用于前面章节所述的 FIR 自适应滤波的 RLS 算法有两个重大的缺点。其一是它们的计算复杂度。平方根算法具有正比于 M^2 的复杂度,虽然快速 RLS 算法具有正比于 M 的复杂度,但比例因子却是 LMS 算法的 4 到 5 倍。

算法的第二个缺点是对由于递归计算带来的舍入误差的积聚很敏感。在某些情况下,舍入误差会导致这些算法变得不稳定。

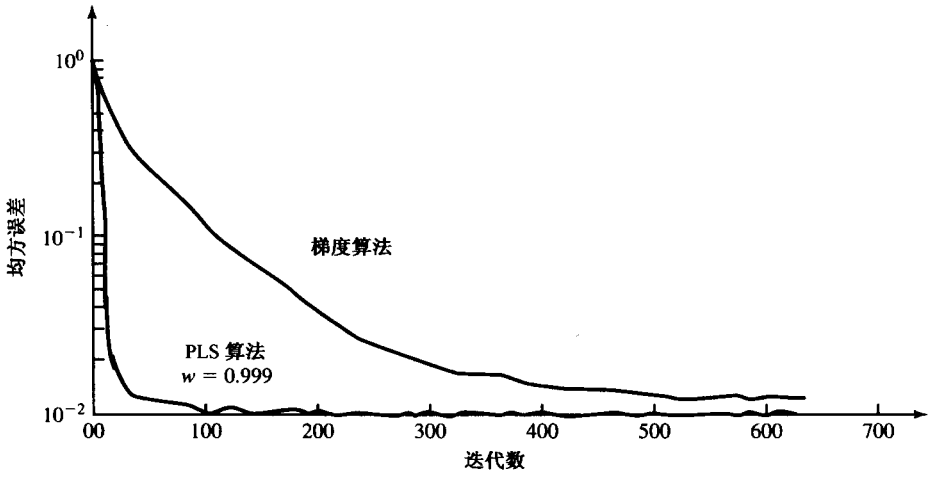


图 13.3.1　用于自适应均衡器 RLS 和 LMS 算法的学习曲线，均衡器长度为 $M = 11$。信道特征值的范围为 $\lambda_{max}/\lambda_{min} = 11$。LMS算法的步长 $\Delta = 0.02$。（摘自《数字通信》，作者John G. Proakis，McGraw-Hill图书出版公司©1983，出版者许可重印）

许多学者都研究过 RLS 算法的数值特性，包括 Ling 和 Proakis(1984a)，Ljung(1985)以及 Cioffi (1987b)。作为举例说明，表 13.4 给出了一些算法在不同字长时的稳态(时间平均)平方误差的仿真结果，包括 RLS 平方根算法、表 13.2 中的快速 RLS 算法以及 LMS 算法。该仿真是在一种具有 $M = 11$ 个系数的自适应均衡器上进行的。信道的特征值比为 $\lambda_{max}/\lambda_{min} = 11$，RLS 算法中使用的指数加权因子为 $w = 0.975$，LMS 算法的步长为 $\Delta = 0.025$，加性噪声的方差为 0.001，无限精度的输出 MSE 为 2.1×10^{-3}。

表 13.4　FIR 自适应滤波算法的数值精确度(最小二乘方误差 $\times 10^{-3}$)

位数（包括符号位）	算法		
	RLS 平方根	快速 RLS	LMS
16	2.17	2.17	2.30
13	2.33	2.21	2.30
11	6.14	3.34	19.0
10	17.6	[a]	77.2
9	75.3	[a]	311.0
8	[a]	[a]	1170.0

[a] 算法没有收敛到最优系数

应当指出的是，直接型 RLS 算法会变得不稳定，因此用 16 位定点算术运算就不能很好地工作。对于该算法，通过实验发现，算法需要大约 20 ~ 24 位精度才能很好地工作。另一方面，平方根算法工作的精度可以低至约 9 位，但是当低至 11 位时，算法的性能就明显退化。快速 RLS 算法低至 11 位也能很好地工作，但只能维持 500 次迭代的较短时间。对于更多的迭代次数，由于舍入误差的积聚，算法将变得不稳定。在这种情况下，已经有许多算法被提出用于算法的重新启动以防止系数的溢出。有兴趣的读者可以参考 Eleftheriou 和 Falconer(1987)，Cioffi 和 Kailath(1984)以及 Hsu(1982)的著作。此外，还可以根据 Slock 和 Kailath(1988;1991)所提出的方法来修改算法，这样就能够使算法稳定。

从表 13.4 还可以看出，LMS 算法对舍入误差具有很强的健壮性。当滤波器系数的精度降低

时,该算法如同预想的一样会变得恶化,但是当精度为 8 位或 9 位时不会发生突变失效(不稳定)。然而,当精度低于 12 位时,性能上的退化是非常明显的。

13.4 自适应格子 - 梯型滤波器

在第 9 章和第 12 章,我们曾阐述过 FIR 滤波器也可以用格型结构实现,其中称为反射系数(reflection coefficients)的格型参数与直接型 FIR 结构的滤波器系数有关。我们还讲述了将 FIR 滤波器系数转化成反射系数(以及反向转换)的方法。

在这一节,我们将推导格型或者格子-梯型结构的滤波器的自适应滤波算法。这些基于最小二乘方法的自适应格子-梯型滤波器算法具有很多优良的性质,包括计算效率以及对舍入误差的健壮性。在研究 RLS 格子-梯型算法时,我们还会得出快速 RLS 算法,这在 13.3.3 节已经讲述过。

13.4.1 递归最小二乘方格子 - 梯型算法

在第 12 章,我们已经说明过格型滤波器结构与线性预测器的关系,并推导了预测器系数转化为格型反射系数的关系方程(以及反向转换)。我们还建立了用于线性预测器系数的莱文森-德宾递推式与格型滤波器反射系数之间的关系。由这些推导,通过将最小二乘方估计问题用公式以线性预测的形式进行表示,就有希望得出递归最小二乘方格型滤波器,就是我们要采取的方法。

在 13.3.1 节,我们讲述了直接型 FIR 结构。用于该结构的递归最小二乘方算法只在时间上递归,滤波器长度是固定的。滤波长度的变化(增长或缩短)将会引入一组和先前完全不同的新滤波器系数。

相反地,格型滤波器在阶数上递归,因此,滤波器包含的节的数目就很容易增加或者减少,而不会影响其余节的反射系数。此优点以及(在当前和后续章节中介绍的)其他的优点使得格型滤波器在自适应滤波应用中成为众人关注的焦点。

在推导之前,假设观察到的信号为 $x(n-l), l=1,2,\cdots,m$,并考虑对 $x(n)$的线性预测。令 $f_m(l,n)$表示第 m 阶预测器的前向预测误差,定义为

$$f_m(l,n)=x(l)+\boldsymbol{a}_m^t(n)\boldsymbol{X}_m(l-1) \tag{13.4.1}$$

其中,矢量 $-\boldsymbol{a}_m(n)$由前向预测系数,即

$$\boldsymbol{a}_m^t(n)=[a_m(1,n)\ a_m(2,n)\cdots a_m(m,n)] \tag{13.4.2}$$

组成,并且数据矢量 $\boldsymbol{X}_m(l-1)$为

$$\boldsymbol{X}_m^t(l-1)=[x(l-1)\ x(l-2)\cdots x(l-m)] \tag{13.4.3}$$

预测器系数 $\boldsymbol{a}_m(n)$的选择要使时间平均的加权平方误差

$$\mathscr{E}_m^f(n)=\sum_{l=0}^{n}w^{n-l}|f_m(l,n)|^2 \tag{13.4.4}$$

达到最小。

$\mathscr{E}_m^f(n)$关于 $\boldsymbol{a}_m(n)$的最小化将得出线性方程组

$$\boldsymbol{R}_m(n-1)\boldsymbol{a}_m(n)=-\boldsymbol{Q}_m(n) \tag{13.4.5}$$

其中,$\boldsymbol{R}_m(n)$在式(13.3.7)中已定义,$\boldsymbol{Q}_m(n)$定义为

$$\boldsymbol{Q}_m(n)=\sum_{l=0}^{n}w^{n-l}x(l)\boldsymbol{X}_m^*(l-1) \tag{13.4.6}$$

方程(13.4.5)的解为

$$\boldsymbol{a}_m(n) = -\boldsymbol{R}_m^{-1}(n-1)\boldsymbol{Q}_m(n) \tag{13.4.7}$$

利用式(13.4.7)确定的线性预测器可得到$\mathscr{E}_m^f(n)$的最小值,表示为 $E_m^f(n)$,

$$\begin{aligned} E_m^f(n) &= \sum_{l=0}^{n} w^{n-l} x^*(l)\left[x(l) + \boldsymbol{a}_m^t(n)\boldsymbol{X}_m(l-1)\right] \\ &= q(n) + \boldsymbol{a}_m^t(n)\boldsymbol{Q}_m^*(n) \end{aligned} \tag{13.4.8}$$

其中,$q(n)$定义为

$$q(n) = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}|x(l)|^2 \tag{13.4.9}$$

式(13.4.5)中的线性方程以及式(13.4.8)中用于 $E_m^f(n)$的方程可以合并成单一的矩阵方程,其形式为

$$\begin{bmatrix} q(n) & \boldsymbol{Q}_m^H(n) \\ \boldsymbol{Q}_m(n) & \boldsymbol{R}_m(n-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{a}_m(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m^f(n) \\ \boldsymbol{O}_m \end{bmatrix} \tag{13.4.10}$$

其中,$\boldsymbol{O}_m$ 是 m 维零矢量。非常有趣的是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{m+1}(n) &= \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}\boldsymbol{X}_{m+1}^*(l)\boldsymbol{X}_{m+1}^t(l) \\ &= \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}\begin{bmatrix} x^*(l) \\ \boldsymbol{X}_m^*(l-1) \end{bmatrix}\left[x(l)\boldsymbol{X}_m^t(l-1)\right] \\ &= \begin{bmatrix} q(n) & \boldsymbol{Q}_m^H(n) \\ \boldsymbol{Q}_m(n) & \boldsymbol{R}_m(n-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13.4.11}$$

这就是式(13.4.10)中的矩阵。

作为与式(13.4.1)至式(13.4.11)完全对等的推导,我们要最小化第 m 阶后向预测器的后向时间平均的加权平方误差,其定义为

$$\mathscr{E}_m^b(n) = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}|g_m(l,n)|^2 \tag{13.4.12}$$

其中,后向误差定义为

$$g_m(l,n) = x(l-m) + \boldsymbol{b}_m^t(n)\boldsymbol{X}_m(l) \tag{13.4.13}$$

并且 $\boldsymbol{b}_m^t(n) = [b_m(1,n)\,b_m(2,n)\cdots b_m(m,n)]$是后向预测器的系数矢量。$\mathscr{E}_m^b(n)$的最小化将引入方程

$$\boldsymbol{R}_m(n)\boldsymbol{b}_m(n) = -\boldsymbol{V}_m(n) \tag{13.4.14}$$

因此,其解为

$$\boldsymbol{b}_m(n) = -\boldsymbol{R}_m^{-1}(n)\boldsymbol{V}_m(n) \tag{13.4.15}$$

其中

$$\boldsymbol{V}_m(n) = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}x(l-m)\boldsymbol{X}_m^*(l) \tag{13.4.16}$$

$\mathscr{E}_m^b(n)$的最小值表示为 $E_m^b(n)$,

$$\begin{aligned} E_m^b(n) &= \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}\left[x(l-m)+\boldsymbol{b}_m^t(n)\boldsymbol{X}_m(l)\right]x^*(l-m) \\ &= v(n)+\boldsymbol{b}_m^t(n)\boldsymbol{V}_m^*(n) \end{aligned} \tag{13.4.17}$$

其中,标量 $v(n)$定义为

$$v(n)=\sum_{l=0}^{n} w^{n-l}|x(l-m)|^2 \tag{13.4.18}$$

如果将式(13.4.14)和式(13.4.17)合并成单一的方程,那么得出

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_m(n) & \boldsymbol{V}_m(n) \\ \boldsymbol{V}_m^H(n) & v(n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_m(n) \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_m \\ E_m^b(n) \end{bmatrix} \tag{13.4.19}$$

我们还注意到,(估计)自相关矩阵 $\boldsymbol{R}_{m+1}(n)$可以表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{m+1}(n) &= \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_m^*(l) \\ x^*(l-m) \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{X}_m^t(l)x(l-m)\right] \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_m(n) & \boldsymbol{V}_m(n) \\ \boldsymbol{V}_m^H(n) & v(n) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13.4.20}$$

这样,就得出 m 阶前向和后向最小二乘方预测器的公式。

下一步,我们来推导这些预测器的阶数更新方程,这就要引入格型滤波器结构。在推导 $\boldsymbol{a}_m(n)$和 $\boldsymbol{b}_m(n)$的阶数更新方程时,要使用两个用于如下形式矩阵的求逆恒等式,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{13.4.21}$$

其中,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}_{11}$和 $\boldsymbol{A}_{22}$是方阵。$\boldsymbol{A}$ 的逆可以表示成两种不同的形式,即

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{-1}+\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\tilde{\boldsymbol{A}}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\tilde{\boldsymbol{A}}_{22}^{-1} \\ -\tilde{\boldsymbol{A}}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \tilde{\boldsymbol{A}}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{13.4.22}$$

和

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}}_{11}^{-1} & -\tilde{\boldsymbol{A}}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1} \\ -\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\tilde{\boldsymbol{A}}_{11}^{-1} & \boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\tilde{\boldsymbol{A}}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}+\boldsymbol{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{13.4.23}$$

其中,$\tilde{\boldsymbol{A}}_{11}$和 $\tilde{\boldsymbol{A}}_{22}$定义为

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{A}}_{11} &= \boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21} \\ \tilde{\boldsymbol{A}}_{22} &= \boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{aligned} \tag{13.4.24}$$

阶数更新递归式。现在,以式(13.4.20)的形式,利用式(13.4.22)求解 $\boldsymbol{R}_{m+1}(n)$的逆。首先得出,

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{A}}_{22} &= v(n)-\boldsymbol{V}_m^H(n)\boldsymbol{R}_m^{-1}(n)\boldsymbol{V}_m(n) \\ &= v(n)+\boldsymbol{b}_m^t(n)\boldsymbol{V}_m^*(n)=E_m^b(n) \end{aligned} \tag{13.4.25}$$

和

$$\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{R}_m^{-1}(n)\boldsymbol{V}_m(n)=-\boldsymbol{b}_m(n) \tag{13.4.26}$$

因此,

$$\boldsymbol{R}_{m+1}^{-1}(n)\equiv\boldsymbol{P}_{m+1}(n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_m(n)+\dfrac{\boldsymbol{b}_m(n)\boldsymbol{b}_m^H(n)}{E_m^b(n)} & \dfrac{\boldsymbol{b}_m(n)}{E_m^b(n)}\\ \dfrac{\boldsymbol{b}_m^H(n)}{E_m^b(n)} & \dfrac{1}{E_m^b(n)}\end{bmatrix}$$

或者等价地，

$$\boldsymbol{P}_{m+1}(n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_m(n) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{E_m^b(n)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m(n)\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m^H(n) & 1\end{bmatrix}\tag{13.4.27}$$

用 $n-1$ 代替式(13.4.27)中的 n，并将结果右乘 $-\mathrm{Q}_{m+1}(n)$，就得出 $\boldsymbol{a}_m(n)$的阶数更新表达式，从而，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{m+1}(n)&=-\boldsymbol{P}_{m+1}(n-1)\boldsymbol{Q}_{m+1}(n)\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_m(n-1) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{Q}_m^{(n)}\\ \cdots\end{bmatrix}\\&\quad-\frac{1}{E_m^b(n-1)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m(n-1)\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m^H(n-1) & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{m+1}(n)\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_m(n)\\ 0\end{bmatrix}-\frac{k_{m+1}(n)}{E_m^b(n-1)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m(n-1)\\ 1\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{13.4.28}$$

其中，标量 $k_{m+1}(n)$定义为

$$k_{m+1}(n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m^H(n-1) & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{m+1}(n)\tag{13.4.29}$$

读者应当看到，式(13.4.28)就是用于预测器系数的莱文森形式的递推式。

为了得出对应的 $\boldsymbol{b}_m(n)$的阶数更新式，用式(13.4.23)中的矩阵求逆公式计算 $\boldsymbol{R}_{m+1}(n)$的逆，其形式如同式(13.4.11)，在这种情况下，得出

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{A}}_{11}&=q(n)-\boldsymbol{Q}_m^H(n)\boldsymbol{R}_m^{-1}(n-1)\boldsymbol{Q}_m(n)\\&=q(n)+\boldsymbol{a}_m^t(n)\boldsymbol{Q}_m^*(n)=E_m^f(n)\end{aligned}\tag{13.4.30}$$

和

$$\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}=\boldsymbol{R}_m^{-1}(n-1)\boldsymbol{Q}_m(n)=-\boldsymbol{a}_m(n)\tag{13.4.31}$$

因此，

$$\boldsymbol{P}_{m+1}(n)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{E_m^f(n)} & \dfrac{\boldsymbol{a}_m^H(n)}{E_m^f(n)}\\ \dfrac{\boldsymbol{a}_m(n)}{E_m^f(n)} & \boldsymbol{P}_m(n-1)+\dfrac{\boldsymbol{a}_m(n)\boldsymbol{a}_m^H(n)}{E_m^f(n)}\end{bmatrix}$$

或者等价地，

$$\boldsymbol{P}_{m+1}(n)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{P}_m(n-1)\end{bmatrix}+\frac{1}{E_m^f(n)}\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{a}_m(n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{a}_m^H(n)\end{bmatrix}\tag{13.4.32}$$

现在，如果将式(13.4.32)右乘 $-\boldsymbol{V}_{m+1}(n)$，那么得出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_{m+1}(n)&=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{P}_m(n-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cdots\\ -\boldsymbol{V}_m(n-1)\end{bmatrix}\\&\quad-\frac{1}{E_m^f(n)}\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{a}_m(n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{a}_m^H(n)\end{bmatrix}\boldsymbol{V}_{m+1}(n)\\&=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{b}_m(n-1)\end{bmatrix}-\frac{k_{m+1}^*(n)}{E_m^f(n)}\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{a}_m(n)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{13.4.33}$$

其中

$$\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{a}_m^H(n)\end{bmatrix}\boldsymbol{V}_{m+1}(n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m^t(n-1) & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{m+1}^*(n)=k_{m+1}^*(n) \tag{13.4.34}$$

式(13.4.34)的证明以及它与式(13.4.29)的关系作为作业留给读者完成。这样式(13.4.28)和式(13.4.33)就分别确定了 $\boldsymbol{a}_m(n)$和 $\boldsymbol{b}_m(n)$的阶数更新方程。

现在就可以得出 $E_m^f(n)$和 $E_m^b(n)$的阶数更新方程,由式(13.4.8)给出的 $E_m^f(n)$的定义,得出

$$E_{m+1}^f(n)=q(n)+\boldsymbol{a}_{m+1}^t(n)\boldsymbol{Q}_{m+1}^*(n) \tag{13.4.35}$$

将式(13.4.28)中的 $\boldsymbol{a}_{m+1}(n)$代入到式(13.4.35),得出

$$\begin{aligned}E_{m+1}^f(n)&=q(n)+\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_m'(n) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_m^*(n)\\ \cdots\end{bmatrix}-\frac{k_{m+1}(n)}{E_m^b(n-1)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m'(n-1) & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{m+1}^*(n)\\&=E_m^f(n)-\frac{|k_{m+1}(n)|^2}{E_m^b(n-1)}\end{aligned} \tag{13.4.36}$$

类似地,利用式(13.4.17)和式(13.4.33),可得出 $E_{m+1}^b(n)$的阶数更新式,其形式为

$$E_{m+1}^b(n)=E_m^b(n-1)-\frac{|k_{m+1}(n)|^2}{E_m^f(n)} \tag{13.4.37}$$

格型滤波器由两个分别包含前向误差 $f_m(n,n-1)$和后向误差 $g_m(n,n-1)$的成对方程确定,由式(13.4.1)中的前向误差的定义得出

$$f_{m+1}(n,n-1)=x(n)+\boldsymbol{a}_{m+1}^t(n-1)\boldsymbol{X}_{m+1}(n-1) \tag{13.4.38}$$

将 $\boldsymbol{a}_{m+1}^t(n-1)$由式(13.4.28)代入式(13.4.38),生成

$$\begin{aligned}f_{m+1}(n,n-1)&=x(n)+\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_m^t(n-1) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_m(n-1)\\ \cdots\end{bmatrix}\\&\quad-\frac{k_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-2)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m^t(n-2) & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}_{m+1}(n-1)\\&=f_m(n,n-1)-\frac{k_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-2)}\times\left[x(n-m-1)+\boldsymbol{b}_m^t(n-2)\boldsymbol{X}_m(n-1)\right]\\&=f_m(n,n-1)-\frac{k_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-2)}g_m(n-1,n-2)\end{aligned} \tag{13.4.39}$$

为了简化符号,定义

$$\begin{aligned}f_m(n)&=f_m(n,n-1)\\g_m(n)&=g_m(n,n-1)\end{aligned} \tag{13.4.40}$$

于是,式(13.4.39)可以表示为

$$f_{m+1}(n)=f_m(n)-\frac{k_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-2)}g_m(n-1) \tag{13.4.41}$$

类似地,从式(13.4.13)给出的后向误差的定义开始,得出

$$g_{m+1}(n,n-1)=x(n-m-1)+\boldsymbol{b}_{m+1}^t(n-1)\boldsymbol{X}_{m+1}(n) \tag{13.4.42}$$

将式(13.4.33) 中的 $\boldsymbol{b}_{m+1}(n-1)$代入并对结果化简,得出

$$g_{m+1}(n,n-1)=g_m(n-1,n-2)-\frac{k_{m+1}^*(n-1)}{E_m^f(n-1)}f_m(n,n-1) \tag{13.4.43}$$

或者等价地，

$$g_{m+1}(n)=g_m(n-1)-\frac{k_{m+1}^*(n-1)}{E_m^f(n-1)}f_m(n) \tag{13.4.44}$$

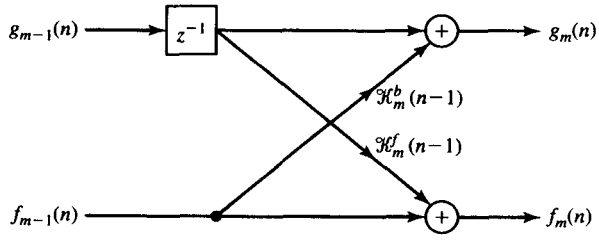
式(13.4.41)和式(13.4.44)中的两个递归方程确定了图 13.4.1 所示的格型滤波器，为了方便表示，我们还定义了格型滤波器的反射系数为

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_m^f(n)&=\frac{-k_m(n)}{E_{m-1}^b(n-1)}\\ \mathcal{K}_m^b(n)&=\frac{-k_m^*(n)}{E_{m-1}^f(n)}\end{aligned} \tag{13.4.45}$$

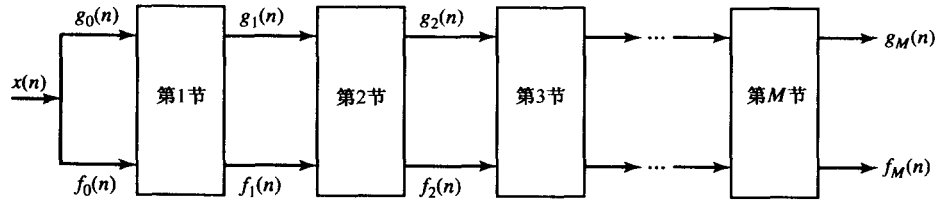
阶数更新的起始条件为

$$\begin{aligned}f_0(n)&=g_0(n)=x(n)\\ E_0^f(n)&=E_0^b(n)=\sum_{l=0}^{n}w^{n-l}|x(l)|^2=wE_0^f(n-1)+|x(n)|^2\end{aligned} \tag{13.4.46}$$

我们注意到，式(13.4.46)也是 $E_0^f(n)$和 $E_0^b(n)$的时间更新方程。



(a)



(b)

图 13.4.1　最小二乘方格型滤波器

时间更新递归式。我们的目标是求解 $k_m(n)$的时间更新方程，如果格型滤波器是自适应的，那么这是必需的。这个推导需要预测系数的时间更新方程，我们从如下形式开始

$$k_{m+1}(n)=-\boldsymbol{V}_{m+1}^H(n)\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{a}_m(n)\end{bmatrix} \tag{13.4.47}$$

$\boldsymbol{V}_{m+1}(n)$的时间更新方程为

$$\boldsymbol{V}_{m+1}(n)=w\boldsymbol{V}_{m+1}(n-1)+x(n-m-1)\boldsymbol{X}_{m+1}^{*}(n) \tag{13.4.48}$$

预测系数的时间更新方程按如下求解:由式(13.4.6)、式(13.4.7)和式(13.4.14)得出,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_m(n)&=-\boldsymbol{P}_m(n-1)\boldsymbol{Q}_m(n)\\&=-\frac{1}{w}\left[\boldsymbol{P}_m(n-2)-\boldsymbol{K}_m(n-1)\boldsymbol{X}_m^{t}(n-1)\boldsymbol{P}_m(n-2)\right]\\&\quad\times\left[wQ_m(n-1)+x(n)X_m^{*}(n-1)\right]\\&=\boldsymbol{a}_m(n-1)-\boldsymbol{K}_m(n-1)\left[x(n)+\boldsymbol{a}_m^{t}(n-1)\boldsymbol{X}_m(n-1)\right]\end{aligned} \tag{13.4.49}$$

其中,$\boldsymbol{K}_m(n-1)$是在第 $n-1$ 次迭代的卡尔曼增益矢量。但是由式(13.4.38)得出

$$x(n)+\boldsymbol{a}_m^{t}(n-1)\boldsymbol{X}_m(n-1)=f_m(n,n-1)\equiv f_m(n)$$

因此,$\boldsymbol{a}_m(n)$的时间更新方程为

$$\boldsymbol{a}_m(n)=\boldsymbol{a}_m(n-1)-\boldsymbol{K}_m(n-1)f_m(n) \tag{13.4.50}$$

以类似的推导方式,利用式(13.4.15)、式(13.4.16)和式(13.3.14),就得到后向预测器系数的时间更新方程,其形式为

$$\boldsymbol{b}_m(n)=\boldsymbol{b}_m(n-1)-\boldsymbol{K}_m(n)g_m(n) \tag{13.4.51}$$

现在,由式(13.4.48)和式(13.4.50)得出 $k_{m+1}(n)$的时间更新方程

$$\begin{aligned}k_{m+1}(n)&=-\left[w\boldsymbol{V}_{m+1}^{H}(n-1)+x^{*}(n-m-1)\boldsymbol{X}_{m+1}^{t}(n)\right]\\&\quad\times\left(\begin{bmatrix}1\\\boldsymbol{a}_m(n-1)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{K}_m(n-1)f_m(n)\end{bmatrix}\right)\\&=wk_{m+1}(n-1)-w\boldsymbol{V}_{m+1}^{H}(n-1)\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{K}_m(n-1)\end{bmatrix}f_m(n)\\&\quad+x^{*}(n-m-1)\boldsymbol{X}_{m+1}^{t}(n)\begin{bmatrix}1\\\boldsymbol{a}_m(n-1)\end{bmatrix}\\&\quad-x^{*}(n-m-1)\boldsymbol{X}_{m+1}^{t}(n)\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{K}_m(n-1)\end{bmatrix}f_m(n)\end{aligned} \tag{13.4.52}$$

但是

$$\boldsymbol{X}_{m+1}^{t}(n)\begin{bmatrix}1\\\boldsymbol{a}_m(n-1)\end{bmatrix}=\left[x(n)\boldsymbol{X}_m^{t}(n-1)\right]\begin{bmatrix}1\\\boldsymbol{a}_m(n-1)\end{bmatrix}=f_m(n) \tag{13.4.53}$$

并且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{m+1}^{H}(n-1)\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{K}_m(n-1)\end{bmatrix}&=\boldsymbol{V}_m^{H}(n-2)\boldsymbol{K}_m(n-1)\\&=\frac{\boldsymbol{V}_m^{H}(n-2)\boldsymbol{P}_m(n-2)\boldsymbol{X}_m^{*}(n-1)}{w+\mu_m(n-1)}\\&=\frac{-\boldsymbol{b}_m^{H}(n-2)\boldsymbol{X}_m^{*}(n-1)}{w+\mu_m(n-1)}\\&=-\frac{g_m^{*}(n-1)-x^{*}(n-m-1)}{w+\mu_m(n-1)}\end{aligned} \tag{13.4.54}$$

其中 $\mu_m(n)$先前已在式(13.3.13)中定义。最后，

$$\boldsymbol{X}_{m+1}^t(n)\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{K}_m(n-1)\end{bmatrix}=\frac{\boldsymbol{X}_m^t(n-1)\boldsymbol{P}_m(n-2)\boldsymbol{X}_m^*(n-1)}{w+\mu_m(n-1)}=\frac{\mu_m(n-1)}{w+\mu_m(n-1)} \tag{13.4.55}$$

将式(13.4.53)、式(13.4.54)和式(13.4.55)的结果代入式(13.4.52)中，就得出期望的时间更新方程，其形式为

$$k_{m+1}(n)=wk_{m+1}(n-1)+\frac{w}{w+\mu_m(n-1)}f_m(n)g_m^*(n-1) \tag{13.4.56}$$

为了方便，定义另一个变量

$$\alpha_m(n)=\frac{w}{w+\mu_m(n)} \tag{13.4.57}$$

显然，$\alpha_m(n)$是实数值并且范围为 $0<\alpha_m(n)<1$。于是，时间更新方程式(13.4.56)变为

$$k_{m+1}(n)=wk_{m+1}(n-1)+\alpha_m(n-1)f_m(n)g_m^*(n-1) \tag{13.4.58}$$

$\alpha_m(n)$的阶数更新。对于每个 m 和每个 n，虽然 $\alpha_m(n)$可以直接计算，但是使用阶数更新方程将有更高的计算效率。阶数更新方程按如下求解：首先，由式(13.3.12)给出的 $\boldsymbol{K}_m(n)$的定义，很容易看出

$$\alpha_m(n)=1-\boldsymbol{X}_m^t(n)\boldsymbol{K}_m(n) \tag{13.4.59}$$

为了得出 $\alpha_m(n)$的阶数更新方程，我们需要卡尔曼增益矢量 $\boldsymbol{K}_m(n)$的阶数更新方程，然而，$\boldsymbol{K}_{m+1}(n)$可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_{m+1}(n)&=\boldsymbol{P}_{m+1}(n)\boldsymbol{X}_{m+1}^*(n)\\&=\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_m(n) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{E_m^b(n)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m(n)\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m^H(n) & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_m^*(n)\\ x^*(n-m)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_m(n)\\ 0\end{bmatrix}+\frac{g_m^*(n,n)}{E_m^b(n)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m(n)\\ 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{13.4.60}$$

$g_m(n,n)$这项也可以表示为

$$\begin{aligned}g_m(n,n)&=x(n-m)+\boldsymbol{b}_m^t(n)\mathbf{X}_m(n)\\&=x(n-m)+\left[\boldsymbol{b}_m^t(n-1)-\boldsymbol{K}_m^t(n)g_m(n)\right]\boldsymbol{X}_m(n)\\&=x(n-m)+\boldsymbol{b}_m^t(n-1)\boldsymbol{X}_m(n)-g_m(n)\boldsymbol{K}_m^t(n)\boldsymbol{X}_m(n)\\&=g_m(n)\left[1-\boldsymbol{K}_m^t(n)\boldsymbol{X}_m(n)\right]\\&=\alpha_m(n)g_m(n)\end{aligned} \tag{13.4.61}$$

因此，式(13.4.60)中的 $\boldsymbol{K}_m(n)$的阶数更新方程也可以写为

$$\boldsymbol{K}_{m+1}(n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_m(n)\\ 0\end{bmatrix}+\frac{\alpha_m(n)g_m^*(n)}{E_m^b(n)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m(n)\\ 1\end{bmatrix} \tag{13.4.62}$$

利用式(13.4.62)和式(13.4.59)中的关系，就可以得出如下 $\alpha_m(n)$的阶数更新方程：

$$\begin{aligned}\alpha_{m+1}(n)=1-\boldsymbol{X}_{m+1}^t(n)\boldsymbol{K}_{m+1}(n)&=1-\left[\boldsymbol{X}_m^t(n)x(n-m)\right]\\&\times\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_m(n)\\ 0\end{bmatrix}+\frac{\alpha_m(n)g_m^*(n)}{E_m^b(n)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m(n)\\ 1\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_m(n) - \frac{\alpha_m(n)g_m^*(n)}{E_m^b(n)}\left[\boldsymbol{X}_m^t(n)\ x(n-m)\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m(n)\\ 1\end{bmatrix} \\
&= \alpha_m(n) - \frac{\alpha_m(n)g_m^*(n)}{E_m^b(n)}g_m(n,\ n) \\
&= \alpha_m(n) - \frac{\alpha_m^2(n)|g_m(n)|^2}{E_m^b(n)}
\end{aligned} \tag{13.4.63}
$$

这样,我们就得到了图 13.4.1 所示的基本最小二乘方格型滤波器的阶数更新方程和时间更新方程。基本方程包括:用于通常称为残差的前向和后向误差的式(13.4.41)和式(13.4.44)、用于对应的最小二乘方误差的式(13.4.36)和式(13.4.37)、$k_m(n)$的时间更新方程(13.4.58)以及参数$\alpha_m(n)$的阶数更新方程(13.4.63)。最初,可以得出

$$
\begin{aligned}
&E_m^f(-1) = E_m^b(-1) = E_m^b(-2) = \epsilon > 0 \\
&f_m(-1) = g_m(-1) = k_m(-1) = 0 \\
&\alpha_m(-1) = 1, \quad \alpha_{-1}(n) = \alpha_{-1}(n-1) = 1
\end{aligned} \tag{13.4.64}
$$

联合过程估计。在上述推导过程的最后一步是为了得出格型滤波器期望信号 $d(n)$的最小二乘方估计,假设自适应滤波器有 $m+1$ 个系数,这些系数是由平均加权均方误差

$$
\mathscr{E}_{m+1} = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}|e_{m+1}(l,n)|^2 \tag{13.4.65}
$$

最小化确定的,其中

$$
e_{m+1}(l,n) = d(l) - \boldsymbol{h}_{m+1}^t(n)\boldsymbol{X}_{m+1}(l) \tag{13.4.66}
$$

利用残差 $g_m(n)$就可以从格型滤波器中得出线性估计

$$
\hat{d}(l,n) = \boldsymbol{h}_{m+1}^t(n)\boldsymbol{X}_{m+1}(l) \tag{13.4.67}
$$

这称为联合过程估计(joint process estimate)。

由 13.3.1 节的结果可知,我们已经确立了由式(13.4.65)最小化而得出的自适应滤波器的系数方程为

$$
\boldsymbol{h}_{m+1}(n) = \boldsymbol{P}_{m+1}(n)\boldsymbol{D}_{m+1}(n) \tag{13.4.68}
$$

同时,还确定了 $\boldsymbol{h}_m(n)$满足式(13.3.27)给出的时间更新方程。

现在,我们来求解 $\boldsymbol{h}_m(n)$的阶数更新方程。由式(13.4.68)和式(13.4.27)得出

$$
\boldsymbol{h}_{m+1}(n) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_m(n) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_m(n)\\ \cdots\end{bmatrix} + \frac{1}{E_m^b(n)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m(n)\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m^H(n) & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{D}_{m+1}(n) \tag{13.4.69}
$$

定义复数标量 $\delta_m(n)$为

$$
\delta_m(n) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m^H(n) & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{D}_{m+1}(n) \tag{13.4.70}
$$

于是,式(13.4.69)可以表示为

$$
\boldsymbol{h}_{m+1}(n) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_m(n)\\ 0\end{bmatrix} + \frac{\delta_m(n)}{E_m^b(n)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_m(n)\\ 1\end{bmatrix} \tag{13.4.71}
$$

标量 $\delta_m(n)$满足分别由式(13.4.51)和式(13.3.17)给出的由 $\boldsymbol{b}_m(n)$和 $\boldsymbol{D}_m(n)$时间更新方程得出的时间更新方程,从而,

$$\begin{aligned}\delta_m(n) &= \left[\boldsymbol{b}_m^H(n-1) - \boldsymbol{K}_m^H(n)g_m^*(n) \quad 1\right]\left[w\boldsymbol{D}_{m+1}(n-1) + d(n)\boldsymbol{X}_{m+1}^*(n)\right] \\ &= w\delta_m(n-1) + \left[\boldsymbol{b}_m^H(n-1) \quad 1\right]\boldsymbol{X}_{m+1}^*(n)d(n) \\ &\quad - wg_m^*(n)\left[\boldsymbol{K}_m^H(n) \quad 0\right]\boldsymbol{D}_{m+1}(n-1) - g_m^*(n)d(n)\left[\boldsymbol{K}_m^H(n) \quad 0\right]\boldsymbol{X}_{m+1}^*(n)\end{aligned} \tag{13.4.72}$$

但是

$$\left[\boldsymbol{b}_m^H(n-1) \quad 1\right]\boldsymbol{X}_{m+1}^*(n) = x^*(n-m) + \boldsymbol{b}_m^H(n-1)\boldsymbol{X}_m^*(n) = g_m^*(n) \tag{13.4.73}$$

同样，

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{K}_m^H(n) \quad 0\right]\boldsymbol{D}_{m+1}(n-1) &= \frac{1}{w+\mu_m(n)}\left[\boldsymbol{X}_m^t(n)\boldsymbol{P}_m(n-1) \quad 0\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_m(n-1)\\ \cdots\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{w+\mu_m(n)}\boldsymbol{X}_m^t(n)\boldsymbol{h}_m(n-1)\end{aligned} \tag{13.4.74}$$

式(13.4.72)中的最后一项也可以表示为

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{K}_m^H(n) \quad 0\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_m^*(n)\\ \cdots\end{bmatrix} &= \frac{1}{w+\mu_m(n)}\boldsymbol{X}_m^t(n)\boldsymbol{P}_m(n-1)\boldsymbol{X}_m^*(n) \\ &= \frac{\mu_m(n)}{w+\mu_m(n)}\end{aligned} \tag{13.4.75}$$

将式(13.4.73)～(13.4.75)的结果代入式(13.4.72)，就得出期望的 $\delta_m(n)$的时间更新方程为

$$\delta_m(n) = w\delta_m(n-1) + \alpha_m(n)g_m^*(n)e_m(n) \tag{13.4.76}$$

$\alpha_m(n)$和 $g_m(n)$的阶数更新方程已经推导出，利用 $e_0(n) = d(n)$得出如下 $e_m(n)$的阶数更新方程

$$\begin{aligned}e_m(n) = e_m(n, n-1) &= d(n) - \boldsymbol{h}_m^t(n-1)\boldsymbol{X}_m(n) \\ &= d(n) - \left[\boldsymbol{h}_{m-1}^t(n-1) \quad 0\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{m-1}(n)\\ \cdots\end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{\delta_{m-1}(n-1)}{E_{m-1}^b(n-1)}\left[\boldsymbol{b}_{m-1}^t(n-1) \quad 1\right]\boldsymbol{X}_m(n) \\ &= e_{m-1}(n) - \frac{\delta_{m-1}(n-1)g_{m-1}(n)}{E_{m-1}^b(n-1)}\end{aligned} \tag{13.4.77}$$

最后，最小二乘方格型滤波器输出的 $d(n)$的估计为

$$\hat{d}(n) = \boldsymbol{h}_{m+1}^t(n-1)\boldsymbol{X}_{m+1}(n) \tag{13.4.78}$$

但是 $\boldsymbol{h}_{m+1}^t(n-1)$并不是直接计算的，通过重复地将式(13.4.71)给出的阶数更新方程代入式(13.4.78)中，可得出 $\hat{d}(n)$的期望表达式，其形式为

$$\hat{d}(n) = \sum_{k=0}^{M-1}\frac{\delta_k(n-1)}{E_k^b(n-1)}g_k(n) \tag{13.4.79}$$

换言之，输出估计 $\hat{d}(n)$是后向残差 $g_k(n)$的线性加权组合。

自适应最小二乘方格型/联合过程(梯型)估计器如图 13.4.2 所示。这种格子-梯型结构在数学上等价于 RLS 直接型 FIR 滤波器，递归方程总结于表 13.5。这称为 RLS 格子-梯型算法的先验形式(priori form)，以区别于称为后验形式(posteriori form)的另一种算法形式。在这种形式中，用系数矢量 $\boldsymbol{h}_M(n)$代替 $\boldsymbol{h}_M(n-1)$来计算 $d(n)$的估计。在许多自适应滤波问题中，例如，信道均衡和回波抵消，因为 $\boldsymbol{h}_M(n)$不可能在 $d(n)$计算之前完成计算，所以后验形式无法使用。

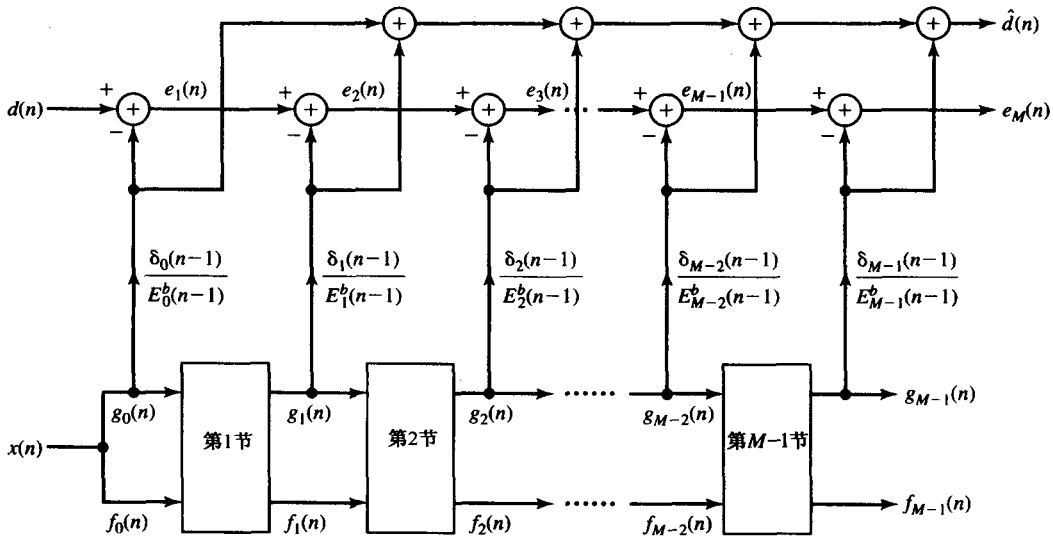


图 13.4.2 自适应 RLS 格子-梯型滤波器

表 13.5 RLS 格子－梯型算法的先验形式

格型预测器：从 $n=1$ 开始，并计算 $m=0,1,\cdots,M-2$ 的阶数更新

$$k_{m+1}(n-1)=wk_{m+1}(n-2)+\alpha_m(n-2)f_m(n-1)g_m^*(n-2)$$

$$\mathcal{K}_{m+1}^f(n-1)=-\frac{k_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-2)}$$

$$\mathcal{K}_{m+1}^b(n-1)=-\frac{k_{m+1}^*(n-1)}{E_m^f(n-1)}$$

$$f_{m+1}(n)=f_m(n)+\mathcal{K}_{m+1}^f(n-1)g_m(n-1)$$

$$g_{m+1}(n)=g_m(n-1)+\mathcal{K}_{m+1}^b(n-1)f_m(n)$$

$$E_{m+1}^f(n-1)=E_m^f(n-1)-\frac{|k_{m+1}(n-1)|^2}{E_m^b(n-2)}$$

$$E_{m+1}^b(n-1)=E_m^b(n-2)-\frac{|k_{m+1}(n-1)|^2}{E_m^f(n-1)}$$

$$\alpha_{m+1}(n-1)=\alpha_m(n-1)-\frac{\alpha_m^2(n-1)|g_m(n-1)|^2}{E_m^b(n-1)}$$

梯型滤波器：从 $n=1$ 开始，并计算 $m=0,1,\cdots,M-1$ 的阶数更新

$$\delta_m(n-1)=w\delta_m(n-2)+\alpha_m(n-1)g_m^*(n-1)e_m(n-1)$$

$$\xi_m(n-1)=-\frac{\delta_m(n-1)}{E_m^b(n-1)}$$

$$e_{m+1}(n)=e_m(n)+\xi_m(n-1)g_m(n)$$

初始化

$$\alpha_0(n-1)=1,\quad e_0(n)=d(n),\quad f_0(n)=g_0(n)=x(n)$$

$$E_0^f(n)=E_0^b(n)=wE_0^f(n-1)+|x(n)|^2$$

$$\alpha_m(-1)=1,\quad k_m(-1)=0$$

$$E_m^b(-1)=E_m^f(0)=\epsilon>0;\quad \delta_m(-1)=0$$

我们现在介绍一些可以针对表 13.5 给出的传统 RLS 格子-梯型算法的修正算法。

修正 RLS 格型算法。表 13.5 给出的 RLS 格型算法的递推公式并不止一个。对某些公式的改动并不会影响算法的最优性，然而，当算法采用定点算术运算实现时，某些改动会使算法在数值上具有更强的健壮性。下面给出一些基本关系式，这些关系式很容易由上面的推导得出。

第一，我们已经获得了先验与后验残差之间的关系。

先验误差：

$$\begin{aligned} f_m(n,n-1) &\equiv f_m(n) = x(n) + \boldsymbol{a}_m^t(n-1)\boldsymbol{X}_m(n-1) \\ g_m(n,n-1) &\equiv g_m(n) = x(n-m) + \boldsymbol{b}_m^t(n-1)\boldsymbol{X}_m(n) \end{aligned} \tag{13.4.80}$$

后验误差：

$$\begin{aligned} f_m(n,n) &= x(n) + \boldsymbol{a}_m^t(n)\boldsymbol{X}_m(n-1) \\ g_m(n,n) &= x(n-m) + \boldsymbol{b}_m^t(n)\boldsymbol{X}_m(n) \end{aligned} \tag{13.4.81}$$

式(13.4.80)与式(13.4.81)之间的基本关系为

$$\begin{aligned} f_m(n,n) &= \alpha_m(n-1) f_m(n) \\ g_m(n,n) &= \alpha_m(n) g_m(n) \end{aligned} \tag{13.4.82}$$

这些关系很容易利用式(13.4.81)及其中的式(13.4.50)和式(13.4.51)得出。

第二，我们可以得出最小二乘方前向和后向误差。例如，由式(13.4.8)和式(13.4.50)得出

$$\begin{aligned} E_m^f(n) &= q(n) + \boldsymbol{a}_m^t(n)\boldsymbol{Q}_m^*(n) \\ &= q(n) + \left[\boldsymbol{a}_m^t(n-1) - \boldsymbol{K}_m^t(n-1) f_m(n)\right]\left[w\boldsymbol{Q}_m^*(n-1) + x^*(n)\boldsymbol{X}_m(n-1)\right] \\ &= wE_m^f(n-1) + \alpha_m(n-1)|f_m(n)|^2 \end{aligned} \tag{13.4.83}$$

类似地，由式(13.4.17)和式(13.4.51)得出

$$E_m^b(n) = wE_m^b(n-1) + \alpha_m(n)|g_m(n)|^2 \tag{13.4.84}$$

通常，式(13.4.83)和式(13.4.84)用于代替表 13.5 中的第 6 个和第 7 个公式。

第三，我们可以得出卡尔曼增益矢量的时间更新方程，这并不是直接用于格型算法，而是用于快速 FIR 滤波算法。在推导时，我们也可以用式(13.4.50)和式(13.4.51)给出的前向和后向预测系数的时间更新方程，这样就得出

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_m(n) &= \boldsymbol{P}_m(n)\boldsymbol{X}_m^*(n) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{P}_{m-1}(n-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^*(n) \\ \boldsymbol{X}_{m-1}^*(n-1) \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{E_{m-1}^f(n)}\begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{a}_{m-1}(n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{a}_{m-1}^H(n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^*(n) \\ \boldsymbol{X}_{m-1}^*(n-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{K}_{m-1}(n-1) \end{bmatrix} + \frac{f_{m-1}^*(n,n)}{E_{m-1}^f(n)}\begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{a}_{m-1}(n) \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{m-1}(n) \\ c_{mm}(n) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13.4.85}$$

其中，定义 $\boldsymbol{C}_{m-1}(n)$是由 $\boldsymbol{K}_m(n)$的前$(m-1)$个元素组成，$c_{mm}(n)$为其最后一个元素。由式(13.4.60)，

我们也得出了 $\boldsymbol{K}_m(n)$的时间更新方程

$$\boldsymbol{K}_m(n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{m-1}(n)\\0\end{bmatrix}+\frac{g_{m-1}^*(n,n)}{E_{m-1}^b(n)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_{m-1}(n)\\1\end{bmatrix} \tag{13.4.86}$$

借助式(13.4.85)与式(13.4.86)的等价关系,得出结果

$$c_{\mathrm{mm}}(n)=\frac{g_{m-1}^*(n,n)}{E_{m-1}^b(n)} \tag{13.4.87}$$

因此,

$$\boldsymbol{K}_{m-1}(n)+c_{\mathrm{mm}}(n)\boldsymbol{b}_{m-1}(n)=\boldsymbol{C}_{m-1}(n) \tag{13.4.88}$$

对于 $\boldsymbol{b}_{m-1}(n)$,通过将式(13.4.51)代入式(13.4.88),可得出式(13.4.85)中的卡尔曼增益矢量的时间更新方程为

$$\boldsymbol{K}_{m-1}(n)=\frac{\boldsymbol{C}_{m-1}(n)-c_{\mathrm{mm}}(n)\boldsymbol{b}_{m-1}(n-1)}{1-c_{\mathrm{mm}}(n)g_{m-1}(n)} \tag{13.4.89}$$

还有一个标量 $\alpha_m(n)$的时间更新方程,由(13.4.63)得出

$$\begin{aligned}\alpha_m(n)&=\alpha_{m-1}(n)-\frac{\alpha_{m-1}^2(n)|g_{m-1}(n)|^2}{E_{m-1}^b(n)}\\&=\alpha_{m-1}(n)[1-c_{\mathrm{mm}}(n)g_{m-1}(n)]\end{aligned} \tag{13.4.90}$$

利用式(13.4.85)消去 $\alpha_m(n)$表达式中的 $\boldsymbol{K}_{m-1}(n)$,可得到了第二个关系式,于是,

$$\begin{aligned}\alpha_m(n)&=1-\boldsymbol{X}_m^{\mathrm{t}}(n)\boldsymbol{K}_m(n)\\&=\alpha_{m-1}(n-1)\left[1-\frac{f_{m-1}^*(n,n)f_{m-1}(n)}{E_{m-1}^f(n)}\right]\end{aligned} \tag{13.4.91}$$

借助式(13.4.90)与式(13.4.91)的等价关系,可得出期望的 $\alpha_m(n)$的时间更新方程为

$$\alpha_{m-1}(n)=\alpha_{m-1}(n-1)\left[\frac{1-\frac{f_{m-1}^*(n,n)f_{m-1}(n)}{E_{m-1}^f(n)}}{1-c_{\mathrm{mm}}(n)g_{m-1}(n)}\right] \tag{13.4.92}$$

最后,希望能区别开格型滤波器反射系数的两种不同更新方法与梯型部分的传统(间接)方法和直接方法。在传统(间接)方法中,

$$\mathcal{K}_{m+1}^f(n)=-\frac{k_{m+1}(n)}{E_m^b(n-1)} \tag{13.4.93}$$

$$\mathcal{K}_{m+1}^b(n)=-\frac{k_{m+1}^*(n)}{E_m^f(n)} \tag{13.4.94}$$

$$\xi_m(n)=-\frac{\delta_m(n)}{E_m^b(n)} \tag{13.4.95}$$

其中,$k_{m+1}(n)$按式(13.4.58)进行时间更新,$\delta_m(n)$根据式(13.4.76)进行更新,$E_m^f(n)$和 $E_m^b(n)$根据式(13.4.83)和式(13.4.84)进行更新。将 $k_{m+1}(n)$由式(13.4.58)代入式(13.4.93),并利用式(13.4.84)以及表 13.5 中的第 8 个公式,得出

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{m+1}^{f}(n) &= -\frac{k_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-2)}\left(\frac{wE_m^b(n-2)}{E_m^b(n-1)}\right) - \frac{\alpha_m(n-1)f_m(n)g_m^*(n-1)}{E_m^b(n-1)} \\ &= \mathcal{K}_{m+1}^{f}(n-1)\left(1-\frac{\alpha_m(n-1)|g_m(n-1)|^2}{E_m^b(n-1)}\right) \\ &\quad - \frac{\alpha_m(n-1)f_m(n)g_m^*(n-1)}{E_m^b(n-1)} \\ &= \mathcal{K}_{m+1}^{f}(n-1) - \frac{\alpha_m(n-1)f_{m+1}(n)g_m^*(n-1)}{E_m^b(n-1)}\end{aligned} \tag{13.4.96}$$

这就是格型滤波器反射系数的直接更新公式。类似地，将式(13.4.58)代入式(13.4.94)，并利用式(13.4.83)以及表 13.5 中的第 8 个公式，得出

$$\mathcal{K}_{m+1}^{b}(n) = \mathcal{K}_{m+1}^{b}(n-1) - \frac{\alpha_m(n-1)f_m^*(n)g_{m+1}(n)}{E_m^f(n)} \tag{13.4.97}$$

最后，根据关系式

$$\xi_m(n) = \xi_m(n-1) - \frac{\alpha_m(n)g_m^*(n)e_{m+1}(n)}{E_m^b(n)} \tag{13.4.98}$$

就可以直接更新梯型增益。表 13.6 列出了使用更新关系式(13.4.96) ~ 式(13.4.98)和式(13.4.83) ~ 式(13.4.84)的 RLS 格子-梯型算法。

表 13.6　先验 RLS 格子-梯型算法的直接更新(误差反馈)形式

格型预测器：从 $n=1$ 开始，并计算 $m=0,1,\cdots,M-2$ 的阶数更新

$$\mathcal{K}_{m+1}^{f}(n-1) = \mathcal{K}_{m+1}^{f}(n-2) - \frac{\alpha_m(n-2)f_{m+1}(n-1)g_m^*(n-2)}{E_m^b(n-2)}$$

$$\mathcal{K}_{m+1}^{b}(n-1) = \mathcal{K}_{m+1}^{b}(n-2) - \frac{\alpha_m(n-2)f_m^*(n-1)g_{m+1}(n-1)}{E_m^f(n-1)}$$

$$f_{m+1}(n) = f_m(n) + \mathcal{K}_{m+1}^{f}(n-1)g_m(n-1)$$

$$g_{m+1}(n) = g_m(n-1) + \mathcal{K}_{m+1}^{b}(n-1)f_m(n)$$

$$E_{m+1}^{f}(n-1) = wE_{m+1}^{f}(n-2) + \alpha_{m+1}(n-2)|f_{m+1}(n-1)|^2$$

$$\alpha_{m+1}(n-1) = \alpha_m(n-1) - \frac{\alpha_m^2(n-1)|g_m(n-1)|^2}{E_m^b(n-1)}$$

$$E_{m+1}^{b}(n-1) = wE_{m+1}^{b}(n-2) + \alpha_{m+1}(n-1)|g_{m+1}(n-1)|^2$$

梯型滤波器：从 $n=1$ 开始，并计算 $m=0,1,\cdots,M-1$ 的阶数更新

$$\xi_m(n-1) = \xi_m(n-2) - \frac{\alpha_m(n-1)g_m^*(n-1)e_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-1)}$$

$$e_{m+1}(n) = e_m(n) + \xi_m(n-1)g_m(n)$$

初始化

$$\alpha_0(n-1) = 1, \quad e_0(n) = d(n), \quad f_0(n) = g_0(n) = x(n)$$

$$E_0^f(n) = E_0^b(n) = wE_0^f(n-1) + |x(n)|^2$$

$$\alpha_m(-1) = 1, \quad \mathcal{K}_m^f(-1) = \mathcal{K}_m^b(-1) = 0$$

$$E_m^b(-1) = E_m^f(0) = \epsilon > 0$$

表 13.6 中算法的一个重要特点是前向和后向残差会反馈到格型滤波器各级反射系数的时间更新上,并且 $e_{m+1}(n)$会反馈到梯型增益 $\xi_m(n)$的更新上。正因如此,这种 RLS 格子-梯型算法已经被称为误差反馈型(error-feedback)算法。另外,还可以得出后验 RLS 格子-梯型算法的类似形式。有关 RLS 格子-梯型算法更详细的误差反馈形式,有兴趣的读者请参考 Ling, Manolakis 和 Proakis (1986)的著作。

快速 RLS 算法。在 13.3.3 节,介绍了快速 RLS 算法的两种版本,由这一节得到的关系式也能直接得出这些算法。特别地,我们将栅格和与之关联的前向和后向预测器的长度固定为 $M-1$ 节,这样就得到了算法两个版本的前 7 个递推公式。剩下的问题是求解卡尔曼增益矢量的时间更新方程,这要通过式(13.4.85)~式(13.4.89)确定。在由表 13.3 给出的算法的版本 B 中,我们使用标量 $\alpha_m(n)$将计算量从 $10M$ 降到 $9M$,而表 13.2 给出的算法的版本 A 中却没有使用这个参数。因为这些算法提供了卡尔曼增益矢量的直接更新,所以称之为快速卡尔曼算法(fast Kalman algorithm)[参考 Falconer 和 Ljung(1978)以及 Proakis(1989)的著作]。

通过直接更新如下定义的不同型(卡尔曼)增益矢量[见 Carayannis, Manolakis 和 Kalouptsidis (1983)的著作],

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_M(n)=\frac{1}{w}\boldsymbol{P}_M(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n) \tag{3.4.99}$$

将计算复杂度进一步降低到 $7M$ 也是有可能的。许多利用这种增益矢量的快速算法已经被提出,它们的复杂度在 $7M$ 到 $10M$ 之间。表 13.7 列出了计算复杂度为 $7M$(推导过程,请见 Carayannis, Manolakis 和 Kalouptsidis(1983;1986)的著作以及习题 13.7)的 FAEST(Fast A Posteriori Error Sequential Technique)算法。

通常,$7M$ 的快速 RLS 算法以及一些变化算法对舍入误差极其敏感,并且显示出不稳定的问题[Falconer 和 Ljung(1978), Carayannis, Manolakis 和 Kalouptsidis(1983; 1986)以及 Cioffi 和 Kailath (1984)]。Slock 和 Kailath(1988;1991)已经指出了 $7M$ 算法的不稳定问题,并提出了使这些算法稳定的修改方法,最后的稳定算法的计算复杂度在 $8M$ 到 $9M$ 之间,这样与不稳定的 $7M$ 算法相比,这些算法的计算复杂度相对只增加了一点。

为了理解稳定快速 RLS 算法,我们将表 13.3 给出的快速 RLS 算法与表 13.7 给出的 FAEST 算法进行比较。正如前面所指出的,这两个算法之间有两个主要的不同点:第一,FAEST 算法使用不同型(卡尔曼)增益矢量而不是卡尔曼增益矢量。第二,快速 RLS 算法通过利用后向预测系数矢量 $\boldsymbol{b}_{m-1}(n-1)$进行 FIR 滤波来计算先验后向预测误差 $g_{M-1}(n)$,而 FAEST 算法通过缩放操作计算相同的量,这从不同型增益矢量 $\tilde{c}_{MM}(n)$等于 $-wE_{M-1}^b g_{M-1}(n)$可以看得出。因为这两个算法在代数上是等价的,所以如果在计算中使用无限精度,那么不同方式计算所得的后向预测误差应该是相等的。实际上,当使用有限精度算术运算时,不同公式计算所得的后向预测误差只是近似相等。在下文中,我们用 $g_{M-1}^{(f)}(n)$和 $g_{M-1}^{(s)}(n)$分别对它们进行表示,其中上标(f)和(s)分别指出它们是利用滤波方法还是缩放操作计算得到的。

在算法中还有其他的量可以以不同的方式进行计算。特别地,参数 $\alpha_{M-1}(n)$可以从矢量 $\tilde{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n)$和 $\boldsymbol{X}_{M-1}(n)$

$$\alpha_{M-1}(n)=1+\tilde{\boldsymbol{K}}_{M-1}^t(n)\boldsymbol{X}_{M-1}(n) \tag{13.4.100}$$

或者通过标量进行计算,这些值分别表示为 $\tilde{\alpha}_{M-1}^{(f)}(n)$和 $\tilde{\alpha}_{M-1}^{(s)}(n)$。最后,$\tilde{\boldsymbol{K}}_M(n)$的最后一项表示为 $\tilde{c}_{MM}^{(f)}(n)$,它可以由关系式

$$\tilde{c}_{\mathrm{MM}}^{(f)}(n)=\frac{-g_{M-1}^{(f)}(n)}{wE_{M-1}^{b}(n-1)} \tag{13.4.101}$$

进行计算。

表 13.7　FAEST 算法

$$\begin{aligned}
f_{M-1}(n) &= x(n)+\boldsymbol{a}_{M-1}^{t}(n-1)\boldsymbol{X}_{M-1}(n-1)\\
\bar{f}_{M-1}(n,n) &= \frac{f_{M-1}(n)}{\tilde{\alpha}_{M-1}(n-1)}\\
\boldsymbol{a}_{M-1}(n) &= \boldsymbol{a}_{M-1}(n-1)-\bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n-1)\bar{f}_{M-1}(n,n)\\
E_{M-1}^{f}(n) &= wE_{M-1}^{f}(n-1)+f_{M-1}(n)f_{M-1}^{*}(n,n)\\
\bar{\boldsymbol{K}}_{M}(n)\equiv\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_{M-1}(n)\\ \tilde{c}_{\mathrm{MM}}(n)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0\\ \bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n-1)\end{bmatrix}+\frac{f_{M-1}^{*}(n)}{wE_{M-1}^{f}(n-1)}\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{a}_{M-1}(n-1)\end{bmatrix}\\
g_{M-1}(n) &= -wE_{M-1}^{b}(n-1)\tilde{c}_{\mathrm{MM}}^{*}(n)\\
\bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n) &= \bar{\boldsymbol{C}}_{M-1}(n)-\boldsymbol{b}_{M-1}(n-1)\tilde{c}_{\mathrm{MM}}(n)\\
\tilde{\alpha}_{M}(n) &= \tilde{\alpha}_{M-1}(n-1)+\frac{|f_{M-1}(n)|^{2}}{wE_{M-1}^{f}(n-1)}\\
\tilde{\alpha}_{M-1}(n) &= \tilde{\alpha}_{M}(n)+g_{M-1}(n)\tilde{c}_{\mathrm{MM}}(n)\\
\bar{g}_{M-1}(n,n) &= \frac{g_{M-1}(n)}{\tilde{\alpha}_{M-1}(n)}\\
E_{M-1}^{b}(n) &= wE_{M-1}^{b}(n-1)+g_{M-1}(n)\bar{g}_{M-1}^{*}(n,n)\\
\boldsymbol{b}_{M-1}(n) &= \boldsymbol{b}_{M-1}(n-1)+\bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n)\bar{g}_{M-1}(n,n)\\
e_{M}(n) &= d(n)-\boldsymbol{h}_{M}^{t}(n-1)\boldsymbol{X}_{M}(n)\\
\bar{e}_{M}(n,n) &= \frac{e_{M}(n)}{\tilde{\alpha}_{M}(n)}\\
\boldsymbol{h}_{M}(n) &= \boldsymbol{h}_{M}(n-1)+\bar{\boldsymbol{K}}_{M}(n)\bar{e}_{M}(n,n)
\end{aligned}$$

初始化：设置所有矢量为零

$$\begin{aligned}
E_{M-1}^{f}(-1) &= E_{M-1}^{b}(-1)=\epsilon>0\\
\tilde{\alpha}_{M-1}(-1) &= 1
\end{aligned}$$

在$[g_{M-1}^{(f)}(n),g_{M-1}^{(s)}(n)]$,$[\alpha_{M-1}^{(f)}(n),\alpha_{M-1}^{(s)}(n)]$和$[\tilde{c}_{\mathrm{MM}}^{(f)}(n),\tilde{c}_{\mathrm{MM}}^{(s)}(n)]$这三对中，每一对的两个量在代数上是等价的。因此，无论是这两个量还是它们的线性组合(其形式为 $k\beta^{(s)}+(1-k)\beta^{(f)}$，其中 β 表示三组参数中的一组)在代数上都等价于最初的量，这样就可以在算法中使用。Slock 和 Kailath(1988;1991)发现在快速 RLS 算法中通过使用适当的量或者它的线性组合，就足以调整快速 RLS 算法所固有的正反馈。这些基本思想的实现得出了表 13.8 给出的稳定快速 RLS 算法。

表 13.8　稳定快速 RLS 算法

$$\begin{aligned}
f_{M-1}(n) &= x(n)+\boldsymbol{a}_{M-1}^{t}(n-1)\boldsymbol{X}_{M-1}(n-1)\\
f_{M-1}(n,n) &= \frac{f_{M-1}(n)}{\tilde{\alpha}_{M-1}(n-1)}\\
\boldsymbol{a}_{M-1}(n) &= \boldsymbol{a}_{M-1}(n-1)-\bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n-1)f_{M-1}(n,n)\\
\tilde{c}_{M1}(n) &= \frac{f_{M-1}^{*}(n)}{wE_{M-1}^{f}(n-1)}
\end{aligned}$$

(续表)

$$\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_{M-1}(n)\\ \bar{c}_{\mathrm{MM}}^{(s)}(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n-1)\end{bmatrix}+\bar{c}_{M1}(n)\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{a}_{M-1}(n-1)\end{bmatrix}$$

$$g_{M-1}^{(f)}(n)=x(n-M+1)+\boldsymbol{b}_{M-1}^{t}(n-1)\boldsymbol{X}_{M-1}(n)$$

$$\bar{c}_{\mathrm{MM}}^{(f)}(n)=-\frac{g_{M-1}^{(f)*}(n)}{wE_{M-1}^{b}(n-1)}$$

$$\bar{c}_{\mathrm{MM}}(n)=k_4\bar{c}_{\mathrm{MM}}^{(f)}(n)+(1-k_4)\bar{c}_{\mathrm{MM}}^{(s)}(n)$$

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{M}(n)=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_{M-1}(n)\\ \bar{c}_{\mathrm{MM}}(n)\end{bmatrix}$$

$$g_{M-1}^{(s)}(n)=-wE_{M-1}^{b}(n-1)\bar{c}_{\mathrm{MM}}^{(s)*}(n)$$

$$g_{M-1}^{(i)}(n)=k_ig_{M-1}^{(f)}(n)+(1-k_i)g_{M-1}^{(s)}(n),\quad i=1,2,5$$

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n)=\bar{\boldsymbol{C}}_{M-1}(n)-\boldsymbol{b}_{M-1}(n-1)\bar{c}_{\mathrm{MM}}(n)$$

$$\bar{\alpha}_{M}(n)=\bar{\alpha}_{M-1}(n-1)+\bar{c}_{M1}(n)f_{M-1}(n)$$

$$\bar{\alpha}_{M-1}^{(s)}(n)=\bar{\alpha}_{M}(n)+g_{M-1}^{(s)}(n)\bar{c}_{\mathrm{MM}}^{(s)}(n)$$

$$\bar{\alpha}_{M-1}^{(f)}(n)=1+\bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}^{t}(n)\boldsymbol{X}_{M-1}(n)$$

$$\bar{\alpha}_{M-1}(n)=k_3\bar{\alpha}_{M-1}^{(f)}(n)+(1-k_3)\bar{\alpha}_{M-1}^{(s)}(n)$$

$$E_{M-1}^{f}(n)=wE_{M-1}^{f}(n-1)+f_{M-1}(n)f_{M-1}^{*}(n,n)$$

$$\left[\text{或}\quad\frac{1}{E_{M-1}^{f}(n)}=\frac{1}{w}\frac{1}{E_{M-1}^{f}(n-1)}-\frac{|\bar{c}_{M1}(n)|^2}{\bar{\alpha}_{M-1}^{(s)}(n)}\right]$$

$$g_{M-1}^{(i)}(n,n)=\frac{g_{M-1}^{(i)}(n)}{\bar{\alpha}_{M-1}(n)},\quad i=1,2$$

$$\boldsymbol{b}_{M-1}(n)=\boldsymbol{b}_{M-1}(n-1)+\bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n)g_{M-1}^{(1)}(n,n)$$

$$E_{M-1}^{b}(n)=wE_{M-1}^{b}(n-1)+g_{M-1}^{(2)}(n)g_{M-1}^{(2)*}(n,n)$$

$$e_{M}(n)=d(n)-\boldsymbol{h}_{M}^{t}(n-1)\boldsymbol{X}_{M}(n)$$

$$e_{M}(n,n)=\frac{e_{M}(n)}{\bar{\alpha}_{M}(n)}$$

$$\boldsymbol{h}_{M}(n)=\boldsymbol{h}_{M}(n-1)+\bar{\boldsymbol{K}}_{M}(n)e_{M}(n,n)$$

从表 13.8 可以看出,稳定快速 RLS 算法利用常数 k_i 以建立先前讲述的三对量的五个线性组合,$i=1,2,\cdots,5$。Slock 和 Kailath 通过计算机搜索,找出了 k_i 的最佳值,分别为 $k_1=1.5$, $k_2=2.5$, $k_3=1$, $k_4=0$, $k_5=1$。当 $k_i=0$ 或 1 时,我们在线性组合中只使用了一个量。因此,这三对量中的某些参数并不需要计算。他们还发现,如果未使用 $\alpha_{M-1}^{(f)}(n)$,那么算法的稳定性就不容易受到影响。这些简化可得出表 13.9 给出的算法,该算法的复杂度为 $8M$,在数值上是稳定的。

稳定快速 RLS 算法的性能很大程度上取决于适当的初始化。另一方面,(虽然最终算法是发散的)在计算中使用 $g_{M-1}^{(f)}(n)$的算法并不会受到适当初始化很大的影响。因此,在起始时的前几百次的迭代中,可以使用 $g_{M-1}^{(f)}(n)$代替 $g_{M-1}^{(s)}(n)$(或者它们的线性组合),然后切换到稳定快速 RLS 算法的形式。通过这样的改进,就得到了一个不受起始条件影响的稳定快速 RLS 算法。

表 13.9　简化的稳定快速 RLS 算法

$$
\begin{aligned}
f_{M-1}(n) &= x(n) + \boldsymbol{a}_{M-1}^{t}(n-1)\boldsymbol{X}_{M-1}(n-1)\\
f_{M-1}(n,n) &= \frac{f_{M-1}(n)}{\bar{\alpha}_{M-1}(n-1)}\\
\boldsymbol{a}_{M-1}(n) &= \boldsymbol{a}_{M-1}(n-1) - \bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n-1)f_{M-1}(n,n)\\
\bar{c}_{M1}(n) &= \frac{f_{M-1}^{*}(n)}{wE_{M-1}^{f}(n-1)}\\
\bar{\boldsymbol{K}}_{M}(n) \equiv \begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_{M-1}(n)\\ \bar{c}_{\mathrm{MM}}(n)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0\\ \bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n-1)\end{bmatrix} + \frac{f_{M-1}^{*}(n)}{wE_{M-1}^{f}(n-1)}\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{a}_{M-1}(n-1)\end{bmatrix}\\
g_{M-1}^{(f)}(n) &= x(n-M+1) + \boldsymbol{b}_{M-1}^{t}(n-1)\boldsymbol{X}_{M-1}(n)\\
g_{M-1}^{(s)}(n) &= -wE_{M-1}^{b}(n-1)\bar{c}_{\mathrm{MM}}^{*}(n)\\
g_{M-1}^{(i)}(n) &= k_i g_{M-1}^{(f)}(n) + (1-k_i)g_{M-1}^{(s)}(n), \quad i=1,2\\
\bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n) &= \bar{\boldsymbol{C}}_{M-1}(n) - \boldsymbol{b}_{M-1}(n-1)\bar{c}_{\mathrm{MM}}(n)\\
\bar{\alpha}_{M}(n) &= \bar{\alpha}_{M-1}(n-1) + \bar{c}_{M1}(n)f_{M-1}(n)\\
\bar{\alpha}_{M-1}(n) &= \bar{\alpha}_{M}(n) + g_{M-1}^{(f)}(n)\bar{c}_{\mathrm{MM}}(n)\\
E_{M-1}^{f}(n) &= wE_{M-1}^{f}(n-1) + f_{M-1}(n)f_{M-1}^{*}(n,n)\\
g_{M-1}^{(i)}(n,n) &= \frac{g_{M-1}^{(i)}(n)}{\bar{\alpha}_{M-1}(n)}, \quad i=1,2\\
\boldsymbol{b}_{M-1}(n) &= \boldsymbol{b}_{M-1}(n-1) + \bar{\boldsymbol{K}}_{M-1}(n)g_{M-1}^{(1)}(n,n)\\
E_{M-1}^{b}(n) &= wE_{M-1}^{b}(n-1) + g_{M-1}^{(2)}(n)g_{M-1}^{(2)*}(n,n)\\
e_{M}(n) &= d(n) - \boldsymbol{h}_{M}^{t}(n-1)\boldsymbol{X}_{M}(n)\\
e_{M}(n,n) &= \frac{e_{M}(n)}{\bar{\alpha}_{M}(n)}\\
\boldsymbol{h}_{M}(n) &= \boldsymbol{h}_{M}(n-1) + \bar{\boldsymbol{K}}_{M}(n)e_{M}(n,n)
\end{aligned}
$$

13.4.2　其他格型算法

将前向和后向预测误差分别除以$\sqrt{E_m^f(n)}$和$\sqrt{E_m^b(n)}$，并乘上$\sqrt{\alpha_m(n-1)}$和$\sqrt{\alpha_m(n)}$，就归一化了这些误差。这样，可得到另一种 RLS 格型算法，称为平方根或者角度与功率归一化 RLS 格型算法。该算法比其他 RLS 格型算法具有更紧凑的形式，可是它却需要许多平方根运算，这在计算上是非常复杂的。这个问题可以利用 CORDIC 处理器来解决，该处理器在 N 个时钟周期内就可以进行一次平方根运算，其中 N 为处理器字长的位数。Proakis 等(2002)在其书中给出了平方根/归一化 RLS 格型算法和 CORDIC 算法。

在前章节中已经讲述过，以折中收敛速度的代价也是有可能简化 RLS 算法的计算复杂度的，这样的算法称为梯度格型算法(gradient-lattice algorithm)。在这种算法中，格型滤波器每一节的输入-输出关系式为

$$
\begin{aligned}
f_m(n) &= f_{m-1}(n) - k_m(n)g_{m-1}(n-1)\\
g_m(n) &= g_{m-1}(n-1) - k_m^{*}(n)f_{m-1}(n)
\end{aligned}
\tag{13.4.102}
$$

其中，$k_m(n)$是网格第 m 节的反射系数，$f_m(n)$和 $g_m(n)$是前向和后向残差。

这种格型滤波器形式与莱文森-德宾算法相同，所不同的是，现在 $k_m(n)$允许随时间的变化

而变化,因而格型滤波器就能适应时变的信号统计特性。利用最小二乘法,就可以优化反射系数$\{k_m(n)\}$,得到解为

$$k_m(n)=\frac{2\sum_{l=0}^{n}w^{n-l}f_{m-1}(l)g_{m-1}^{*}(l-1)}{\sum_{l=0}^{n}w^{n-l}[|f_{m-1}(l)|^2+|g_{m-1}(l-1)|^2]},\quad m=1,2,\cdots M-1 \qquad (13.4.103)$$

这些系数也可以在时间上递归更新。利用由均方误差准则得出的 LMS 型算法就能够在时间上递归地计算出梯型系数。该算法在 Griffiths(1978)的论文以及 Proakis 等(2002)的书中有描述。

13.4.3 格子-梯型算法的性质

在先前两小节中,推导的格型算法具有许多优良的性质。在这一小结中,我们来考虑这些算法的性质,并将它们与 LMS 算法和 RLS 直接型 FIR 滤波算法的对应性质进行比较。

收敛速度。RLS 格子-梯型算法基本上和 RLS 直接型 FIR 滤波器结构一样,具有相同的收敛速度,这一点并不足为奇。这是因为这两种滤波器结构在最小二乘方意义上是最优的。虽然梯度格型算法保持了 RLS 格型的某些最优特性,然而,前者在最小二乘方意义上并不是最优的,所以它的收敛速度较慢。

为了比较,图 13.4.3 和图 13.4.4 画出了长度 $M=11$ 的自适应均衡器的学习曲线,它是由 RLS 格子-梯型滤波器、梯度格子-梯型滤波以及利用 LMS 算法的直接型的 FIR 滤波器实现的。信道自相关矩阵具有的特征比分别为 $\lambda_{max}/\lambda_{min}=11$ 和 $\lambda_{max}/\lambda_{min}=21$。从这些学习曲线可以看出,与最优 RLS 格型算法相比,梯度格型算法需要两倍的迭代次数才能收敛,此外,梯度格型算法又比 LMS 算法的收敛速度快得多。对于这两个格型结构,收敛速度并不取决于相关矩阵的特征值范围。

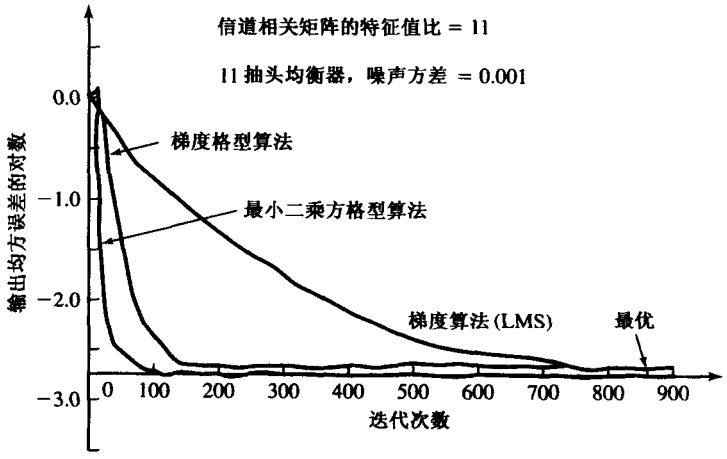


图 13.4.3 用于长度 $M=11$ 的自适应均衡器的 RLS 格型、梯度格型和 LMS 算法的学习曲线(摘自《数字通信》,作者John G. Proakis, McGraw-Hill图书出版公司©1989,出版者许可重印)

计算要求。在先前小结中讲述的 RLS 格型算法具有的复杂度正比于 M。相反,RLS 平方根算法的计算复杂度正比于 M^2。另一方面,从格型算法派生出的直接型快速算法具有的复杂度正比于 M,它的效率比格子-梯型算法还要高一点。

在图 13.4.5 中,我们画出了已经讲述的各种自适应滤波算法的计算复杂度(复数乘法和除法的数目)。很明显,LMS 算法需要最少的计算。表 13.3 和表 13.9 中的快速 RLS 算法在所画出的 RLS 算法中具有最高的效率,紧接下来的是梯度格型算法,然后是 RLS 格型算法,最后是平方根算法。注意,对于小的 M 值,快速收敛算法之间的复杂度相差不大。

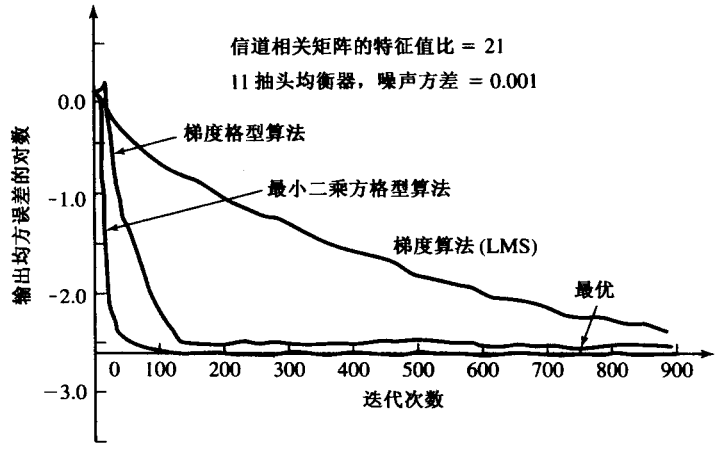


图 13.4.4　用于长度 $M = 11$ 的自适应均衡器的 RLS 格型、梯度格型和 LMS 算法的学习曲线(摘自《数字通信》,作者John G. Proakis, McGraw-Hill图书出版公司©1989,出版者许可重印)

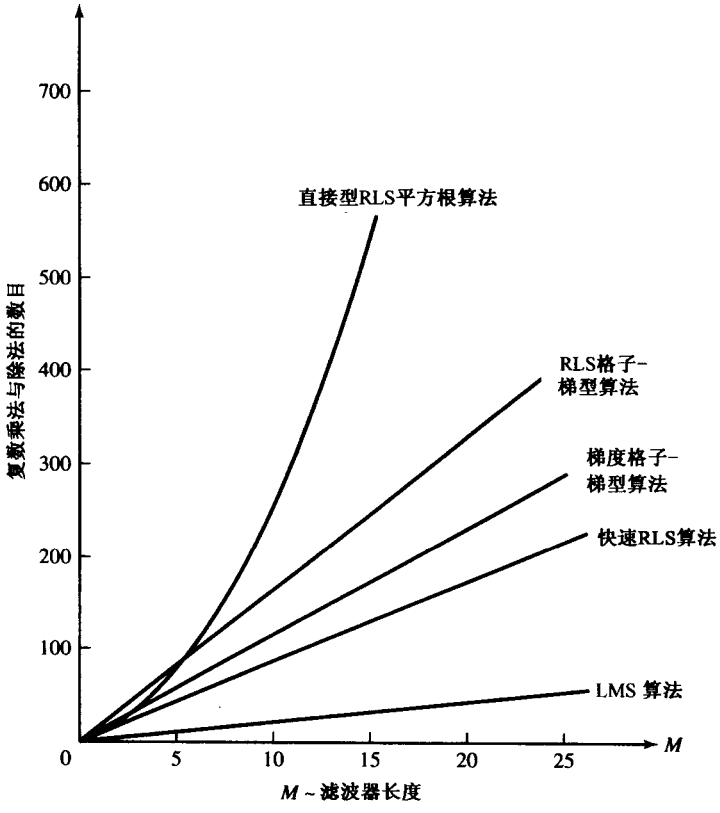


图 13.4.5　自适应滤波算法的计算复杂度

数值特性。除了提供快速的收敛外,RLS 和梯度格型算法在数值上也是健壮的。首先,这些格型算法在数值上是稳定的(numerically stable),这意味着当在输入端引入有界误差信号时,从计算过程中得到的输出估计误差也是有界的。其次,与 LMS 和 RLS 直接型 FIR 算法相比,最优解的数值精确度也是相对较好的。

为了比较,通过对 13.2 节讲述的 RLS 格型算法和直接型 FIR 滤波器算法的计算机仿真,我们获得了稳态均方误差或(估计)最小 MSE,如表 13.10 所示。表 13.10 突出的结果是 RLS 格子-梯型算法的卓越性能,它的反射系数和梯型增益根据式(13.4.96)~式(13.4.98)直接更新,这是误差反馈型 RLS 格型算法。很明显,与包括 LMS 算法在内的其他所有自适应算法相比,这些系数的直接更新使得算法对舍入误差更加健壮。我们还可以看出,在传统 RLS 格型算法中估计反射系数的两步操作并不是标准的。此外,在每节系数中产生的估计误差会逐节传递,这样就导致了额外误差。

表 13.10 输出 MSE 形式的数据精确度,其中信道的 $\lambda_{max}/\lambda_{min}=11$, $w=0.975$, MSE $\times 10^{-3}$

	算法				
位数(包括符号)	RLS 平方根	快速 RLS	传统RLS格型	误差反馈型RLS格型	LMS
16	2.17	2.17	2.16	2.16	2.30
13	2.33	2.21	3.09	2.22	2.30
11	6.14	3.34	25.2	3.09	19.0
9	75.3	[a]	365	31.6	311

[a]算法没有收敛

表 13.11 给出了改变加权因子 w 产生影响的数值结果。在该表中,我们给出了由传统和误差反馈型 RLS 格型算法所得的最小(估计)MSE。我们看到,当精度较高时(13 位和 16 位),随着加权因子的增加,输出 MSE 却降低了。这表明通过扩大观察区间可以得到性能的改善。当精度的位数下降时,我们观察到加权因子也应当减小以维持良好的性能。实际上,在低精度时,较长时间平均的影响导致了更大的舍入误差。当然,这些结果是利用时不变信号的统计特性获得的,如果信号统计特性是时变的,那么时间变化的速率也会影响 w 的选择。

表 13.11 先验最小二乘方格型算法在不同加权因子 w 时输出 MSE 形式的数据精确度, MSE $\times 10^{-3}$

	算法					
	$w=0.99$		$w=0.975$		$w=0.95$	
位数(包括符号)	传统	误差反馈	传统	误差反馈	传统	误差反馈
16	2.14	2.08	2.18	2.16	2.66	2.62
13	7.08	2.11	3.09	2.22	3.65	2.66
11	39.8	3.88	25.2	3.09	15.7	2.78
9	750	44.1	365	31.6	120	15.2

在梯度格型算法中,反射系数和梯型增益也是直接更新的,因此,梯度格型算法的数值精确度与 RLS 格型的直接更新形式相当。

Ling 和 Proakis(1984), Ling, Manolakis 和 Proakis(1985; 1986), Ljung 和 Ljung(1985)以及 Gardner(1984)给出了这些算法定点实现的数值稳定与数值精确度的分析与仿真结果。

实现考虑因素。正如我们所看到的,格型滤波器结构是高度模块化的,并且允许逐节传递计算结果。因为高度模块化,所以 RLS 和梯度格型算法特别适合在超大规模集成电路(VLSI)上实现。由于实现的优点以及良好的稳定性、卓越的数值精确度和快速收敛性,可以预见在不久的将来,更多的自适应滤波器将以格子-梯型结构实现。

13.5　小结与参考文献

我们已经介绍了直接型 FIR 和格型滤波结构的自适应算法。直接型 FIR 滤波器算法由 Widrow 和 Hoff 的简单 LMS 算法和直接形式、时间递归最小二乘方算法组成。这包括式(13.3.23)～式(13.3.27)给出的传统的 RLS 算法，Bierman(1977)，Carlson 和 Culmone(1979)以及 Hsu(1982)所描述的平方根 RLS 形式，Falconer 和 Ljung(1978)所描述的一种算法形式——RLS 快速卡尔曼算法，Carayannis，Manolakis 和 Kalouptsidis(1983)，Proakis(1989)以及 Cioffi 和 Kailath(1984)后来推导的其他形式。

在这些算法中，LMS 算法最简单，它常用于只需要慢收敛的应用场合。在直接型 RLS 算法中，平方根算法已经被用于需要快速收敛的应用场合，该算法具有良好的数值特性。以计算效率的观察来看，稳定快速 RLS 这一类算法是非常引人注目的。为了避免由于舍入误差带来的不稳定，Hsu(1982)，Cioffi 和 Kailath(1984)，Lin(1984)，Eleftheriou 和 Falconer(1987)以及 Slock 和 Kailath(1988；1991)都已经提出了许多方法。

本章推导的自适应格子-梯型滤波器算法(包括传统和误差反馈型)是最优的 RLS 格子-梯型算法，我们只推导了格子-梯型算法的先验形式，这是应用中最为常用的形式。此外，如 Ling，Manolakis 和 Proakis(1986)所描述的，RLS 格子-梯型算法(包括传统和误差反馈型)还有一种后验形式。误差反馈型 RLS 格子-梯型算法具有卓越的数值特性，它特别适用于在 VLSI 上通过定点运算来实现。

在直接型和格型 RLS 算法中，对过去的信号采用指数加权以降低自适应过程中的有效记忆。作为另一种指数加权，对过去的信号可以采用有限长一致加权，这就可得出另一类的有限存储的 RLS 直接型和格型结构，Cioffi 和 Kailath(1985)以及 Manolakis，Ling 和 Proakis(1987)都曾描述过这种结构。

除了我们已经在本章介绍过的变化算法外，还有许多利用脉动阵列和其他并行结构有效实现这些算法的重要研究，读者可以参考 Kung(1982)以及 Kung，Whitehouse 和 Kailath(1985)的著作。

习题

13.1　在图 13.1.2 中，当未知时变系统的输出受到加性噪声 $w(n)$的干扰时，利用最小二乘方准则求解 FIR 滤波器模型的参数公式。

13.2　利用图 13.1.8 中的配置，假设只存在近端回波，基于最小二乘方准则求解自适应回波抵消器的系数公式。

13.3　在图 13.1.14 所示的自适应噪声抵消系统中，如果序列 $w_1(n)$，$w_2(n)$和 $w_3(n)$是互不相关的，那么请计算式(13.1.26)中的估计相关序列 $r_{\hat{w}}(k)$和 $r_{\hat{y}v}(k)$的期望值。

13.4　证明式(13.4.34)中的结果。

13.5　推导式(13.4.98)给出的梯型增益的直接更新公式。

13.6　推导式(13.4.103)给出的梯度格型算法的反射系数公式。

13.7　利用不同型卡尔曼增益矢量

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_M(n)=\frac{1}{w}\boldsymbol{P}_M(n-1)\boldsymbol{X}_M^*(n)$$

而不是卡尔曼增益矢量 $\boldsymbol{K}_M(n)$，推导表 13.7 给出的 FAEST 算法。

13.8　Gitlin，Meadors 和 Weinstein(1982)提出的抽头分支(tap-leaky)LMS 算法可以表示为

$$\boldsymbol{h}_M(n+1)=w\boldsymbol{h}_M(n)+\Delta e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)$$

其中，$0<w<1$，Δ是步长，$\boldsymbol{X}_M(n)$是在 n 时刻的数据矢量。求解 $\boldsymbol{h}_M(n)$均值收敛的条件。

13.9 通过最小化代价函数

$$\mathcal{E}(n) = |e(n)|^2 + c\|\boldsymbol{h}_M(n)\|^2$$

也可以得出习题 13.8 中的抽头分支 LMS 算法,其中,c 是常数,$e(n)$滤波器期望输出与实际输出之间的差值。证明:$\mathcal{E}(n)$关于滤波器系数矢量 $\boldsymbol{h}_M(n)$的最小化将得出以下的抽头分支 LMS 算法:

$$\boldsymbol{h}_M(n+1) = (1 - \Delta c)\boldsymbol{h}_M(n) + \Delta e(n)\boldsymbol{X}_M^*(n)$$

13.10 对于式(13.2.31)给出的归一化 LMS 算法,求解步长 Δ 值的范围,以确保算法在均方误差意义上是稳定的。

13.11 利用习题 13.8 给出的不同型卡尔曼增益矢量,改进表 13.2 和表 13.3 给出的先验快速最小二乘方算法,以降低计算量。

13.12 考虑随机过程

$$x(n) = gv(n) + w(n), \qquad n = 0, 1, \cdots, M-1$$

其中,$v(n)$是已知序列,g 是随机变量,$E[g] = 0$,并且 $E[g^2] = G$。过程 $w(n)$是白噪声序列,

$$\gamma_{ww}(m) = \sigma_w^2\delta(m)$$

求解使得均方误差

$$\hat{g} = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)x(n)$$

最小化的 g 的线性估计器的系数,即

$$\mathcal{E} = e[(g - \hat{g})^2]$$

13.13 回忆可知,FIR 滤波器可以频率采样的形式实现,系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - z^{-M}}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{H_k}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/M}z^{-1}}$$

$$= H_1(z)H_2(z)$$

其中,$H_1(z)$是梳状滤波器,$H_2(n)$是并排的谐振器。

(a) 假设这个结构利用 LMS 算法调整滤波器(DFT)参数 H_k 以实现一个自适应滤波器,写出这些参数和时间更新方程,并画出自适应滤波器结构。

(b) 假设这个结构用于自适应信道均衡,其中期望信号为

$$d(n) = \sum_{k=0}^{M-1} A_k \cos\omega_k n, \qquad \omega_k = \frac{2\pi k}{M}$$

对于期望信号的这种形式,用 LMS 自适应算法更新系数为 $h(n)$的直接型结构的 DFT 系数 H_k 有什么优点?[提示:参考 Proakis(1970)的著作]

13.14 考虑性能指标

$$J = h^2 - 40h + 28$$

假设利用最陡下降算法

$$h(n+1) = h(n) - \frac{1}{2}\Delta g(n)$$

搜索 J 的最小值,其中 $g(n)$是梯度。

(a) 求解 Δ 值范围,以对调整过程提供一个强衰减的系数。

(b) 以 n 的函数形式画出 J 的表达式,其中 Δ 取其范围内的一个值。

13.15 考虑图 13.1.14 所示的噪声抵消自适应滤波器，假设加性噪声过程是白噪声并且互不相关，方差都等于 σ_w^2。假定已知线性系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

求解最小化 MSE 的三抽头噪声抵消器的最优权。

13.16 图 P13.16 所示的一个线性预测器，其输入信号的自相关 $\gamma_{xx}(m)$ 为

$$\gamma_{xx}(m) = a^{|m|}, \qquad 0 < a < 1$$

求解该预测器的系数 a_1 和 a_2。

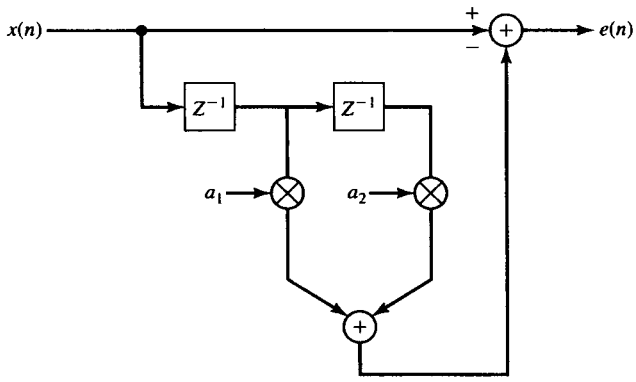


图 P13.16

13.17 对于习题 13.16 中的线性预测器，求解对应的格型滤波器及其最优反射系数。

13.18 考虑图 P13.18 所示的自适应 FIR 滤波器，该系统 $C(z)$ 是系统函数为

$$C(z) = \frac{1}{1 + 0.9z^{-1}}$$

求解最小化 MSE 的自适应 FIR 滤波器 $B(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$ 的最优系数，其中加性噪声是方差为 $\sigma_w^2 = 0.1$ 的白噪声。

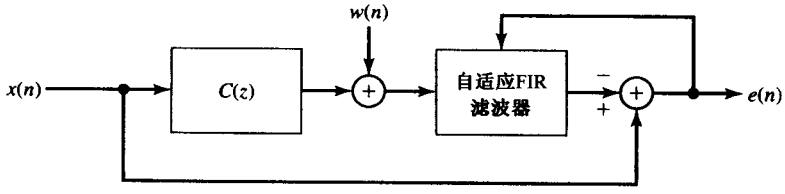


图 P13.18

13.19 在梯度格型算法中，前向和后向预测误差由式(13.4.102)给出。

(a) 证明：关于反射系数 $\{k_m(n)\}$ 对最小二乘方误差

$$\mathcal{E}_m^{LS} = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}[|fm(l)|^2 + |gm(l)|^2]$$

的最小化就得出式(13.4.103)。

(b) 为了求解式(13.4.103)给出的递归计算反射系数的公式，定义

$$u_m(n) = wu_m(n-1) + 2f_{m-1}(n)g^*_{m-1}(n-1)$$

$$v_m(n) = wv_m(n-1) + |f_{m-1}(n)|^2 + |g_{m-1}(n-1)|^2$$

以使得 $k_m(n) = u_m(n)/v_m(n)$。于是,证明 $k_m(n)$可以通过关系式

$$k_m(n) = k_m(n-1) + \frac{f_m(n)g^*_{m-1}(n-1) + g^*_m(n)f_{m-1}(n)}{wv_m(n-1)}$$

递归地计算。

13.20 考虑图 P13.16 所示的自适应预测器。

(a) 对于信号

$$x(n) = \sin\frac{n\pi}{4} + w(n)$$

求解二次性能指标和最优参数,其中 $w(n)$是方差为 $\sigma_w^2 = 0.1$ 的白噪声。

(b) 产生 1000 个样本的序列 $x(n)$,并利用 LMS 算法自适应地得出预测器系数。将实验结果与(a)部分得出的理论值进行比较。使用的步长为 $\Delta \leqslant 1/10\Delta_{max}$。

(c) 利用不同的噪声序列,重复(b)部分的实验 $N = 10$ 次,并计算预测器系数的平均值。与(a)部分的理论值进行比较,说明这些结果。

13.21 一个自回归过程的差分方程为

$$x(n) = 1.26x(n-1) - 0.81x(n-2) + w(n)$$

(a) 产生 $N = 1000$ 个样本的序列 $x(n)$,其中,$w(n)$是方差为 $\sigma_w^2 = 0.1$ 的白噪声。利用 LMS 算法求解二阶($p = 2$)线性预测器的参数。从 $a_1(0) = a_2(0) = 0$ 开始。以迭代次函数的形式画出系数 $a_1(n)$和 $a_2(n)$。

(b) 重复(a)部分试验 10 次,利用不同的噪声序列,将这 $a_1(n)$和 $a_2(n)$的 10 个图形叠加在一起。

(c) 将(b)部分数据的(10 次试验)MSE 求平均,画出学习曲线。

13.22 一个随机过程 $x(n)$为

$$x(n) = s(n) + w(n)$$

$$= \sin(\omega_0 n + \phi) + w(n), \qquad \omega_0 = \pi/4, \quad \phi = 0$$

其中,$w(n)$是方差为 $\sigma_w^2 = 0.1$ 的加性白噪声序列。

(a) 产生 $N = 1000$ 个样本的序列 $x(n)$,仿真长度为 $L = 4$ 的自适应谱线增强器(ALE)。利用 LMS 算法自适应 ALE。

(b) 画出 ALE 的输出。

(c) 计算序列 $x(n)$的自相关 $\gamma_{xx}(m)$。

(d) 求解 ALE 系数的理论值,并与实验值进行比较。

(e) 计算并画出谱线预测器(ALE)的频率响应。

(f) 计算并画出预测误差滤波器的频率响应。

(g) 计算并画出输出误差序列的自相关 $r_{ee}(m)$的实验值,$0 \leqslant m < 10$。

(h) 重复 10 次实验,利用不同的噪声序列,并且这些频率响应曲线迭加画在一幅图中。

(i) 说明(a)到(h)部分的结果。

第 14 章　功率谱估计

本章涉及表征随机过程信号的谱特征估计。自然界出现的很多现象都可以在统计平均意义上很好地表征。例如,气象学现象中的空气温度及气压的波动等,均可以以统计的方式表示为随机过程。在电阻器和电子设备中生成的热噪声电压,也是被抽象为随机过程模型的物理信号的例子。

由于这些信号中存在随机波动,我们必须采用一种统计观点,以处理随机信号的平均特征。特别是,随机信号的自相关函数很适合于表征时域中的随机信号,并且自相关函数的傅里叶变换可生成功率密度谱,也可提供从时域到频域的变换。

功率谱估计方法已有相当长的历史。如果从历史角度考察的话,读者可参考 Robinson (1982)的文章和 Marple (1987)的书。我们对这一课题的论述涉及到基于周期图的经典功率谱估计方法,Schuster(1898)和 Yule(1927)引发出现代的基于模型或基于参数的方法。这些方法依次由 Walker (1931),Bartlett(1948),Parzen(1957),Blackman 和 Tukey(1958),Burg(1967)及其他人开发和应用。本章也将描述 Capon(1969)的方法和基于数据相关矩阵本征分析的方法。

14.1　基于有限长信号观察的功率谱估计

本章要考虑的基本问题是从有限长期间对信号的观察来讨论功率谱密度估计。正如我们看到的,数据序列的有限记录长度是对功率谱估计质量的主要限制。当处理统计平稳信号时,数据记录越长,可从数据提取的信号估计就越好。另一方面,如果信号统计是非平稳的,我们不能选择任意长记录对谱进行估计。在这种情况下,我们选择的数据记录长度是由信号统计上的时变速度决定的。最终,我们要选择尽可能短且仍能解析不同信号分量谱特征的数据记录,所表征的这些信号分量具有相近空间谱。

对基于有限长数据记录的经典功率谱估计方法,所面临的问题之一是我们试图要估计出的谱会有失真。这一问题无论在确定性信号的谱计算方面还是在随机信号的功率谱估计方面都会遇到。既然很容易观察到有限长数据记录对确定性信号的效应,我们就先考察确定性信号的情况。然后,我们再讨论随机信号及其功率谱估计。

14.1.1　能量密度谱计算

首先考虑有限长数据序列确定性信号的谱计算。序列 $x(n)$通常是对连续时间信号 $x_a(t)$以均匀采用率 F_s 进行采用的结果。我们的目标是从有限长序列 $x(n)$得到真实谱的估计。

重新回顾一下,如果 $x(t)$是有限能量信号,即

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$$

那么,其傅里叶变换存在,并表示为

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Ft} \mathrm{d}t$$

由帕塞瓦(Parseval)定理得到

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(F)|^2 \mathrm{d}F \tag{14.1.1}$$

$|X_a(F)|^2$ 将信号能量分布表示为频率函数,因此称为信号的能量密度谱,正如第 4 章所描述

$$S_{xx}(F) = |X_a(F)|^2 \tag{14.1.2}$$

因此,信号总能量只是 $S_{xx}(F)$对所有 F 的简单积分,即 $S_{xx}(F)$包围下的总面积。

另一种解释也很有趣,将 $S_{xx}(F)$视为另一种函数 $R_{xx}(\tau)$的傅里叶变换。$R_{xx}(\tau)$称为有限能量信号 $x_a(t)$的自相关函数,定义为

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a^*(t)x_a(t+\tau)\,\mathrm{d}t \tag{14.1.3}$$

事实上,容易推出

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F\tau}\,\mathrm{d}\tau = S_{xx}(F) = |X_a(F)|^2 \tag{14.1.4}$$

因此,$R_{xx}(\tau)$和 $S_{xx}(F)$是一对傅里叶变换对。

假定我们以每秒 F_s 样本数的速率进行采样,现在我们从得到的样本计算信号 $x_a(t)$的能量密度谱。要保证采用过程不会发生频谱混叠,先假设信号进行了预滤波,从实际角度使得信号带宽限制到 B Hz。然后选定采用频率 F_s,即 $F_s > 2B$。

$x_a(t)$采样后是序列 $x(n)$, $-\infty < n < \infty$,其傅里叶变换(电压谱)是

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

或等价于

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn} \tag{14.1.5}$$

回顾 $X(f)$可以被表示为模拟信号 $x_a(t)$电压谱的形式

$$X(F) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \tag{14.1.6}$$

这里,$f = F/F_s$ 是归一化的频率变量。

在不存在混叠的情况下,在 $|F| \leqslant F_s/2$ 的主值范围内,具有

$$X(F) = F_s X_a(F), \quad |F| \leqslant F_s/2 \tag{14.1.7}$$

因此,采样后信号的电压谱与模拟信号的电压谱相同。结果,采样后信号的能量密度谱为

$$S_{xx}(F) = |X(F)|^2 = F_s^2|X_a(F)|^2 \tag{14.1.8}$$

我们可以进一步表示采样信号的自相关特性,定义为

$$r_{xx}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(n+k) \tag{14.1.9}$$

其傅里叶变换为(维纳-辛钦定理)

$$S_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kf} \tag{14.1.10}$$

因此,能量密度谱可以由序列$\{x(n)\}$自相关的傅里叶变换得到。

上述关系式引导我们区分从样本 $x(n)$计算信号 $x_a(t)$的能量密度谱的两种不同方法。一种

是直接方法，包括计算$\{x(n)\}$的傅里叶变换，于是

$$S_{xx}(f)=|X(f)|^2=\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn}\right|^2 \tag{14.1.11}$$

第二种方法因需要两步而被称为间接方法。首先，从 $x(n)$计算自相关 $r_{xx}(k)$，然后按式(14.1.10)计算自相关以得到能量密度谱。

然而，实际上只有有限长序列 $x(n)$，$0\leqslant n\leqslant N-1$，可用于计算信号谱。实质上，将序列 $x(n)$的长度限制到 N 点等价于对$x(n)$乘上一个矩形窗。于是

$$\tilde{x}(n)=x(n)w(n)=\begin{cases}x(n), & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{14.1.12}$$

从基于窗函数的 FIR 滤波器设计的讨论，到限制脉冲响应长度，我们说两个序列的相乘等价于它们的电压谱卷积。结果，对应于式(14.1.12)的频域关系式是

$$\tilde{X}(f)=X(f)*W(f)=\int_{-1/2}^{1/2}X(\alpha)W(f-\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{14.1.13}$$

回顾 10.2.1 节的讨论，窗函数 $W(f)$与 $X(f)$的卷积对谱 $X(f)$进行了平滑，提供的窗谱 $W(f)$比$X(f)$相对要窄。但是，这一条件意味着窗 $w(n)$要足够长(也就是说，N 必须充分大)，以至于 $W(f)$比 $X(f)$相对窄。即使 $W(f)$比 $X(f)$窄，$X(f)$与 $W(f)$旁瓣的卷积产生了 $\tilde{X}(f)$旁瓣能量，在此频带处的真实信号谱 $X(f)=0$，这种旁瓣能量称为泄漏。下面的例子说明了泄漏问题。

例 14.1.1　一个信号(电压)谱为

$$X(f)=\begin{cases}1, & |f|\leqslant 0.1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

与长度为 $N=61$ 的矩形窗卷积。确定由式(14.1.13)给出的 $\tilde{X}(f)$的谱。

解：长度为 $N=61$ 的矩形窗的谱特征 $W(f)$ 在图 10.2.2 中描述。注意到窗函数的主瓣宽度为 $\Delta\omega=4\pi/61$ 或者 $\Delta f=2/61$，相对于 $X(f)$较窄。

图 14.1.1 描述了 $X(f)$和 $W(f)$的卷积。我们注意到 $X(f)=0$ 处的能量已泄漏到频带 $0.1<|f|\leqslant 0.5$ 的地方。部分原因是由于 $W(f)$的主瓣宽度使得 $X(f)$变宽或 $X(f)$落在$|f|\leqslant 0.1$ 范围外的部分被漏掉。然而，$\tilde{X}(f)$旁瓣能量是由于 $W(f)$存在旁瓣能量与 $X(f)$卷积的结果。$X(f)$在$|f|>0.1$ 范围的衰减和在 $0.1\leqslant|f|\leqslant 0.5$ 范围的旁瓣组成泄漏。

正如 FIR 滤波器的设计，我们可以通过选择具有低旁瓣的窗减少旁瓣泄漏。这意味着选择一个平滑的时域截止特性代替矩形窗陡峭的截止特性。虽然这样的窗函数减少了旁瓣泄漏，但是它们却使频谱特征 $X(f)$的平滑特性或展宽特性得到增加。例如，例 14.1.1 使用了长度为 $N=61$ 的布来克曼窗产生了图 14.1.2 所示的频谱特性 $\tilde{X}(f)$。旁瓣泄漏肯定已经减少，但频谱宽度却增加了大约 50%。

当我们希望用邻近的空间频率分量解析信号时，用加窗来估计频谱展宽是一个特殊的问题。例如，图 14.1.3 显示的频谱特征为 $X(f)=X_1(f)+X_2(f)$的信号不能解析为两个独立信号，除非窗函数宽度比频率分离 Δf 明显窄。因此，我们注意到，使用平滑的时域窗减少了泄漏，但却是以频率分辨率的降低为代价的。

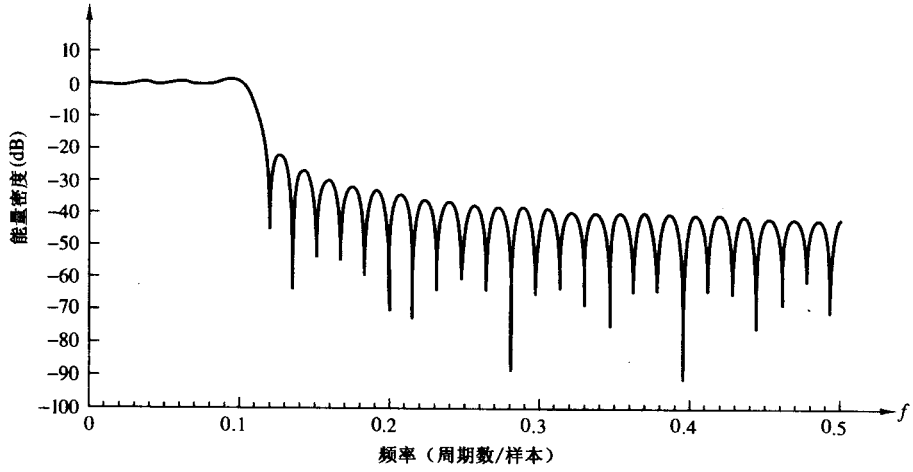


图 14.1.1 将 $M=61$ 的矩形窗与例 14.1.1 的理想低通频谱卷积得到的频谱

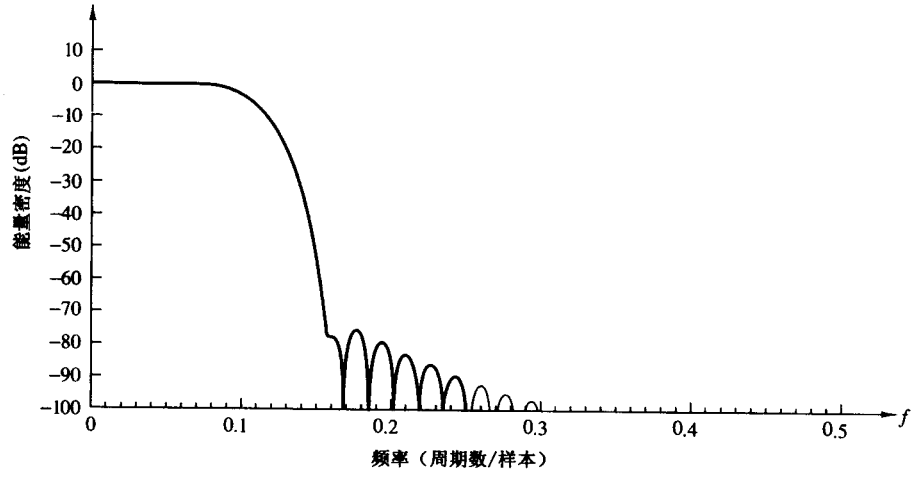


图 14.1.2 将 $M=61$ 的布莱克曼窗与例 14.1.1 的理想低通频谱卷积得到的频谱

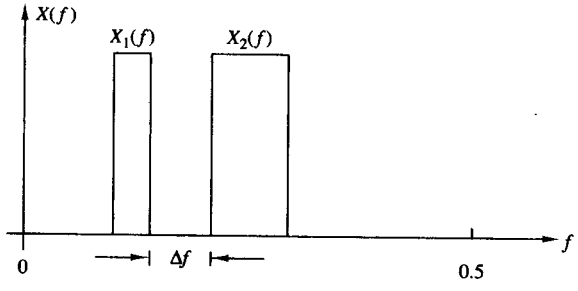


图 14.1.3 两个窄带信号谱

从这一讨论明显看出,窗序列$\{\tilde{x}(n)\}$的能量密度谱是序列$\{x(n)\}$的期望谱的近似。从$\{\tilde{x}(n)\}$得到的谱密度是

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f)=|\tilde{X}(f)|^2=\left|\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn}\right|^2 \tag{14.1.14}$$

由式(14.1.14)给出的谱可以在 N 个频率点集上用 DFT 方法进行数值计算。因此

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N} \tag{14.1.15}$$

于是

$$|\tilde{X}(k)|^2=S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f)|_{f=k/N}=S_{\tilde{x}\tilde{x}}\left(\frac{k}{N}\right) \tag{14.1.16}$$

因此

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}\left(\frac{k}{N}\right)=\left|\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}\right|^2 \tag{14.1.17}$$

这是真实谱 $S_{xx}(k/N)$的失真版。

14.1.2　随机信号的自相关和功率谱估计:周期图

上一节讨论的有限能量信号可进行傅里叶变换,并在谱域用它们的能量密度谱表征。另一方面,表征为平稳随机过程的重要类型信号不具有有限能量,因此不能进行傅里叶变换。这类信号具有有限平均功率,因此表征为功率密度谱。如果 $x(t)$是一个平稳随机过程,它的自相关函数是

$$\gamma_{xx}(\tau)=E[x^*(t)x(t+\tau)] \tag{14.1.18}$$

其中,$E[\cdot]$表示统计平均。于是,借助维纳-辛钦定理,平稳随机过程的功率密度谱是自相关函数的傅里叶变换,即

$$\Gamma_{xx}(F)=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{xx}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F\tau}\,\mathrm{d}t \tag{14.1.19}$$

实际上,我们处理随机过程的单个实现,并从中估计该过程的功率密度谱。由于不知道真实的自相关函数 $\gamma_{xx}(\tau)$,导致我们不能按式(14.1.19)计算傅里叶变换来得到 $\Gamma_{xx}(F)$。从随机过程的单个实现,可以计算时间平均自相关函数

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}x^*(t)x(t+\tau)\,\mathrm{d}t \tag{14.1.20}$$

其中,$2T_0$ 是观察期间。如果平稳随机过程的一阶和二阶矩(均值和自相关函数)是各态历经的,那么

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}(\tau)&=\lim_{T_0\to\infty}R_{xx}(\tau)\\&=\lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}x^*(t)x(t+\tau)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{14.1.21}$$

这一关系证实了时间平均自相关函数 $R_{xx}(\tau)$可用做对统计自相关函数 $\gamma_{xx}(\tau)$的估计。更进一步,$R_{xx}(\tau)$的傅里叶变换提供了对功率密度谱的估计 $P_{xx}(F)$,即

$$\begin{aligned}P_{xx}(F)&=\int_{-T_0}^{T_0}R_{xx}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}\left[\int_{-T_0}^{T_0}x^*(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2T_0}\left|\int_{-T_0}^{T_0}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Ft}\mathrm{d}t\right|^2\end{aligned} \tag{14.1.22}$$

实际功率密度谱是 $P_{xx}(F)$在极限 $T_0\to\infty$时的期望值,

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(F)&=\lim_{T_0\to\infty}E[P_{xx}(F)]\\&=\lim_{T_0\to\infty}E\left[\frac{1}{2T_0}\left|\int_{-T_0}^{T_0}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Ft}\mathrm{d}t\right|^2\right]\end{aligned}\tag{14.1.23}$$

从式(14.1.20)和式(14.1.22),我们再次说明计算 $P_{xx}(F)$的两种可能方法,由式(14.1.22)给出的直接方法,或首先计算 $R_{xx}(\tau)$,然后再计算傅里叶变换的间接方法。

我们将从随机过程的单个实现样本考虑功率密度谱估计。特别地,假定 $x_a(t)$以 $F_s>2B$ 采样,其中,B 是随机过程功率密度谱包含的最高频率。因此,通过对 $x_a(t)$采样,我们得到有限长序列 $x(n)$,$0\leqslant n\leqslant N-1$。从这些样本我们计算时间平均自相关序列

$$r'_{xx}(m)=\frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1}x^*(n)x(n+m),\qquad m=0,1,\cdots,N-1\tag{14.1.24}$$

并且对于 m 的负值,我们有 $r'_{xx}(m)=[r'_{xx}(-m)]^*$。于是,我们计算傅里叶变换

$$P'_{xx}(f)=\sum_{m=-N+1}^{N-1}r'_{xx}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm}\tag{14.1.25}$$

式(14.1.24)中的归一化因子 $N-m$ 导致了均值估计:

$$\begin{aligned}E[r'_{xx}(m)]&=\frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1}E[x^*(n)x(n+m)]\\&=\gamma_{xx}(m)\end{aligned}\tag{14.1.26}$$

其中,$\gamma_{xx}(m)$是 $x(n)$的真实(统计的)自相关序列。因此,$r'_{xx}(m)$是自相关函数 $\gamma_{xx}(m)$的无偏估计。估计 $r'_{xx}(m)$的方差近似为

$$\mathrm{var}[r'_{xx}(m)]\approx\frac{N}{[N-m]^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[|\gamma_{xx}(n)|^2+\gamma^*_{xx}(n-m)\gamma_{xx}(n+m)\right]\tag{14.1.27}$$

这是由 Jenkins 和 Watts 于 1968 年给出的结果。显然

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{var}[r'_{xx}(m)]=0\tag{14.1.28}$$

有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\gamma_{xx}(n)|^2<\infty$$

因为 $E[r'_{xx}(m)]=\gamma_{xx}(m)$,并且当 $N\to\infty$时估计的方差收敛于零,所以估计 $r'_{xx}(m)$是相容的。

对于较大值的滞后参数 m,特别当 m 逼近于 N 时,由式(14.1.24)给出的估计 $r'_{xx}(m)$具有较大方差。这是由于很少的数据点数进入大的滞后情况下的估计。作为式(14.1.24)的备用方法,我们使用如下估计:

$$\begin{aligned}r_{xx}(m)&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1}x^*(n)x(n+m),\qquad 0\leqslant m\leqslant N-1\\r_{xx}(m)&=\frac{1}{N}\sum_{n=|m|}^{N-1}x^*(n)x(n+m),\qquad m=-1,-2,\cdots,1-N\end{aligned}\tag{14.1.29}$$

其偏移为 $|m|\gamma_{xx}(m)/N$，因为其均值是

$$\begin{aligned} E[r_{xx}(m)] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} E[x^*(n)x(n+m)] \\ &= \frac{N-|m|}{N}\gamma_{xx}(m) = \left(1-\frac{|m|}{N}\right)\gamma_{xx}(m) \end{aligned} \tag{14.1.30}$$

然而，该估计具有较小的方差，近似为

$$\mathrm{var}[r_{xx}(m)] \approx \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\gamma_{xx}(n)|^2 + \gamma_{xx}^*(n-m)\gamma_{xx}(n+m)] \tag{14.1.31}$$

注意到 $r_{xx}(m)$是渐近无偏的，即

$$\lim_{N\to\infty} E[r_{xx}(m)] = \gamma_{xx}(m) \tag{14.1.32}$$

并且当 $N\to\infty$时其方差收敛于零。因此，估计 $r_{xx}(m)$也是 $\gamma_{xx}(m)$的一致估计。

在处理功率谱估计问题时，我们将使用由式(14.1.29)给出的估计 $r_{xx}(m)$。相应的功率密度谱是

$$P_{xx}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm} \tag{14.1.33}$$

如果我们将式(14.1.29)的 $r_{xx}(m)$代入到式(14.1.33)。估计 $P_{xx}(f)$可以表示为

$$P_{xx}(f) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn}\right|^2 = \frac{1}{N}|X(f)|^2 \tag{14.1.34}$$

其中，$X(f)$是样本序列 $x(n)$的傅里叶变换。这种常见形式的功率密度谱估计称为周期图。它最初是由 Schuster 于 1898 年引入用来检测和测量存在于数据中的“隐藏周期”的。

从式(14.1.33)可推出周期图估计 $P_{xx}(f)$的均值是

$$\begin{aligned} E[P_{xx}(f)] &= E\left[\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm}\right] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} E[r_{xx}(m)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm} \\ E[P_{xx}(f)] &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|m|}{N}\right)\gamma_{xx}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm} \end{aligned} \tag{14.1.35}$$

对式(14.1.35)的解释是，估计谱的均值是窗自相关函数的傅里叶变换

$$\tilde{\gamma}_{xx}(m) = \left(1-\frac{|m|}{N}\right)\gamma_{xx}(m) \tag{14.1.36}$$

其中，窗函数是(三角形的)巴特利特(Bartlett)窗。因此，估计谱的均值是

$$\begin{aligned} E[P_{xx}(f)] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\tilde{\gamma}_{xx}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm} \\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\alpha)W_B(f-\alpha)\mathrm{d}\alpha \end{aligned} \tag{14.1.37}$$

其中，$W_B(f)$是巴特利特窗的谱特征。关系式(14.1.37)说明了估计谱的均值是真实功率谱密度$\Gamma_{xx}(f)$与巴特利特窗傅里叶变换 $W_B(f)$的卷积。结果，估计谱的均值是真实谱的平滑版，受损于由有限数据点导致的相同的谱泄漏。

注意到估计谱是渐近无偏的，即

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm}\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_{xx}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm}=\Gamma_{xx}(f)$$

然而，一般来说，当 $N\to\infty$时估计 $P_{xx}(f)$的方差不会衰减到零。例如，当数据序列是一个随机过程时，方差容易证明(见习题 14.4)是

$$\mathrm{var}[P_{xx}(f)]=\Gamma_{xx}^2(f)\left[1+\left(\frac{\sin 2\pi fN}{N\sin 2\pi f}\right)^2\right] \tag{14.1.38}$$

当 $N\to\infty$时，上式的极限为

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{var}[P_{xx}(f)]=\Gamma_{xx}^2(f) \tag{14.1.39}$$

因此，我们认为周期图不是真实谱密度的一致估计(即不收敛于真正的功率谱密度)。

概括来说，估计的自相关 $r_{xx}(m)$是真实自相关函数 $\gamma_{xx}(m)$的一致估计。然而，它的傅里叶变换 $P_{xx}(f)$，即周期图不是真实功率谱密度的一致估计。我们注意到 $P_{xx}(f)$是 $\Gamma_{xx}(f)$的渐近无偏估计，但是对于一个有限长序列，从式(14.1.37)得到的 $P_{xx}(f)$均值包含了偏移，说明真实功率谱密度产生了失真。于是，估计谱受损于巴特利窗的平滑效应和具体的泄漏。平滑和泄漏最终限制了我们准确分析紧密谱的能力。

我们刚刚描述的泄漏和频率分解问题，以及周期图问题不是功率谱的一致估计问题，但它们为我们提供了在 14.2 节、14.3 节和 14.4 节描述功率谱估计方法的动机。在 14.2 节描述的方法是经典的非参数方法，对于数据序列无需假设条件。经典方法是通过对周期图或自相关直接执行一些平均或平滑操作而获得功率谱的一致估计。正如我们看到的，这些操作的结果是在估计方差降低的同时进一步降低频率分辨率。

14.3 节描述的谱估计方法基于产生数据的一些模型。一般来说，过去几十年来开发的基于模型的方法比经典方法提供了明显更高的分辨率。

其他一些附加方法将在 14.4 节和 14.5 节描述。在 14.4 节，我们讨论功率谱估计的滤波器组方法。14.5 节描述基于数据相关矩阵的特征值/特征矢量分解的方法。

14.1.3 使用 DFT 的功率谱估计

正如式(14.1.14)和式(14.1.34)给出的，估计的能量密度谱 $S_{xx}(f)$和周期图 $P_{xx}(f)$可分别使用 DFT 进行计算，可依次通过 FFT 算法进行有效计算。如果有 N 个数据点，我们可以按最小 N 点 DFT 进行计算。例如，计算产生了周期图样本

$$P_{xx}\left(\frac{k}{N}\right)=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N}\right|^2,\qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{14.1.40}$$

其中，频率为 $f_k=k/N$。

然而，这样的谱稀疏采样实际上并没有对连续谱估计 $P_{xx}(f)$提供一个很好的表示或前景。这一点很容易通过在附加频率点评估 $P_{xx}(f)$得到补偿。等价地，通过补零的方法我们可以有效地增

加序列长度，然后在更稠密的频率集上评估 $P_{xx}(f)$。因此，如果我们通过补零的方法将数据序列的长度增加到 L 点，再评估 L 点 FFT，那么有

$$P_{xx}\left(\frac{k}{L}\right)=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/L}\right|^2,\qquad k=0,1,\cdots,L-1 \tag{14.1.41}$$

强调一点，补零和评价 $L>N$ 点 DFT 并不能提高谱估计中的频率分辨率，而只是为我们提供了在更多频率点处进行测量谱插值的方法。在谱估计 $P_{xx}(f)$ 中的频率分辨率是由长度为 N 的数据记录决定的。

例 14.1.2　一个 $N=16$ 样本数的序列是通过对两个频率分量组成的模拟信号进行采样得到的。结果产生的离散时间序列是

$$x(n)=\sin 2\pi(0.135)n+\cos 2\pi(0.135+\Delta f)n,\qquad n=0,1,\cdots,15$$

其中，Δf 是频率间隔。在频率点 $f_k=k/L$ 处评估功率谱 $P(f)=(1/N)|X(f)|^2$，$k=0,1,\cdots,L-1$，对于 $\Delta f=0.06$ 和 $\Delta f=0.01$ 时的 $L=8,16,32$。

解：通过补零，我们增加数据序列以得到功率谱估计 $P_{xx}(k/L)$，图 14.1.4 画出了 $\Delta f=0.06$ 的结果。注意到补零不能改变分辨率，但具有对谱 $P_{xx}(f)$ 插值的效果。在这种情况下，频率间隔 Δf 充分大，以至于两个频率分量可分辨。

图 14.1.5 显示了 $\Delta f=0.01$ 的结果。在这种情况下，两个频率分量不可分辨。再者，补零效应提供了更多的插值，因此提供了估计谱更好的图形。但它不能提高频率分辨率。

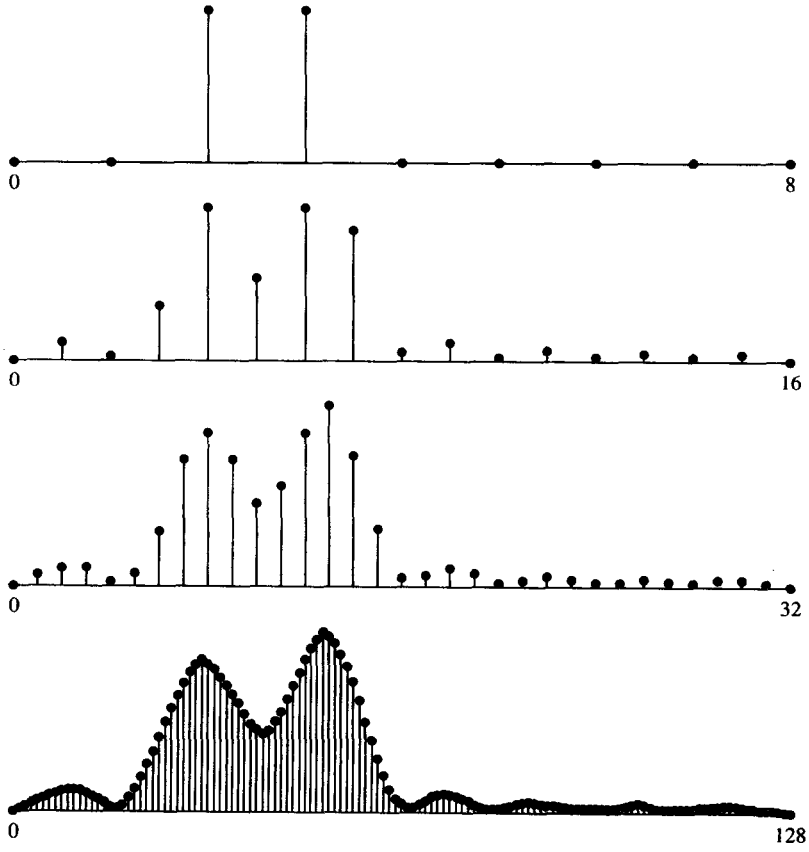


图 14.1.4　频率间隔为 $\Delta f=0.06$ 时的两个正弦谱

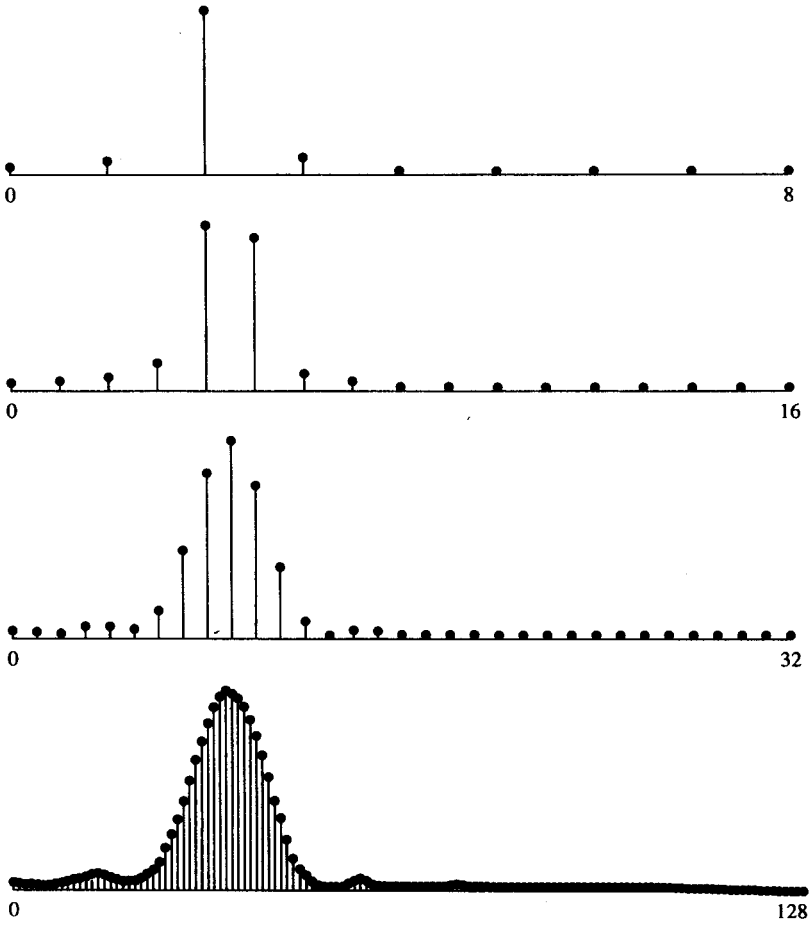


图 14.1.5 频率间隔为 $\Delta f = 0.01$ 时的两个正弦谱

当只需要几个点的周期图时,在第 8 章描述的 Goertzel 算法可以提供更有效的计算。由于 Goertzel 算法被认为是计算 DFT 的线性插值方法,所以将信号通过可并行调节的滤波器组传递,并对输出进行平方,显然就可以得到周期图估计(见习题 14.5)。

14.2 功率谱估计的非参数化方法

本节描述的功率谱估计方法是由 Bartlett(1948)、Blackman 和 Tukey(1958)以及 Welch(1967)开发的经典方法。这些方法没有假定数据是如何生成的,因此称为非参数方法。

既然这些估计全部基于数据的有限记录,这些方法的频率分辨率最好等于长度为 N 的矩形窗的宽度,也就是在 -3 dB 处近似为 $1/N$。我们将会更加精确地指定具体方法的频率分辨率。为了减小谱估计的方差,本节描述的估计技术降低了频率分辨率。

首先,描述一下估计,并导出各自的均值和方差。在 14.2.4 节给出了这三种方法的比较。虽然谱估计被表达为连续频率变量 f 的函数,实际上,可借助 FFT 算法在离散频率上计算估计。基于 FFT 的计算需求在 14.2.5 节论述。

14.2.1 Bartlett 方法:平均周期图

减小周期图方差的 Bartlett 方法包含三个步骤。首先,N 点序列被划分为 K 个不重叠段,每段

的长度为 M。这样就生成了 K 个数据段

$$x_i(n)=x(n+iM),\qquad \begin{matrix} i=0,1,\cdots,K-1 \\ n=0,1,\cdots,M-1 \end{matrix} \tag{14.2.1}$$

对于每一段，可计算周期图

$$P_{xx}^{(i)}(f)=\frac{1}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1}x_i(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn}\right|^2,\qquad i=0,1,\cdots,K-1 \tag{14.2.2}$$

最后，对 K 段的周期图进行平均得到 Bartlett 功率谱估计[Bartlett(1948)]

$$P_{xx}^{B}(f)=\frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1}P_{xx}^{(i)}(f) \tag{14.2.3}$$

该估计的统计特性很容易得到。首先，均值是

$$\begin{aligned} E[P_{xx}^{B}(f)]&=\frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1}E[P_{xx}^{(i)}(f)] \\ &=E[P_{xx}^{(i)}(f)] \end{aligned} \tag{14.2.4}$$

由式(14.1.35)和式(14.1.37)，可得到单个周期图的期望值是

$$\begin{aligned} E[P_{xx}^{(i)}(f)]&=\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)\gamma_{xx}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm} \\ &=\frac{1}{M}\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\alpha)\left(\frac{\sin\pi(f-\alpha)M}{\sin\pi(f-\alpha)}\right)^2\mathrm{d}\alpha \end{aligned} \tag{14.2.5}$$

其中

$$W_B(f)=\frac{1}{M}\left(\frac{\sin\pi fM}{\sin\pi f}\right)^2 \tag{14.2.6}$$

是巴特利特窗

$$w_B(n)=\begin{cases} 1-\dfrac{|m|}{M}, & |m|\leqslant M-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{14.2.7}$$

的频率特性。

从式(14.2.5)注意到，现在真实谱与巴特利特窗的频率特性 $W_B(f)$有关。数据长度从 N 点减小到 $M=N/K$，导致窗口的谱宽度增加 K 因子。结果，频率分辨率已经得到减小因子 K。

分辨率降低的结果使得方差减小。Bartlett 估计的方差是

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[P_{xx}^{B}(f)]&=\frac{1}{K^2}\sum_{i=0}^{K-1}\mathrm{var}[P_{xx}^{(i)}(f)] \\ &=\frac{1}{K}\mathrm{var}[P_{xx}^{(i)}(f)] \end{aligned} \tag{14.2.8}$$

如果我们利用式(14.1.38)和式(14.2.8)，得到

$$\mathrm{var}[P_{xx}^{B}(f)]=\frac{1}{K}\Gamma_{xx}^2(f)\left[1+\left(\frac{\sin 2\pi fM}{M\sin 2\pi f}\right)^2\right] \tag{14.2.9}$$

因此，Bartlett 功率谱估计的方差减小因子为 K。

14.2.2 Welch 方法:平均修正的周期图

Welch(1967)对 Bartlett 方法做了两个基本修正。首先,允许数据段重叠。因此数据段可以表示为

$$x_i(n) = x(n + iD), \qquad \begin{matrix} n = 0, 1, \cdots, M-1 \\ i = 0, 1, \cdots, L-1 \end{matrix} \tag{14.2.10}$$

其中,iD 是第 i 个序列的起始点。注意到如果 $D = M$,数据段不覆盖,并且数据段数目 L 与 Bartlett 方法中的数目 K 相等。然而,如果 $D = M/2$,则在连续的数据段和 $L = 2K$ 段之间只得到 50% 的覆盖。我们可选择形成长度为 $2M$ 的 K 个数据段。

Welch 对 Bartlett 方法的第二个修正是在计算周期图之前对数据段进行开窗。结果是"修正的"周期图。

$$\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1} x_i(n)w(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn}\right|^2, \qquad i = 0, 1, \cdots, L-1 \tag{14.2.11}$$

其中,U 是窗函数中功率归一化因子,可选择为

$$U = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} w^2(n) \tag{14.2.12}$$

Welch 功率谱估计是这些修正的周期图的平均,即

$$P_{xx}^{W}(f) = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1} \tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) \tag{14.2.13}$$

Welch 估计的均值是

$$\begin{aligned} E[P_{xx}^{W}(f)] &= \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] \\ &= E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] \end{aligned} \tag{14.2.14}$$

但修正的周期图的期望值是

$$\begin{aligned} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] &= \frac{1}{MU}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1} w(n)w(m)E[x_i(n)x_i^*(m)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f(n-m)} \\ &= \frac{1}{MU}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1} w(n)w(m)\gamma_{xx}(n-m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f(n-m)} \end{aligned} \tag{14.2.15}$$

既然

$$\gamma_{xx}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\alpha n}\mathrm{d}\alpha \tag{14.2.16}$$

将式(14.2.16)的 $\gamma_{xx}(n)$代入式(14.2.15),得

$$\begin{aligned} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] &= \frac{1}{MU}\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha)\left[\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1} w(n)w(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(n-m)(f-\alpha)}\right]\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)\mathrm{d}\alpha \end{aligned} \tag{14.2.17}$$

其中，由定义

$$W(f)=\frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1}w(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn}\right|^2 \tag{14.2.18}$$

归一化因子确保

$$\int_{-1/2}^{1/2}W(f)\mathrm{d}f=1 \tag{14.2.19}$$

Welch 估计的方差是

$$\mathrm{var}[P_{xx}^{W}(f)]=\frac{1}{L^2}\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-1}E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)\tilde{P}_{xx}^{(j)}(f)]-\{E[P_{xx}^{W}(f)]\}^2 \tag{14.2.20}$$

在连续数据段($L=K$)之间无覆盖的情况下，Welch 已证明

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[P_{xx}^{W}(f)]&=\frac{1}{L}\mathrm{var}[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)]\\&\approx\frac{1}{L}\Gamma_{xx}^2(f)\end{aligned} \tag{14.2.21}$$

在连续数据段($L=2K$)之间有 50%被覆盖的情况下，在 Welch 的论文中同样导出了用巴特利特窗(三角形窗)得到的 Welch 功率谱估计，是

$$\mathrm{var}[P_{xx}^{W}(f)]\approx\frac{9}{8L}\Gamma_{xx}^2(f) \tag{14.2.22}$$

虽然我们在方差的计算中只考虑三角形形窗，但也可能用其他的窗。一般来说，这将生成不同的方差。此外，人们可能会改变数据段覆盖大于或小于本节提到的 50%，以试图改善估计的相应特性。

14.2.3　Blackman 和 Tukey 方法：平滑周期图

Blackman 和 Tukey(1958)提出并分析了一种方法，首先对采样自相关序列开窗，然后进行傅里叶变换生成功率谱估计。对估计的自相关序列 $\gamma_{xx}(m)$开窗的基本原则是，对于较大的滞后，估计的可靠性较小。这是由于较小的数据点数($N-m$)落入估计。对于逼近 N 的 m 值，这些估计的方差很高，因此在估计的功率谱信息中对于这些估计应给予较小的权值。因此，Blackman 和 Tukey 估计是

$$P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)=\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}r_{xx}(m)w(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm} \tag{14.2.23}$$

其中，窗函数 $w(n)$的长度是 $2M-1$ 并且在 $|m|\geqslant M$ 时为零。按照 $w(n)$的这一定义，在式(14.2.23)中的求和界限可以扩展到$(-\infty,\infty)$。因此，式(14.2.23)的频域等价公式是卷积积分

$$P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)=\int_{-1/2}^{1/2}P_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{14.2.24}$$

其中，$P_{xx}(f)$是周期图。从式(14.2.24)清楚地看到对自相关加窗的效果是平滑了周期图估计，因此，减小估计方差的代价是减小了分辨率。

窗序列 $w(n)$应该关于 $m=0$ 点偶对称，以保证功率谱估计是实数。进一步，期望选择的窗谱是非负的，即

$$W(f)\geqslant 0,\qquad |f|\leqslant 1/2 \tag{14.2.25}$$

这一条件确保了 $P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)\geqslant 0$,对于$|f|\leqslant 1/2$,这是任何功率谱估计的期望特性。然而,应该指明,前面已介绍的一些窗函数不满足这一条件。例如,不管其低旁瓣特性,汉明窗和汉宁窗都不满足式(14.2.25)的特性,结果可能在某部分频率范围导致负的谱估计。

Blackman-Tukey 功率谱估计的期望值是

$$E[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]=\int_{-1/2}^{1/2}E[P_{xx}(\alpha)]W(f-\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{14.2.26}$$

从式(14.1.37),得

$$E[P_{xx}(\alpha)]=\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\theta)W_B(\alpha-\theta)\mathrm{d}\theta \tag{14.2.27}$$

并且 $W_B(f)$是巴特利特窗的傅里叶变换。式(14.2.27)代入式(14.2.26)生成双重卷积积分

$$E[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\theta)W_B(\alpha-\theta)W(f-\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta \tag{14.2.28}$$

等价地,Blackman-Tukey 功率谱估计在时间域的期望值是

$$\begin{aligned}E[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]&=\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}E[r_{xx}(m)]w(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm}\\&=\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}\gamma_{xx}(m)w_B(m)w(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm}\end{aligned} \tag{14.2.29}$$

其中,巴特利特窗是

$$w_B(m)=\begin{cases}1-\dfrac{|m|}{N}, & |m|<N\\0, & \text{其他}\end{cases} \tag{14.2.30}$$

显然,我们应该选择 $w(n)$窗口长度为 $M\ll N$,也就是说,$w(n)$应该比 $w_B(m)$窄,才能提供周期图的附加平滑性。在这一条件下,式(14.2.28)变成

$$E[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]\approx\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta)\mathrm{d}\theta \tag{14.2.31}$$

这是由于

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2}W_B(\alpha-\theta)W(f-\alpha)\mathrm{d}\alpha&=\int_{-1/2}^{1/2}W_B(\alpha)W(f-\theta-\alpha)\mathrm{d}\alpha\\&\approx W(f-\theta)\end{aligned} \tag{14.2.32}$$

Blackman-Tukey 功率谱估计的方差是

$$\mathrm{var}[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]=E\{[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]^2\}-\{E[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]\}^2 \tag{14.2.33}$$

其中,均值可近似为式(14.2.31)。式(14.2.33)中的二阶矩是

$$E\{[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]^2\}=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}E[P_{xx}(\alpha)P_{xx}(\theta)]W(f-\alpha)W(f-\theta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta \tag{14.2.34}$$

在随机过程是高斯分布的假设条件下,我们发现

$$E[P_{xx}(\alpha)P_{xx}(\theta)]=\Gamma_{xx}(\alpha)\Gamma_{xx}(\theta)\left\{1+\left[\frac{\sin\pi(\theta+\alpha)N}{N\sin\pi(\theta+\alpha)}\right]^2+\left[\frac{\sin\pi(\theta-\alpha)N}{N\sin\pi(\theta-\alpha)}\right]^2\right\} \tag{14.2.35}$$

将式(14.2.35)代入到式(14.2.34)得

$$\begin{aligned}E\{[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]^2\}=&\left[\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta)\mathrm{d}\theta\right]^2\\&+\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\alpha)\Gamma_{xx}(\theta)W(f-\alpha)W(f-\theta)\\&\times\left\{\left[\frac{\sin\pi(\theta+\alpha)N}{N\sin\pi(\theta+\alpha)}\right]^2+\left[\frac{\sin\pi(\theta-\alpha)N}{N\sin\pi(\theta-\alpha)}\right]^2\right\}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{14.2.36}$$

式(14.2.36)中的第一项只是 $P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)$ 的均值的平方，可按照式(14.2.33)相减得到。剩下式(14.2.36)中的第二项代替方差。在 $N>>M$ 的情况下，函数 $\sin\pi(\theta+\alpha)N/N\sin\pi(\theta+\alpha)$ 和 $\sin\pi(\theta-\alpha)N/N\sin\pi(\theta-\alpha)$ 分别比 $W(f)$ 在 $\theta=-\alpha$ 和 $\theta=\alpha$ 的邻近值相对窄。因此

$$\begin{aligned}&\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta)\left\{\left[\frac{\sin\pi(\theta+\alpha)N}{N\sin\pi(\theta+\alpha)}\right]^2+\left[\frac{\sin\pi(\theta-\alpha)N}{N\sin\pi(\theta-\alpha)}\right]^2\right\}\mathrm{d}\theta\\&\qquad\approx\frac{\Gamma_{xx}(-\alpha)W(f+\alpha)+\Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)}{N}\end{aligned} \tag{14.2.37}$$

根据这一近似，$P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)$ 的方差变为

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]&\approx\frac{1}{N}\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)[\Gamma_{xx}(-\alpha)W(f+\alpha)+\Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)]\mathrm{d}\alpha\\&\approx\frac{1}{N}\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}^2(\alpha)W^2(f-\alpha)\mathrm{d}\alpha\end{aligned} \tag{14.2.38}$$

其中，在上一步中我们已得到近似

$$\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\alpha)\Gamma_{xx}(-\alpha)W(f-\alpha)W(f+\alpha)\mathrm{d}\alpha\approx0 \tag{14.2.39}$$

我们将生成式(14.2.38)的另一种近似。当 $W(f)$ 相比于真实功率谱 $\Gamma_{xx}(f)$ 是窄带时，式(14.2.38)可进一步近似为

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]&\approx\Gamma_{xx}^2(f)\left[\frac{1}{N}\int_{-1/2}^{1/2}W^2(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\\&\approx\Gamma_{xx}^2(f)\left[\frac{1}{N}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}w^2(m)\right]\end{aligned} \tag{14.2.40}$$

14.2.4　非参数的功率谱估计器的性能特征

本节我们比较 Bartlett，Welch 及 Blackman-Tukey 功率谱估计的质量。作为质量测度，我们使用功率谱估计的方差与均值平方的比率，即

$$Q_A = \frac{\{E[P_{xx}^A(f)]\}^2}{var[P_{xx}^A(f)]} \tag{14.2.41}$$

其中,对于三种功率谱估计有 $A = B, W$ 或 BT。该量值的倒数称为可变性,也可被用做性能测度。

为了参考,周期图的均值和方差为

$$E[P_{xx}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(f-\theta)\mathrm{d}\theta \tag{14.2.42}$$

$$\mathrm{var}[P_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f)\left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f N}{N \sin 2\pi f}\right)^2\right] \tag{14.2.43}$$

其中

$$W_B(f) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin \pi f N}{\sin \pi f}\right)^2 \tag{14.2.44}$$

对于较大的 N(即 $N \to \infty$),

$$\begin{aligned} &E[P_{xx}(f)] \to \Gamma_{xx}(f), \quad \int_{-1/2}^{1/2} W_B(\theta)\mathrm{d}\theta = w_B(0)\Gamma_{xx}(f) = \Gamma_{xx}(f) \\ &\mathrm{var}[P_{xx}(f)] \to \Gamma_{xx}^2(f) \end{aligned} \tag{14.2.45}$$

因此,正如前已指出,周期图是功率谱的渐近无偏估计,但不一致,这是因为当 N 趋于无穷时其方差趋近于零。

渐近地,周期图可由质量因子表示为

$$Q_P = \frac{\Gamma_{xx}^2(f)}{\Gamma_{xx}^2(f)} = 1 \tag{14.2.46}$$

事实上,Q_P 是固定的,并独立于数据长度 N,这是该估计质量较差的另一种迹象。

Bartlett 功率谱估计 Bartlett 功率谱估计的均值和方差是

$$E[P_{xx}^B(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(f-\theta)\mathrm{d}\theta \tag{14.2.47}$$

$$\mathrm{var}[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K}\Gamma_{xx}^2(f)\left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f M}{M \sin 2\pi f}\right)^2\right] \tag{14.2.48}$$

并且

$$W_B(f) = \frac{1}{M}\left(\frac{\sin \pi f M}{\sin \pi f}\right)^2 \tag{14.2.49}$$

当 $N \to \infty$ 和 $M \to \infty$,且 $K = N/M$ 固定时,我们发现

$$\begin{aligned} &E[P_{xx}^B(f)] \to \Gamma_{xx}(f), \quad \int_{-1/2}^{1/2} W_B(f)df = \Gamma_{xx}(f) w_B(0) = \Gamma_{xx}(f) \\ &\mathrm{var}[P_{xx}^B(f)] \to \frac{1}{K}\Gamma_{xx}^2(f) \end{aligned} \tag{14.2.50}$$

注意到 Bartlett 功率谱估计是渐近无偏的,并且如果 K 允许随着 N 的增加而增加,估计也是一致的。因此,该估计可以由质量因子渐近地表示为

$$Q_B = K = \frac{N}{M} \tag{14.2.51}$$

Bartlett 估计的频率分辨率，可通过取矩形窗的 3 dB 主瓣宽度测得，为

$$\Delta f = \frac{0.9}{M} \tag{14.2.52}$$

因此，$M = 0.9/\Delta f$，并且质量因子变为

$$Q_B = \frac{N}{0.9/\Delta f} = 1.1N\Delta f \tag{14.2.53}$$

Welch 功率谱估计　Welch 功率谱估计的均值和方差是

$$E[P_{xx}^W(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta)\mathrm{d}\theta \tag{14.2.54}$$

其中，

$$W(f) = \frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1} w(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn}\right|^2 \tag{14.2.55}$$

并且

$$\mathrm{var}[P_{xx}^W(f)] = \begin{cases} \dfrac{1}{L}\Gamma_{xx}^2(f), & \text{无覆盖} \\ \dfrac{9}{8L}\Gamma_{xx}^2(f), & \text{50\% 覆盖且三角形窗} \end{cases} \tag{14.2.56}$$

当 $N\to\infty$ 且 $M\to\infty$ 时，均值收敛于

$$E[P_{xx}^W(f)] \to \Gamma_{xx}(f) \tag{14.2.57}$$

并且方差收敛于零，所以估计是一致的。

在式(14.2.56)给出的两个条件下，质量因子是

$$Q_W = \begin{cases} L = \dfrac{N}{M}, & \text{无覆盖} \\ \dfrac{8L}{9} = \dfrac{16N}{9M}, & \text{50\% 覆盖且三角形窗} \end{cases} \tag{14.2.58}$$

另一方面，三角形窗在 3 dB 点处的谱宽度是

$$\Delta f = \frac{1.28}{M} \tag{14.2.59}$$

结果，按 Δf 和 N 所表示的质量因子是

$$Q_W = \begin{cases} 0.78N\Delta f, & \text{无覆盖} \\ 1.39N\Delta f, & \text{50\% 覆盖且三角形窗} \end{cases} \tag{14.2.60}$$

Blackman-Tukey 功率谱估计　功率谱估计的均值和方差近似为

$$\begin{aligned} E[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)] &\approx \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta)\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{var}[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)] &\approx \Gamma_{xx}^2(f)\left[\frac{1}{N}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w^2(m)\right] \end{aligned} \tag{14.2.61}$$

其中，$w(m)$ 是使估计的自相关序列逐渐变小的窗口序列。对于矩形窗和巴特利特(三角形)窗，有

$$\frac{1}{N}\sum_{n=-(M-1)}^{M-1} w^2(n) = \begin{cases} 2M/N, & \text{矩形窗} \\ 2M/3N, & \text{三角形窗} \end{cases} \tag{14.2.62}$$

从式(14.2.61)容易看出,估计的均值渐近无偏。三角窗的质量因子是

$$Q_{BT} = 1.5\frac{N}{M} \tag{14.2.63}$$

由于窗口长度是 $2M-1$,所以在 3 dB 点处测得的频率分辨率是

$$\Delta f = \frac{1.28}{2M} = \frac{0.64}{M} \tag{14.2.64}$$

因此

$$Q_{BT} = \frac{1.5}{0.64}N\Delta f = 2.34N\Delta f \tag{14.2.65}$$

这些结果总结在表 14.1 中。得出的结果表明 Welch 功率谱估计和 Blackman-Tukey 功率谱估计在某种程度上优越于 Bartlett 估计。然而,性能的差别相对却小。主要是质量因子随着数据长度 N 的增加而增加。周期图估计不具备这一特性。进一步,质量因子依赖于数据长度 N 与频率分辨率 Δf 的乘积。通过增加数据长度 N,质量的所需级别会降低(频率分辨率增加)。

表 14.1 功率谱估计的质量

估计	方差
Bartlett	$1.11N\Delta f$
Welch(50% 覆盖)	$1.39N\Delta f$
Blackman-Tukey	$2.34N\Delta f$

14.2.5 非参数的功率谱估计器的计算需求

非参数的功率谱估计的另一重要方面是计算需求。对这一方面的比较,我们假定估计是基于固定数据量 N 和某个具体分辨率 Δf。假定在所有计算中使用基-2 FFT 算法。我们将只对计算功率谱估计所需要的复数乘法进行计数。

Welch 功率谱估计。

$$\text{FFT 长度} = M = 0.9/\Delta f$$

$$\text{FFT 数目} = \frac{N}{M} = 1.11N\Delta f$$

$$\text{计算数目} = \frac{N}{M}\left(\frac{M}{2}\text{lb}M\right) = \frac{N}{2}\text{lb}\frac{0.9}{\Delta f}$$

Welch 功率谱估计(50%覆盖)

$$\text{FFT 长度} = M = 1.28/\Delta f$$

$$\text{FFT 数目} = \frac{2N}{M} = 1.56N\Delta f$$

$$\text{计算数目} = \frac{2N}{M}\left(\frac{M}{2}\text{lb}M\right) = N\text{lb}\frac{1.28}{\Delta f}$$

除了上述 $2N/M$ 的 FFT 算法,对数据加窗还需要另外一些乘法。每个数据记录需要 M 个乘法。因此,总的计算数目为

$$\text{总的计算数目} = 2N + N\text{ lb}\frac{1.28}{\Delta f} = N\text{ lb}\frac{5.12}{\Delta f}$$

Blackman-Tukey 功率谱估计　在 Blackman-Tukey 方法中，自相关 $r_{xx}(m)$可以借助 FFT 算法进行有效计算。然而，如果数据点数大，则不可能计算一个 N 点的 DFT。例如，我们可能有 $N=10^5$ 数据点，但只能执行 1024 点的 DFT。由于自相关序列开窗为 $2M-1$ 点，$M \ll N$，可通过将数据分段成 $K=N/2M$ 记录计算所需要的 $2M-1$ 点的 $r_{xx}(m)$，然后借助 FFT 算法计算 $2M$ 点的 DFT 和一个 $2M$ 点的 IDFT。Rader(1970)已经描述了一个执行该计算的方法(见习题 14.7)。

如果我们基于该方法讨论 Blackman-Tukey 计算复杂度，则可以得到下列计算需求。

$$\text{FFT 长度} = 2M = 1.28/\Delta f$$

$$\text{FFT 数目} = 2K+1 = 2\left(\frac{N}{2M}\right)+1 \approx \frac{N}{M}$$

$$\text{计算数目} = \frac{N}{M}(M\text{lb}\,2M) = N\text{lb}\,\frac{1.28}{\Delta f}$$

我们可以忽略对自相关序列 $r_{xx}(m)$开窗所需要的额外 M 次乘法，它是一个较小的数字。最后，执行开窗自相关序列的傅里叶变换还需要一些附加计算。通过补零后的 FFT 算法可以用于该类计算，以便内插谱估计。作为附加计算的结果，计算次数增加了很小的量。

从这些结果我们可以得出结论，Welch 方法比其他两种方法需要的计算量稍多，然而，这三种方法的计算量差别不大。

14.3　功率谱估计的参数化方法

上一节所描述的非参数功率谱估计方法相对简单易解，并且使用 FFT 算法容易计算。然而，这些方法需要可用的长数据记录，以得到很多应用所必需的频率分辨率。进一步，这些方法受损于有限长数据记录所固有的由开窗带来的谱泄漏效应。通常，谱泄漏隐蔽了数据中存在的弱信号。

一种观点认为，非参数方法的基本局限性是其内在假设，即假设自相关估计 $r_{xx}(m)$在 $m \geqslant N$ 时是零值。这一点由式(14.1.33)描述。该假设严重限制了频率分辨率和所得到的功率谱估计质量。另一种观点认为，周期图估计中内在假设数据是周期的，周期为 N。这两种假设都是不可实现的。

本节描述的功率谱估计方法不需要这些假设。事实上，这些方法外推滞后 $m \geqslant N$ 的自相关值。如果我们具有数据生成的先验知识，外推是可能的。在这种情况下，信号生成模型可以用观察数据估计到的一些参数来构造。从该模型和估计参数，我们可以计算模型所包含的功率谱密度。

实质上，模型方法消除了窗函数的需要和自相关序列在 $|m| \geqslant N$ 时为零的假设。结果，参数(基于模型的)功率谱估计方法避免了泄漏问题，并且比上一节描述的非参数的 FFT 方法提供了更好的频率分辨能力。对于一些由时变或瞬时现象所造成的可用短数据记录的应用尤其如此。

本节所描述的参数化方法基于将数据序列 $x(n)$模型化为一个线性系统的输出，该线性系统由有理系统函数形式所表征

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \tag{14.3.1}$$

相应的差分方程是

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^{q} b_k w(n-k) \tag{14.3.2}$$

其中,$w(n)$是系统的输入序列,观察的数据 $x(n)$代表输出序列。

在功率谱估计中,输入序列是不可观察的。然而,如果观察数据表示为平稳随机过程,那么输入序列也被假定为平稳随机过程。此时,数据的功率谱密度是

$$\Gamma_{xx}(f) = |H(f)|^2 \Gamma_{ww}(f)$$

其中,$\Gamma_{ww}(f)$是输入序列的功率谱密度,且 $H(f)$是模型的频率响应。

我们的目标是估计功率谱密度 $\Gamma_{xx}(f)$,可方便地假定输入序列 $w(n)$是一个零均值白噪声序列,自相关是

$$\gamma_{ww}(m) = \sigma_w^2 \delta(m)$$

其中,σ_w^2 是方差(即 $\sigma_w^2 = E[|w(n)|^2]$)。于是,观察数据的功率谱密度就是

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2 = \sigma_w^2 \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2} \tag{14.3.3}$$

在 12.2 节,我们描述了式(14.3.3)所给出的平稳随机过程的表示。

在基于模型的方法中,谱估计过程由两步组成。给定数据序列 $x(n), 0 \leqslant n \leqslant N-1$,我们可估计该模型的参数$\{a_k\}$和$\{b_k\}$。于是,我们可按式(14.3.3)从这些估计来计算功率谱密度。

回顾式(14.3.1)和式(14.3.2)中的零极点模型所生成的随机过程 $x(n)$,称其为(p,q)阶的自回归滑动平均(ARMA)过程,通常表示为 ARMA(p,q)。如果 $q=0$ 并且 $b_0=1$,则所生成的系统模型的系统函数为 $H(z)=1/A(z)$,并且其输出 $x(n)$称为 p 阶的自回归(AR)过程,表示为 AR(p)。通过置 $A(z)=1$,可得第三种模型,即 $H(z)=B(z)$,其输出 $x(n)$称为 q 阶的滑动平均(MA)过程,表示为 MA(q)。

对于这三种线性模型,AR 模型是目前最广泛使用的。原因有二,首先,AR 模型适合于表示具有窄尖峰的谱。再者,AR 模型为 AR 参数生成了非常简单的线性方程。另一方面,一般来说,MA 模型需要更多的系数表示一个窄谱。结果,MA 模型很少被用来作为谱估计的模型。通过合并零极点,ARMA 模型从模型参数数量的观点对随机过程的谱提供了更有效的表示。

Wold(1938)的分解定理声称任何 ARMA 或 MA 过程都可被一个可能无限阶的 AR 模型唯一表示,并且任何 ARMA 或 MA 过程都可被一个可能无限阶的 MA 模型唯一表示。据此定理,模型选择的问题减小为选择需要最小数目参数并且容易计算的模型问题。通常,实际中选择 AR 模型,而 ARMA 模型被用于较小的范围。

在描述估计 AR(p),MA(q)和 ARMA(p,q)模型参数的方法之前,有必要建立模型参数与自相关序列 $\gamma_{xx}(m)$之间的关系。此外,我们将 AR 模型的参数与 $x(n)$过程线性预测器中的系数联系起来。

14.3.1 自相关和模型参数之间的关系

在 12.2.2 节,我们建立了自相关$\{\gamma_{xx}(m)\}$与模型参数$\{a_k\}$和$\{b_k\}$之间的关系。对于 ARMA(p,q)过程,式(12.2.18)给出的关系是

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k), & m > q \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h(k) b_{k+m}, & 0 \leqslant m \leqslant q \\ \gamma_{xx}^*(-m), & m < 0 \end{cases} \tag{14.3.4}$$

式(14.3.4)的关系提供了确定参数$\{a_k\}$的公式，只关注 $m > q$ 的情况。因此线性方程组

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(q) & \gamma_{xx}(q-1) & \cdots & \gamma_{xx}(q-p+1) \\ \gamma_{xx}(q+1) & \gamma_{xx}(q) & \cdots & \gamma_{xx}(q+p+2) \\ \vdots & \vdots & & \\ \gamma_{xx}(q+p-1) & \gamma_{xx}(q+p-2) & \cdots & \gamma_{xx}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(q+1) \\ \gamma_{xx}(q+2) \\ \vdots \\ \gamma_{xx}(q+p) \end{bmatrix} \tag{14.3.5}$$

可用于求解模型参数$\{a_k\}$，通过使用自相关序列的估计代替 $\gamma_{xx}(m)$，$m \geqslant q$。这一问题在 14.3.8 节中描述。

对式(14.3.5)中关系的另一种解释是，$m > q$ 时的自相关值可唯一地从极点参数$\{a_k\}$和$\gamma_{xx}(m)$确定，$0 \leqslant m \leqslant p$。结果，线性系统模型自动扩展了自相关序列 $\gamma_{xx}(m)$的值，$m > p$。

如果从式(14.3.5)确定极点参数$\{a_k\}$，则结果不会有助于我们确定 MA 参数$\{b_k\}$，因方程

$$\sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h(k) b_{k+m} = \gamma_{xx}(m) + \sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k), \qquad 0 \leqslant m \leqslant q$$

依赖于脉冲响应 $h(n)$。借助 $B(z)$与已知 $A(z)$的长除，虽然脉冲响应可以被表达为参数$\{b_k\}$的形式，但该方法生成了 MA 参数的非线性方程组。

如果我们将 AR(p)用于观察数据，则通过设置式(14.3.4)中的 $q = 0$，可得到 AR 参数与自相关序列之间的关系。于是，得到

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k), & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sigma_w^2, & m = 0 \\ \gamma_{xx}^*(-m), & m < 0 \end{cases} \tag{14.3.6}$$

在此情况下，可从 Yule-Walker 方程或归一化方程

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(-1) & \vdots & \gamma_{xx}(-p+1) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \vdots & \gamma_{xx}(-p+2) \\ \cdots & \cdots & & \vdots \\ \gamma_{xx}(p-1) & \gamma_{xx}(p-2) & \vdots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(1) \\ \gamma_{xx}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{xx}(p) \end{bmatrix} \tag{14.3.7}$$

得到 AR 参数$\{a_k\}$，并且从方程

$$\sigma_w^2 = \gamma_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(-k) \tag{14.3.8}$$

得到方差 σ_w^2。式(14.3.7)和式(14.3.8)的方程通常合并为单个矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(-1) & \cdots & \gamma_{xx}(-p) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \cdots & \gamma_{xx}(-p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{xx}(p) & \gamma_{xx}(p-1) & \cdots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14.3.9}$$

由于式(14.3.7)或式(14.3.9)中的相关矩阵是 Toeplitz,使用 Levinson-Durbin 算法可进行有效的转换。

因此,AR(p)模型中的系统参数可容易地从自相关序列 $\gamma_{xx}(m)$的情况确定,$0 \leqslant m \leqslant p$。进一步,一旦$\{a_k\}$确定,式(14.3.6)可用来扩展自相关序列,$m > p$。

最后,为了完善起见,我们指出在观察数据的 MA(q)模型中,自相关序列 $\gamma_{xx}(m)$与 MA 参数$\{b_k\}$有关,即

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q} b_k b_{k+m}, & 0 \leqslant m \leqslant q \\ 0, & m > q \\ \gamma_{xx}^*(-m), & m < 0 \end{cases} \tag{14.3.10}$$

参见 12.2 节建立的方程

在这一背景下,我们现在描述 AR(p),MA(q)和 ARMA(p,q)模型的功率谱估计方法。

14.3.2 AR 模型参数的 Yule-Walker 求解方法

用 Yule-Walker 方法,我们只从数据估计到自相关,并使用式(14.3.7)的估计求解 AR 模型参数。在这一方法下,我们希望使用自相关估计的偏移形式

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)x(n+m), \qquad m \geqslant 0 \tag{14.3.11}$$

以保证自相关矩阵是半正定的。结果是一个稳定的 AR 模型。虽然稳定性不是功率谱估计的关键问题,但可以推测一个稳定的 AR 模型可最好地表示数据。

在第 12 章描述的 Levinson-Durbin 算法中,用 $r_{xx}(m)$代替 $\gamma_{xx}(m)$就生成了 AR 参数。相应的功率谱估计是

$$P_{xx}^{\mathrm{YW}}(f) = \frac{\hat{\sigma}_{wp}^2}{|1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_p(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fk}|^2} \tag{14.3.12}$$

其中,$\hat{a}_p(k)$是从 Levinson-Durbin 递归得到的 AR 参数估计,并且

$$\hat{\sigma}_{wp}^2 = \hat{E}_p^f = r_{xx}(0)\prod_{k=1}^{p}[1 - |\hat{a}_k(k)|^2] \tag{14.3.13}$$

是 p 阶预测器估计的最小均方值。14.3.9 节给出了例子说明估计器的频率分辨力。

在借助 AR 模型估计正弦信号的功率谱时,Lacoss(1971)证明了 AR 谱估计中的谱峰与正弦信号功率的平方成比例。另一方面,功率谱密度中峰值下的面积与正弦功率成线性比例关系。这一特征行为对于所有的基于模型的 AR 估计方法都成立。

14.3.3 AR 模型参数的 Burg 求解方法

由 Burg(1968)修订的用于估计 AR 参数的方法可以视为一种自回归的最小二乘方格型方法,基于在线性预测器中的前向和后向误差达到最小,约束条件是 AR 参数满足 Levinson-Durbin 递归。

要推导估计器,先假定给出了数据 $x(n)$,$n = 0,1,\cdots,N-1$,并且认为 m 阶的前向和后向线性预测估计给出如下:

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^{m} a_m(k)x(n-k)$$
$$\hat{x}(n-m) = -\sum_{k=1}^{m} a_m^*(k)x(n+k-m) \tag{14.3.14}$$

并且相应的前向和后向误差 $f_m(n)$和 $g_m(n)$定义为 $f_m(n) = x(n) - \hat{x}(n)$和 $g_m(n) = x(n-m) - \hat{x}(n-m)$，其中 $a_m(k), 0 \leqslant k \leqslant m-1, m = 1,2,\cdots,p$ 是预测系数。最小二乘方误差是

$$\mathcal{E}_m = \sum_{n=m}^{N-1}[|f_m(n)|^2 + |g_m(n)|^2] \tag{14.3.15}$$

通过选择预测系数可使误差最小化，受制于需满足的约束条件，即 Levinson-Durbin 递归

$$a_m(k) = a_{m-1}(k) + K_m a_{m-1}^*(m-k), \qquad \begin{matrix} 1 \leqslant k \leqslant m-1 \\ 1 \leqslant m \leqslant p \end{matrix} \tag{14.3.16}$$

其中，$K_m = a_m(m)$是预测器的格型滤波器实现中的第 m 个反射系数。当将式(14.3.16)代入 $f_m(n)$和 $g_m(n)$的表达式中时，结果是由式(12.3.4)给出的前向和后向预测误差的自回归方程式对。

现在，如果我们将式(12.3.4)代入式(14.3.16)中，并关于复数反射系数 K_m 来最小化$\mathcal{E}_m$，那么就得出结果

$$\hat{K}_m = \frac{-\sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}(n)g_{m-1}^*(n-1)}{\frac{1}{2}\sum_{n=m}^{N-1}[|f_{m-1}(n)|^2 + |g_{m-1}(n-1)|^2]}, \qquad m = 1,2,\cdots,p \tag{14.3.17}$$

式(14.3.17)中的分子项是前向与后向误差之间的互相关估计。对于式(14.3.17)分母中的归一化因子，保证了 $|K_m| < 1$，以至于从这些数据得到的全极点模型是稳定的。读者应注意到式(14.3.17)与式(12.3.28)中的统计对等项之间的相似性。

注意式(14.3.7)中的分母项只不过分别是前向误差 E_{m-1}^f 与后向误差 E_{m-1}^b 的最小二乘估计。因此，式(14.3.7)可表示为

$$\hat{K}_m = \frac{-\sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}(n)g_{m-1}^*(n-1)}{\frac{1}{2}[\hat{E}_{m-1}^f + \hat{E}_{m-1}^b]}, \qquad m = 1,2,\cdots,p \tag{14.3.18}$$

其中，$\hat{E}_{m-1}^f + \hat{E}_{m-1}^b$是总平方误差 E_m 的估计。我们将它留给读者作为练习，验证式(14.3.18)中的分母项可以根据以下关系式按有序递归方式进行计算，

$$\hat{E}_m = (1 - |\hat{K}_m|^2)\hat{E}_{m-1} - |f_{m-1}(m-1)|^2 - |g_{m-1}(m-2)|^2 \tag{14.3.19}$$

其中，$\hat{E}_m \equiv \hat{E}_m^f + \hat{E}_m^b$ 是总的最小均方误差。该结果归功于 Andersen(1978)。

作为总结，Burg 算法计算了由式(14.3.18)和式(14.3.19)指定的等价格型结构中的反射系数，并且 Levinson-Durbin 算法用于计算 AR 模型参数。从 AR 模型参数估计，我们可以形成功率谱估计

$$P_{xx}^{\mathrm{BU}}(f) = \frac{\hat{E}_p}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_p(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fk}\right|^2} \tag{14.3.20}$$

Burg方法用于估计AR模型参数的主要优点是(1)导致了高频率分量,(2)产生了稳定的AR模型,(3)计算有效。

然而,众所周知,Burg方法有几种缺点。首先,在高信噪比方面展示了谱线的分裂[见Fougere(1976)等的论文]。通过线分裂,我们说 $x(n)$ 谱可能有单个,但Burg方法可能导致两种或多种空间紧邻的峰。对于高阶模型,该方法同样引入了假峰。对于带噪声的正弦信号,Burg方法进一步展示了正弦信号特别是短数据记录的初始相位。这种从真实谱的频率偏移的敏感性是显然的,导致了相位独立的频率偏移。关于这些局限性的详细内容,读者可参见有关论文Chen和Stegen(1974),Ulrych和Clayton(1976),Fougere等(1976),Kay和Marple(1979),Swingler(1979a,1980),Herring(1980)及Thorvaldsen(1981)。

几种改进方法已经提出,以克服Burg方法所带来的某些重要局限性,包括线分裂、假峰和频率偏移等。这些改进基本上包含了在平方后的前向和后向误差上所引入的加权(窗)序列。也就是说,对于加权平方误差

$$\mathcal{E}_m^{\mathrm{WB}} = \sum_{n=m}^{N-1} w_m(n)[|f_m(n)|^2 + |g_m(n)|^2] \tag{14.3.21}$$

执行了最小二乘方优化,其中,取得最小化时生成了反射系数估计

$$\hat{K}_m = \frac{-\sum_{n=m}^{N-1} w_{m-1}(n) f_{m-1}(n) g_{m-1}^*(n-1)}{\frac{1}{2}\sum_{n=m}^{N-1} w_{m-1}(n)[|f_{m-1}(n)|^2 + |g_{m-1}(n-1)|^2]} \tag{14.3.22}$$

特别地,我们注意到Swingler(1979b)使用的汉明窗的用途,Kaveh和Lippert(1983)使用的二次窗或抛物线窗,Nikias和Scott(1982)使用的能量加权,由Helme和Nikias(1985)使用的数据自适应能量加权等方法的用途。

这些开窗方法和能量加权方法已经证实了在减少线分裂和假峰方面的有效性,同时也证实了在减少频率偏移方面的有效性。

用于功率谱估计的Burg方法通常与最大熵谱估计相关联,Burg(1967,1975)使用的准则作为参数谱估计中AR模型的基础。Burg(1967,1975)考虑如何从给定的自相关函数值 $\gamma_{xx}(m)$,$0 \leqslant m \leqslant p$ 更好地解释 $m > p$ 的值,从而使整个自相关序列是半正定的。由于可能有无数种推测,Burg假定推测是在将不确定性(熵)或随意性的最大值最小化的基础上进行的,在某种意义上,过程谱 $\Gamma_{xx}(f)$ 在所有给定自相关值 $\gamma_{xx}(m)$ 的谱中是最平坦的,其中 $0 \leqslant m \leqslant p$。具体来说,每个样本熵与下式积分成比例[见Burg(1975)]

$$\int_{-1/2}^{1/2} \ln \Gamma_{xx}(f)\mathrm{d}f \tag{14.3.23}$$

Burg发现该 $(p+1)$ 个约束下的积分

$$\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi fm}\mathrm{d}f = \gamma_{xx}(m), \qquad 0 \leqslant m \leqslant p \tag{14.3.24}$$

的最大化即是AR(p)过程,其参数与自相关序列 γ_{xx} 的关系已由等式(14.3.6)给出,这种方法也从另一方面说明了AR模型可以用于功率谱估计。

观察Burg在最大熵谱估计方面的基本工作,Burg功率谱估计过程通常被称为最大熵方法(MEM)。然而,我们应该强调,只有当精确的自相关 $\gamma_{xx}(m)$ 已知时,最大熵谱才与AR模型谱相

同。当只有 $\gamma_{xx}(m)$估计在 $0 \leqslant m \leqslant p$ 范围可用时，Yule-Walker 和 Burg 的 AR 模型估计才不是最大熵谱估计。基于最大自相关序列的最大熵谱的生成公式产生了一组非线性方程。在相关序列中具有可测误差的最大熵谱的解，这已经由 Newman(1981)以及 Schott 和 McClellan(1984)求得。

14.3.4　AR 模型参数的非约束条件的最小二乘方求解方法

正如前节所描述的，用于确定 AR 模型参数的 Burg 方法基本上是一个具有附加约束条件的最小二乘方格型算法，预测器系数满足 Levinson 递归。作为这种约束的结果，AR 模型阶数的增加只需要在每个阶段对单个参数优化。相对于这种方法，我们可以使用一个非约束的最小二乘方算法以确定 AR 参数。

为了推测，我们形成前向和后向线性预测估计和相应的前向和后向误差，正如式(14.3.14)和式(14.3.15)所指出。然后，我们将两种误差的平方和最小化，即

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p &= \sum_{n=p}^{N-1}[|f_p(n)|^2 + |g_p(n)|^2] \\ &= \sum_{n=p}^{N-1}\left[\left|x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k)x(n-k)\right|^2\right. \\ &\quad \left. + \left|x(n-p) + \sum_{k=1}^{p} a_p^*(k)x(n+k-p)\right|^2\right]\end{aligned} \tag{14.3.25}$$

这如同 Burg 方法的性能指标。然而，我们不为 AR 参数强加式(14.3.25)中的 Leinson-Durbin 递归。对应于预测系数$\mathcal{E}_p$ 的非约束最小化生成了线性方程组

$$\sum_{k=1}^{p} a_p(k)r_{xx}(l,k) = -r_{xx}(l,0), \qquad l = 1,2,\cdots,p \tag{14.3.26}$$

按照定义，自相关 $r_{xx}(l,k)$是

$$r_{xx}(l,k) = \sum_{n=p}^{N-1}[x(n-k)x^*(n-l) + x(n-p+l)x^*(n-p+k)] \tag{14.3.27}$$

所生成的剩余最小二乘方误差是

$$\mathcal{E}_p^{LS} = r_{xx}(0,0) + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_p(k)r_{xx}(0,k) \tag{14.3.28}$$

因此，非约束的最小二乘方功率谱估计是

$$P_{xx}^{LS}(f) = \frac{\mathcal{E}_p^{LS}}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_p(k)e^{-j2\pi fk}\right|^2} \tag{14.3.29}$$

式(14.3.27)中的相关矩阵元素 $r_{xx}(l,k)$不是 Toeplitz，以至于 Levinson-Durbin 算法不能应用。然而，相关矩阵有充分的结构使设计出可有效计算的算法成为可能，计算的复杂度与 p^2 成比例。Marple(1980)设计了这样一个算法，具有格型结构，并采用了 Levinson-Durbin 类型的顺序递归和附加的时间递归。

所描述的非约束最小二乘法的形式称为未加窗数据的最小二乘法。在几篇文献中已经提出了功率谱估计,其中包括 Burg(1967),Nuttall(1976)以及 Ulrych 和 Clayton(1976)等文献。它的性能特征已经被证实比 Burg 方法优越,从某种意义上非约束的最小二乘法在诸如线分裂、频率偏移和假峰等类问题上都未展示出相同的敏感度。从 Marple 算法的计算有效性来看,它相当于 Levinson-Durbin 算法的有效性。非约束的最小二乘法尤其具有吸引力。采用这种方法不能保证估计的 AR 参数生成稳定的 AR 模型。然而,在功率谱方面这不是要考虑的问题。

14.3.5 AR 模型参数的顺序估计方法

上一节所描述的用于 AR 模型的三种功率谱估计方法,均可以作为分块处理方法进行分类。这些方法可以从块数据 $x(n)$,$n=0,1,\cdots,N-1$ 得到 AR 参数估计。基于 N 点的数据块,AR 参数可用于得到功率谱估计。

在数据连续可用的情况下,我们仍然可以将数据分段成 N 点数据块,并在一个块乘块的基础上执行谱估计。实际中对于实时和非实时的情况经常这样做。然而,在这些应用中,当每一个新数据点可用时,有基于 AR 模型参数序列估计的另一种方法。通过将权重函数引入到过去的数据样本,当接收到新数据时可能会淡化旧的数据样本的效果。

基于递归最小二乘方的顺序格型方法可用来对在前向和后向线性预测格型实现中的预测和反射系数进行最优估计。预测系数的递归方程直接关系到 AR 模型参数。除了这些方程的有序递归之外,正如格型结构所隐含的,我们还可以得到这些格型反射系数和后向及前向预测系数的时间递归方程。

顺序递归最小二乘方算法等价于上一节描述的非约束最小二乘方块处理方法。因此,由顺序递归最小二乘法得到的功率谱估计保留了 14.3.4 节描述的块处理方法所需的特性。由于 AR 参数可按顺序估计算法连续估计,功率谱估计可经常按需获得,从每个样本一次到每 N 个样本一次。通过对过去的数据样本适当加权,顺序估计方法尤其适用于估计和跟踪从非平稳信号统计特性产生的时变功率谱。

顺序估计方法的计算复杂度通常与 AR 过程的阶数 p 成比例。结果,顺序估计方法是计算有效的,在这一点上,提供了相比于块处理方法的一些优点。

在顺序估计方法方面有一些参考文献。由 Griffiths(1975),Friedlander(1982a,b),以及 Kalouptsidis 和 Theodoridis(1987)所写的论文,特别与谱估计问题相关。

14.3.6 AR 模型阶数的选择

使用 AR 模型最重要的方面之一是阶数 p 的选择。作为一般规则,如果我们选择一个太低阶的模型,将会得到一个高度平滑谱。另一方面,如果 p 选择得太高,则会冒险在谱中引入假的低峰。我们在前面注意到,AR 模型的一种性能指标就是残留误差的均方值,一般与前面描述的每种估计器不同。这种残留误差的特性是随着 AR 模型阶数的增加而减小的。我们可以监视增加率并决定当增加率变得相当低时终止该过程。然而很显然,这种方法可能不够准确并且存在误定义,应该调查一些其他方法。

在这一问题上各类研究人员已经做了很多工作,并且在一些参考文献中给出了很多实验结果[例如,Gersch 和 Sharpe(1973),Ulrych 和 Bishop(1975),Tong(1975,1977),Jones(1976),Nuttall(1976),Berryman(1978),Kaveh 和 Bruzzone(1979)以及 Kashyap(1980)]。

用于选择模型阶数的两种公认的准则由 Akaike(1969,1974)提出。第一个准则称为最后预测误差(FPE)准则,选择阶数以最小化性能指标

$$\mathrm{FPE}(p)=\hat{\sigma}_{wp}^{2}\left(\frac{N+p+1}{N-p-1}\right) \tag{14.3.30}$$

其中，$\hat{\sigma}_{wp}^2$是线性预测误差的估计方差。该性能指标建立在单步预测器的均方误差最小化的基础上。

由 Akaike(1974)提出的第二个准则称为 Akaike 信息准则(AIC)，通过选择阶数达到最小化

$$\mathrm{AIC}(p) = \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + 2p/N \tag{14.3.31}$$

注意到当 AR 模型的阶数增加时 $\hat{\sigma}_{wp}^2$项减小，因此 $\ln\hat{\sigma}_{wp}^2$也减小。然而，$2p/N$ 随着 p 的增加而增加。所以，在某个 p 时达到最小值。

由 Rissanen(1983)提出的一个备用的信息准则，是通过选择阶数以最小化描述长度(minimizes the description length, MDL)，其中，MDL 定义为

$$\mathrm{MDL}(p) = N \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + p \ln N \tag{14.3.32}$$

第四个准则是由 Parzen(1974)提出的，称为准则自回归传递函数(criterion autoregressive transfer, CAT)，并定义为

$$\mathrm{CAT}(p) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\overline{\sigma}_{wk}^2} \right) - \frac{1}{\hat{\sigma}_{wp}^2} \tag{14.3.33}$$

其中

$$\overline{\sigma}_{wk}^2 = \frac{N}{N-k} \hat{\sigma}_{wk}^2 \tag{14.3.34}$$

选择阶数 p 以保证 CAT(p)最小化。

在应用该准则时，应该从数据中去除均值。既然 $\hat{\sigma}_{wk}^2$依赖于我们所得到的谱估计类型，那么模型阶数同时是该准则的函数。

在刚引用的文献中，给出的实验结果指明模型阶数选择准则不能生成确定结果。例如，Ulrych 和 Bishop(1975)，Jones(1976)和 Berryman(1978)发现 FPE(p)标准趋向于低估模型阶数。Kashyap (1980)证明，当 $N \to \infty$ 时 AIC 准则在统计上不一致。另一方面，由 Rissanen 提出的 MDL 信息准则是统计上一致的。其他实验结果指明，对于小的数据长度，AR 模型阶数选择在 $N/3$ 到 $N/2$ 范围之内才能取得好的结果。显然，在所生成的数据缺少关于该物理过程的任何先验信息的情况下，应该尝试不同的模型阶数和不同的准则，最后考虑不同的结果。

14.3.7　功率谱估计的 MA 模型

如 14.3.1 节所示，MA(q)模型参数与统计自相关特性 $\gamma_{xx}(m)$有关，即式(14.3.10)。然而，

$$B(z)B(z^{-1}) = D(z) = \sum_{m=-q}^{q} d_m z^{-m} \tag{14.3.35}$$

其中，系数$\{d_m\}$与 MA 参数有关，由下式表达

$$d_m = \sum_{k=0}^{q-|m|} b_k b_{k+m}, \qquad |m| \leqslant q \tag{14.3.36}$$

显然，有

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 d_m, & |m| \leqslant q \\ 0, & |m| > q \end{cases} \tag{14.3.37}$$

并且 MA(q)过程的功率谱是

$$\Gamma_{xx}^{\mathrm{MA}}(f) = \sum_{m=-q}^{q} \gamma_{xx}(m) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm} \tag{14.3.38}$$

从这些表达式可以看出，我们不必求解 MA 参数$\{b_k\}$来估计功率谱。对于$|m| \leqslant q$，自相关 $\gamma_{xx}(m)$估计就足够。从这些估计我们可以计算估计的 MA 功率谱

$$P_{xx}^{\mathrm{MA}}(f)=\sum_{m=-q}^{q}r_{xx}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm} \tag{14.3.39}$$

与14.1节描述的经典(非参数的)功率谱估计相同。

还有另外一种方法基于对MA过程的高阶AR近似用于确定$\{b_k\}$。具体地,将MA(q)过程模型化为AR(p)模型,其中$p\gg q$。那么$B(z)=1/A(z)$,或等价于$B(z)A(z)=1$。因此,参数$\{b_k\}$和$\{a_k\}$通过卷积和相关联,表达为

$$\hat{a}_n+\sum_{k=1}^{q}b_k\hat{a}_{n-k}=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{14.3.40}$$

其中,$\{\hat{a}_n\}$是将数据适应于AR模型所得到的参数。

虽然这组方程很容易对$\{b_k\}$求解,但一种更好的方法是通过使用最小均方误差准则得到的。也就是说,我们形成平方误差

$$\mathcal{E}=\sum_{n=0}^{p}\left[\hat{a}_n+\sum_{k=1}^{q}b_k\hat{a}_{n-k}\right]^2-1,\qquad \hat{a}_0=1,\quad \hat{a}_k=0,\quad k<0 \tag{14.3.41}$$

可通过选择MA(q)参数$\{b_k\}$使之最小。最小化的结果是

$$\hat{\boldsymbol{b}}=-\boldsymbol{R}_{aa}^{-1}\boldsymbol{r}_{aa} \tag{14.3.42}$$

其中,$\boldsymbol{R}_{aa}$和$\boldsymbol{r}_{aa}$的元素由下式给出

$$\begin{aligned}R_{aa}(|i-j|)&=\sum_{n=0}^{p-|i-j|}\hat{a}_n\hat{a}_{n+|i-j|},\qquad i,j=1,2,\cdots,q\\ r_{aa}(i)&=\sum_{n=0}^{p-i}\hat{a}_n\hat{a}_{n+i},\qquad i=1,2,\cdots,q\end{aligned} \tag{14.3.43}$$

这种用于确定MA(q)模型参数的最小二乘法是由Durbin(1959)提出的。Kay(1988)已经证明这种估计方法在观察过程是高斯过程的假设下近似为最大似然估计。

MA模型的阶数q可通过几种经验方法确定。例如,MA模型的AIC与AR模型具有相同的形式,

$$\mathrm{AIC}(q)=\ln\sigma_{wq}^2+\frac{2q}{N} \tag{14.3.44}$$

其中,σ_{wq}^2是白噪声方差的估计。另一种方法由Chow(1972b)提出,是使用MA(q)逆滤波器对数据进行滤波,并测试白色的滤波输出。

14.3.8 功率谱估计的ARMA模型

对于Burg算法,上一节描述过它的方差和最小二乘法,提供了基于AR模型的可靠高分辨率谱估计。一种ARMA模型为我们提供改善AR谱估计的途径,或许通过使用几个模型参数就可完成。

当信号已经被噪声干扰时,ARMA模型特别有用。例如,假定数据$x(n)$是由AR系统生成的,其中系统输出由加性白噪声干扰。结果信号自相关的z变换可表达为

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(z)&=\frac{\sigma_w^2}{A(z)A(z^{-1})}+\sigma_n^2\\ &=\frac{\sigma_w^2+\sigma_n^2A(z)A(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})}\end{aligned} \tag{14.3.45}$$

其中，σ_n^2 是加性噪声的方差。因此，过程 $x(n)$ 是 ARMA(p,p)，其中 p 是自相关过程的阶数。这一关系为考察功率谱估计的 ARMA 模型提供了一些动机。

正如我们在 14.3.1 节所论述的，ARMA 模型参数通过方程式(14.3.4)与自相关函数相关联。对于滞后 $|m|>q$，该方程只包含了 AR 参数 $\{a_k\}$。通过将估计替代 $\gamma_{xx}(m)$，我们可以解式(14.3.5)中的 p 个方程以得到 $\hat{a}_k$。然而，对于高阶模型，由于对较大滞后自相关估计较弱，这种方法可能生成 AR 参数的弱估计。因此，不建议使用该方法。

一种更可靠的方法是构造 $m>q$ 的多约束的线性方程组，并对方程组使用由 Cadzow(1979)提出的最小二乘法。要详细描述，先假设自相关序列可被准确估计到的最大滞后是 M，其中 $M>p+q$。然后，我们可以写出下列线性方程组：

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(q) & r_{xx}(q-1) & \cdots & r_{xx}(q-p+1) \\ r_{xx}(q+1) & r_{xx}(q) & \cdots & r_{xx}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & & \\ r_{xx}(M-1) & r_{xx}(M-2) & & r_{xx}(M-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{xx}(q+1) \\ r_{xx}(q+2) \\ \vdots \\ r_{xx}(M) \end{bmatrix} \tag{14.3.46}$$

或等价于

$$\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{r}_{xx} \tag{14.3.47}$$

由于 $\boldsymbol{R}_{xx}$ 是 $(M-q)\times p$ 维，并且 $M-q>p$，所以我们可以使用最小二乘法求解参数矢量 $\boldsymbol{a}$。这种最小化的结果是

$$\hat{\boldsymbol{a}} = -(\boldsymbol{R}_{xx}^t\boldsymbol{R}_{xx})^{-1}\boldsymbol{R}_{xx}^t\boldsymbol{r}_{xx} \tag{14.3.48}$$

该过程称为最小二乘方修正的 Yule-Walker 方法。一个权重因子可同时适用于自相关序列以淡化较大滞后的低可靠估计。

一旦模型的 AR 部分参数已经估计出，如上所述，那么有系统

$$\hat{A}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k z^{-k} \tag{14.3.49}$$

序列 $x(n)$ 现在可以由 FIR 滤波器 $\hat{A}(z)$ 滤波，以生成序列

$$v(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k x(n-k), \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{14.3.50}$$

ARMA(p,q) 模型与 $\hat{A}(z)$ 的级联近似是由模型 $B(z)$ 生成的 MA(q) 过程。因此，我们可以用上一节给出的 MA 估计得到 MA 谱。具体来讲，滤波序列 $v(n)$，$p\leqslant n\leqslant N-1$，用于形成估计的相关序列 $r_{vv}(m)$，因此我们可以得到 MA 谱

$$P_{vv}^{\mathrm{MA}}(f) = \sum_{m=-q}^{q} r_{vv}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm} \tag{14.3.51}$$

首先，注意到确定功率谱不需要确定参数 $\{b_k\}$。其次，注意到 $r_{vv}(m)$ 是由式(14.3.10)给出的 MA 模型的自相关估计。在形成估计 $r_{vv}(m)$ 时，权重(如 Bartlett 窗)可用于淡化较大滞后的相关估计。此外，数据可能通过后向滤波器进行滤波，从而生成另一种序列，即 $v^b(n)$，正如 Kay(1980)提出的，可用 $v(n)$ 和 $v^b(n)$ 形成自相关 $r_{vv}(m)$ 的估计。最后，估计的 ARMA 功率谱是

$$\hat{P}_{xx}^{\mathrm{ARMA}}(f)=\frac{P_{vv}^{\mathrm{MA}}(f)}{\left|1+\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fk}\right|^2} \tag{14.3.52}$$

ARMA(p,q)模型阶数选择的问题已经由 Chow(1972a,b)以及 Bruzzone 和 Kaveh(1980)仔细研究过。为此,可以使用 AIC 指标的最小值

$$\mathrm{AIC}(p,q)=\ln\hat{\sigma}_{wpq}^2+\frac{2(p+q)}{N} \tag{14.3.53}$$

其中,$\hat{\sigma}_{wpq}^2$是输入误差的方差估计。对具体的 ARMA(p,q)准确度的附加测试是通过该模型对数据进行滤波,并测试输出数据的白性。需要使用谱因数分解从估计的自相关计算得到 MA 模型的参数,以便由 $D(z)=B(z)B(z^{-1})$来确定 $B(z)$。

关于 ARMA 功率谱估计的其他知识,读者可参考 Graupe 等(1975),Cadzow(1981,1982),Kay(1980)以及 Friedlander(1982b)的论文。

14.3.9 一些实验结果

本节我们给出一些实验结果,说明使用人工生成数据所得到的 AR 和 ARMA 功率谱估计的性能。我们的目的是基于分辨率、偏移和存在叠加噪声时的稳健性等指标来比较谱估计方法。

数据由一种或两种正弦信号和叠加高斯噪声组成。两种正弦信号间隔 Δf。显然,基础过程是 ARMA(4,4)。所显示结果是对这些数据采用了一个 AR(p)模型。对于高信噪比(SNR),我们期望 AR(4)就足够了。然而,对于低的 SNR,需要一个高阶的 AR 模型近似 ARMA(4,4)过程。下面给出的结果与这一论断一致。SNR 定义为 $10\lg(A^2/2\sigma^2)$,其中 σ^2 是叠加噪声的方差,而 A 是正弦信号的振幅。

图 14.3.1 显示了基于 SNR = 20 dB 和 $\Delta f=0.13$ 的 AR(4)模型 $N=20$ 个数据点的结果。注意到 Yule-Walker 方法给出了具有小尖峰的极平滑(平坦)的谱估计。如果 $\Delta f=0.07$,Yule-Walker 方法不再区分尖峰,如图 14.3.2 所示。用 Burg 方法明显出现一些偏移。当然,通过增加数据点数,Yule-Walker 方法最终能区分尖峰。然而,Burg 方法和最小二乘法显然对于短数据记录优越。

图 14.3.3 针对最小二乘法显示了叠加噪声对估计的影响。滤波器阶数对 Burg 方法和最小二乘法的影响分别显示在图 14.3.4 和图 14.3.5。当阶数增加到 $p=12$ 时,两种方法均展示了假峰。

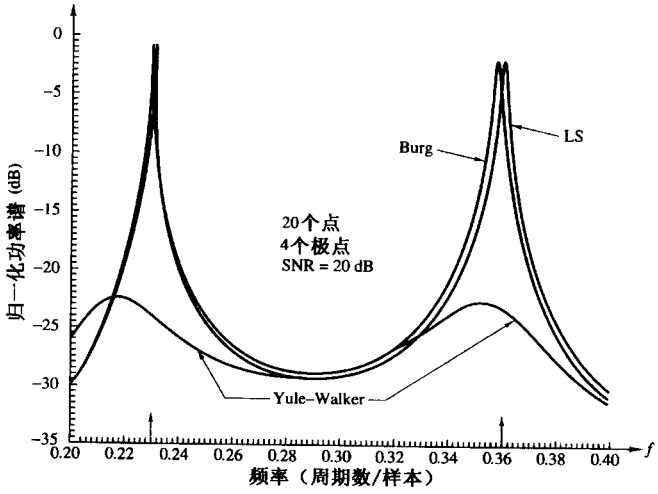


图 14.3.1 AR 谱估计方法的比较

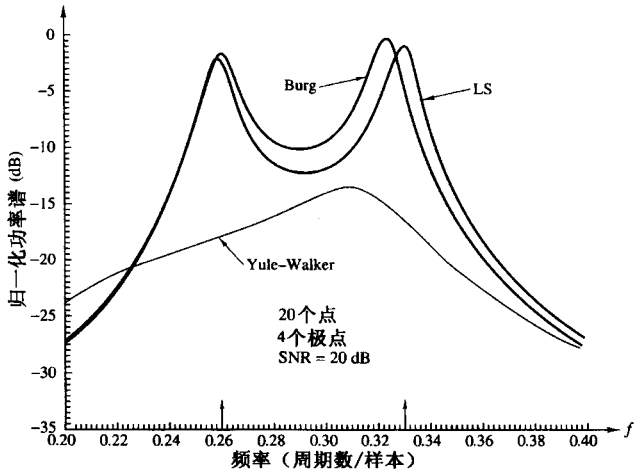


图 14.3.2　AR 谱估计方法的比较

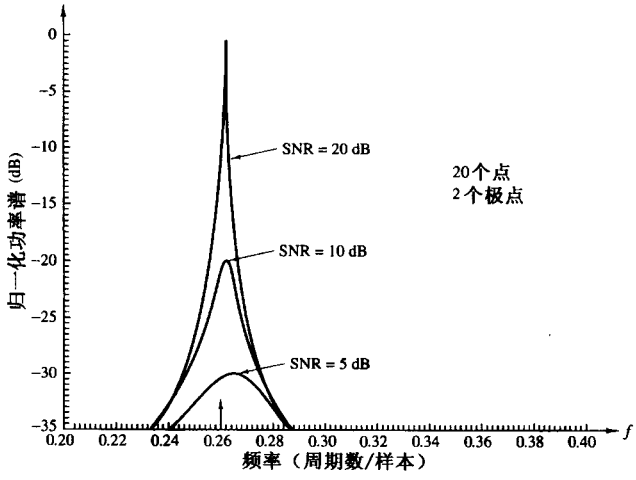


图 14.3.3　叠加噪声对 LS 方法的影响

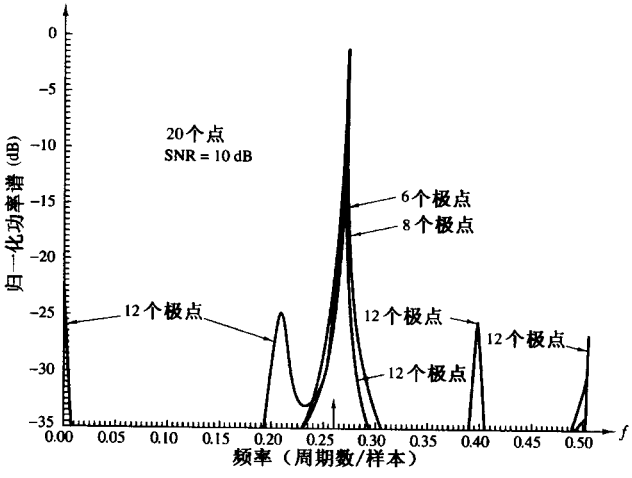


图 14.3.4　滤波器阶数对 Burg 方法的影响

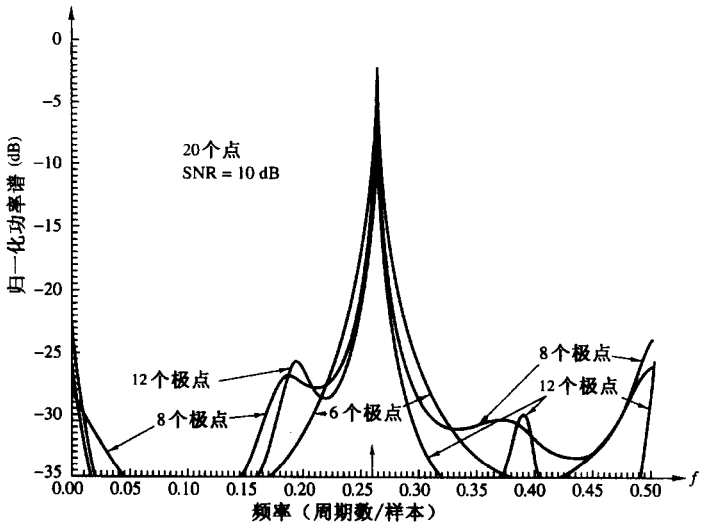


图 14.3.5 滤波器阶数对 LS 方法的影响

图 14.3.6 和图 14.3.7 针对 Burg 方法和最小二乘法分别显示了初始相位对估计的影响。显然，最小二乘法较 Burg 方法显示了对初始相位较低的灵敏度。

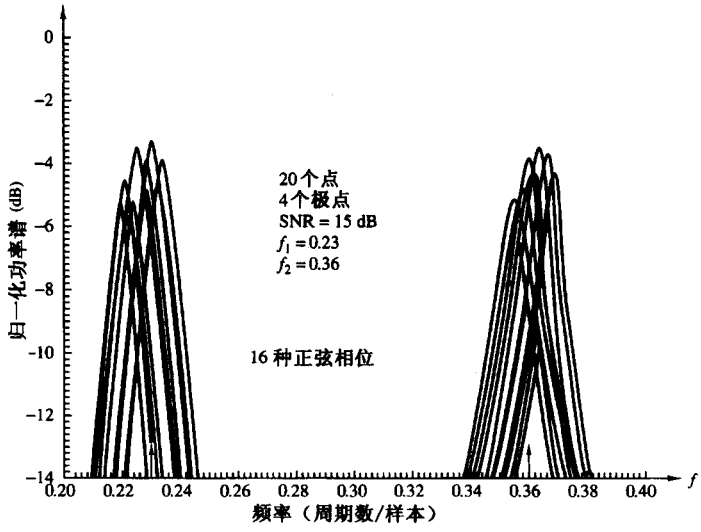


图 14.3.6 初始相位对 Burg 方法的影响

图 14.3.8 显示了 $p = 12$ 情况下线分裂的例子。这种情况对于 AR(8)模型没有出现。最小二乘法在相同条件下没有显示线分裂。另一方面，对于 Burg 方法的线分裂随着数据点数 N 的增加而消失。

图 14.3.9 和图 14.3.10 说明了 Burg 方法和最小二乘法在较低 SNR 情况下的分辨特性，其中 $\Delta f = 0.07$ 且 $N = 20$ 个点。既然叠加噪声过程是 ARMA，那就需要一个较高阶的 AR 模型在低 SNR 情况下提供一个好的近似。因此，频率分辨率随着阶数的增加得到改善。

在 SNR = 3 dB 情况下，Burg 方法的 FPE 显示在图 14.3.11 中。在这一 SNR 情况下，按照 FPR 准则最优值是 $p = 12$。

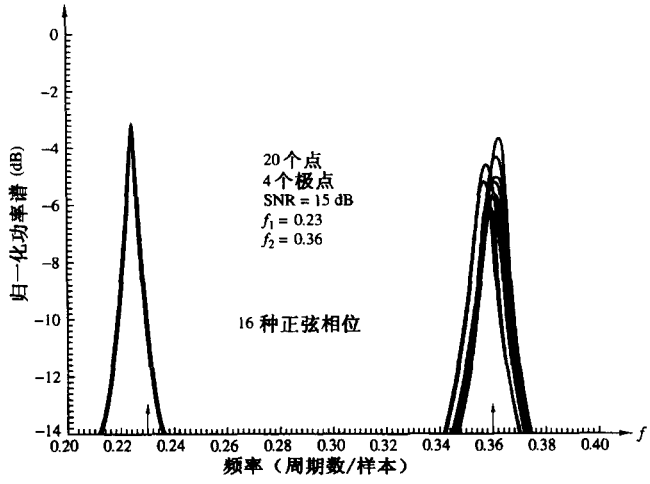


图 14.3.7　初始相位对 LS 方法的影响

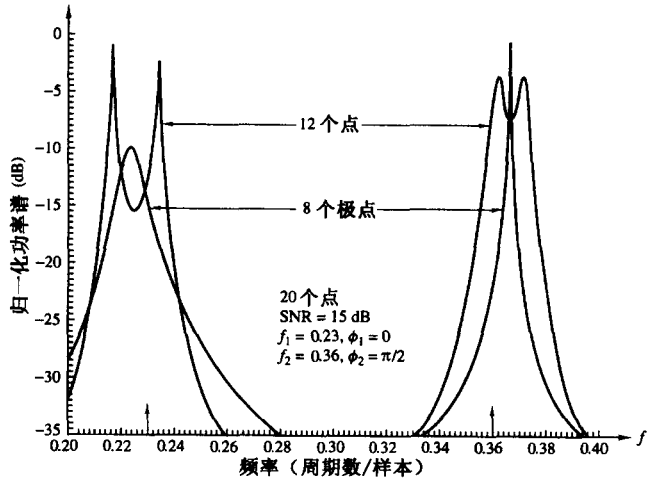


图 14.3.8　线谱分裂对 Burg 方法的影响

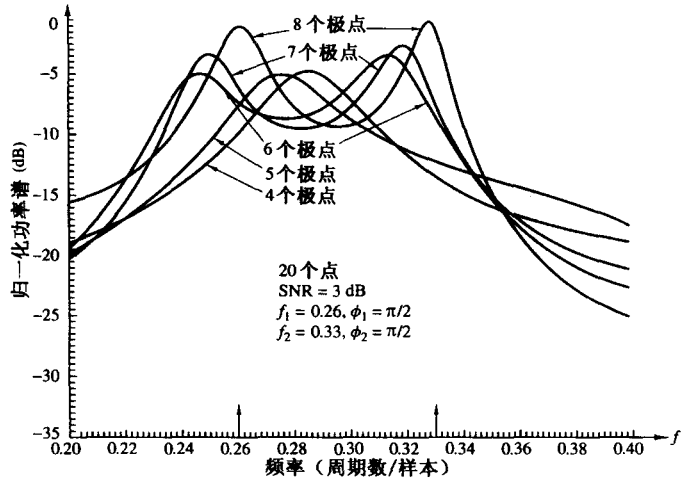


图 14.3.9　$N = 20$ 个点的 Burg 法的频率分辨率

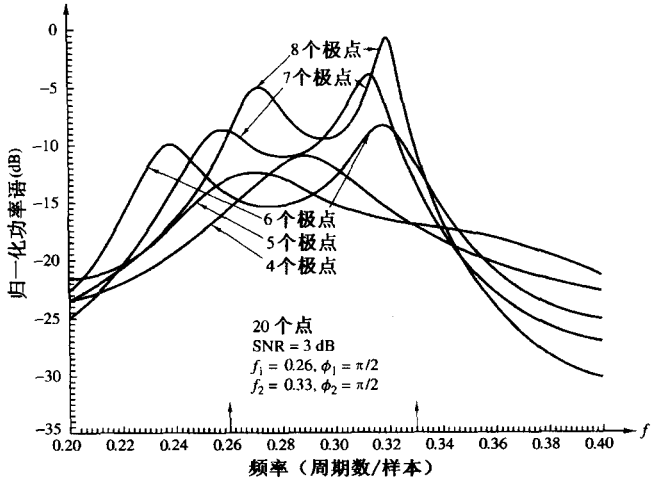


图 14.3.10 $N=20$ 个点的 LS 法的频率分辨率

对 Burg 方法和最小二乘法,利用从窄带过程得到的数据进行了测试,通过激活一个四极点(两对复共轭极点)的窄带滤波器,并选择了输出序列一部分作为数据记录。图 14.3.12 说明了 20 个点的 20 个数据记录的重合情况。我们注意到只有相对小的变化。相反,Burg 方法显示了非常大的变化,近似 2 倍于最小二乘法。从 Poole(1981)得到的结果显示在图 14.3.1 到图 14.3.12 中。

最后,我们在图 14.3.13 显示了两种噪声正弦信号的 ARMA(10,10)谱估计,由 Kay(1980)使用 14.3.8 节描述的最小二乘 ARMA 模型得到,用于描述由 ARMA 模型得到的功率谱估计的质量。

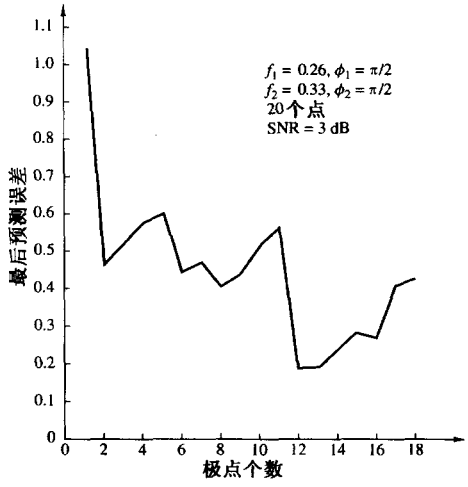


图 14.3.11 Burg 法的最后预测误差

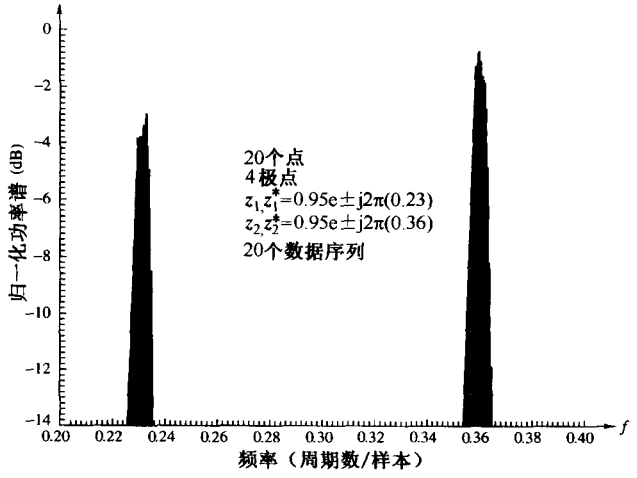


图 14.3.12 序列中的起始点对 LS 法的影响

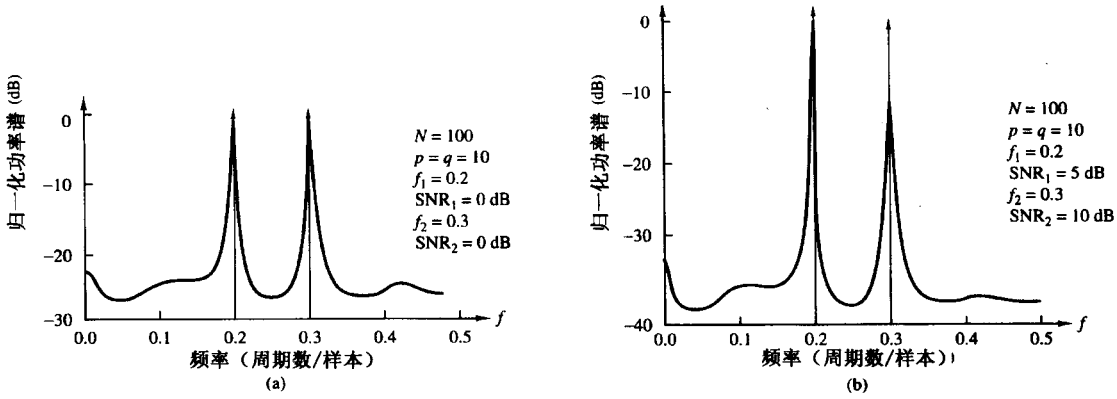


图 14.3.13　从文献 Kay(1980)得到的 ARMA(10,10)的功率谱估计，经 IEEE 权限许可

14.4　滤波器组方法

本节讨论信号序列$\{x(n)\}$的功率谱估计，使用一个并行的 FIR 滤波器组调节到所需要的频率对$\{x(n)\}$的滤波，并矫正滤波器输出。于是，得到对某个特定频率处的功率谱估计，正如图 14.4.1 中系统所展示的。

我们首先证明传统的周期图可通过使用滤波器组计算，其中 FIR 滤波器基本上用做信号序列$\{x(n)\}$的矩形窗。然后，我们描述一种方法，用于设计突出显示数据特征的滤波器。这种方法导致了一种高分辨率的具有数据自适应性的谱估计方法。

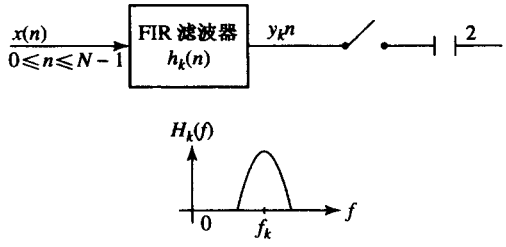


图 14.4.1　在 f_k 的某个邻近频率点对信号功率的测量

14.4.1　周期图的滤波器组实现

在某个给定的频率 $f_k = k/N$ 处的功率谱估计可从周期图得到

$$P_{xx}(f_k) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_k n}\right|^2 = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_k (N-n)}\right|^2 \tag{14.4.1}$$

其中，$\{x(n), 0\leqslant n\leqslant N-1\}$是信号序列。遵循类似于 Goertzel 算法(8.3.1 节)的开发方法，我们定义一种线性滤波器的脉冲响应为

$$h_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_k n}, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{14.4.2}$$

于是，替换方程(14.4.1)中的 $h_k(n)$之后，我们得到 f_k 处的功率谱估计为

$$P_{xx}(f)=\left|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)h_k(N-n)\right|^2 =\left|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)h_k(l-n)\right|_{l=N}^2 \tag{14.4.3}$$

于是,可得到在 $f=f_k=k/N$ 处的功率谱估计,即将信号序列 $\{x(n),0\leqslant n\leqslant N-1\}$ 通过一个脉冲响应为 $h_k(n)$ 的由方程(14.4.2)给出的线性 FIR 滤波器,评价在 $l=N$ 处的滤波器输出,并计算滤波器输出的平方振幅。

滤波器的系统函数是

$$H_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h_k(n)z^{-n}=\frac{1/\sqrt{N}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_k}z^{-1}} \tag{14.4.4}$$

该滤波器是一个单极点滤波器,极点在单位圆上并对应于频率 f_k。

上述开发建议周期图可通过如下计算得到,即对信号序列 $\{x(n),0\leqslant n\leqslant N-1\}$ 由一组脉冲响应为 $\{h_k(n),0\leqslant n\leqslant N-1\}$ 的并行滤波器进行线性滤波,如图 14.4.2 所示。在这组滤波器中,每个滤波器的 3 dB 带宽近似为每个样本间隔 $1/N$ 个周期。

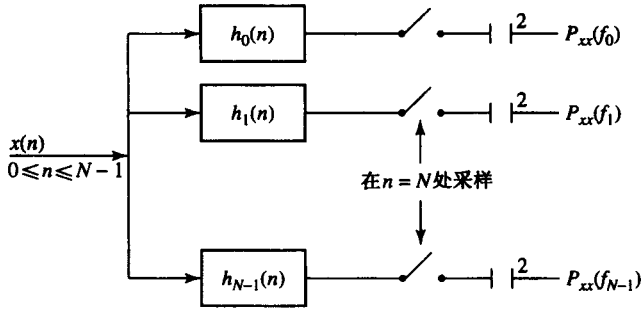


图 14.4.2 周期图估计的滤波器组实现

另一种产生周期图的等价滤波器组实现方法如图 14.4.3 所示。在这个滤波器组中,信号序列 $\{x(n),0\leqslant n\leqslant N-1\}$ 乘上一个指数因子 $\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N},0\leqslant k\leqslant N-1\}$,并且每个乘积结果通过一个矩形低通滤波器,其脉冲响应为

$$h_0(n)=\begin{cases}1/\sqrt{N}, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{14.4.5}$$

它在 $l=N-1$ 处的复值输出是平方振幅,以便生成在相应的频率 $f=f_k$ 处的谱估计。我们称这种谱估计为无窗周期图。

我们可以用另一种临时窗 $h_0(n)$ 代替图 14.4.3 中的矩形窗,即巴特利特或汉明窗或凯泽窗跨越相同的时期 $0\leqslant n\leqslant N-1$。这样,将生成一种开窗周期图,表达为

$$P_{xx}(f)=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi fn}h_0(N-n)\right|^2 \tag{14.4.6}$$

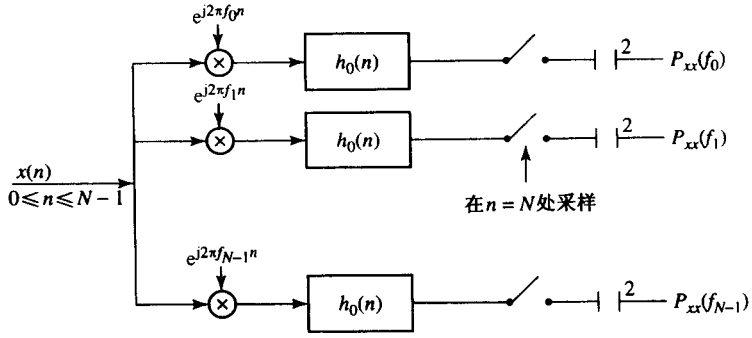


图 14.4.3　周期图估计的备用滤波器组实现

将一个窗函数应用于一个信号序列类似于 Welch 方法。然而，后者中的窗函数应用于数据序列的每一段，并且个别段的开窗周期图是平均的。结果，由 Welch 方法得到的谱估计的可变性明显小于由方程(14.4.6)中的开窗周期图所得到的谱估计的可变性。另一方面，从开窗周期图得到的分辨率高于用 Welch 方法得到的分辨率。正如我们采用非参数方法所观察到的，在频率分辨率和谱估计之间有一种权衡。通过将信号序列分段成几个更小的序列，计算每一个子序列的开窗(修正的)周期图，最后平均开窗周期图，我们就能够减小估计的变化，但这是以降低频率分辨率为代价的。

对周期图的滤波器组解释将引导我们考虑其他可能的滤波器特征，或许可以产生高分辨率的谱估计。注意到图 14.4.2 和图 14.4.3 所示的滤波器组实现的滤波器没有经过任何方式的优化。因此，我们说滤波器的选择没有考虑到数据特征(即所用的滤波器是独立于数据的)。在下一节，将描述由 Capon(1969)提出的谱估计的滤波器组的实现，其中滤波器是基于数据的统计特征而设计的(即滤波器的脉冲响应适应于数据特征)。

14.4.2　最小方差谱估计

由 Capon(1969)提出的谱估计主要用于大的地震列的频率波形数估计。后来由 Lacoss(1971)将其适用于单个时间序列谱估计，并证实了该方法能提供信号中谱分量的最小方差无偏估计。该估计器也被称为“最大似然谱估计”，这是因为当信号受到叠加噪声干扰时，这种滤波器设计方法产生了最小方差无偏谱估计。

随着 Lacoss 的进展，我们考虑 FIR 滤波器的设计，以确定系数 $h(k)$，$0 \leqslant k \leqslant p$。于是，如果观察数据 $x(n)$，$0 \leqslant n \leqslant N-1$，通过了该滤波器，则响应是

$$y(n) = \sum_{k=0}^{p} h(k)x(n-k) \equiv \boldsymbol{X}^t(n)\boldsymbol{h} \tag{14.4.7}$$

其中，$\boldsymbol{X}^t(n) = [x(n)\ x(n-1)\ \cdots\ x(n-p)]$是数据矢量，并且 $\boldsymbol{h}$ 是滤波器系数矢量。如果我们假定 $E[x(n)] = 0$，那么输出序列的方差是

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E[|y(n)|^2] = E[\boldsymbol{h}^H\boldsymbol{X}^*(n)\boldsymbol{X}^t(n)\boldsymbol{h}] \\ &= \boldsymbol{h}^H\boldsymbol{\Gamma}_{xx}\boldsymbol{h} \end{aligned} \tag{14.4.8}$$

其中，$\boldsymbol{\Gamma}_{xx}$是序列 $x(n)$的自相关矩阵，元素为 $\gamma_{xx}(m)$。

选择滤波器系数使得 FIR 滤波器在频率 f_l 处的频率响应归一化为单位 1，也就是

$$\sum_{k=0}^{p} h(k)e^{-j2\pi k f_l} = 1$$

这一约束也可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{E}^H(f_l)\boldsymbol{h}=1 \tag{14.4.9}$$

其中

$$\boldsymbol{E}^t(f_l)=[1 \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_l} \quad \cdots \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi p f_l}]$$

服从约束条件(14.4.9),将方差 σ_y^2 最小化,我们得到一种滤波器,能无失真地传递频率分量 f_l,而远离 f_l 的分量则严重衰减。这种最小化的结果产生了系数矢量

$$\hat{\boldsymbol{h}}_{\text{opt}}=\boldsymbol{\Gamma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{E}(f_l)/\boldsymbol{E}^H(f_l)\boldsymbol{\Gamma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{E}(f_l) \tag{14.4.10}$$

如果将 $\hat{\boldsymbol{h}}$ 代入到式(14.4.8)中,则我们得到最小方差

$$\sigma_{\min}^2=\frac{1}{\boldsymbol{E}^H(f_l)\boldsymbol{\Gamma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{E}(f_l)} \tag{14.4.11}$$

表达式(14.4.11)是频率 f_l 处的最小方差的功率谱估计。通过在 $0\leqslant f_l\leqslant 0.5$ 范围内改变 f_l,我们可以获得功率谱估计。因此,最小方差方法基本上是谱估计的滤波器组实现。其与周期图的滤波器组实现的区别主要在于 Capon 方法中的滤波器系数是优化的。应该注意到,虽然 $\boldsymbol{E}(f)$ 随着频率的选择而改变,但 $\boldsymbol{\Gamma}_{xx}^{-1}$ 只计算一次。正如 Lacoss(1971)所演示的,二次型 $\boldsymbol{E}^H(f)\boldsymbol{\Gamma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{E}(f)$ 的计算可由单次 DFT 完成。

通过将自相关矩阵的估计 $\boldsymbol{R}_{xx}$ 代替 $\boldsymbol{\Gamma}_{xx}$,我们得到 Capon 的最小方差功率谱估计

$$P_{xx}^{\text{MV}}(f)=\frac{1}{\boldsymbol{E}^H(f)\boldsymbol{R}_{xx}^{-1}\boldsymbol{E}(f)} \tag{14.4.12}$$

Lacoss(1971)已经证明这种功率谱估计产生的谱峰值的估计与该频率的功率成比例。相应地,14.3 节描述的 AR 方法产生的谱峰值的估计与这一频率的功率成比例。

Lacoss(1971)和其他人已经对该方法和 Burg 方法的性能进行了实验比较。例如,由 Lacoss (1971)的论文提供的图 14.4.4,针对在频率 0.15 和 0.30 处包含两个窄带峰值的信号,对三种谱估计进行了比较,即 Bartlett 估计、最小方差估计和 Burg 估计。该图说明最小方差谱估计比 Bartlett 估计能产生更好的谱估计,但比 Burg 估计要差。图中同时也显示了信号的真实谱。一般来说,式(14.4.12)中的最小方差估计在频率分辨率方面可以执行非参数谱估计,但不能提供从 Burg 的 AR 方法获得的高分辨率及未约束的最小二乘方。更进一步,Burg(1972)展示了对于一个已知的相关序列,最小方差谱与 AR 模型谱相关,即

$$\frac{1}{\Gamma_{xx}^{\text{MV}}(f)}=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{\Gamma_{xx}^{\text{AR}}(f,k)} \tag{14.4.13}$$

其中,$\Gamma_{xx}^{\text{AR}}(f,k)$ 是用 AR(k)模型得到的 AR 功率谱。因此,最小方差估计的倒数等于从 AP(k),$1\leqslant k\leqslant p$,得到的所有谱的倒数的平均。一般来说,低阶 AR 模型不能提供好的分辨率,那么式(14.4.13)中的求平均运算减小了谱估计中的频率分辨率。因此,我们得出结论,阶数为 p 的 AR 功率谱估计优越于阶数为 $p+1$ 的最小方差估计。

式(14.4.13)给出的关系表示了 Capon 最小方差估计和 Burg AR 估计之间的频率域关系。这些估计之间的时域关系也已经建立,由 Musicus(1985)得到证明。这样,就产生了最小方差估计的一种有效计算算法。

有关 Capon 和其他估计器的比较,更多的参考资料可在参考文献中找到。我们引用了 Capon 和 Goodman(1971),Marzetta(1983),Marzetta 和 Lang(1983,1984),Capon(1983)以及 McDonough(1983)的论文。

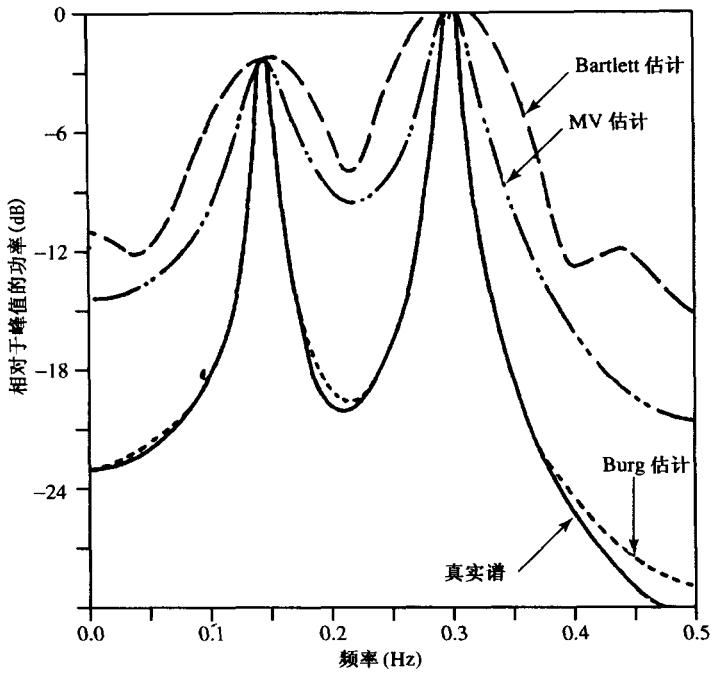


图 14.4.4　对某个信号的三种谱估计的比较[Bartlett、最小方差(MV)和 Burg],在频率 0.15和0.30处有两个窄带峰值(摘自R. I. Lacoss, "Data Adaptive Spectral Analysis Methods," *Geophysics*, Vol.36, pp.661 - 675, August 1971.权限许可)

14.5　功率谱估计的本征分析方法

在 14.3.8 节我们演示了受加性(白)噪声干扰的 AR(p)过程等价于 ARMA(p,p)过程。本节考虑一种特殊情况,信号分量是受加性白噪声干扰的正弦信号。算法是基于受噪声干扰信号的相关矩阵的本征分解。

从前面第 5 章关于正弦信号生成过程的讨论,我们记得一个真实的正弦信号可以借助差分方程生成

$$x(n) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) \tag{14.5.1}$$

其中,$a_1 = 2\cos 2\pi f_k$,$a_2 = 1$,并且初始有 $x(-1) = -1$,$x(-2) = 0$。该系统有一对复共轭极点(处于 $f = f_k$ 和 $f = -f_k$),因此生成正弦序列 $x(n) = \cos 2\pi f_k n$,$n \geqslant 0$。

一般来说,一个信号由 p 个正弦分量组成,并满足差分方程

$$x(n) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m x(n-m) \tag{14.5.2}$$

并且对应系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m}} \tag{14.5.3}$$

多项式

$$A(z)=1+\sum_{m=1}^{2p}a_m z^{-m} \tag{14.5.4}$$

在单位圆上有 $2p$ 个根,对应于正弦信号的频率。

现在,假定正弦信号受白噪声 $w(n)$干扰,其中 $E[|w(n)|^2]=\sigma_w^2$。于是,我们观察到

$$y(n)=x(n)+w(n) \tag{14.5.5}$$

如果将 $x(n)=y(n)-w(n)$代入到式(14.5.2)中,则得到

$$y(n)-w(n)=-\sum_{m=1}^{2p}[y(n-m)-w(n-m)]a_m$$

或等价于

$$\sum_{m=0}^{2p}a_m y(n-m)=\sum_{m=0}^{2p}a_m w(n-m) \tag{14.5.6}$$

其中,按照定义,$a_0=1$。

我们注意到式(14.5.6)是 ARMA($2p$,$2p$)过程的差分方程,其中 AR 和 MA 参数相同。这种对称性是白噪声中正弦信号的特征。式(14.5.6)中的差分方程可以表达为矩阵形式

$$\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{a}=\boldsymbol{W}^t\boldsymbol{a} \tag{14.5.7}$$

其中,$\boldsymbol{Y}^t=[y(n)\ y(n-1)\cdots y(n-2p)]$是维数为$(2p+1)$的观察数据矢量,$\boldsymbol{W}^t=[w(n)\ w(n-1)\cdots w(n-2p)]$是噪声矢量,并且 $\boldsymbol{a}=[1\ a_1\cdots a_{2p}]$是系数矢量。

如果将式(14.5.7)乘上 $\boldsymbol{Y}$ 并取其期望值,则我们得到

$$\begin{aligned}E(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^t)\mathbf{a}&=E(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{W}^t)\boldsymbol{a}=E[(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{W})\boldsymbol{W}^t]\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{\Gamma}_{yy}\boldsymbol{a}&=\sigma_w^2\boldsymbol{a}\end{aligned} \tag{14.5.8}$$

其中,已经假定序列 $w(n)$是零均值白色,并且 X 是确定性信号。

式(14.5.8)中的方程是本征方程的形式,即

$$(\boldsymbol{\Gamma}_{yy}-\sigma_w^2\boldsymbol{I})\boldsymbol{a}=\mathbf{0} \tag{14.5.9}$$

其中,$\sigma_{w_i}^2$ 是自相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{yy}$ 的本征值。于是,参数矢量 $\boldsymbol{a}$ 是与本征值 σ_w^2 相关联的本征矢量。式(14.5.9)中的本征矢量形成了 Pisarenko 谐波分解方法的基础。

14.5.1 Pisarenko 谐波分解方法

对于叠加白噪声的随机相位的 p 个正弦信号,自相关值是

$$\begin{aligned}\gamma_{yy}(0)&=\sigma_w^2+\sum_{i=1}^{p}P_i\\ \gamma_{yy}(k)&=\sum_{i=1}^{p}P_i\cos 2\pi f_i k,\qquad k\neq 0\end{aligned} \tag{14.5.10}$$

其中,$P_i=A_i^2/2$ 是第 i 个正弦信号的平均功率,并且 A_i 是对应的振幅。因此,我们可以写成

$$\begin{bmatrix}\cos 2\pi f_1 & \cos 2\pi f_2 & \cdots & \cos 2\pi f_p\\ \cos 4\pi f_1 & \cos 4\pi f_2 & \cdots & \cos 4\pi f_p\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \cos 2\pi pf_1 & \cos 2\pi pf_2 & \cdots & \cos 2\pi pf_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\\vdots\\P_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_{yy}(1)\\\gamma_{yy}(2)\\\vdots\\\gamma_{yy}(p)\end{bmatrix} \tag{14.5.11}$$

如果已知频率 $f_i, 1 \leqslant i \leqslant p$，则我们就可以使用该方程确定正弦信号的功率。我们使用估计 $r_{xx}(m)$ 代替 $\gamma_{xx}(m)$。一旦功率已知，噪声方差可以从式(14.5.10)得到

$$\sigma_w^2 = r_{yy}(0) - \sum_{i=1}^{p} P_i \tag{14.5.12}$$

余下的问题就是确定 p 个频率 $f_i, 1 \leqslant i \leqslant p$，这依次需要对应于本征值 σ_w^2 的本征矢量 $\boldsymbol{a}$ 的知识。Pisarenko(1973)观察到[也可参见 Papoulis(1984)以及 Grenander 和 Szegö(1958)]，对于由 p 个叠加白噪声的正弦信号组成的 ARMA 过程，当自相关矩阵的维数等于或超过 $(2p+1) \times (2p+1)$ 时，方差 σ_w^2 对应于 $\boldsymbol{\Gamma}_{yy}$ 的最小本征值。所需要的 ARMA 系数矢量对应于与最小本征值相关的本征矢量。因此，频率 $f_i, 1 \leqslant i \leqslant p$，可从式(14.5.4)的多项式的根中得到，其中系数是对应于最小本征值 σ_w^2 的本征矢量 $\boldsymbol{a}$ 的元素。

概括来说，Pisarenko 谐波分解方法遵循以下步骤。首先，从数据中估计 $\boldsymbol{\Gamma}_{yy}$（即形成自相关矩阵 $\boldsymbol{R}_{yy}$），然后找到最小的本征值和最小的本征矢量。最小本征矢量生成了 ARMA$(2p, 2p)$模型的参数。从式(14.5.4)，我们可以计算根，以组成频率$\{f_i\}$。使用这些频率，我们通过用 $r_{yy}(m)$ 替代 $\gamma_{yy}(m)$ 可以解方程(14.5.11)以求得功率信号$\{P_i\}$。

正如我们在下面的例子中所看到的，Pisarenko 方法是基于使用一个噪声子空间的本征矢量来估计正弦信号的频率的。

例 14.5.1　假定对于由单个叠加白噪声的正弦信号组成的某个过程，给定自相关值 $\gamma_{yy}(0)=3, \gamma_{yy}(1)=1$，以及 $\gamma_{yy}(2)=0$。确定频率、功率和加性噪声的方差。

解：相关矩阵是

$$\boldsymbol{\Gamma}_{yy} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

最小本征值是特征多项式的最小根

$$g(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 0$$

因此，本征值是 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3+\sqrt{2}, \lambda_3 = 3-\sqrt{2}$。

噪声的方差是

$$\sigma_w^2 = \lambda_{\min} = 3 - \sqrt{2}$$

相应的本征值是满足式(14.5.9)的矢量，也就是

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其解为 $a_1 = -\sqrt{2}$ 和 $a_2 = 1$。

下一步是使用值 a_1 和 a_2 确定式(14.5.4)中多项式的根。于是有

$$z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$$

因此

$$z_1, z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

注意到 $|z_1| = |z_2| = 1$,因此根在单位圆上。对应的频率从下式得到

$$z_i = e^{j2\pi f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

得到 $f_1 = 1/8$。最后,正弦信号的功率是

$$P_1 \cos 2\pi f_1 = \gamma_{yy}(1) = 1$$

$$P_1 = \sqrt{2}$$

其振幅是 $A = \sqrt{2P_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$。

检查一下我们的计算,于是有

$$\sigma_w^2 = \gamma_{yy}(0) - P_1$$

$$= 3 - \sqrt{2}$$

满足 λ_{min}。

14.5.2 具有白噪声的正弦信号的自相关矩阵的本征分解

在上一节的讨论中,我们假定正弦信号由 p 个实正弦信号组成。为了数学表达方便,我们现在假定信号由 p 个复正弦信号组成,形式为

$$x(n) = \sum_{i=1}^{p} A_i e^{j(2\pi f_i n + \phi_i)} \tag{14.5.13}$$

其中,振幅 $\{A_i\}$ 和频率 $\{f_i\}$ 已知,且相位 $\{\phi_i\}$ 是在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的统计独立随机变量。于是,随机过程 $x(n)$ 是宽平稳,自相关函数为

$$\gamma_{xx}(m) = \sum_{i=1}^{p} P_i e^{j2\pi f_i m} \tag{14.5.14}$$

其中,对于复正弦信号,$P_i = A_i^2$ 是第 i 个正弦信号的功率。

既然观察到的信号是 $y(n) = x(m) + w(n)$,其中 $w(n)$ 是谱密度为 σ_w^2 的一种白噪声序列,那么 $y(n)$ 的自相关函数为

$$\gamma_{yy}(m) = \gamma_{xx}(m) + \sigma_w^2 \delta(m), \qquad m = 0, \pm 1, \cdots, \pm(M-1) \tag{14.5.15}$$

因此,$y(n)$ 的 $M \times M$ 自相关矩阵可表达为

$$\boldsymbol{\Gamma}_{yy} = \boldsymbol{\Gamma}_{xx} + \sigma_w^2 \boldsymbol{I} \tag{14.5.16}$$

其中,$\boldsymbol{\Gamma}_{xx}$ 是信号 $x(n)$ 的自相关矩阵,且 $\sigma_w^2 \boldsymbol{I}$ 是噪声的自相关矩阵。注意,如果我们选择 $M > p$,$\boldsymbol{\Gamma}_{xx}$ 维数为 $M \times M$,不是满秩矩阵,因为它的秩为 p。然而,$\boldsymbol{\Gamma}_{yy}$ 是满秩的,因为 $\sigma_w^2 \boldsymbol{I}$ 的秩为 M。

事实上,信号矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{xx}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{\Gamma}_{xx} = \sum_{i=1}^{p} P_i \boldsymbol{s}_i \boldsymbol{s}_i^H \tag{14.5.17}$$

其中,H 代表共轭转置,并且 $\boldsymbol{s}_i$ 是一个维数为 M 的信号矢量,定义为

$$\boldsymbol{s}_i = [1, e^{j2\pi f_i}, e^{j4\pi f_i}, \cdots, e^{j2\pi(M-1)f_i}] \tag{14.5.18}$$

由于各个矢量(外积)$\boldsymbol{s}_i \boldsymbol{s}_i^H$ 是秩为 1 的矩阵,并且有 p 个矢量积,那么矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{xx}$ 的秩为 p。注意到,如果正弦信号是实的,那么相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{xx}$ 的秩将为 $2p$。

48 出 电子社 03496 数字信号处理(第四版) (季蜂印刷厂)

现在，我们执行矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{yy}$ 的本征分解。设本征值按增序排列为 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_M$，且假定相应的本征矢量表示为 $\{\boldsymbol{v}_i, i=1,\cdots,M\}$。假定本征矢量是归一化的，因此有 $\boldsymbol{v}_i^H \cdot \boldsymbol{v}_j = \delta_{ij}$。在噪声不存在的情况下，本征值 λ_i 是非零值，$i=1,2,\cdots,p$，其中 $\lambda_{p+1}=\lambda_{p+2}=\cdots=\lambda_M=0$。更进一步，信号相关矩阵可表达为

$$\boldsymbol{\Gamma}_{xx} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^H \tag{14.5.19}$$

因此，本征矢量 $\boldsymbol{v}_i, i=1,2,\cdots,p$ 正如信号矢量 $\boldsymbol{s}_i, i=1,2,\cdots,p$ 一样跨越信号子空间。信号子空间的这 p 个本征矢量称为主本征矢量，并且相应的本征值称为主本征值。

在噪声不存在的情况下，式(14.5.16)中的自相关矩阵可以表示为

$$\sigma_w^2 \boldsymbol{I} = \sigma_w^2 \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^H \tag{14.5.20}$$

通过将式(14.5.19)和式(14.5.20)代入式(14.5.16)，我们得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_{yy} &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^H + \sum_{i=1}^{M} \sigma_w^2 \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^H \\ &= \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \sigma_w^2) \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^H + \sum_{i=p+1}^{M} \sigma_w^2 \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^H \end{aligned} \tag{14.5.21}$$

这个本征分解将本征矢量分成两组。$\{\boldsymbol{v}_i, i=1,2,\cdots,p\}$ 组是主本征矢量，跨越信号子空间，而 $\{\boldsymbol{v}_i, i=p+1,\cdots,M\}$ 组正交于主本征矢量，被认为属于噪声子空间。由于信号矢量 $\{\boldsymbol{s}_i, i=1,2,\cdots,p\}$ 在信号子空间中，推出 $\{\boldsymbol{s}_i\}$ 只是主本征矢量的线性合并，并且对噪声子空间中矢量也是正交的。

基于上下文，我们发现 Pisarenko 方法是基于一种频率估计，即利用了信号矢量和噪声子空间矢量的正交特性。对于复正弦信号，如果我们选择 $M=p+1$(对于实正弦信号我们选择 $M=2p+1$)，噪声子空间中仅有一单个本征矢量(对应于最小本征值)，一定是正交于信号矢量。于是我们有

$$\boldsymbol{s}_i^H \boldsymbol{v}_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} v_{p+1}(k+1) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_i k} = 0, \qquad i=1,2,\cdots,p \tag{14.5.22}$$

但式(14.5.22)说明频率 $\{f_i\}$ 可以通过求解多项式的零点确定，

$$V(z) = \sum_{k=0}^{p} v_{p+1}(k+1) z^{-k} \tag{14.5.23}$$

所有零点都位于单位圆上。这些根的角度是 $2\pi f_i, i=1,2,\cdots,p$。

当正弦信号数目未知时，特别是在信号级别不比噪声高很多的情况下，确定 p 被证实是困难的。理论上，如果 $M>p+1$，那么存在 $(M-p)$ 重最小本征值。然而，实际上 $\boldsymbol{R}_{yy}$ 的 $(M-p)$ 个最小本征值一定是不同的。通过计算所有本征值，将 $(M-p)$ 个小(噪声的)本征值分成一组再求平均得到 σ_w^2 的估计。于是，平均值可用在式(14.5.9)中，与 $\boldsymbol{R}_{yy}$ 一起确定相应的本征矢量。

14.5.3　MUSIC 算法

多信号类(MUSIC)方法也是一种噪声子空间频率估计器。要开发这种方法，首先考虑“加权”的谱估计

$$P(f)=\sum_{k=p+1}^{M} w_k|\boldsymbol{s}^H(f)\boldsymbol{v}_k|^2 \tag{14.5.24}$$

其中,$\{\boldsymbol{v}_k, k=p+1,\cdots,M\}$是噪声子空间中的本征矢量,$\{w_k\}$是一组正权值,并且$\boldsymbol{s}(f)$是复正弦矢量

$$\boldsymbol{s}(f)=[1, e^{j2\pi f}, e^{j4\pi f}, \cdots, e^{j2\pi(M-1)f}] \tag{14.5.25}$$

注意到$f=f_i$,$\boldsymbol{s}(f_i)\equiv s_i$,因此对于信号的$p$个正弦频率分量中的任意一个来说,都有

$$P(f_i)=0, \qquad i=1,2,\cdots,p \tag{14.5.26}$$

因此,$P(f)$的倒数是频率的尖峰函数,并提供了一种方法用于估计正弦分量的频率。因此

$$\frac{1}{P(f)}=\frac{1}{\sum_{k=p+1}^{M} w_k\left|\boldsymbol{s}^H(f)\boldsymbol{v}_k\right|^2} \tag{14.5.27}$$

虽然理论上$1/P(f)$在$f=f_i$处是无穷的,但实际上估计误差导致了$1/P(f)$在所有频率点处的有穷值。

由 Schmidt(1981,1986)提出的正弦频率估计是式(14.5.27)的特殊情况,即对于所有k,$w_k=1$。因此

$$P_{\text{MUSIC}}(f)=\frac{1}{\sum_{k=p+1}^{M}\left|\boldsymbol{s}^H(f)\boldsymbol{v}_k\right|^2} \tag{14.5.28}$$

正弦频率的估计是$P_{\text{MUSIC}}(f)$的峰值。一旦估计到正弦频率分量,则每一个正弦信号的功率都可以通过求解式(14.5.11)得到。

例 14.5.2 由具有白噪声的复指数信号组成的信号的自相关矩阵给出如下:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{yy}=\begin{bmatrix} 3 & -2j & -2 \\ 2j & 3 & -2j \\ -2 & 2j & 3 \end{bmatrix}$$

使用 MUSIC 方法确定复指数的频率和功率,以及加性噪声的方差。

解: 通过求下列多项式的根

$$g(\lambda)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2j & -2 \\ 2j & 3-\lambda & -2j \\ -2 & 2j & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-9\lambda^2+15\lambda-7=0$$

我们发现本征值是$\lambda_1=7,\lambda_2=1,\lambda_3=1$。因此,我们得出结论,有单个复指数信号对应于本征值$\lambda=7$。对应于该信号和噪声子空间的本征矢量分别是

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ j/\sqrt{3} \\ -1/3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ j/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix} 2j/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ j/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

通过计算式(14.5.28),我们得到

$$\sum_{k=2}^{3}\left|\boldsymbol{s}^H(f)\boldsymbol{v}_k\right|^2=2+\frac{5}{3}\cos\left(2\pi f+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{3}\cos 4\pi f+\frac{1}{3}\cos\left(2\pi f-\frac{\pi}{2}\right)$$

容易验证,该项在$f=1/4$点是零。更进一步,从关系式(14.5.15)和已有的知识$\sigma_w^2=1$,我们容易得出结论,复指数信号的功率是$P=2$。

在比较 Pisarenko 方法和 MUSIC 算法时，我们注意到前者选择 $M = p + 1$，并将信号矢量投影到单个噪声本征矢量。因此，Pisarenko 方法假定已知信号中正弦分量的精确数目。相反，MUSIC 方法选择 $M > p + 1$，在执行本征分析之后，将本征值又分成两组，即对应于信号子空间的 p 和对应于噪声子空间的 $(M - p)$。于是，信号矢量投影到噪声子空间中的 $(M - p)$ 个本征矢量，因此 p 的精确值不是必需的。在 14.5.5 节描述的阶数选择方法可以用来得到 p 的估计，并选择 M，使得 $M > p + 1$。

14.5.4 ESPRIT 算法

ESPRIT（借助旋转不变技术的信号参数估计）是另一种利用本征分解方法来估计正弦信号和的频率的估计方法。我们从以下来自 Roy 等人（1986）的推导可以观察到，ESPRIT 展示了跨越两个时空移位数据矢量的信号子空间的根本旋转不变性。

我们再考虑加性白噪声中的 p 个复值正弦信号的估计。接收序列的矢量如下

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(n) &= [y(n), y(n+1), \cdots, y(n+M-1)]^t \\ &= \boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{w}(n)\end{aligned} \tag{14.5.29}$$

其中，$\boldsymbol{x}(n)$ 是信号矢量，而 $\boldsymbol{w}(n)$ 是噪声矢量。要展示正弦信号的确定性特征，我们定义时移矢量 $z(n) = \boldsymbol{y}(n+1)$。因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}(n) &= [z(n), z(n+1), \cdots, z(n+M-1)]^t \\ &= [y(n+1), y(n+2), \cdots, y(n+M)]^t\end{aligned} \tag{14.5.30}$$

通过这些定义，我们可以将矢量 $y(n)$ 和 $z(n)$ 表达为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(n) &= \boldsymbol{S}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{w}(n) \\ \boldsymbol{z}(n) &= \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{w}(n)\end{aligned} \tag{14.5.31}$$

其中，$\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_p]^t$，$a_i = A_i e^{j\phi_i}$，并且 $\boldsymbol{\Phi}$ 是对角 $p \times p$ 矩阵，由每个复正弦信号的邻近时间样本间的相对相位组成，

$$\boldsymbol{\Phi} = \text{diag}[e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}, \cdots, e^{j2\pi f_p}] \tag{14.5.32}$$

注意到，矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 建立了时移矢量 $\boldsymbol{y}(n)$ 和 $z(n)$ 之间的关系，并且可以称为旋转算子。还注意到，$\boldsymbol{\Phi}$ 是单位矩阵。矩阵 $\boldsymbol{S}$ 是由列矢量指定的 $M \times p$ Vandermonde 矩阵

$$\boldsymbol{s}_i = [1, e^{j2\pi f_i}, e^{j4\pi f_i}, \cdots, e^{j2\pi(M-1)f_i}], \qquad i = 1, 2, \cdots, p \tag{14.5.33}$$

现在数据矢量 $\boldsymbol{y}(n)$ 的自协方差矩阵是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_{yy} &= E[\boldsymbol{y}(n)\boldsymbol{y}^H(n)] \\ &= \boldsymbol{S}\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}^H + \sigma_w^2\boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{14.5.34}$$

其中，$\boldsymbol{P}$ 是由复正弦信号的功率组成的 $p \times p$ 对角矩阵

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= \text{diag}[|a_1|^2, |a_2|^2, \cdots, |a_p|^2] \\ &= \text{diag}[P_1, P_2, \cdots, P_p]\end{aligned} \tag{14.5.35}$$

我们观察到由于不同频率的复正弦信号在无限区间内是正交的，所以 $\boldsymbol{P}$ 是对角矩阵。然而，我们应该强调 ESPRIT 算法不需要 $\boldsymbol{P}$ 是对角的。因此，算法应用于由有限数据记录估计协方差矩阵的情况。

信号矢量 $\boldsymbol{y}(n)$ 和 $z(n)$ 的互协方差矩阵是

$$\boldsymbol{\Gamma}_{yz} = E[\boldsymbol{y}(n)\boldsymbol{z}^H(n)] = \boldsymbol{SP\Phi}^H\boldsymbol{S}^H + \boldsymbol{\Gamma}_w \tag{14.5.36}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_w &= E[\boldsymbol{w}(n)\boldsymbol{w}^H(n+1)] \\ &= \sigma_w^2\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix} \equiv \sigma_w^2\boldsymbol{Q}\end{aligned} \tag{14.5.37}$$

自协方差矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{yy}$ 和互协方差矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{yz}$ 分别为

$$\boldsymbol{\Gamma}_{yy} = \begin{bmatrix}\gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(1) & \cdots & \gamma_{yy}(M-1)\\ \gamma_{yy}^*(1) & \gamma_{yy}(0) & \cdots & \gamma_{yy}(M-2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \gamma_{yy}^*(M-1) & \gamma_{yy}(M-2) & \cdots & \gamma_{yy}(0)\end{bmatrix} \tag{14.5.38}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{yz} = \begin{bmatrix}\gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(2) & \cdots & \gamma_{yy}(M)\\ \gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(1) & \cdots & \gamma_{yy}(M-1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \gamma_{yy}^*(M-2) & \gamma_{yy}^*(M-3) & \cdots & \gamma_{yy}(1)\end{bmatrix} \tag{14.5.39}$$

其中，$\gamma_{yy}(m) = E[y^*(n)y(n+m)]$。注意到 $\boldsymbol{\Gamma}_{yy}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_{yz}$ 均是 Toeplitz 矩阵。

基于这一公式，关键问题是从自相关序列 $\{\gamma_{yy}(m)\}$ 确定频率 $\{f_i\}$ 和功率 $\{P_i\}$。

从底层模型看来，显然矩阵 $\boldsymbol{SPS}^H$ 的秩是 p。结果，式(14.5.34)给出的 $\boldsymbol{\Gamma}_{yy}$ 具有 $(M-p)$ 个相同的本征值 σ_w^2。因此

$$\boldsymbol{\Gamma}_{yy} - \sigma_w^2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{SP\Phi}^H \equiv \boldsymbol{C}_{yy} \tag{14.5.40}$$

从式(14.5.36)同样有

$$\boldsymbol{\Gamma}_{yz} - \sigma_w^2\boldsymbol{\Gamma}_w = \boldsymbol{SP\Phi}^H\boldsymbol{S}^H \equiv \boldsymbol{C}_{yz} \tag{14.5.41}$$

现在，我们考虑矩阵 $\boldsymbol{C}_{yy} - \lambda\boldsymbol{C}_{yz}$，可以写为

$$\boldsymbol{C}_{yy} - \lambda\boldsymbol{C}_{yz} = \boldsymbol{SP}(\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{\Phi}^H)\boldsymbol{S}^H \tag{14.5.42}$$

显然，$\boldsymbol{SPS}^H$ 的列空间等同于 $\boldsymbol{SP\Phi}^H\boldsymbol{S}^H$ 的列空间。结果，$\boldsymbol{C}_{yy} - \lambda\boldsymbol{C}_{yz}$ 的秩等于 p。然而，我们注意到，如果 $\lambda = \exp(\mathrm{j}2\pi f_i)$，那么 $(\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{\Phi}^H)$ 的第 i 行是零，因此 $[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}^H)\exp(\mathrm{j}2\pi f_i)]$ 的秩是 $p-1$。但是，$\lambda_i = \exp(\mathrm{j}2\pi f_i)$，$i = 1,2,\cdots,p$，是矩阵对 $(\boldsymbol{C}_{yy}, \boldsymbol{C}_{yz})$ 的广义本征值。因此，在单位圆上 p 个广义的本征值对应于旋转算子 $\boldsymbol{\Phi}$ 的元素。剩余的 $(M-p)$ 个广义的本征值对 $\{\boldsymbol{C}_{yy}, \boldsymbol{C}_{yz}\}$，对应于这些矩阵的公共零空间，其值为零[也就是说，$(M-p)$ 个本征值在复平面的原点]。

基于以上这些关系，我们将频率 $\{f_i\}$ 估计的算法公式化，过程如下：

1. 从这些数据计算自相关值 $r_{yy}(m)$，$m = 1,2,\cdots,M$，并形成对应于 $\boldsymbol{\Gamma}_{yy}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_{yz}$ 估计的矩阵 $\boldsymbol{R}_{yy}$ 和 $\boldsymbol{R}_{yz}$。
2. 计算 $\boldsymbol{R}_{yy}$ 的本征值。对于 $M > p$，最小本征值是 σ_w^2 的估计。
3. 计算 $\hat{\boldsymbol{C}}_{yy} = \boldsymbol{R}_{yy} - \hat{\sigma}_w^2\boldsymbol{I}$ 和 $\hat{\boldsymbol{C}}_{yz} = \boldsymbol{R}_{yz} - \hat{\sigma}_w^2\boldsymbol{Q}$，其中 $\boldsymbol{Q}$ 在式(14.5.27)中定义。
4. 计算矩阵对 $\{\hat{\boldsymbol{C}}_{yy}, \hat{\boldsymbol{C}}_{yz}\}$ 的广义值。这些矩阵的 p 个位于(或邻近于)单位圆的广义本征值确定了 $\boldsymbol{\Phi}$ 的(估计)元素以及正弦信号频率。剩余的 $(M-p)$ 个本征值将位于(或邻近于)原点。

确定正弦分量功率的一种方法是求解式(14.5.11)的方程,用 $r_{yy}(m)$代替 $\gamma_{yy}(m)$。

另一种方法是基于对应于广义本征值$\{\lambda_i\}$的广义本征矢量$\{\boldsymbol{v}_i\}$的计算。我们有

$$(\boldsymbol{C}_{yy}-\lambda_i\boldsymbol{C}_{yz})\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{SP}(\mathbf{I}-\lambda_i\boldsymbol{\Phi}^H)\boldsymbol{S}^H\boldsymbol{v}_i=0 \tag{14.5.43}$$

既然$(\boldsymbol{C}_{yy}-\lambda_i\cdot\boldsymbol{C}_{yz})$的列空间等同于由式(14.5.33)中的矢量$\{\boldsymbol{s}_i, j\neq i\}$所组成的列空间,那么广义本征矢量 $\boldsymbol{v}_i$ 正交于$\boldsymbol{s}_j, j\neq i$。由于 $\boldsymbol{P}$ 是对角的,从式(14.5.43)推出信号功率是

$$P_i=\frac{\boldsymbol{v}_i^H\boldsymbol{C}_{yy}\boldsymbol{v}_i}{|\boldsymbol{v}_i^H\boldsymbol{s}_i|^2},\qquad i=1,2,\cdots,p \tag{14.5.44}$$

14.5.5　阶数选择准则

本节所描述的用于估计正弦信号频率和功率的本征分析方法,还提供了关于正弦分量数的信息。如果有 p 个正弦信号,那么与这些信号子空间相关的本征值是$\{\lambda_i+\sigma_w^2, i=1,2,\cdots,p\}$,而剩余的$(M-p)$个本征值均等于 σ_w^2。基于这些本征分解,可以设计一个测试用来比较本征值和一个特定的阈值。还有一种方法可以使用所观察信号估计的自相关矩阵的本征矢量分解,该方法是建立在矩阵扰动分析的基础上的。这种方法在 Fuchs(1988)的文章中描述。

另一种用来本征分解的方法是基于 AIC 准则的扩展和修改,已经由 Wax 和 Kailath(1985)提出。如果样本自相关矩阵的本征值是有序的,以至于 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_M$,其中 $M>p$,那么信号子空间中的正弦信号数目可通过选择 MDL(p)的最小值估计,如下式

$$\mathrm{MDL}(p)=-\lg\left[\frac{G(p)}{A(p)}\right]^N+E(p) \tag{14.5.45}$$

其中

$$\begin{aligned}G(p)&=\prod_{i=p+1}^{M}\lambda_i,\qquad p=0,1,\cdots,M-1\\A(p)&=\left[\frac{1}{M-p}\sum_{i=p+1}^{M}\lambda_i\right]^{M-p}\\E(p)&=\frac{1}{2}p(2M-p)\lg N\end{aligned} \tag{14.5.46}$$

N：用于估计 M 个自相关滞后的样本数

有关阶数选择准则的质量分析结果在 Wax 和 Kailath(1985)的论文中给出。MDL 准则保证是一致的。

14.5.6　实验结果

本节我们用一个例子来说明基于本征分析的谱估计算法的分辨率特征,并与基于模型的方法和非参数方法一起比较其性能。信号序列是

$$x(n)=\sum_{i=1}^{4}A_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f_i n+\phi_i)}+w(n)$$

其中,$A_i=1, i=1,2,3,4$,$\{\phi_i\}$是在$(0,2\pi)$上均匀分布的统计自变量,$\{w(n)\}$是零均值、方差为 σ_w^2 的白噪声序列,并且频率是 $f_1=-0.222, f_2=-0.166, f_3=0.10, f_4=0.122$。序列$\{x(n), 0\leqslant n\leqslant 1023\}$用于估计频率分量的数目,以及 $\sigma_w^2=0.1,0.5,1.0$ 和 $M=12$(估计的自相关的长度)的相应值。

图 14.5.1、图 14.5.2、图 14.5.3 和图 14.5.4 分别说明了使用 Blackman-Turkey 方法、Capon 的最小方差方法、AR Yule-Walker 方法和 MUSIC 方法估计的信号功率谱。ESPRIT 算法的结果在表 14.2 给出。从这些结果可以看出,(1) Blackman-Turkey 方法不能提供足够的分辨率以估计数据中的正弦信号;(2) Capon 的最小方差方法只解决了 f_1, f_2,但是没有解决 f_3 和 f_4;(3) AR 方法解决了 $\sigma_w^2 = 0.1$ 和 $\sigma_w^2 = 0.5$ 的所有频率;(4) MUSIC 和 ESPRIT 算法不仅恢复了全部四个正弦信号,而且不同 σ_w^2 值的性能在本质上是不可区分的。进一步观察到,最小方差方法和 AR 方法的分辨率特性是噪声方差的函数,这些结果清楚地说明了基于本征分析的算法在求解加性噪声中正弦信号的能力。

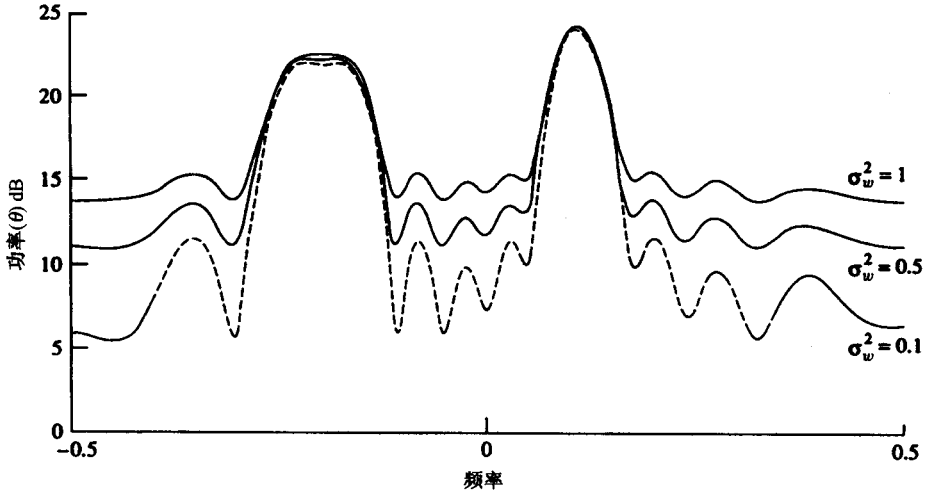


图 14.5.1 来自 Blackman-Turkey 方法的功率谱估计

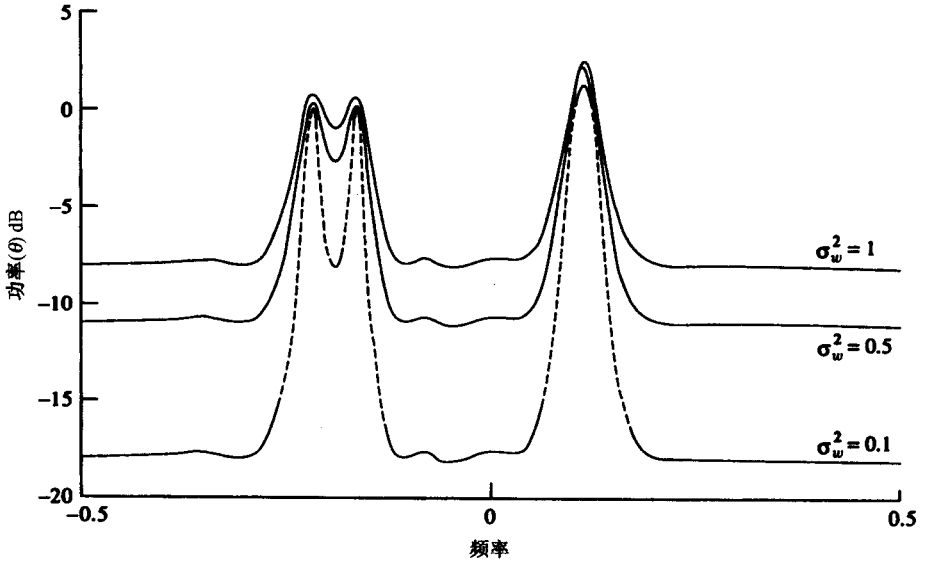


图 14.5.2 来自最小方差方法的功率谱估计

作为结论,我们应该强调本节描述的高分辨率的基于本征分析的谱估计方法,即 MUSIC 和 ESPRIT 算法,它们不仅可应用于正弦信号,还可更广义地应用于窄带信号的估计。

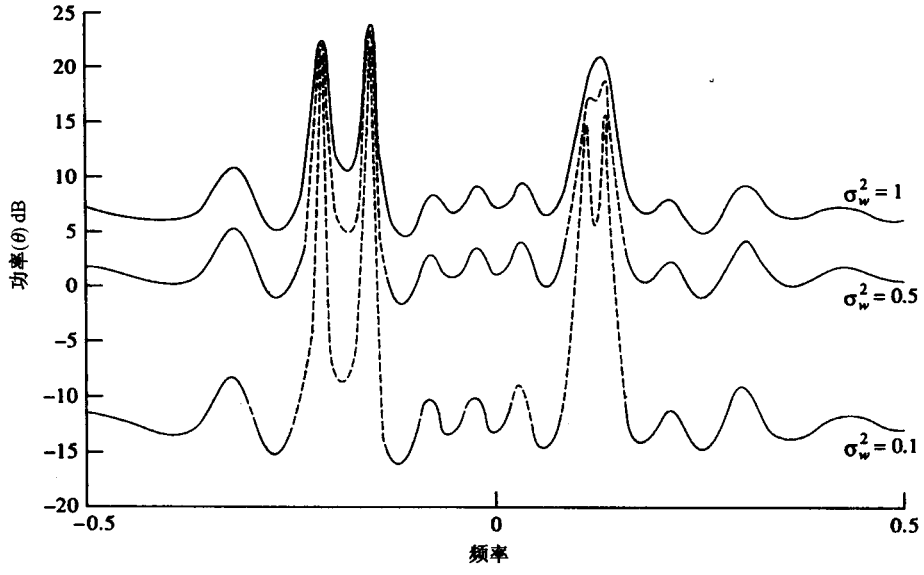


图 14.5.3　来自 Yule-Walker AR 方法的功率谱估计

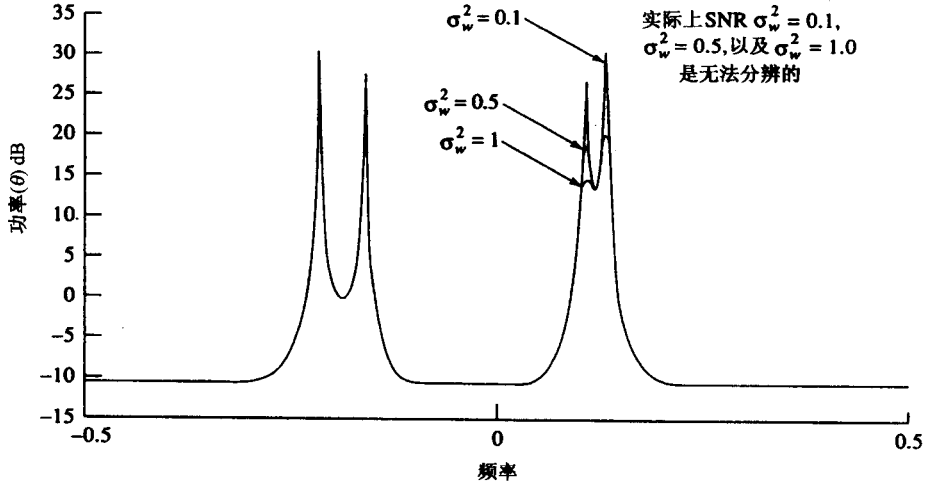


图 14.5.4　来自 MUSIC 方法的功率谱估计

表 14.2　ESPRIT 算法

σ_w^2	$\hat{f}_1$	$\hat{f}_2$	$\hat{f}_3$	$\hat{f}_4$
0.1	−0.2227	−0.1668	−0.1224	−0.10071
0.5	−0.2219	−0.167	−0.121	0.0988
1.0	−0.222	−0.167	0.1199	0.1013
真实值	−0.222	−0.166	0.122	0.100

14.6　小结与参考文献

功率谱估计是数字信号处理中最重要的研究和应用领域之一。本章我们已经描述了近一百

年来最重要的功率谱估计技术和算法。首先是基于周期图的非参数化方法或经典方法,还包括基于 AR,MA 和 ARMA 线性模型的更现代的参数化方法。我们的论述限制在基于统计数据的二阶矩单个时间序列的谱估计方法。

我们所描述的参数和非参数的方法已经扩展到多通道和多维谱估计。McClellan(1982)的教学论文论述了多维谱估计问题,而 Johnson(1982)的论文论述了多通道谱估计问题。其他的使用更高阶累积量的谱估计方法已经研发出来,用于求解双向和三向谱。关于这些课题的教学论文已经由 Nikias 和 Raghuveer(1987)发表。

正如前面的讨论所证实的,功率谱估计是一个引人注目的研究领域,因此,关于这一课题已有大量论文发表在技术文献上。大部分研究工作涉及到了新算法和技术,以及对现有技术的提高。另外一些研究工作是关于对各种功率谱方法的性能和限制的理解。在这一方面,经典非参数方法的统计特性和局限性已被彻底分析并透彻理解。参数方法也已经被很多研究学者考察过,但对它的性能分析是困难的,因此可用结果很少。有些文章已经解决了参数方法的性能特征问题,包括 Kromer(1969), Lacoss(1971), Berk(1974), Baggeroer(1976), Sakai(1979), Swingler(1980), Lang 和 McClellan(1980),以及 Tufts 和 Kumaresan(1982)的论文。

关于各种功率谱估计方法及其性能,除了本章中已经给出的参考文献外,我们还应该包括一些教学论文和调查论文。特别是,我们引用了 Kay 和 Marple (1981) 的教学论文,其中包括大约 280 篇参考文献、Brillinger(1974) 的论文,以及 1982 年 9 月出版的 IEEE Proceedings 的《Special Issue on Spectral Estimation》。关于功率谱估计和分析这一课题,引起广泛研究兴趣的另一种标志是 Gardner(1987), Kay(1988)和 Marple(1987)出版的书,以及由 Childers(1978)和 Kesler(1986)编辑的 IEEE 书籍。

要实现本章中所描述的各种功率谱估计方法,有很多计算机程序和软件包可用。一种软件包通过 IEEE(Programs for Digital Signal Processing,1979)可用,另外还有其他商业上可用的软件包。

习题

14.1 (a) 通过扩展式(14.1.23),求期望值,最后当 $T_0 \to \infty$ 时求极限,证明右边收敛于 $\Gamma_{xx}(F)$。

(b) 证明

$$\sum_{m=-N}^{N} r_{xx}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm} = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn}\right|^2$$

14.2 对于零均值联合高斯随机变量,X_1, X_2, X_3, X_4,已知[见 Papoulis(1984)]

$$E(X_1X_2X_3X_4) = E(X_1X_2)E(X_3X_4) + E(X_1X_3)E(X_2X_4) + E(X_1X_4)E(X_2X_3)$$

使用这一结果推导出式(14.1.27)给出的均方值及方差,即

$$\mathrm{var}[r'_{xx}(m)] = E[|r'_{xx}(m)|^2] - |E[r'_{xx}(m)]|^2$$

14.3 利用高斯随机变量的第四个联合矩表达式,证明

(a) $E[P_{xx}(f_1)P_{xx}(f_2)] = \sigma_x^4\left\{1 + \left[\frac{\sin\pi(f_1+f_2)N}{N\sin\pi(f_1+f_2)}\right]^2 + \left[\frac{\sin\pi(f_1-f_2)N}{N\sin\pi(f_1-f_2)}\right]^2\right\}$

(b) $\mathrm{cov}[P_{xx}(f_1)P_{xx}(f_2)] = \sigma_x^4\left\{\left[\frac{\sin\pi(f_1+f_2)N}{N\sin\pi(f_1+f_2)}\right]^2 + \left[\frac{\sin\pi(f_1-f_2)N}{N\sin\pi(f_1-f_2)}\right]^2\right\}$

(c) 在序列 $x(n)$是零均值、方差为 σ_x^2 的高斯白噪声的条件下,$\mathrm{Var}[P_{xx}(f)] = \sigma_x^4\left\{1 + \left(\frac{\sin 2\pi fN}{N\sin 2\pi f}\right)^2\right\}$

14.4 将习题 14.3 的结果推广到功率谱密度为 $\Gamma_{xx}(f)$的零均值高斯噪声过程。然后,导出式(14.1.38)给出的周期图 $P_{xx}(f)$的方差。(提示:假定有色高斯噪声过程是由白高斯噪声激励线性系统而得到的输出。然后,使用 12.1 节给出的适当关系式。)

14.5 证明：由式(14.1.41)给出的频率 $f_k = k/L, k = 0,1,\cdots,L-1$ 处的周期图值，可以通过将序列通过一个由 N 个 IIR 滤波器组成的滤波器组实现，其中每个滤波器的脉冲响应为

$$h_k(n) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N}u(n)$$

然后，计算滤波器输出在 $n = N$ 点的振幅平方值。注意每个滤波器在单位圆上频率为 f_k 的地方有一个极点。

14.6 证明由式(14.2.12)给出的归一化因子可确保式(14.2.19)成立。

14.7 考虑使用 DFT(借助 FFT 算法计算)来计算复值序列 $x(n)$ 的自相关，即

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)x(n+m), \qquad m \geqslant 0$$

假定 FFT 的尺寸 M 比数据长度 N 小很多。特别地，假定 $N = KM$。

(a) 使用 4K 个 M 点 DFT 和 1 个 M 点 DFT，确定对 $x(n)$ 分段并在 $-(M/2)+1 \leqslant m \leqslant (M/2)-1$ 范围内计算 $r_{xx}(m)$ 所需的步骤。

(b) 考虑下列三种序列 $x_1(n), x_2(n)$ 和 $x_3(n)$，期间长度均为 M。假设序列 $x_1(n), x_2(n)$ 在 $0 \leqslant n \leqslant (M/2)-1$ 范围内具有任意值，但在 $(M/2)-1 \leqslant n \leqslant M-1$ 范围内为零。序列 $x_3(n)$ 定义为

$$x_3(n) = \begin{cases} x_1(n), & 0 \leqslant \dfrac{M}{2}-1 \\ x_2\left(n-\dfrac{M}{2}\right), & \dfrac{M}{2} \leqslant n \leqslant M-1 \end{cases}$$

(c) 通过使用(b)的结果，证明(a)中的 DFT 计算量如何是从 4K 减小到 2K 的。

14.8 Bartlett 方法用于估计某个信号 $x(n)$ 的功率谱。我们知道功率谱由每个样本 0.01 周期的 3 dB 带宽的单个峰值组成，但我们不知道峰值的位置。

(a) 假定 N 是较大的，确定 $M = N/K$ 的值，使得谱窗口比峰值更窄。

(b) 请解释增加 M 超过(a)中的值为什么不会带来优越性。

14.9 假定我们从一个随机过程的样本序列中选取 $N = 1000$ 个样本。

(a) 在质量因子 $Q = 10$ 的情况下，确定 Bartlett, Welch(50%覆盖)，以及 Blackman-Tukey 方法的频率分辨率。

(b) 确定 Bartlett, Welch(50%覆盖)，以及 Blackman-Tukey 方法的记录长度 M。

14.10 考虑采用对过去数据指数加权的平均周期图方法，从一个序列 $x(n)$ 中连续估计功率谱的问题。对于 $P_{xx}^{(0)}(f) = 0$，我们有

$$P_{xx}^{(m)}(f) = wP_{xx}^{(m-1)}(f) + \frac{1-w}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1} x_m(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn}\right|^2$$

其中，连续的周期图假定是不相关的，而 w 是(指数)权重因子。

(a) 确定高斯随机过程 $P_{xx}^{(m)}(f)$ 的均值和方差。

(b) 在使用 Welch 定义的修正周期图进行无覆盖平均的情况下，重新分析(a)。

14.11 采用 Bartlett 方法的周期图可以表达为

$$P_{xx}^{(i)}(f) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)r_{xx}^{(i)}(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fm}$$

其中 $r_{xx}^{(i)}(m)$ 是从第 i 个数据块得到的估计的自相关。证明 $P_{xx}^{(i)}(f)$ 可以表达为

$$P_{xx}^{(i)}(f) = \boldsymbol{E}^H(f)\boldsymbol{R}_{xx}^{(i)}\boldsymbol{E}(f)$$

其中

$$\boldsymbol{E}(f)=[1 \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}4\pi f} \quad \cdots \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(M-1)f}]^t$$

因此

$$P_{xx}^{B}(f)=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{E}^H(f)\boldsymbol{R}_{xx}^{(k)}\boldsymbol{E}(f)$$

14.12 导出由式(14.3.19)给出的回归阶数更新方程。

14.13 确定序列 $x(n)$的均值和自相关,$x(n)$是由下列差分方程描述的 ARMA(1,1)过程的输出

$$x(n)=\tfrac{1}{2}x(n-1)+w(n)-w(n-1)$$

其中,$w(n)$是方差为 σ_w^2 的白噪声过程。

14.14 确定序列 $x(n)$的均值和自相关,$x(n)$是由下列差分方程描述的 MA(2)过程的输出

$$x(n)=w(n)-2w(n-1)+w(n-2)$$

其中,$w(n)$是方差为 σ_w^2 的白噪声过程

14.15 一个 MA(2)过程有自相关序列

$$\gamma_{xx}(m)=\begin{cases}6\sigma_w^2, & m=0\\ -4\sigma_w^2, & m=\pm1\\ -2\sigma_w^2, & m=\pm2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(a) 确定具有上述自相关的 MA(2)过程的系数。

(b) 答案是唯一的吗? 如果不是,给出所有可能的解。

14.16 一个 MA(2)过程有自相关序列

$$\gamma_{xx}(m)=\begin{cases}\sigma_w^2, & m=0\\ -\dfrac{35}{62}\sigma_w^2, & m=\pm1\\ \dfrac{6}{62}\sigma_w^2, & m=\pm2\end{cases}$$

(a) 确定 MA(2)过程的最小相位系统的系数。

(b) 确定 MA(2)过程的最大相位系统的系数。

(c) 确定 MA(2)过程的混合相位系统的系数

14.17 考虑有下列差分方程所描述的线性系统

$$y(n)=0.8y(n-1)+x(n)+x(n-1)$$

其中,$x(n)$是具有零均值的宽平稳随机过程,且自相关函数为

$$\gamma_{xx}(m)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}$$

(a) 确定输出 $y(n)$的功率谱密度。

(b) 确定输出的自相关 $\gamma_{yy}(m)$。

(c) 确定输出的方差 σ_y^2。

14.18 从式(14.3.6)和式(14.3.9)我们注意到一个 AR(p)平稳随机过程满足方程

$$\gamma_{xx}(m)+\sum_{k=1}^{p}a_p(k)\gamma_{xx}(m-k)=\begin{cases}\sigma_w^2, & m=0,\\ 0, & 1\leqslant m\leqslant p,\end{cases}$$

其中,$a_p(k)$是阶数为 p 的线性预测器的预测系数,并且 σ_w^2 是最小均方预测误差,如果式(14.3.9)中的$(p+1)\times(p+1)$自相关矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{xx}$是正定义的,证明:

(a) 反射系数 $|K_m|<1, 1\leqslant m\leqslant p$。

(b) 多项式

$$A_p(z)=1+\sum_{k=1}^{p}a_p(k)z^{-k}$$

的所有根均在单位圆内(也就是说,它是最小相位)。

14.19 AR(2)过程由下列差分方程描述

$$x(n)=0.81x(n-2)+w(n)$$

其中,$w(n)$是方差为 σ_w^2 的白噪声过程。

(a) 确定适合于数据 $x(n)$,能提供最小均方误差的 MA(2),MA(4)和 MA(8)模型的参数。

(b) 画出真实谱和 MA(q),$q=2,4,8$ 的谱并比较这些结果。请解释 MA(q)模型如何更好地逼近 AR(2)过程。

14.20 一个 MA(2)过程由下列差分方程描述

$$x(n)=w(n)+0.81w(n-2)$$

其中,$w(n)$是方差为 σ_w^2 的白噪声过程。

(a) 确定适合于数据 $x(n)$,能提供最小均方误差的 AR(2),AR(4)和 AR(8)模型的参数。

(b) 画出真实谱和 AR (p),$p=2,4,8$ 的谱并比较这些结果。请解释 AR(p)模型如何更好地逼近 MA(2)过程。

14.21 (a) 确定由下列差分方程生成的随机过程的功率谱。

1. $x(n)=-0.81x(n-2)+w(n)-w(n-1)$
2. $x(n)=w(n)-w(n-2)$
3. $x(n)=-0.81x(n-2)+w(n)$

其中,$w(n)$是方差为 σ_w^2 的白噪声过程。

(b) 画出(a)给出的过程谱。

(c) 对于 2 和 3 的过程,确定自相关 $\gamma_{xx}(m)$。

14.22 Bartlett 方法常用于从一个由 $N=2400$ 个样本组成的序列 $x(n)$中估计信号的功率谱。

(a) 确定 Bartlett 方法中每一段的最小长度 M,生成 $\Delta f=0.01$ 的频率分辨率。

(b) 对于 $\Delta f=0.02$,重复(a)。

(c) 对于(a)和(b),确定质量因子 Q_B。

14.23 一个随机过程 $x(n)$由功率谱密度表征为

$$\Gamma_{xx}(f)=\sigma_w^2\frac{|e^{j2\pi f}-0.9|^2}{|e^{j2\pi f}-j0.9|^2|e^{j2\pi f}+j0.9|^2}$$

其中,σ_w^2 是一个常数(缩放因子)。

(a) 如果我们把 $\Gamma_{xx}(f)$视为线性由白噪声驱动的零极点系统 $H(z)$的输出,确定 $H(z)$。

(b) 确定稳定系统(白噪声滤波器)的系统函数,当激励为 $x(n)$时生成的白噪声输出。

14.24 一个随机序列 $x(n)$的 N 点 DFT 是

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi nk/N}$$

假定 $E[x(n)]=0$ 并且 $E[x(n)x(n+m)]=\sigma_x^2\delta(m)$ [即 $x(n)$是一个白噪声过程]。

(a) 确定 $X(k)$的方差。

(b) 确定 $X(k)$的自相关。

14.25 假定我们把 ARMA(p,q)过程表示为一个 MA(q) 与一个 AR(p)模型的级联。MA(q)模型的输入输出方程是

$$v(n)=\sum_{k=0}^{q}b_k w(n-k)$$

其中,$w(n)$是白噪声过程。AR(p)的输入输出方程是

$$x(n)+\sum_{k=1}^{p}a_k x(n-k)=v(n)$$

(a) 通过计算 $v(n)$的自相关,证明

$$\gamma_{vv}(m)=\sigma_w^2\sum_{k=0}^{q-m}b_k^* b_{k+m}$$

(b) 证明

$$\gamma_{vv}(m)=\sum_{k=0}^{p}a_k\gamma_{vx}(m+k),\qquad a_o=1$$

其中,$\gamma_{vx}(m)=E[v(n+m)x^*(n)]$。

14.26 确定下列随机序列的自相关 $\gamma_{xx}(m)$

$$x(n)=A\cos(\omega_1 n+\phi)$$

其中,振幅 A 和频率 ω_1 是常数(已知),并且 ϕ 是在(0,2π)区间上随机分布的均匀相位。

14.27 假定习题 14.19 中的 AR(2)过程受方差为 σ_v^2 的叠加白噪声 $v(n)$干扰。于是

$$y(n)=x(n)+v(n)$$

(a) 确定 $y(n)$的差分方程,并证明 $y(n)$是一个 ARMA(2,2)过程。确定 ARMA 过程的系数。

(b) 将(a)中的结果推广到一个 AR(p)过程

$$x(n)=-\sum_{k=1}^{p}a_k(xn-k)+w(n)$$

并且

$$y(n)=x(n)+v(n)$$

14.28 (a) 确定随机序列的自相关

$$x(n)=\sum_{k=1}^{K}A_k\cos(\omega_k n+\phi_k)+w(n)$$

其中,$\{A_k\}$是常数振幅,$\{\omega_k\}$是常数频率,并且$\{\phi_k\}$是相互统计独立且均匀分布的随机相位。噪声序列 $w(n)$是方差为 σ_w^2 的白噪声。

(b) 确定 $x(n)$的功率谱密度。

14.29 由 Pisarenko 考虑的谐波分解问题可表达为对下列方程的解

$$\boldsymbol{a}^H\boldsymbol{\Gamma}_{yy}\boldsymbol{a}=\sigma_w^2\boldsymbol{a}^H\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{a}$ 的求解可以通过对二次型 $\boldsymbol{a}^H\boldsymbol{\Gamma}_{yy}\boldsymbol{a}$ 最小化得到,约束条件 $\boldsymbol{a}^H\boldsymbol{a}=1$。这个约束可以通过 Lagrange 乘法器影响到性能指标。因此,性能指标为

$$\mathcal{E}=\boldsymbol{a}^H\boldsymbol{\Gamma}_{yy}\boldsymbol{a}+\lambda(1-\boldsymbol{a}^H\boldsymbol{a})$$

对于相应的 $\boldsymbol{a}$,通过最小化$\mathcal{E}$证明该公式等价于式(14.5.9)给出的 Pisarenko 本征值问题,Lagrange 乘法器起到了本征值的作用。因此,证明$\mathcal{E}$的最小值是最小本征值 σ_w^2。

14.30 具有噪声的随机相位正弦信号组成的序列的自相关是

$$\gamma_{xx}(m) = P\cos 2\pi f_1 m + \sigma_w^2\delta(m)$$

其中，f_1 是正弦信号的频率，P 是功率，σ_w^2 是噪声方差。假定我们试图将 AR(2)模型适用于数据。

(a) 确定 AR(2)模型的优化系数，作为 σ_w^2 和 f_1 的函数。

(b) 确定对应于 AR(2)模型参数的反射系数 K_1 和 K_2。

(c) 当 σ_w^2 趋于零时，确定 AR(2)参数的有限值和(K_1，K_2)。

14.31 在 14.4 节描述的最小方差功率谱估计是通过最小化方差确定的

$$\sigma_y^2 = \boldsymbol{h}^H\boldsymbol{\Gamma}_{xx}\boldsymbol{h}$$

受制于约束

$$\boldsymbol{E}^H(f)\boldsymbol{h} = 1$$

其中，$\boldsymbol{E}(f)$定义为矢量

$$\boldsymbol{E}^t(f) = [1 \quad e^{j2\pi f} \quad e^{j4\pi f} \quad \cdots \quad e^{j2\pi pf}]$$

要确定最小化 σ_y^2 的最优滤波器，让我们定义函数

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}^H\boldsymbol{\Gamma}_{xx}\boldsymbol{h} + \mu(1 - \boldsymbol{E}^H(f)\boldsymbol{h}) + \mu^*(1 - \boldsymbol{h}^H\boldsymbol{E}(f))$$

其中，μ 是 Lagrange 乘法器。

(a) 通过对$\mathcal{E}(\boldsymbol{h})$微分并设置偏导为零，证明

$$\boldsymbol{h}_{\text{opt}} = \mu^*\boldsymbol{\Gamma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{E}(f)$$

(b) 利用约束求解 μ^*，然后证明

$$\boldsymbol{h}_{\text{opt}} = \frac{\boldsymbol{\Gamma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{E}(f)}{\boldsymbol{E}^H(f)\boldsymbol{\Gamma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{E}(f)}$$

14.32 周期图谱估计表达为

$$P_{xx}(f) = \frac{1}{N}|X(f)|^2$$

其中

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi fn}$$

$$= \boldsymbol{E}^H(f)\boldsymbol{X}(n)$$

$\boldsymbol{X}(f)$是数据矢量，并且 $\boldsymbol{E}(f)$定义为

$$E^t(f) = [1 \quad e^{j2\pi f} \quad e^{j4\pi f} \quad \cdots \quad e^{j2\pi f(N-1)}]$$

证明

$$E[P_{xx}(f)] = \frac{1}{N}\boldsymbol{E}^H(f)\boldsymbol{\Gamma}_{xx}\boldsymbol{E}(f)$$

其中，$\boldsymbol{\Gamma}_{xx}$是数据矢量$\boldsymbol{X}(n)$的自相关矩阵。

14.33 确定具有白色噪声的单个实正弦信号的频率和功率。信号和噪声相关函数为

$$\gamma_{yy}(m) = \begin{cases} 3, & m = 0 \\ 0, & m = 1 \\ -2, & m = 2 \\ 0, & |m| > 2 \end{cases}$$

14.34 信号 $y(n)$由带白噪声的复指数组成,其自相关矩阵为

$$\Gamma_{yy}=\begin{bmatrix}2 & -\mathrm{j} & -1\\ \mathrm{j} & 2 & -\mathrm{j}\\ -1 & \mathrm{j} & 2\end{bmatrix}$$

使用 MUSIC 算法确定这些指数信号的频率和功率等级。

14.35 证明 $P_{\text{MUSIC}}(f)$可以表达为

$$P_{\text{MUSIC}}(f)=\frac{1}{\boldsymbol{s}^H(f)\left(\sum_{k=p+1}^{M}\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^H\right)\boldsymbol{s}(f)}$$

14.36 寻根 MUSIC 算法,让我们定义噪声子空间多项式为

$$V_k(z)=\sum_{n=0}^{M-1}v_k(n+1)z^{-n},\quad k=p+1,\cdots,M$$

其中,$v_k(n)$是噪声子空间矢量 $\boldsymbol{v}_k$ 的元素。

(a) 证明 $P_{\text{MUSIC}}(f)$可以表达为

$$P_{\text{MUSIC}}(f)=\frac{1}{\sum_{k=p+1}^{M}V_k(f)V_k^*(f)}$$

$$=\frac{1}{\sum_{k=p+1}^{M}V_k(z)V_k^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}}}$$

(b) 对于 p 个带白噪声的复正弦信号,多项式

$$Q(z)=\sum_{k=p+1}^{M}V_k(z)V_k^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

在 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_i}$, $i=1,2,\cdots,p$。因此,该多项式在 z 平面的单位圆上有 p 个根,其中每个根都是双根。通过对多项式 $Q(z)$进行因式分解而确定频率的过程,称为寻根 MUSIC 方法。对于习题 14.34 给出的相关矩阵,可通过寻根 MUSIC 方法确定指数信号的频率。由这种方法获得的额外根是假根,可以被丢弃。

14.37 该问题包括使用互相关检测噪声中的信号,并估计信号中的时间延迟。一个信号 $x(n)$由一个脉冲的正弦信号组成,并受平稳的零均值白噪声序列干扰。即

$$x(n)=y(n-n_0)+w(n),\qquad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

其中,$w(n)$是方差为 σ_w^2 的噪声,并且信号是

$$\begin{aligned}y(n)&=A\cos\omega_0 n, && 0\leqslant n\leqslant M-1\\ &=0, && \text{其他}\end{aligned}$$

频率 ω_0 已知,但延迟 n_0 是正整数且未知,并由 $x(n)$和 $y(n)$互相关确定。假定 $N>M+n_0$。设

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}y(n-m)x(n)$$

代表 $x(n)$和 $y(n)$之间的互相关。在噪声不存在的情况下,该函数说明了在延迟 $m=n_0$ 处有峰值。因此 n_0 是在无差错情况下确定的。噪声的存在可能导致在确定未知延迟时产生差错。

(a) 对于 $m=n_0$,确定 $E[r_{xy}(n_0)]$。同时,在噪声存在的情况下,确定方差 $\text{var}[r_{xy}(n_0)]$。在两种计算中,假定双频率项平均趋于零。即 $M\gg 2\pi/\omega_0$。

(b) 确定信噪比,定义为

$$\text{SNR} = \frac{\{E[r_{xy}(n_0)]\}^2}{\text{var}[r_{xy}(n_0)]}$$

(c) 脉冲期间 M 对 SNR 的影响如何?

14.38 使用一个均匀的随机数生成器,生成方差为 $\sigma_w^2 = \frac{1}{12}$ 的零均值白噪声序列 $w(n)$ 的 100 个样本。

(a) 对于 $0 \leqslant m \leqslant 15$,计算 $w(n)$ 的自相关。

(b) 计算周期图估计 $P_{xx}(f)$ 并画出图形。

(c) 生成 $w(n)$ 的 10 个不同实现,并计算相应的样本自相关序列 $r_k(m)$,$1 \leqslant k \leqslant 10$ 并且 $0 \leqslant m \leqslant 15$。

(d) 计算并画出(c)的平均自相关序列

$$r_{\text{av}}(m) = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} r_k(m)$$

以及对应于 $r_{ww}(m)$ 的周期图。

(e) 对(a)到(d)的结果进行注释。

14.39 一个随机信号是通过将零均值单位方差的白色高斯噪声通过一个滤波器生成,系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{(1 + az^{-1} + 0.99z^{-2})(1 - az^{-1} + 0.98z^{-2})}$$

(a) 对于一个参数 a 较小值(即 $0 < a < 0.1$),画出理论上功率谱 $\Gamma_{xx}(f)$ 的典型图形。仔细注意两个谱峰值和 $\omega = \pi/2$ 时的 $P_{xx}(\omega)$ 值。

(b) 设 $a = 0.1$,当使用 Bartlett 方法时,确定求解 $\Gamma_{xx}(f)$ 的谱峰所需要的节长度 M。

(c) 考虑平滑周期图的 Blackman-Tukey 方法。必须使用相关估计的多少滞后,才能得到与(b)中考虑的 Bartlett 方法相当的分辨率? 如果估计的方差与一个四节的 Bartlett 估计相当,则必须使用多少个数据点?

(d) 对于 $a = 0.05$,基于 Yule-Walker 方法将 AR(4)模型适用于 100 个数据样本点,并画出功率谱。通过舍弃最初的 20 个数据样本点,可避免瞬间效应。

(e) 用 Burg 方法重复步骤(d)。

(f) 对于 50 个数据样本点重复(d)和(e),并在结果中说明相似性和差别。

附录 A　随机数字发生器

在文中给出的某些例子中，要产生随机数来模拟噪声对信号的影响，并且说明相关方法是如何用来检测淹没在噪声中的信号的。在周期信号的情况下，相关技术还可以使我们能够估计出信号的周期。

在实际中，随机数字发生器经常用来模拟类似于噪声信号的影响以及在自然界中遇到的随机现象，这样的噪声存在于电子设备和系统中，常常使我们无法进行长距离通信以及检测相对较弱的信号。通过在计算机上产生噪声，我们可以通过对通信系统、雷达侦测系统以及类似系统的仿真来研究其影响，并评估这样存在噪声系统的性能。

许多计算机软件库都包含均匀随机数字发生器，这样的随机数字发生器在 0 和 1 之间等概率地产生随机数。我们将随机数字发生器的输出称为随机变量。如果 A 表示这种随机变量，那么它的范围就是区间 $0 \leqslant A \leqslant 1$。

我们知道数字计算机输出的数值是有限精度的，所以，就不可能在区间 $0 \leqslant A \leqslant 1$ 内表示连续的数字。然而，我们可以假设计算机是用许多位以定点或浮点的形式来表示每个输出，因此，对于所有的实际应用来说，在区间 $0 \leqslant A \leqslant 1$ 的输出数字已经足够多了，这样，如果假设在该区间的任何值都可能是发生器的输出，那么就可以证明我们的结论是正确的。

随机变量 A 的均匀概率密度函数表示为 $p(A)$，如图 A.1(a)所示。A 的平均值表示为 m_A，其值 $m_A = \frac{1}{2}$。概率密度函数的积分表示 $p(A)$ 以下的面积，称为随机变量 A 的概率分布函数，定义为

$$F(A) = \int_{-\infty}^{A} p(x)\mathrm{d}x \tag{A.1}$$

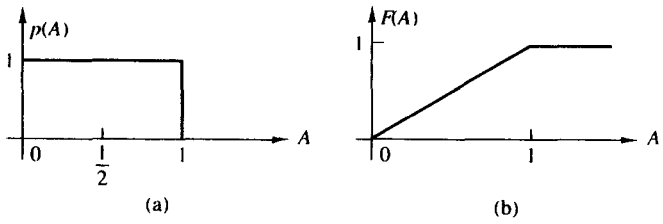


图 A.1

对于任何的随机变量，该面积必定为单位 1，这是概率分布函数所能达到的最大值，因此，

$$F(1) = \int_{-\infty}^{1} p(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{A.2}$$

并且对于 $0 \leqslant A \leqslant 1$，$F(A)$ 的范围是 $0 \leqslant F(A) \leqslant 1$。

如果我们想产生在区间 $(b, b+1)$ 内均匀分布的噪声，那么利用随机数字发生器的输出 A 并将它平移一个数量 b，就可以很简单地实现，这样一个新的随机变量 B 可以定义为

$$B = A + b \tag{A.3}$$

现在它的均值为 $m_B = b + \frac{1}{2}$。例如，如果 $b = -\frac{1}{2}$，那么随机变量 B 就在区间$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$内均匀分布，如图 A.2(a)所示。它的概率分布函数 $F(B)$如图 A.2(b)所示。

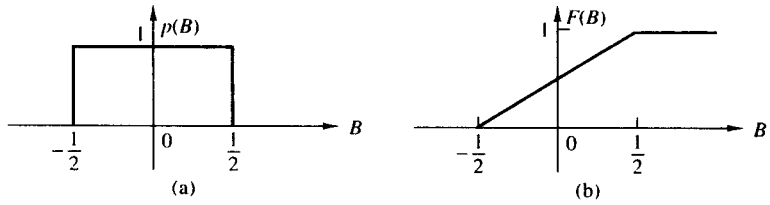


图 A.2

一个在区间(0,1)内均匀分布的随机变量可以用来产生具有其他概率分布函数的随机变量。例如，假设我们希望产生一个随机变量 C，它的概率分布函数为 $F(C)$，如图 A.3 所示。因为 $F(C)$的范围在区间(0,1)内，所以我们首先产生一个在区间(0,1)内均匀分布的随机变量 A。如果令

$$F(C) = A \tag{A.4}$$

那么

$$C = F^{-1}(A) \tag{A.5}$$

这样，解 C 的方程(A.4)，(A.5)中的解给出了使 $F(C) = A$ 的 C 值。用这种方法得到了一个概率分布函数为 $F(C)$的新的随机变量 C。从 A 到 C 的逆映射如图 A.3 所示。

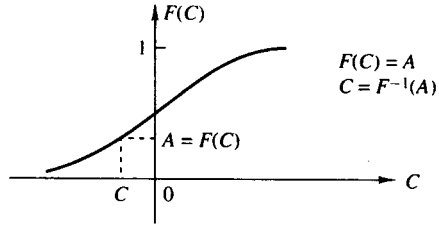


图 A.3

例 A.1　产生一个随机变量 C，它具有如图 A.4(a)所示的线性概率密度函数，即

$$p(C) = \begin{cases} \frac{C}{2}, & 0 \leqslant C \leqslant 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

解：这个随机变量的概率密度函数为

$$F(C) = \begin{cases} 0, & C < 0 \\ \frac{1}{4}C^2, & 0 \leqslant C \leqslant 2 \\ 1, & C > 2 \end{cases}$$

如图 A.4(b)所示。现在产生一个均匀分布的随机变量 A，并且令 $F(C) = A$，因此，

$$F(C) = \tfrac{1}{4}C^2 = A$$

解上面 C 的方程，得出

$$C = 2\sqrt{A}$$

这样，我们就产生了一个随机变量 C，它的概率函数为 $F(C)$，如图 A.4(b)所示。

在例 A.1 中，逆映射 $C = F^{-1}(A)$是非常简单的。在某些情况下并不是这样，这就引出了产生具有正态分布函数的随机变量的问题。

在物理系统中遇到的噪声经常通过正态或高斯分布函数进行描述，如图 A.5 所示，它的概率密度函数为

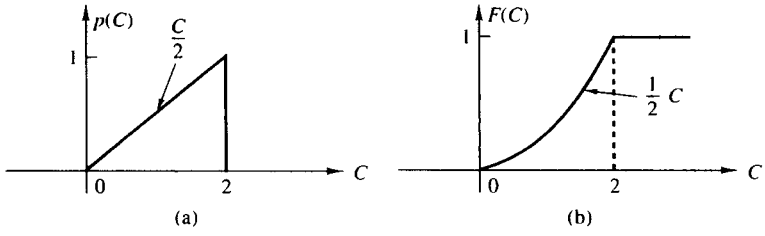


图 A.4

$$p(C)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-C^2/2\sigma^2},\qquad -\infty<C<\infty \tag{A.6}$$

其中,σ^2 是 C 的方差,它是概率密度函数 $p(C)$散布的度量。概率分布函数 $F(C)$是在区间$(-\infty,C)$内 $p(C)$以下的面积,这样,

$$F(C)=\int_{-\infty}^{C}p(x)\mathrm{d}x \tag{A.7}$$

遗憾的是,式(A.7)中的积分并不能表示成简单的函数形式。因此,很难实现逆映射。

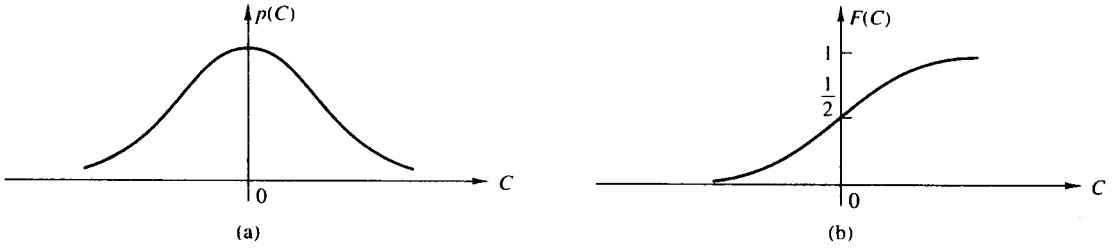


图 A.5

我们已经找到了一种方法来避开这个问题。从概率论我们知道,一个[瑞利分布(Rayleigh distributed)的]随机变量 R,它的概率分布函数为

$$F(R)=\begin{cases}0, & R<0\\ 1-\mathrm{e}^{-R^2/2\sigma^2}, & R\geqslant 0\end{cases} \tag{A.8}$$

它与高斯随机变量对 C 和 D 满足变换关系

$$C=R\cos\Theta \tag{A.9}$$

$$D=R\sin\Theta \tag{A.10}$$

其中,Θ是在区间$(0,2\pi)$内均匀分布的随机变量。参数 σ^2 是 C 和 D 的方差。因为式(A.8)很容易进行转换,所以得出

$$F(R)=1-\mathrm{e}^{-R^2/2\sigma^2}=A$$

因此,

$$R=\sqrt{2\sigma^2\ln[1/(1-A)]} \tag{A.11}$$

其中,A 是在区间$(0,1)$内均匀分布的随机变量。现在如果产生第二个均匀分布的随机变量 B,并且定义

$$\Theta=2\pi B \tag{A.12}$$

那么由式(A.9)和(A.10)就得到了两个统计独立的高斯分布的随机变量 C 和 D。

上述方法在实际中常用来产生如图 A.5 所示的高斯分布的随机变量。这些随机变量的均值为零,方差为 σ^2。如果需要非零均值的高斯随机变量,那么 C 和 D 就可以通过加上该平均值进行平移。

图 A.6 给出了这种用于产生高斯分布的随机变量的方法的实现子程序。

```
C       SUBROUTINE GAUSS CONVERTS A UNIFORM RANDOM
C       SEQUENCE XIN IN [0,1] TO A GAUSSIAN RANDOM
C       SEQUENCE WITH G(0,SIGMA**2)
C       PARAMETERS    :
C             XIN     :UNIFORM IN [0,1] RANDOM NUMBER
C               B     :UNIFORM IN [0,1] RANDOM NUMBER
C           SIGMA     :STANDARD DEVIATION OF THE GAUSSIAN
C            YOUT     :OUTPUT FROM THE GENERATOR
C
        SUBROUTINE GAUSS 9XIN,B,SIGMA,YOUT)
        PI=4.0*ATAN (1.0)
        B=2.0*PI*B
        R=SQRT (2.0*(SIGMA**2)*ALOG(1.0/(1.0-XIN)))
        YOUT=R*COS(B)
        RETURN
        END
C       NOTE: TO USE THE ABOVE SUBROUTINE FOR A
C             GAUSSIAN RANDOM NUMBER GENERATOR
C             YOU MUST PROVIDE AS INPUT TWO UNIFORM RANDOM NUMBERS
C             XIN AND B
C             XIN AND B MUST BE STATISTICALLY INDEPENDENT
C
```

图 A.6　产生高斯变量随机变量的子程序

附录 B　线性相位 FIR 滤波器设计的转换系数表

在 10.2.3 节中，我们讲述了线性相位 FIR 滤波器的设计方法，这包括在一组等间隔频率 $\omega_k = 2\pi(k+\alpha)$处的 $H_r(\omega)$的设计要求，其中，$\alpha = 0$或者 $\alpha = 1/2$。对于 M 为奇数，$k = 0,1,\cdots,(M-1)/2$；对于 M 为偶数，$k = 0,1,\cdots,(M/2)-1$，而 M 是滤波器的长度。在滤波器通频带内，选择 $H_r(\omega_k) = 1$；而在抑制频带内 $H_r(\omega_k) = 0$。对于过渡带内的频率，将过渡带内的最大旁瓣最小化，从而使得 $H_r(\omega_k)$的值达到最优，称为最小最大优化标准(minimax optimization criterion)。

Rabiner 等(1970)已经完成了对过渡带内的 $H_r(\omega)$值的优化，并且在他们发表的论文中给出了转换值的表。在本附录中，我们挑选了许多用于低通 FIR 滤波器的表。

我们共给出了四个表。表 B.1 列出了 $\alpha = 0$ 和一个系数情况下的过渡带内的转换系数，包含 M 为奇数和 M 为偶数；表 B.2 列出了 $\alpha = 0$ 和两个系数情况下的过渡带内的转换系数，也包含 M 为奇数和 M 为偶数；表 B.3 列出了 $\alpha = 1/2$，M 为偶数以及一个系数情况下的过渡带内的转换系数；最后，表 B.4 列出了 $\alpha = 1/2$，M 为偶数以及两个系数情况下的过渡带内的转换系数。这些表包括最大旁瓣的级别以及表示为 BW 的带宽参数。

表 B.1　$\alpha = 0$ 时的转换系数

M 为奇数			M 为偶数		
BW	最小最大	T_1	BW	最小最大	T_1
	$M = 15$			$M = 16$	
1	−42.309 322 83	0.433 782 96	1	−39.753 638 27	0.426 318 36
2	−41.262 992 86	0.417 938 23	2	−37.613 463 40	0.403 979 49
3	−41.253 337 86	0.410 476 36	3	−36.577 215 67	0.394 543 46
4	−41.949 077 13	0.404 058 84	4	−35.872 497 56	0.389 166 26
5	−44.371 245 38	0.392 681 89	5	−35.316 954 61	0.388 403 32
6	−56.014 165 88	0.357 665 25	6	−35.519 519 33	0.401 556 39
	$M = 33$			$M = 32$	
1	−43.031 630 04	0.429 949 95	1	−42.247 289 18	0.428 564 45
2	−42.425 279 62	0.410 424 81	2	−41.293 705 94	0.407 739 26
3	−42.408 982 75	0.401 416 01	3	−41.038 103 58	0.396 624 76
4	−42.459 486 01	0.396 417 24	4	−40.934 963 23	0.389 251 71
6	−42.524 034 50	0.391 613 77	5	−40.851 834 77	0.378 979 49
8	−42.440 851 21	0.390 399 17	8	−40.750 326 16	0.369 903 56
10	−42.110 794 07	0.391 925 05	10	−40.545 621 40	0.359 289 55
12	−41.927 052 50	0.394 201 66	12	−39.934 504 51	0.344 879 15
14	−44.694 303 51	0.385 522 46	14	−38.919 932 37	0.344 073 49
15	−56.182 932 85	0.353 607 18			
	$M = 65$			$M = 64$	
1	−43.169 359 68	0.429 193 12	1	−42.960 593 22	0.428 820 80
2	−42.619 455 81	0.409 033 20	2	−42.308 151 72	0.408 306 89
3	−42.709 063 05	0.399 206 54	3	−42.324 237 35	0.398 071 29
4	−42.869 973 18	0.393 359 37	4	−42.435 658 93	0.391 772 46
5	−43.019 996 64	0.389 508 06	5	−42.554 614 07	0.387 420 65
6	−43.145 788 19	0.386 798 09	6	−42.665 266 04	0.384 167 48
10	−43.448 083 40	0.381 292 72	10	−43.011 047 36	0.376 098 63
14	−43.546 844 96	0.379 461 67	14	−43.283 099 65	0.370 892 33
18	−43.481 736 18	0.379 553 22	18	−43.565 088 27	0.366 052 25

（续表）

M 为奇数			*M* 为偶数		
BW	最小最大	T_1	*BW*	最小最大	T_1
22	−43.195 382 12	0.381 628 42	22	−43.962 450 98	0.359 777 83
26	−42.447 256 09	0.387 469 48	26	−44.605 169 77	0.348 132 32
30	−44.762 286 19	0.384 173 58	30	−43.814 489 36	0.299 731 44
31	−59.216 737 75	0.352 827 45			
	M = 125			*M* = 128	
1	−43.205 015 66	0.428 991 70	1	−43.153 024 20	0.428 894 04
2	−42.669 711 11	0.408 673 10	2	−42.590 925 69	0.408 477 78
3	−42.774 389 74	0.398 687 74	3	−42.676 344 87	0.398 382 57
4	−42.950 510 50	0.392 681 89	4	−42.840 385 44	0.392 266 85
6	−43.258 546 83	0.385 791 01	5	−42.998 056 41	0.388 122 56
8	−43.479 174 61	0.381 958 01	7	−43.255 370 14	0.382 812 50
10	−43.637 504 10	0.379 541 02	10	−43.525 477 89	0.378 263 8
18	−43.955 893 99	0.375 183 11	18	−43.931 809 90	0.372 515 87
26	−44.059 131 15	0.373 840 33	26	−44.180 973 05	0.369 415 28
34	−44.056 724 55	0.373 718 26	34	−44.401 534 08	0.366 864 01
42	−43.947 087 76	0.374 700 93	42	−44.671 614 17	0.363 946 53
50	−43.584 734 92	0.377 978 51	50	−45.171 865 94	0.359 021 00
58	−42.149 254 32	0.390 863 04	58	−46.924 156 67	0.342 736 81
59	−42.606 232 64	0.390 631 10	62	−49.462 989 73	0.287 512 21
60	−44.780 620 10	0.383 837 13			
61	−56.225 478 65	0.352 630 62			

源于：Rabiner 等(1970)；©1970 IEEE，版权所有者许可重印

为了使用这些表，在开始时需要一些规格参数，包括(1)滤波器的带宽，这可以定义为$(2\pi/M)(BW+\alpha)$，其中 *BW* 是在 $H(\omega_k)=1$ 处连续频率点的数目，(2)过渡区域的宽度，这大约是转换系数数目的 $2\pi/M$ 倍，以及(3)在抑制频带内的可容忍的最大旁瓣。滤波器的长度可以从表中选取满足规格的数值。

表 B.2　$\alpha=0$ 时的转换系数

M 为奇数				*M* 为偶数			
BW	最小最大	T_1	T_2	*BW*	最小最大	T_1	T_2
	M = 15				*M* = 16		
1	−70.605 405 85	0.095 001 22	0.589 954 18	1	−65.276 936 53	0.107 031 25	0.605 593 57
2	−69.261 681 56	0.103 198 24	0.593 571 18	2	−62.859 379 29	0.123 846 44	0.622 016 31
3	−69.919 734 95	0.100 836 18	0.585 943 27	3	−62.965 949 06	0.128 271 48	0.628 554 07
4	−75.511 722 56	0.084 079 53	0.557 153 12	4	−66.039 424 85	0.121 301 27	0.619 527 04
5	−103.450 783 00	0.051 802 06	0.499 174 24	5	−71.739 974 98	0.110 662 84	0.609 792 04
	M = 33				*M* = 32		
1	−70.609 675 41	0.094 970 70	0.589 851 67	1	−67.370 203 97	0.096 105 96	0.590 452 12
2	−68.167 269 71	0.105 859 37	0.597 438 46	2	−63.931 046 96	0.112 634 28	0.605 602 35
3	−67.131 495 48	0.109 375 00	0.599 116 96	3	−62.497 879 03	0.119 317 63	0.611 925 46
5	−66.539 172 17	0.109 655 76	0.596 741 01	5	−61.282 045 36	0.125 415 04	0.618 240 23
7	−67.233 879 09	0.109 021 00	0.594 174 56	7	−60.820 491 31	0.129 077 15	0.623 070 31
9	−67.854 123 12	0.105 029 30	0.587 715 75	9	−59.749 281 67	0.120 684 81	0.606 855 86
11	−69.085 974 69	0.102 197 27	0.582 163 91	11	−62.486 833 57	0.130 041 50	0.628 215 02
13	−75.869 536 40	0.081 372 07	0.547 127 77	13	−70.645 718 57	0.110 1791 4	0.606 709 43
14	−104.040 590 29	0.050 293 73	0.491 495 49				

(续表)

	M 为奇数				M 为偶数		
BW	最小最大	T_1	T_2	BW	最小最大	T_1	T_2
	$M=65$				$M=64$		
1	−70.660 149 57	0.094 726 56	0.589 459 43	1	−70.263 725 28	0.093 768 31	0.587 892 22
2	−68.896 223 07	0.104 046 63	059.4 761 27	2	−67.207 295 42	0.104 119 87	0.594 217 78
3	−67.902 344 70	0.107 202 15	0.595 774 49	3	−65.806 842 80	0.108 502 20	0.596 661 58
4	−67.240 037 92	0.107 269 29	0.594 157 63	4	−64.952 270 51	0.110 388 18	0.597 300 67
5	−66.860 659 60	0.106 890 87	0.592 530 47	5	−64.427 423 48	0.111 132 81	0.596 984 96
9	−66.275 611 88	0.105 487 06	0.588 459 83	9	−63.417 140 96	0.109 368 90	0.590 888 84
13	−65.964 170 46	0.104 663 09	0.586 604 85	13	−62.721 424 10	0.108 288 57	0.587 386 41
17	−66.164 046 29	0.106 494 14	0.588 620 42	17	−62.370 518 68	0.110 314 94	0.589 681 42
21	−66.764 568 33	0.107 019 04	0.588 945 75	21	−62.048 481 46	0.112 542 73	0.592 494 61
25	−68.134 079 93	0.103 271 48	0.583 208 31	25	−61.880 740 64	0.119 946 29	0.605 645 01
29	−75.983 130 46	0.080 694 58	0.545 003 79	29	−70.056 819 92	0.107 177 73	0.598 421 59
30	−104.920 837 40	0.049 784 85	0.489 651 81				
	$M=125$				$M=128$		
1	−70.680 102 35	0.094 647 22	0.589 332 68	1	−70.589 929 58	0.094 451 90	0.589 009 96
2	−68.941 576 96	0.103 900 15	0.594 500 24	2	−68.624 216 08	0.103 497 31	0.593 790 58
3	−68.193 526 27	0.106 823 73	0.595 085 49	3	−67.667 016 98	0.107 012 94	0.595 060 81
5	−67.342 611 31	0.106 689 45	0.591 875 05	4	−66.951 966 29	0.106 854 25	0.592 989 26
7	−67.097 671 51	0.105 871 58	0.598 218 69	6	−66.327 189 45	0.105 969 24	0.589 538 45
9	−67.058 012 96	0.105 236 82	0.587 387 06	9	−66.013 154 98	0.104 711 91	0.585 939 06
17	−67.175 045 01	0.103 729 25	0.583 582 65	17	−65.894 224 17	0.102 880 86	0.580 973 54
25	−67.229 189 87	0.103 167 72	0.582 248 35	25	−65.926 442 15	0.101 824 95	0.578 123 08
33	−67.116 099 36	0.103 039 55	0.581 989 56	33	−65.955 778 12	0.100 964 36	0.575 764 37
41	−66.712 713 24	0.103 137 21	0.582 454 99	41	−65.976 980 21	0.100 946 04	0.574 516 94
49	−66.623 641 97	0.105 615 23	0.586 295 34	49	−65.679 198 27	0.098 651 12	0.569 274 20
57	−69.283 784 87	0.100 616 46	0.578 121 92	57	−64.615 145 68	0.098 455 81	0.566 044 86
58	−70.357 823 37	0.096 636 96	0.571 212 35	61	−71.765 893 94	0.104 968 26	0.594 522 77
59	−75.947 077 18	0.080 548 86	0.544 512 85				
60	−104.090 123 18	0.049 917 60	0.489 632 64				

源于:Rabiner 等(1970);©1970 IEEE,版权所有者许可重印

表 B.3 $\alpha = 1/2$ 时的转换系数

BW	最小最大	T_1
	$M=16$	
1	−51.606 687 07	0.266 748 05
2	−47.480 002 40	0.321 490 48
3	−45.197 468 28	0.348 101 81
4	−44.328 626 16	0.363 085 94
5	−45.683 476 92	0.366 619 87
6	−56.637 001 99	0.343 273 93
	$M=32$	
1	−52.649 911 88	0.260 736 09
2	−49.393 902 78	0.308 782 96
3	−47.725 966 45	0.329 846 19
4	−46.688 119 89	0.342 175 29
6	−45.334 364 89	0.357 049 56
8	−44.307 309 63	0.367 504 88
10	−43.111 680 03	0.378 106 69
12	−42.979 004 38	0.384 655 76
14	−56.327 802 66	0.350 305 18

（续表）

BW	最小最大	T_1
	$M = 64$	
1	−52.903 756 62	0.259 234 62
2	−49.740 464 21	0.306 036 38
3	−48.380 889 89	0.325 109 86
4	−47.478 630 07	0.335 955 81
5	−46.886 551 86	0.342 877 20
6	−46.462 305 55	0.347 741 70
10	−45.461 414 34	0.358 593 75
14	−44.859 881 88	0.364 703 37
18	−44.343 026 16	0.369 836 43
22	−43.698 353 77	0.375 860 59
26	−42.456 413 75	0.386 242 68
30	−56.250 240 33	0.352 001 95
	$M = 128$	
1	−52.967 782 02	0.258 856 20
2	−49.827 719 69	0.305 346 68
3	−48.513 416 29	0.324 047 85
4	−47.674 551 49	0.334 436 04
5	−47.114 620 21	0.341 009 52
7	−46.434 202 67	0.348 803 71
10	−45.885 291 10	0.354 937 74
18	−45.216 605 66	0.361 822 51
26	−44.879 598 14	0.365 216 07
34	−44.614 977 84	0.367 840 58
42	−44.327 064 51	0.370 660 40
50	−43.876 464 37	0.375 000 00
58	−42.309 697 15	0.388 073 73
62	−56.232 947 35	0.352 416 99

源于：Rabiner 等(1970)；©1970 IEEE，版权所有者许可重印

表 B.4　$\alpha = 1/2$

BW	最小最大	T_1	T_2
	$M = 16$		
1	−77.261 267 66	0.053 094 48	0.417 841 80
2	−73.810 267 45	0.071 752 93	0.493 692 11
3	−73.023 521 42	0.078 625 49	0.519 661 34
4	−77.951 561 93	0.070 428 47	0.511 580 76
5	−105.239 532 47	0.045 874 02	0.469 677 84
	$M = 32$		
1	−80.494 641 30	0.047 253 42	0.403 573 83
2	−73.925 134 66	0.070 947 27	0.491 292 55
3	−72.408 630 37	0.080 126 95	0.521 539 83
5	−70.950 473 79	0.089 355 47	0.548 059 08
7	−70.223 839 76	0.094 036 87	0.560 314 10
9	−69.944 027 90	0.096 289 06	0.566 379 87
11	−70.824 238 78	0.093 237 31	0.562 269 52
13	−104.856 426 24	0.048 828 12	0.484 790 68

(续表)

BW	最小最大	T_1	T_2
		$M=64$	
1	−80.809 749 60	0.046 582 03	0.401 687 23
2	−75.117 722 51	0.067 596 44	0.483 900 15
3	−72.666 620 25	0.078 869 63	0.518 500 58
4	−71.856 108 67	0.083 935 55	0.533 798 76
5	−71.344 014 17	0.087 219 24	0.543 114 74
9	−70.328 616 14	0.093 719 48	0.560 202 56
13	−69.348 093 03	0.097 619 63	0.569 037 14
17	−68.064 402 58	0.100 518 80	0.575 436 91
21	−67.991 491 32	0.102 893 07	0.580 076 99
25	−69.320 651 05	0.100 683 59	0.577 296 56
29	−105.728 623 39	0.049 237 06	0.487 670 25
		$M=128$	
1	−80.893 478 39	0.046 398 93	0.401 171 95
2	−77.225 805 83	0.062 957 76	0.473 995 21
3	−73.437 862 40	0.076 489 26	0.513 612 78
4	−71.936 752 32	0.083 459 47	0.532 662 51
6	−71.108 504 30	0.088 806 15	0.547 696 75
9	−70.536 001 21	0.092 553 71	0.557 529 59
17	−69.958 900 45	0.096 289 06	0.566 769 12
25	−69.299 773 22	0.098 345 95	0.571 373 01
33	−68.751 397 13	0.100 775 15	0.575 946 41
41	−67.896 879 20	0.101 837 16	0.578 631 42
49	−66.761 201 86	0.102 642 82	0.581 235 60
57	−69.215 258 60	0.101 574 71	0.579 463 95
61	−104.574 329 38	0.049 707 03	0.489 006 85

源于:Rabiner 等(1970);©1970 IEEE,版权所有者许可重印

举例说明,一个滤波器设计为 $M=15$,并且

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right)=\begin{cases}1, & k=0,1,2,3\\ T_1, & k=4\\ 0, & k=5,6,7\end{cases}$$

对应于 $\alpha=0, BW=4$,这是因为在四个连续频率点 $\omega_k=2\pi k/15$ 处的 $H_r(\omega_k)=1, k=0,1,2,3$,并且转换系数在频率 $\omega_k=8\pi/15$ 处为 T_1。对于 $M=15$ 和 $BW=4$,表 B.1 给出的值为 $T_1=0.404\,058\,84$,根据表 B.1,最大瓣为 −41.9 dB。

参考文献

AKAIKE, H. 1969. "Power Spectrum Estimation Through Autoregression Model Fitting," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 21, pp. 407–149.

AKAIKE, H. 1974. "A New Look at the Statistical Model Identification," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-19, pp. 716–723, December.

ANDERSEN, N. O. 1978. "Comments on the Performance of Maximum Entropy Algorithm," *Proc. IEEE*, Vol. 66, pp. 1581–1582, November.

ANTONIOU, A. 1979. *Digital Filters: Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York.

AUER, E. 1987. "A Digital Filter Structure Free of Limit Cycles," *Proc. 1987 ICASSP*, pp. 21.11.1–21.11.4, Dallas, TX, April.

AVENHAUS, E., and SCHUESSLER, H. W. 1970. "On the Approximation Problem in the Design of Digital Filters with Limited Wordlength," *Arch. Elek. Ubertragung*, Vol. 24, pp. 571–572.

BAGGEROER, A. B. 1976. "Confidence Intervals for Regression (MEM) Spectral Estimates," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-22, pp. 534–545, September.

BANDLER, J. W., and BARDAKJIAN, B. J. 1973. "Least pth Optimization of Recursive Digital Filters," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-21, pp. 460–470, October.

BARNES, C. W., and FAM, A. T. 1977. "Minimum Norm Recursive Digital Filters That Are Free of Overflow Limit Cycles," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-24, pp. 569–574, October.

BARTLETT, M. S. 1948. "Smoothing Periodograms from Time Series with Continuous Spectra," *Nature* (London), Vol. 161, pp. 686–687, May.

BARTLETT, M. S. 1961. *Stochastic Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

BECKMAN, F. S. 1960 The Solution of Linear Equations by the conjugate Gradient Method" in *Mathematical Methods for Digital Computers*, A. Ralston and H.S. Wilf, eds., Wiley, New York

BERGLAND, G. D. 1969. "A Guided Tour of the Fast Fourier Transform," *IEEE Spectrum*, Vol. 6, pp. 41–52, July.

BERK, K. N. 1974. "Consistent Autoregressive Spectral Estimates," *Ann. Stat.*, Vol. 2, pp. 489–502.

BERNHARDT, P. A., ANTONIADIS, D. A., and DA ROSA, A. V. 1976. "Lunar Perturbations in Columnar Electron Content and Their Interpretation in Terms of Dynamo Electrostatic Fields," *J. Geophys. Res.*, Vol. 81, pp. 5957–5963, December.

BERRYMAN, J. G. 1978. "Choice of Operator Length for Maximum Entropy Spectral Analysis," *Geophysics*, Vol. 43, pp. 1384–1391, December.

BIERMAN, G. J. 1977. *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*, Academic, New York.

BLACKMAN, R. B., and TUKEY, J. W. 1958. *The Measurement of Power Spectra*, Dover, New York.

BLAHUT, R. E. 1985. *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, Reading, MA.

BLUESTEIN, L. I. 1970. "A Linear Filtering Approach to the Computation of the Discrete Fourier Transform," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 451–455, December.

BOLT, B. A. 1988. *Earthquakes*, W. H. Freeman and Co., New York.

BOMAR, B. W. 1985. "New Second-Order State-Space Structures for Realizing Low Roundoff Noise Digital Filters," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-33, pp. 106–110, February.

BRACEWELL, R. N. 1978. *The Fourier Transform and Its Applications*, 2d ed., McGraw-Hill, New York.

BRIGHAM, E. O. 1988. *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

BRIGHAM, E. O., and MORROW, R. E. 1967. "The Fast Fourier Transform," *IEEE Spectrum*, Vol. 4, pp. 63–70, December.

BRILLINGER, D. R. 1974. "Fourier Analysis of Stationary Processes," *Proc. IEEE*, Vol. 62, pp. 1628–1643, December.

BROPHY, F., and SALAZAR, A. C. 1973. "Considerations of the Padé Approximant Technique in the Synthesis of Recursive Digital Filters," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-21, pp. 500–505, December.

BROWN, J. L., JR., 1980. "First-Order Sampling of Bandpass Signals—A New Approach," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-26, pp. 613–615, September.

BROWN, R. C. 1983. *Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering*, Wiley, New York.

BRUBAKER, T. A., and GOWDY, J. N. 1972. "Limit Cycles in Digital Filters," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-17, pp. 675–677, October.

BRUZZONE, S. P., and KAVEH, M. 1980. "On Some Suboptimum ARMA Spectral Estimators," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, pp. 753–755, December.

BURG, J. P. 1967. "Maximum Entropy Spectral Analysis," *Proc. 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists*, Oklahoma City, OK, October. Reprinted in *Modern Spectrum Analysis*, D. G. Childers, ed., IEEE Press, New York.

BURG, J. P. 1968. "A New Analysis Technique for Time Series Data," NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics, August 12–23. Reprinted in *Modern Spectrum Analysis*, D. G. Childers, ed., IEEE Press, New York.

BURG, J. P. 1972. "The Relationship Between Maximum Entropy and Maximum Likelihood Spectra," *Geophysics*, Vol. 37, pp. 375–376, April.

BURG, J. P. 1975. "Maximum Entropy Spectral Analysis," Ph.D. dissertation, Department of Geophysics, Stanford University, Stanford, CA, May.

BURRUS, C. S., and PARKS, T. W. 1970. "Time–Domain Design of Recursive Digital Filters," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. 18, pp. 137–141, June.

BURRUS, C. S. and PARKS, T. W. 1985. *DFT/FFT and Convolution Algorithms*, Wiley, New York.

BUTTERWECK, H. J., VAN MEER, A. C. P., and VERKROOST, G. 1984. "New Second-Order Digital Filter Sections Without Limit Cycles," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-31, pp. 141–146, February.

CADZOW, J. A. 1979. "ARMA Spectral Estimation: An Efficient Closed-Form Procedure," *Proc. RADC Spectrum Estimation Workshop*, pp. 81–97, Rome, NY, October.

CADZOW, J. A. 1981. "Autoregressive–Moving Average Spectral Estimation: A Model Equation Error Procedure," *IEEE Trans. Geoscience Remote Sensing*, Vol. GE-19, pp. 24–28, January.

CADZOW, J. A. 1982. "Spectral Estimation: An Overdetermined Rational Model Equation Approach," *Proc. IEEE*, Vol. 70, pp. 907–938, September.

CANDY, J. C. 1986. "Decimation for Sigma Delta Modulation," *IEEE Trans. Communications*, Vol. COM-34, pp. 72–76, January.

CANDY, J. C., WOOLEY, B. A., and BENJAMIN, D. J. 1981. "A Voiceband Codec with Digital Filtering," *IEEE Trans. Communications*, Vol. COM-29, pp. 815–830, June.

CAPON, J. 1969. "High-Resolution Frequency–Wavenumber Spectrum Analysis," *Proc. IEEE*, Vol. 57, pp. 1408–1418, August.

CAPON, J. 1983. "Maximum-Likelihood Spectral Estimation," in *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, 2d ed., S. Haykin, ed., Springer-Verlag, New York.

CAPON, J., and GOODMAN, N. R. 1971. "Probability Distribution for Estimators of the Frequency-Wavenumber Spectrum," *Proc. IEEE*, Vol. 58, pp. 1785–1786, October.

CARAISCOS, C., and LIU, B. 1984. "A Roundoff Error Analysis of the LMS Adaptive Algorithm," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, pp. 34–41, January.

CARAYANNIS, G., MANOLAKIS, D. G., and KALOUPTSIDIS, N. 1983. "A Fast Sequential Algorithm for Least-Squares Filtering and Prediction," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-31, pp. 1394–1402, December.

CARAYANNIS, G., MANOLAKIS, D. G., and KALOUPTSIDIS, N. 1986. "A Unified View of Parametric Processing Algorithms for Prewindowed Signals," *Signal Processing*, Vol. 10, pp. 335–368, June.

CARLSON, N. A., and CULMONE, A. F. 1979. "Efficient Algorithms for On-Board Array Processing," *Record 1979 International Conference on Communications*, pp. 58.1.1–58.1.5, Boston, June 10–14.

CHAN, D. S. K., and RABINER, L. R. 1973a. "Theory of Roundoff Noise in Cascade Realizations of Finite Impulse Response Digital Filters," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 52, pp. 329–345, March.

CHAN, D. S. K., and RABINER, L. R. 1973b. "An Algorithm for Minimizing Roundoff Noise in Cascade Realizations of Finite Impulse Response Digital Filters," *Bell Sys. Tech. J.*, Vol. 52, pp. 347–385, March.

CHAN, D. S. K., and RABINER, L. R. 1973c. "Analysis of Quantization Errors in the Direct Form for Finite Impulse Response Digital Filters," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-21, pp. 354–366, August.

CHANG, T. 1981. "Suppression of Limit Cycles in Digital Filters Designed with One Magnitude-Truncation Quantizer," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-28, pp. 107–111, February.

CHEN, C. T. 1970. *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

CHEN, W. Y., and STEGEN, G. R. 1974. "Experiments with Maximum Entropy Power Spectra of Sinusoids," *J. Geophys. Res.*, Vol. 79, pp. 3019–3022, July.

CHILDERS, D. G., ed. 1978. *Modern Spectrum Analysis*, IEEE Press, New York.

CHOW, J. C. 1972a. "On the Estimation of the Order of a Moving-Average Process," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-17, pp. 386–387, June.

CHOW, J. C. 1972b. "On Estimating the Orders of an Autoregressive-Moving Average Process with Uncertain Observations," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-17, pp. 707–709, October.

CHOW, Y., and CASSIGNOL, E. 1962. *Linear Signal Flow Graphs and Applications*, Wiley, New York.

CHUI, C. K., and CHEN, G. 1987. *Kalman Filtering*, Springer-Verlag, New York.

CIOFFI, J. M. 1987, "Limited Precision Effects in Adaptive Filtering," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-34, pp. 821–833, July.

CIOFFI, J. M., and KAILATH, T. 1984. "Fast Recursive-Least-Squares Transversal Filters for Adaptive Filtering," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, pp. 304–337, April.

CIOFFI, J. M., and KAILATH, T. 1985. "Windowed Fast Transversal Filters Adaptive Algorithms with Normalization," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-33, pp. 607–625, June.

CLAASEN, T. A. C. M., MECKLENBRAUKER, W. F. G., and PEEK, J. B. H. 1973. "Second-Order Digital Filter with Only One Magnitude-Truncation Quantizer and Having Practically No Limit Cycles," *Electron. Lett.*, Vol. 9, November.

CLARKE, R. J. 1985. *Transform Coding of Images*. Academic Press, London, UK.

COCHRAN, W. T., COOLEY, J. W., FAVIN, D. L., HELMS, H. D., KAENEL, R. A., LANG, W. W., MALING, G. C., NELSON, D. E., RADER, C. E., and WELCH, P. D. 1967. "What Is the Fast Fourier Transform," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, pp. 45–55, June.

CONSTANTINIDES, A. G. 1967. "Frequency Transformations for Digital Filters," *Electron. Lett.*, Vol. 3, pp. 487–489, November.

CONSTANTINIDES, A. G. 1968. "Frequency Transformations for Digital Filters," *Electron. Lett.*, Vol. 4, pp. 115–116, April.

CONSTANTINIDES, A. G. 1970. "Spectral Transformations for Digital Filters," *Proc. IEEE*, Vol. 117, pp. 1585–1590, August.

COOLEY, J. W., and TUKEY, J. W. 1965. "An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series," *Math. Comp.*, Vol. 19, pp. 297–301, April.

COOLEY, J. W., LEWIS, P., and WELCH, P. D. 1967. "Historical Notes on the Fast Fourier Transform," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, pp. 76–79, June.

COOLEY, J. W., LEWIS, P., and WELCH, P. D. 1969. "The Fast Fourier Transform and Its Applications," *IEEE Trans. Education*, Vol. E-12, pp. 27–34, March.

COULSON, A. 1995. "A Generalization of Nonuniform Bandpass Sampling." *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 43(3), pp. 694–704, March.

COULSON, A., VAUGHAM, R., and POULETTI, M, 1994. "Frequency Shifting Using Bandpass Sampling." *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol 42(6), pp. 1556–1559, June.

CROCHIERE, R. E. 1977. "On the Design of Sub-Band Coders for Low Bit Rate Speech Communication," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 56, pp. 747–711, May–June.

CROCHIERE, R. E. 1981. "Sub-Band Coding," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 60, pp. 1633–1654, September.

CROCHIERE, R. E., and RABINER, L. R. 1975. "Optimum FIR Digital Filter Implementations for Decimation, Interpolation, and Narrowband Filtering," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-23, pp. 444–456, October.

CROCHIERE, R. E., and RABINER, L. R. 1976. "Further Considerations in the Design of Decimators and Interpolators," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-24, pp. 296–311, August.

CROCHIERE, R. E., and RABINER, L. R. 1981. "Interpolation and Decimation of Digital Signals—A Tutorial Review," *Proc. IEEE*, Vol. 69, pp. 300–331, March.

CROCHIERE, R. E., and RABINER, L. R. 1983. *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

DANIELS, R. W. 1974. *Approximation Methods for the Design of Passive, Active and Digital Filters*, McGraw-Hill, New York.

DAVENPORT, W. B., JR. 1970. *Probability and Random Processes: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York.

DAVIS, H. F. 1963. *Fourier Series and Orthogonal Functions*, Allyn and Bacon, Boston.

DECZKY, A. G. 1972. "Synthesis of Recursive Digital Filters Using the Minimum p-Error Criterion," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-20, pp. 257–263, October.

DELLER, J. R. Jr., HANSEN, J. H. L., and PROAKIS, J. G. 2000. *Discrete-Time Processing of Speech Signals*, Wiley, New York.

DELSARTE, P., and GENIN, Y. 1986. "The Split Levinson Algorithm," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, pp. 470–478, June.

DELSARTE, P., GENIN, Y., and KAMP, Y. 1978. "Orthogonal Polynomial Matrices on the Unit Circle," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-25, pp. 149–160. January.

DERUSSO, P. M., ROY, R. J., and CLOSE, C. M. 1965. *State Variables for Engineers*, Wiley, New York.

DUHAMEL, P. 1986. "Implementation of Split-Radix FFT Algorithms for Complex, Real, and Real-Symmetric Data," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, pp. 285–295, April.

DUHAMEL, P., and HOLLMANN, H. 1984. "Split-Radix FFT Algorithm," *Electron. Lett.*, Vol. 20, pp. 14–16, January.

DURBIN, J. 1959. "Efficient Estimation of Parameters in Moving-Average Models," *Biometrika*, Vol. 46, pp. 306–316.

DWIGHT, H. B. 1957. *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, 3d ed., Macmillan, New York.

DYM, H., and MCKEAN, H. P. 1972. *Fourier Series and Integrals*, Academic, New York.

EBERT, P. M., MAZO, J. E., and TAYLOR, M. G. 1969. "Overflow Oscillations in Digital Filters," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 48, pp. 2999–3020, November.

ELEFTHERIOU, E., and FALCONER, D. D. 1987. "Adaptive Equalization Techniques for HF Channels," *IEEE J. Selected Areas in Communications*, Vol. SAC-5, pp. 238–247, February.

ELUP, L., GARDNER, F. M., and HARRIS F. A., 1993 "Interpolation in digital Modems, Part II: Fundamentals and performance." *IEEE trans. on Communications*, Vol, 41(6), pp. 998–1008, June.

FALCONER, D. D., and LJUNG, L. 1978. "Application of Fast Kalman Estimation to Adaptive Equalization," *IEEE Trans. Communications*, Vol. COM-26, pp. 1439–1446, October.

FAM, A. T., and BARNES, C. W. 1979. "Non-minimal Realizations of Fixed-Point Digital Filters That Are Free of All Finite Wordlength Limit Cycles," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-27, pp. 149–153, April.

FARROW, C. W. 1998. " A Continiously Variable Digital Delay Element." *Proc. IEEE Intern. Symposium on Circuits and Systems*, pp. 2641–2645.

FETTWEIS, A. 1971. "Some Principles of Designing Digital Filters Imitating Classical Filter Structures," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-18, pp. 314–316, March.

FLETCHER, R., and POWELL, M. J. D. 1963. "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization," *Comput. J.*, Vol. 6, pp. 163–168.

FOUGERE, P. F., ZAWALICK, E. J., and RADOSKI, H. R. 1976. "Spontaneous Line Splitting in Maximum Entropy Power Spectrum Analysis," *Phys. Earth Planet. Inter.*, Vol. 12, 201–207, August.

FRERKING, M. E. 1994. *Digital Signal Processing in Communication Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

FRIEDLANDER, B. 1982a. "Lattice Filters for Adaptive Processing," *Proc. IEEE*, Vol. 70, pp. 829–867, August.

FRIEDLANDER, B. 1982b. "Lattice Methods for Spectral Estimation," *Proc. IEEE*, Vol. 70, pp. 990–1017, September.

FUCHS, J. J. 1988. "Estimating the Number of Sinusoids in Additive White Noise," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-36, pp. 1846–1853, December.

GANTMACHER, F. R. 1960. *The Theory of Matrices*, Vol. I., Chelsea, New York.

GARDNER, F. M. 1993. "Interpolation in Digital Modems, Part I: Fundamentals." *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 41(3), pp. 502–508, March.

GARDNER, W. A. 1984. "Learning Characteristics of Stochastic-Gradient-Descent Algorithms: A General Study, Analysis and Critique," *Signal Processing*, Vol. 6, pp. 113–133, April.

GARDNER, W. A. 1987. *Statistical Spectral Analysis: A Nonprobabilistic Theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

GARLAN, C., and ESTEBAN, D. 1980. "16 Kbps Real-Time QMF Sub-Band Coding Implementation," *Proc. 1980 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 332–335, April.

GEORGE, D. A., BOWEN, R. R., and STOREY, J. R. 1971. "An Adaptive Decision-Feedback Equalizer," *IEEE Trans. Communication Technology*, Vol. COM-19, pp. 281–293, June.

GERONIMUS, L. Y. 1958. *Orthogonal Polynomials* (in Russian) (English translation by Consultants Bureau, New York, 1961).

GERSCH, W., and SHARPE, D. R. 1973. "Estimation of Power Spectra with Finite-Order Autoregressive Models," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-18, pp. 367–369, August.

GERSHO, A. 1969. "Adaptive Equalization of Highly Dispersive Channels for Data Transmission," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 48, pp. 55–70, January.

GIBBS, A. J. 1969. "An Introduction to Digital Filters," *Aust. Telecommun. Res.*, Vol. 3, pp. 3–14, November.

GIBBS, A. J. 1970. "The Design of Digital Filters," *Aust. Telecommun. Res.*, Vol. 4, pp. 29–34, May.

GITLIN, R. D., and WEINSTEIN, S. B. 1979. "On the Required Tap-Weight Precision for Digitally Implemented Mean-Squared Equalizers," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 58, pp. 301–321, February.

GITLIN, R. D., MEADORS, H. C., and WEINSTEIN, S. B. 1982. "The Tap-Leakage Algorithm: An Algorithm for the Stable Operation of a Digitally Implemented Fractionally Spaced, Adaptive Equalizer," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 61, pp. 1817–1839, October.

GOERTZEL, G. 1968. "An Algorithm for the Evaluation of Finite Trigonometric Series," *Am. Math. Monthly*, Vol. 65, pp. 34–35, January.

GOHBERG, I., ed. 1986. *I. Schür Methods in Operator Theory and Signal Processing*, Birkhauser Verlag, Stuttgart, Germany.

GOLD, B., and JORDAN, K. L., JR. 1986. "A Note on Digital Filter Synthesis," *Proc. IEEE*, Vol. 56, pp. 1717–1718, October.

GOLD, B., and JORDAN, K. L., JR. 1969. "A Direct Search Procedure for Designing Finite Duration Impulse Response Filters," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 33–36, March.

GOLD, B., and RADER, C. M. 1966. "Effects of Quantization Noise in Digital Filters." *Proc. AFIPS 1966 Spring Joint Computer Conference*, Vol. 28, pp. 213–219.

GOLD, B., and RADER, C. M. 1969. *Digital Processing of Signals*, McGraw-Hill, New York.

GOLDEN, R. M., and KAISER, J. F. 1964. "Design of Wideband Sampled Data Filters," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 43, pp. 1533–1546, July.

GOOD, I. J. 1971. "The Relationship Between Two Fast Fourier Transforms," *IEEE Trans. Computers*, Vol. C-20, pp. 310–317.

GORSKI-POPIEL, J., ed. 1975. *Frequency Synthesis: Techniques and Applications*, IEEE Press, New York.

GOYAL, V. 2001. "Theoretical Foundations of Transform Coding." *IEEE Signal Processing Magazine*, pp 9-21, September.

GRACE, O. D., and PITT, S. P. 1969. "Sampling and Interpolation of Bandlimited Signals by Quadrature Methods." *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 48(6), pp. 1311–1318, November.

GRAUPE, D., KRAUSE, D. J., and MOORE, J. B. 1975. "Identification of Autoregressive–Moving Average Parameters of Time Series," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-20, pp. 104–107, February.

GRAY, A. H., and MARKEL, J. D. 1973. "Digital Lattice and Ladder Filter Synthesis," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-21, pp. 491–500, December.

GRAY, A. H., and MARKEL, J. D. 1976. "A Computer Program for Designing Digital Elliptic Filters," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-24, pp. 529–538, December.

GRAY, R. M. 1990. *Source Coding Theory*, Kluwer, Boston, MA.

GRENANDER, O., and SZEGO, G. 1958. *Toeplitz Forms and Their Applications*, University of California Press, Berkeley, CA.

GRIFFITHS, L. J. 1975. "Rapid Measurements of Digital Instantaneous Frequency," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-23, pp. 207–222, April.

GRIFFITHS, L. J. 1978. "An Adaptive Lattice Structure for Noise Cancelling Applications," Proc. ICASSP-78, pp. 87–90. Tulsa, OK, April.

GUILLEMIN, E. A. 1957. *Synthesis of Passive Networks*, Wiley, New York.

GUPTA, S. C. 1966. *Transform and State Variable Methods in Linear Systems*, Wiley, New York.

HAMMING, R. W. 1962. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York.

HARRIS, F. 1997. *Performance and Design of Farrow Filter Used for Arbitrary Resampling.* 31st Conference on Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, CA, pp. 595–599.

HAYKIN, S. 1991. *Adaptive Filter Theory*, 2d ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

HELME, B., and NIKIAS, C. S. 1985. "Improved Spectrum Performance via a Data-Adaptive Weighted Burg Technique," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-33, pp. 903–910, August.

HELMS, H. D. 1967. "Fast Fourier Transforms Method of Computing Difference Equations and Simulating Filters," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, pp. 85–90, June.

HELMS, H. D. 1968. "Nonrecursive Digital Filters: Design Methods for Achieving Specifications on Frequency Response," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-16, pp. 336–342, September.

HELSTROM, C. W. 1990. *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, 2d ed., Macmillan, New York.

HERRING, R. W. 1980. "The Cause of Line Splitting in Burg Maximum-Entropy Spectral Analysis," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, pp. 692–701, December.

HERMANN, O. 1970. "Design of Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase," *Electron. Lett.*, Vol. 6, pp. 328–329, November.

HERMANN, O., and SCHÜESSLER, H. W. 1970a. "Design of Nonrecursive Digital Filters with Minimum Phase," *Electron. Lett.*, Vol. 6, pp. 329–330, November.

HERRMANN, O., and SCHÜESSLER, H. W. 1970b. "On the Accuracy Problem in the Design of Nonrecursive Digital Filters," *Arch. Elek. Ubertragung*, Vol. 24, pp. 525–526.

HERRMANN, O., RABINER, L. R., and CHAN, D. S. K. 1973. "Practical Design Rules for Optimum Finite Impulse Response Lowpass Digital Filters," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 52, pp. 769–799, July–August.

HILDEBRAND, F. B. 1952. *Methods of Applied Mathematics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

HOFSTETTER, E., OPPENHEIM, A. V., and SIEGEL, J. 1971. "A New Technique for the Design of Nonrecursive Digital Filters," *Proc. 5th Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems*, pp. 64–72.

HOGENAUER, E.B. 1981. "An Economical Class of Digital Filters for Decimation and Interpolation" *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 29(2), pp. 155–162, April.

HOUSEHOLDER, A. S. 1964. *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell, Waltham, MA.

HSU, F. M. 1982. "Square-Root Kalman Filtering for High-Speed Data Received Over Fading Dispersive HF Channels," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-28, pp. 753–763, September.

HSU, F. M., and GIORDANO, A. A. 1978. "Digital Whitening Techniques for Improving Spread Spectrum Communications Performance in the Presence of Narrowband Jamming and Interference," *IEEE Trans. Communications*, Vol. COM-26, pp. 209–216, February.

HWANG, S. Y. 1977. "Minimum Uncorrelated Unit Noise in State Space Digital Filtering," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, pp. 273–281, August.

INCINBONO, B.1978. " adaptive Signal Processing for Detection and Communication," in *communication Systems and Random Process Theory*, J.K. Skwirzynski, ed., Sijthoff en Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands.

JAYANT, N. S., and NOLL, P. 1984. *Digital Coding of waveforms*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

JACKSON, L. B. 1969. "An Analysis of Limit Cycles Due to Multiplication Rounding in Recursive Digital (Sub) Filters," *Proc. 7th Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory*, pp. 69–78.

JACKSON, L. B. 1970a. "On the Interaction of Roundoff Noise and Dynamic Range in Digital Filters," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 49, pp. 159–184, February.

JACKSON, L. B. 1970b. "Roundoff Noise Analysis for Fixed-Point Digital Filters Realized in Cascade or Parallel Form," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 107–122, June.

JACKSON, L. B. 1976. "Roundoff Noise Bounds Derived from Coefficients Sensitivities in Digital Filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-23, pp. 481–485, August.

JACKSON, L. B. 1979. "Limit Cycles on State-Space Structures for Digital Filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-26, pp. 67–68, January.

JACKSON, L. B., LINDGREN, A. G., and KIM, Y. 1979. "Optimal Synthesis of Second-Order State-Space Structures for Digital Filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-26, pp. 149–153, March.

JACKSON, M., and MATTHEWSON, P. 1986. "Digital Processing of Bandpass Signals." *GEC Journal of Research*, Vol. 4(1), pp. 32–41.

JAHNKE, E., and EMDE, F. 1945. *Tables of Functions*, 4th ed., Dover, New York.

JAIN, V. K., and CROCHIERE, R. E. 1984. "Quadrature Mirror Filter Design in the Time Domain," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, pp. 353–361, April.

JANG, Y., and YANG, S. 2001. *Recursive Cascaded Integrator-Comb Decimation Filters with Integer Multiple factors*, 44th IEEE Midwest Symposium on circuits and Systems, Daytona, OH, August.

JENKINS, G. M., and WATTS, D. G. 1968. *Spectral Analysis and Its Applications*, Holden-Day, San Francisco.

JOHNSON, D. H. 1982. "The Application of Spectral Estimation Methods to Bearing Estimation Problems," *Proc. IEEE*, Vol. 70, pp. 1018–1028, September.

JOHNSTON, J. D. 1980. "A Filter Family Designed for Use in Quadrature Mirror Filter Banks," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 291–294, April.

JONES, R. H. 1976. "Autoregression Order Selection," *Geophysics*, Vol. 41, pp. 771–773, August.

JONES, S. K., CAVIN, R. K., and REED, W. M. 1982. "Analysis of Error-Gradient Adaptive Linear Equalizers for a Class of Stationary-Dependent Processes," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-28, pp. 318–329, March.

JURY, E. I. 1964. *Theory and Applications of the z-Transform Method*, Wiley, New York.

KAILATH, T. 1974. "A View of Three Decades of Linear Filter Theory," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-20, pp. 146–181, March.

KAILATH, T. 1981. *Lectures on Wiener and Kalman Filtering*, 2d printing, Springer-Verlag, New York.

KAILATH, T. 1985. "Linear Estimation for Stationary and Near-Stationary Processes," in *Modern Signal Processing*, T. Kailath, ed., Hemisphere Publishing Corp., Washington, DC.

KAILATH, T. 1986. "A Theorem of I. Schür and Its Impact on Modern Signal Processing," in Gohberg 1986.

KAILATH, T., VIEIRA, A. C. G, and MORF, M. 1978. "Inverses of Toeplitz Operators, Innovations, and Orthogonal Polynomials," *SIAM Rev.*, Vol. 20, pp. 1006–1019.

KAISER, J. F. 1963. "Design Methods for Sampled Data Filters," *Proc. First Allerton Conference on Circuit System Theory*, pp. 221–236, November.

KAISER, J. F. 1966. "Digital Filters," in *System Analysis by Digital Computer*, F. F. Kuo and J. F. Kaiser, eds., Wiley, New York.

KALOUPTSIDIS, N., and THEODORIDIS, S. 1987. "Fast Adaptive Least-Squares Algorithms for Power Spectral Estimation," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, pp. 661–670, May.

KALMAN, R. E. 1960. "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Vol. 82D, pp. 35–45, March.

KALMAN, R. E., and BUCY, R. S. 1961. "New Results in Linear Filtering Theory," *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Vol. 83, pp. 95–108.

KASHYAP, R. L. 1980. "Inconsistency of the AIC Rule for Estimating the Order of Autoregressive Models," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-25, pp. 996–998, October.

KAVEH, J., and BRUZZONE, S. P. 1979. "Order Determination for Autoregressive Spectral Estimation," *Record of the 1979 RADC Spectral Estimation Workshop*, pp. 139–145, Griffin Air Force Base, Rome, NY.

KAVEH, M., and LIPPERT, G. A. 1983. "An Optimum Tapered Burg Algorithm for Linear Prediction and Spectral Analysis," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-31, pp. 438–444, April.

KAY, S. M. 1980. "A New ARMA Spectral Estimator," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, pp. 585–588, October.

KAY, S. M. 1988. *Modern Spectral Estimation*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

KAY, S. M., and MARPLE, S. L., JR. 1979. "Sources of and Remedies for Spectral Line Splitting in Autoregressive Spectrum Analysis," *Proc. 1979 ICASSP*, pp. 151–154.

KAY, S. M., and MARPLE, S. L., JR. 1981. "Spectrum Analysis: A Modern Perspective," *Proc. IEEE*, Vol. 69, pp. 1380–1419, November.

KESLER, S. B., ed. 1986. *Modern Spectrum Analysis II*, IEEE Press, New York.

KETCHUM, J. W., and PROAKIS, J. G. 1982. "Adaptive Algorithms for Estimating and Suppressing Narrow-Band Interference in PN Spread-Spectrum Systems," *IEEE Trans. Communications*, Vol. COM-30, pp. 913–923, May.

KNOWLES, J. B., and OLCAYTO, E. M. 1968. "Coefficient Accuracy and Digital Filter Response," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-15, pp. 31–41, March.

KOHLENBURG, A. 1953. "Exact Interpolation of Bandlimited Functions." *Journal of Applied Physics*, Vol. 24(12), pp. 1432–1436, May.

KRISHNA, H. 1988. "New Split Levinson, Schür, and Lattice Algorithms for Digital Signal Processing," *Proc. 1988 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 1640–1642, New York, April.

KROMER, R. E. 1969. "Asymptotic Properties of the Autoregressive Spectral Estimator," Ph.D. dissertation, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA.

KUNG, H. T. 1982. "Why Systolic Architectures"? *IEEE Computer*, Vol. 15, pp. 37–46.

KUNG, S. Y., and HU, Y. H. 1983. "A Highly Concurrent Algorithm and Pipelined Architecture for Solving Toeplitz Systems," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-31, pp. 66–76, January.

KUNG, S. Y., WHITEHOUSE, H. J., and KAILATH, T., eds. 1985. *VLSI and Modern Signal Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

LAAKSO, T., VALIMAKI, V., KARJALAINEN, M., and LAINE, U. 1996. "Splitting the Unit Delay." *IEEE Signal Processing Magazine*, No. 1, pp. 30–54, January.

LACOSS, R. T. 1971. "Data Adaptive Spectral Analysis Methods," *Geophysics*, Vol. 36, pp. 661–675, August.

LANG, S. W., and MCCLELLAN, J. H. 1980. "Frequency Estimation with Maximum Entropy Spectral Estimators," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, pp. 716–724, December.

LEVINSON, N. 1947. "The Wiener RMS Error Criterion in Filter Design and Prediction," *J. Math. Phys.*, Vol. 25, pp. 261–278.

LEVY, H., and LESSMAN, F. 1961. *Finite Difference Equations*, Macmillan, New York.

LIN, D. W. 1984. "On Digital Implementation of the Fast Kalman Algorithm," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, pp. 998–1005, October.

LINDEN, D. A. 1959. " A Discussion of Sampling Theorems." *Proc. of the IRE*, Vol. 47(11), pp. 1219–1226, November.

LING, F., and PROAKIS, J. G. (1984a). "Numerical Accuracy and Stability: Two Problems of Adaptive Estimation Algorithms Caused by Round-Off Error," *Proc. ICASSP-84*, pp. 30.3.1–30.3.4, San Diego, CA, March.

LING, F., and PROAKIS, J. G. (1984b). "Nonstationary Learning Characteristics of Least-Squares Adaptive Estimation Algorithms," *Proc. ICASSP-84*, pp. 3.7.1–3.7.4, San Diego, CA, March.

LING, F., MANOLAKIS, D., and PROAKIS, J. G. 1985, "New Forms of LS Lattice Algorithms and Analysis of Their Round-Off Error Characteristics," *Proc. ICASSP-85*, pp. 1739–1742, Tampa, FL, April.

LING, F., MANOLAKIS, D., and PROAKIS, J. G. 1986. "Numerically Robust Least-Squares Lattice-Ladder Algorithms with Direct Updating of the Reflection Coefficients," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, pp. 837–845, August.

LIU, B. 1971. "Effect of Finite Word Length on the Accuracy of Digital Filters—A Review," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-18, pp. 670–677, November.

LJUNG, S., and LJUNG, L. 1985. "Error Propagation Properties of Recursive Least-Squares Adaptation Algorithms," *Automatica*, Vol. 21, pp. 157–167.

LUCKY, R. W. 1965. "Automatic Equalization for Digital Communications," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 44, pp. 547–588, April.

MAGEE, F. R. and PROAKIS, J. G. 1973. "Adaptive Maximum-Likelihood Sequence Estimation for Digital Signaling in the Presence of Intersymbol Interference," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-19, pp. 120–124, January.

MAKHOUL, J. 1975. "Linear Prediction: A Tutorial Review," *Proc. IEEE*, Vol. 63, pp. 561–580, April.

MAKHOUL, J. 1978. "A Class of All-Zero Lattice Digital Filters: Properties and Applications," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-26, pp. 304–314, August.

MAKHOUL, J. 1980. "A Fast Cosine Transform In One and Two Dimentions." *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 28(1), pp. 27–34, February.

MARKEL, J. D., and GRAY, A. H., JR. 1976. *Linear Prediction of Speech*, Springer-Verlag, New York.

MANOLAKIS, D., LING, F., and PROAKIS, J. G. 1987. "Efficient Time-Recursive Least-Squares Algorithms for Finite-Memory Adaptive Filtering," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-34, pp. 400–408, April.

MARPLE, S. L., JR. 1980. "A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, pp. 441–454, August.

MARPLE, S. L., JR. 1987. *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

MARTUCCI, S. A. 1994. "Symmetric Convolution and the Discrete Sine and Cosine Transforms." *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 42(5), pp. 1038–1051, May.

MARZETTA, T. L. 1983. "A New Interpretation for Capon's Maximum Likelihood Method of Frequency–Wavenumber Spectral Estimation," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-31, pp. 445–449, April.

MARZETTA, T. L., and LANG, S. W. 1983. "New Interpretations for the MLM and DASE Spectral Estimators," *Proc. 1983 ICASSP*, pp. 844–846, Boston, April.

MARZETTA, T. L., and LANG, S. W. 1984. "Power Spectral Density Bounds," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-30, pp. 117–122, January.

MASON, S. J., and ZIMMERMAN, H. J. 1960. *Electronic Circuits, Signals and Systems*, Wiley, New York.

MAZO, J. E. 1979. "On the Independence Theory of Equalizer Convergence," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 58, pp. 963–993, May.

MCCLELLAN, J. H. 1982. "Multidimensional Spectral Estimation," *Proc. IEEE*, Vol. 70, pp. 1029–1039, September.

MCDONOUGH, R. N. 1983. "Application of the Maximum-Likelihood Method and the Maximum Entropy Method to Array Processing," in *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, 2d ed., S. Haykin, ed., Springer-Verlag, New York.

MCGILLEM, C. D., and COOPER, G. R. 1984. *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, 2d ed., Holt Rinehart and Winston, New York.

MEDITCH, J. E. 1969. *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control*, McGraw-Hill, New York.

MEYER, R.,and BURRUS, S. 1975. "A Unified Analysis of Multirate and Periodically Time-Varying Digital Filters." *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. 22(3), pp. 162–168, March.

MILLS, W. L., MULLIS, C. T., and ROBERTS, R. A. 1981. "Low Roundoff Noise and Normal Realizations of Fixed-Point IIR Digital Filters," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-29, pp. 893–903, August.

MOORER, J. A. 1977. "Signal Aspects of Computer Music; A Survey," *Proc. IEEE*, Vol. 65, pp. 1108–1137, August.

MORF, M., VIEIRA, A., and LEE, D. T. 1977. "Ladder Forms for Identification and Speech Processing," *Proc. 1977 IEEE Conference Decision and Control*, pp. 1074–1078, New Orleans, LA, December.

MULLIS, C. T., and ROBERTS, R. A. 1976a. "Synthesis of Minimum Roundoff Noise Fixed-Point Digital Filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-23, pp. 551–561, September.

MULLIS, C. T., and ROBERTS, R. A. 1976b. "Roundoff Noise in Digital Filters: Frequency Transformations and Invariants," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-24, pp. 538–549, December.

MURRAY, W., ed. 1972 *Numerical Methods for Unconstrained Minimization*, Acedemic, New York.

MUSICUS, B. 1985. "Fast MLM Power Spectrum Estimation from Uniformly Spaced Correlations," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Proc.*, Vol. ASSP-33, pp. 1333–1335, October.

NEWMAN, W. I. 1981. "Extension to the Maximum Entropy Method III," *Proc. 1st ASSP Workshop on Spectral Estimation*, pp. 1.7.1–1.7.6, Hamilton, ON, August.

NICHOLS, H. E., GIORDANO, A. A., and PROAKIS, J. G. 1977. "MLD and MSE Algorithms for Adaptive Detection of Digital Signals in the Presence of Interchannel Interference," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-23, pp. 563–575, September.

NIKIAS, C. L., and RAGHUVEER, M. R. 1987. "Bispectrum Estimation: A Digital Signal Processing Framework," *Proc. IEEE*, Vol. 75, pp. 869–891, July.

NIKIAS, C. L., and SCOTT, P. D. 1982. "Energy-Weighted Linear Predictive Spectral Estimation: A New Method Combining Robustness and High Resolution," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-30, pp. 287–292, April.

NUTTALL, A. H. 1976. "Spectral Analysis of a Univariate Process with Bad Data Points, via Maximum Entropy and Linear Predictive Techniques," *NUSC Technical Report TR-5303*, New London, CT, March.

NYQUIST, H. 1928. "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory," *Trans. AIEE*, Vol. 47, pp. 617–644, April.

OPPENHEIM, A. V. 1978. *Applications of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

OPPENHEIM, A. V., and SCHAFER, R. W. 1989. *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

OPPENHEIM, A. V., and WEINSTEIN, C. W. 1972. "Effects of Finite Register Length in Digital Filters and the Fast Fourier Transform," *Proc. IEEE*, Vol. 60, pp. 957–976. August.

OPPENHEIM, A. V., and WILLSKY, A. S. 1983. *Signals and Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

PAPOULIS, A. 1962 *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hall, New York.

PAPOULIS, A. 1984. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 2d ed., McGraw-Hill, New York.

PARKER, S. R., and HESS, S. F. 1971. "Limit-Cycle Oscillations in Digital Filters," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-18, pp. 687–696, November.

PARKS, T. W., and MCCLELLAN, J. H. 1972a. "Chebyshev-Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-19, pp. 189–194, March.

PARKS, T. W., and MCCLELLAN, J. H. 1972b. "A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Digital Filters," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-20, pp. 195–199, August.

PARZEN, E. 1957. "On Consistent Estimates of the Spectrum of a Stationary Time Series," *Am. Math. Stat.*, Vol. 28, pp. 329–348.

PARZEN, E. 1974. "Some Recent Advances in Time Series Modeling," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-19, pp. 723–730, December.

PEACOCK, K. L, and TREITEL, S. 1969. "Predictive Deconvolution—Theory and Practice," *Geophysics*, Vol. 34, pp. 155–169.

PEEBLES, P. Z., JR. 1987. *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*, 2d ed., McGraw-Hill, New York.

PICINBONO, B. 1978. "Adaptive Signal Processing for Detection and Communication," in *Communication Systems and Random Process Theory*, J. K. Skwirzynski, ed., Sijthoff en Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands.

PISARENKO, V. F. 1973. "The Retrieval of Harmonics from a Convariance Function," *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, Vol. 33, pp. 347–366.

POOLE, M. A. 1981. *Autoregressive Methods of Spectral Analysis*, E.E. degree thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, Northeastern University, Boston, May.

PRICE, R. 1990. "Mirror FFT and Phase FFT Algorithms," unpublished work, Raytheon Research Division, May.

PROAKIS, J. G. 1970. "Adaptive Digital Filters for Equalization of Telephone Channels," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 195–200, June.

PROAKIS, J. G. 1974, "Channel Identification for High Speed Digital Communications," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-19, pp. 916–922, December.

PROAKIS, J. G. 1975. "Advances in Equalization for Intersymbol Interference," in *Advances in Communication Systems*, Vol. 4, A. J. Viterbi, ed., Academic, New York.

PROAKIS, J. G. 1989. *Digital Communications*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.

PROAKIS, J. G., and MILLER, J. H. 1969. "Adaptive Receiver for Digital Signaling through Channels with Intersymbol Interference," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-15, pp. 484–497, July.

PROAKIS, J. G., RADER, C. M., LING, F., NIKIAS, C. L., MOONEN, M. and PROUDLER, I. K. 2002. *Algorithms for Statistical Signal Processing*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

PROAKIS, J. G. 2001. *Digital Communications*, 4th ed., McGraw-Hill, New York.

QI, R., COAKLEY, F., and EVANS, B. 1996. "Practical Consideration for Bandpass Sampling." *Electronics Letters*, Vol. 32(20), pp. 1861–1862, September.

RABINER, L. R., and SCHAEFER, R. W. 1974a. "On the Behavior of Minimax Relative Error FIR Digital Differentiators," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 53, pp. 333–362, February.

RABINER, L. R., and SCHAFER, R. W. 1974b. "On the Behavior of Minimax FIR Digital Hilbert Transformers," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 53, pp. 363–394, February.

RABINER, L. R., and SCHAFER, R. W. 1978. *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

RABINER, L. R., SCHAFER, R. W., and RADER, C. M. 1969. "The Chirp z-Transform Algorithm and Its Applications," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 48, pp. 1249–1292, May–June.

RABINER, L. R., GOLD, B., and MCGONEGAL, C. A. 1970. "An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 83–106, June.

RABINER, L. R., MCCLELLAN, J. H., and PARKS, T. W. 1975. "FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation," *Proc. IEEE*, Vol. 63, pp. 595–610, April.

RADER, C. M. 1970. "An Improved Algorithm for High-Speed Auto-correlation with Applications to Spectral Estimation," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 439–441, December.

RADER, C. M., and BRENNER, N. M. 1976. "A New Principle for Fast Fourier Transformation," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-24, pp. 264–266, June.

RADER, C. M., and GOLD, B. 1967a. "Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain," *Proc. IEEE*, Vol. 55, pp. 149–171, February.

RADER, C. M., and GOLD, B. 1967b. "Effects of Parameter Quantization on the Poles of a Digital Filter," *Proc. IEEE*, Vol. 55, pp. 688–689, May.

RAMSTAD, T. A. 1984. "Digital Methods for Conversion Between Arbitrary Sampling Frequencies," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, pp. 577–591, June.

RAO, K., and HUANG, J. 1996. *Techniques and Standards for Image, Video, and Audio Coding*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

RAO, K. R., and YIP, P 1990. *Discrete Cosine Transform*, Academic Press, Boston.

REMEZ, E. YA. 1957. *General Computational Methods of Chebyshev Approximation*, Atomic Energy Translation 4491, Kiev, USSR.

RICE, D., and WU, K. 1982. "Quatature Sampling with High Dynamic Range."*IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 18(4), pp. 736–739, November.

RISSANEN, J. 1983. "A Universal Prior for the Integers and Estimation by Minimum Description Length," *Ann. Stat.*, Vol. 11, pp. 417–431.

ROBERTS, R. A., and MULLIS, C. T. 1987. *Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, Reading, MA.

ROBINSON, E. A. 1962. *Random Wavelets and Cybernetic Systems*, Charles Griffin, London.

ROBINSON, E. A. 1982. "A Historical Perspective of Spectrum Estimation," *Proc. IEEE*, Vol. 70, pp. 885–907, September.

ROBINSON, E. A., and TREITEL, S. 1978. "Digital Signal Processing in Geophysics," in *Applications of Digital Signal Processing*, A. V. Oppenheim, ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

ROBINSON, E. A., and TREITEL, S. 1980. *Geophysical Signal Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

ROY, R., PAULRAJ, A., and KAILATH, T. 1986. "ESPRIT: A Subspace Rotation Approach to Estimation of Parameters of Cisoids in Noise," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, pp. 1340–1342, October.

SAFRANEK, R. J., MACKAY, K. JAYANT, N. W., and KIM, T. 1988. "Image Coding Based on Selective Quantization of the Reconstruction Noise in the Dominant Sub-Band," *Proc. 1988 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 765–768, April.

SAKAI, H. 1979. "Statistical Properties of AR Spectral Analysis," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-27, pp. 402–409, August.

SANDBERG, I. W., and KAISER, J. F. 1972. "A Bound on Limit Cycles in Fixed-Point Implementations of Digital Filters," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-20, pp. 110–112, June.

SATORIUS, E. H., and ALEXANDER J. T. 1978. "High Resolution Spectral Analysis of Sinusoids in Correlated Noise," *Proc. 1978 ICASSP*, pp. 349–351, Tulsa, OK, April 10–12.

SAYED, A. H. 2003 *Adaptive Filters*, Wiley, New York.

SCHAFER, R. W., and RABINER, L. R. 1973. "A Digital Signal Processing Approach to Interpolation," *Proc. IEEE*, Vol. 61, pp. 692–702, June.

SCHEUERMANN, H., and GOCKLER, H. 1981. "A Comprehensive Survey of Digital Transmultiplexing Methods," *Proc. IEEE*, Vol. 69, pp. 1419–1450.

SCHMIDT, R. D. 1981. "A Signal Subspace Approach to Multiple Emitter Location and Spectral Estimation," Ph.D. dissertation, Department of Electrical Engineering, Stanford University, Stanford, CA, November.

SCHMIDT, R. D. 1986. "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. AP 34, pp. 276–280, March.

SCHOTT, J. P., and MCCLELLAN, J. H. 1984. "Maximum Entropy Power Spectrum Estimation with Uncertainty in Correlation Measurements," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, pp. 410–418, April.

SCHUR, I. 1917. "On Power Series Which Are Bounded in the Interior of the Unit Circle," *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 147, pp. 205–232, Berlin. For an English translation of the paper, see Gohberg 1986.

SCHUSTER, SIR ARTHUR. 1898. "On the Investigation of Hidden Periodicities with Application to a Supposed Twenty-Six-Day Period of Meteorological Phenomena," *Terr. Mag.*, Vol. 3, pp. 13–41, March.

SEDLMEYER, A., and FETTWEIS, A. 1973. "Digital Filters with True Ladder Configuration," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, Vol. 1, pp. 5–10, March.

SHANKS, J. L. 1967. "Recursion Filters for Digital Processing," *Geophysics*, Vol. 32, pp. 33–51, February.

SHANNON, C. E. 1949. "Communication in the Presence of Noise," *Proc. IRE*, pp. 10–21, January.

SHEINGOLD, D. H., ed. 1986. *Analog-Digital Conversion Handbook*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

SIEBERT, W. M. 1986. *Circuits, Signals and Systems*, McGraw-Hill, New York.

SINGLETON, R. C. 1967. "A Method for Computing the Fast Fourier Transform with Auxiliary Memory and Limit High Speed Storage," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, pp. 91–98, June.

SINGLETON, R. C. 1969. "An Algorithm for Computing the Mixed Radix Fast Fourier Transform," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 93–103, June.

SLOCK, D. T. M., and KAILATH, T 1988. "Numerically Stable Fast Recursive Least Squares Transversal Filters," *Proc. 1988 Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 1364–1368, NY, April.

SLOCK, D. T. M., and KAILATH, T 1991. "Numerically Stable Fast Transversal Filters for Recursive Least Squares Adaptive Filtering," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 39, pp. 92–114, January.

SMITH, M. J. T., and BARWELL, T. P. 1984. "A Procedure for Designing Exact Reconstruction Filter Banks for Tree Structured Subband Coders," *Proc. 1984 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 27.1.1–27.1.4, San Diego, March.

SMITH, M. J. T., and EDDINS, S. L. 1988. "Subband Coding of Images with Octave Band Tree Structures," *Proc. 1987 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 1382–1385, Dallas, April.

STARK, H, and WOODS, J. W. 1994. *Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers*, 2nd Ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

STEIGLITZ, K. 1965. "The Equivalence of Digital and Analog Signal Processing," *Inf. Control*, Vol. 8, pp. 455–467, October.

STEIGLITZ, K. 1970. "Computer-Aided Design of Recursive Digital Filters," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 123–129, June.

STOCKHAM, T. G. 1966. "High Speed Convolution and Correlation," *1966 Spring Joint Computer Conference, AFIPS Proc.*, Vol. 28, pp. 229–233.

STORER, J. E. 1957. *Passive Network Synthesis*, McGraw-Hill, New York.

STRANG, G. 1999. "The Discrete Cosine Transform." *SIAM Review*, Vol. 41(1), pp. 135–137.

SWARZTRAUBER, P. 1986. "Symmetric FFT's," *Mathematics of Computation*, Vol. 47, pp. 323–346, July.

SWINGLER, D. N. 1979a. "A Comparison Between Burg's Maximum Entropy Method and a Nonrecursive Technique for the Spectral Analysis of Deterministic Signals," *J. Geophys. Res.*, Vol. 84, pp. 679–685, February.

SWINGLER, D. N. 1979b. "A Modified Burg Algorithm for Maximum Entropy Spectral Analysis," *Proc. IEEE*, Vol. 67, pp. 1368–1369, September.

SWINGLER, D. N. 1980. "Frequency Errors in MEM Processing," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, pp. 257–259, April.

SZEGO, G. 1967. *Orthogonal Polynomials*, 3d ed., Colloquium Publishers, No. 23, American Mathematical Society, Providence, RI.

THORVALDSEN, T. 1981. "A Comparison of the Least-Squares Method and the Burg Method for Autoregressive Spectral Analysis," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. AP-29, pp. 675–679, July.

TONG, H. 1975. "Autoregressive Model Fitting with Noisy Data by Akaike's Information Criterion," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-21, pp. 476–480, July.

TONG, H. 1977. "More on Autoregressive Model Fitting with Noise Data by Akaike's Information Criterion," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-23, pp. 409–410, May.

TRETTER, S. A. 1976. *Introduction to Discrete-Time Signal Processing*, Wiley, New York.

TUFTS, D. W., and KUMARESAN, R. 1982. "Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood," *Proc. IEEE*, Vol. 70, pp. 975–989, September.

ULRYCH, T. J., and BISHOP, T. N. 1975. "Maximum Entropy Spectral Analysis and Autoregressive Decomposition," *Rev. Geophys. Space Phys.*, Vol. 13, pp. 183–200, February.

ULRYCH, T. J., and CLAYTON, R. W. 1976. "Time Series Modeling and Maximum Entropy," *Phys. Earth Planet. Inter.*, Vol. 12, pp. 188–200, August.

UNGERBOECK, G. 1972. "Theory on the Speed of Convergence in Adaptive Equalizers for Digital Communication," *IBM J. Res. Devel.*, Vol. 16, pp. 546–555, November.

VAIDYANATHAN, P. P. 1990. "Multirate Digital Filters, Filter Banks, Polyphase Networks, and Applications: A Tutorial," *Proc. IEEE*, Vol. 78, pp. 56–93, January.

VAIDYANATHAN, P. P. 1993. *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

VAUGHAN, R., SCOTT, N., and WHITE, D. 1991. "The Theory of Bandpass Sampling." *IEEE Trans. on signal Procesing*, Vol. 39(9), pp. 1973–1984.

VETTERLI, J. 1984. "Multi-dimensional Sub-Band Coding: Some Theory and Algorithms," *Signal Processing*, Vol. 6, pp. 97–112, April.

VETTERLI, J. 1987. "A Theory of Multirate Filter Banks," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, pp. 356–372, March.

VIEIRA, A. C. G. 1977. "Matrix Orthogonal Polynomials with Applications to Autoregressive Modeling and Ladder Forms," Ph.D. dissertation, Department of Electrical Engineering, Stanford University, Stanford, CA, December.

WALKER, G. 1931. "On Periodicity in Series of Related Terms," *Proc. R. Soc.*, Ser. A, Vol. 313, pp. 518–532.

WANG, Z. 1984. "Fast Algorithms for the Discrete *W* Transform for the Discrete foruier Transform." *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 32(4), pp. 803–816, August.

WATERS, W,. and JARRETT, B. 1982. "Bandpass Signal Sampling and Coherent Dection." *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 18(4), pp. 731–736, November.

WAX, M., and KAILATH, T. 1985. "Detection of Signals by Information Theoretic Criteria," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, pp. 387–392, April.

WEINBERG, L. 1962. *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill, New York.

WELCH, P. D. 1967. "The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging over Short Modified Periodograms," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, pp. 70–73, June.

WIDROW, B., and HOFF, M. E., Jr. 1960. "Adaptive Switching Circuits," *IRE WESCON Conv. Rec.*, pt. 4, pp. 96–104.

WIDROW, B., MANTEY, P., and GRIFFITHS, L. J. 1967. "Adaptive Antenna Systems," *Proc. IEEE*, Vol. 55, pp. 2143–2159, December.

WIDROW, B. et al. 1975. "Adaptive Noise Cancelling Principles and Applications," *Proc. IEEE*, Vol. 63, pp. 1692–1716, December.

WIDROW, B., MANTEY, P., and GRIFFITHS, L. J. 1967. "Adaptive Antenna syatems." *Proc. IEEE*, Vol. 55, pp. 2143–2159, December.

WIENER, N. 1949. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*, Wiley, New York.

WIENER, N., and PALEY, R. E. A. C. 1934. *Fourier Transforms in the Complex Domain*, American Mathematical Society, Providence, RI.

WINOGRAD, S. 1976. "On Computing the Discrete Fourier Transform," *Proc. Natl. Acad. Sci.*, Vol. 73, pp. 105–106.

WINOGRAD, S. 1978. "On Computing the Discrete Fourier Transform," *Math. Comp.*, Vol. 32, pp. 177–199.

WOLD, H. 1938. *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, reprinted by Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1954.

WOOD, L. C., and TREITEL, S. 1975. "Seismic Signal Processing," *Proc. IEEE*, Vol. 63, pp. 649–661, April.

WOODS, J. W., and O'NEIL, S. D. 1986. "Subband Coding of Images," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, pp. 1278–1288, October.

YOULA, D., and KAZANJIAN, N. 1978. "Bauer-Type Factorization of Positive Matrices and the Theory of Matrices Orthogonal on the Unit Circle," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-25, pp. 57–69, January.

YULE, G. U. 1927. "On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with Special References to Wolfer's Sunspot Numbers," *Philos. Trans. R. Soc. London*, Ser. A, Vol. 226, pp. 267–298, July.

ZADEH, L. A., and DESOER, C. A. 1963. *Linear System Theory: The State-Space Approach*, McGraw-Hill, New York.

ZVEREV, A. I. 1967. *Handbook of Filter Synthesis*, Wiley, New York.

习题答案

第1章

1.1 (a) 一维的，多径的，离散时间的，数字的；
(b) 多维的，单通道的，连续时间的，模拟的；
(c) 一维的，单通道的，连续时间的，模拟的；
(d) 一维的，单通道的，连续时间的，模拟的；
(e) 一维的，多径的，离散时间的，数字的。

1.3 (a) 周期的，周期为 $T_p = \frac{2\pi}{5}$；
(c) $f = \frac{1}{12\pi} \Rightarrow$ 非周期的；
(e) $\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ 是周期的，周期为 $N_p = 4$；$\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)$ 是周期的，周期为 $N_p = 16$；$\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ 是周期的，周期为 $N_p = 8$。因此，$x(n)$ 是周期的，其周期为 $N_p = 16$ (16是4, 8, 16的最小公倍数)。

1.4 (b) $N = 7$; $k = 0\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7$; $\mathrm{GCD}(k, N) = 7\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,7$; $N_p = 1\,7\,7\,7\,7\,7\,1$。

1.5 (a) 是，$x(1) = 3 = 3\sin\left(\frac{100\pi}{F_s}\right) \Rightarrow 200$ 样本/s。

1.6 (b) 如果 $x(n)$ 是周期的，那么 $f = k/N$，其中 N 为周期，于是，$T_d = \left(\frac{k}{f}T\right) = k\left(\frac{T_p}{T}\right)T = kT_p$。因此，需要 k 个模拟信号周期 kT_p 才能得出一个数字信号周期 T_d。

1.8 (a) $F_{\max} = 100\,\mathrm{Hz}$, $F_s \geqslant 2F_{\max} = 200\,\mathrm{Hz}$；
(b) $F_{fold} = \frac{F_s}{2} = 125\,\mathrm{Hz}$。

1.10 (a) $F_s = 1000$ 样本/s；$F_{fold} = 500\,\mathrm{Hz}$；
(b) $F_{\max} = 900\,\mathrm{Hz}$；$F_N = 2F_{\max} = 1800\,\mathrm{Hz}$；
(c) $f_1 = 0.3$；$f_2 = 0.9$；但 $f_2 = 0.9 > 0.5 \Rightarrow f_2 = 0.1$. 因此，$x(n) = 3\cos[(2\pi)(0.3)n] + 2\cos[(2\pi)(0.1)n]$.
(d) $\Delta = \frac{10}{1023}$.

第2章

2.7 (a) 静态的，非线性的，时不变的，因果的，稳定的；
(c) 静态的，线性的，时变的，因果的，稳定的；
(e) 静态的，非线性的，时不变的，因果的，稳定的；
(h) 静态的，线性的，时不变的，因果的，稳定的；
(k) 静态的，非线性的，时不变的，因果的，稳定的。

2.11 因为该系统是线性的，并且 $x_1(n) + x_2(n) = \delta(n)$，所以得出系统的冲激响应为 $y_1(n) + y_2(n) = \left\{0, \underset{\uparrow}{3}, -1, 2, 1\right\}$。

如果该系统是时不变的，那么对 $x_3(n)$ 的响应为 $\left\{\underset{\uparrow}{3}, 2, 1, 3, 1\right\}$，但实际情况并不是这样。

2.16 (b) (1) $y(n) = h(n) * x(n) = \{1, 3, 7, 7, 7, 6, 4\}$; $\sum_n y(n) = 35$, $\sum_k h(k) = 5$, $\sum_k x(k) = 7$.
(4) $y(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $\sum_n y(n) = 15$, $\sum_n h(n) = 1$, $\sum_n x(n) = 15$
(7) $y(n) = \{0, 1, 4, -4, -5, -1, 3\}$ $\sum_n y(n) = -2$, $\sum_n h(n) = -1$, $\sum_n x(n) = 2$
(10) $y(n) = \{1, 4, 4, 4, 10, 4, 4, 4, 1\}$; $\sum_n y(n) = 36$, $\sum_n h(n) = 6$, $\sum_n x(n) = 6$

2.19 $y(n)=\sum_{k=0}^{4}h(k)x(n-k)$, $x(n)=\left\{a^{-3},a^{-2},a^{-1},\underset{\uparrow}{1},a,\cdots,a^{5}\right\}$, $h(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},1,1,1,1,\right\}$; $y(n)=\sum_{k=0}^{4}x(n-k)$, $-3\leqslant n\leqslant 9$; $y(n)=0$, 其他。

2.22 (a) $y_1(n)=x(n)+x(n-1)=\{1,5,6,5,8,8,6,7,9,12,15,9\}$
$y_4(n)=\{0.25,1.5,2.75,2.75,3.25,4,3.5,3.25,3.75,5.25,6.25,7,6,2.25\}$

2.26 用 $x(n)=0$, 得出 $y(n-1)+\frac{4}{3}y(n-1)=0$ $y(-1)=-\frac{4}{3}y(-2)$; $y(0)=\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}y(-2)$; $y(1)=\left(-\frac{4}{3}\right)^{3}y(-2)$,

因此, $y(k)=\left(-\frac{4}{3}\right)^{k+2}y(-2)\leftarrow$ 零输入响应

2.32 (a) $L_1=N_1+M_1$ 和 $L_2=N_2+M_2$;

(c) $N_1=-2$, $N_2=4$, $M_1=-1$, $M_2=2$。

从左边部分重叠: $n=-3$ $n=-1$ $L_1=-3$; 全部重叠: $n=0$ $n=3$; 从右边部分重叠: $n=4$ $n=6$ $L_2=6$。

2.34 $h(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right\}$; $y(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},2,2.5,3,3,3,2,1,0\right\}$

则, $x(n)=\left\{1,\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{7}{4},\frac{3}{2}\right\}$。

2.38 根据稳定系统的绝对可加性, 得到 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0,(n为偶数)}^{\infty}|a|^{n}\sum_{n=0}^{\infty}|a|^{2n}=\frac{1}{1-|a|^{2}}$,
因此, 当 $|a|<1$ 时, 该系统稳定。

2.40 $y(n)=2\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]u(n)-2\left[1-(\frac{1}{2})^{n-9}\right]u(n-10)$

2.41 (a) $y(n)=\frac{2}{3}\left[2^{n+1}-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]u(n)$

2.42 (a) $h_c(n)=h_1(n)*h_2(n)*h_3(n)=[\delta(n)-\delta(n-1)]*u(n)*h(n)=h(n)$;

(b) 没有。

2.45 $y(n)=-\frac{1}{2}y(n-1)+z(n)+2x(n-2)$; $y(-2)=1$, $y(-1)=\frac{3}{2}$, $y(9)=\frac{17}{4}$, $y(1)=\frac{47}{8}$, $\cdots$

2.48 (a) $y(n)=ay(n-1)+bx(n)\Rightarrow h(n)=ba^{n}u(n)$ $\sum_{n=0}^{\infty}h(n)=\frac{b}{1-a}=1\Rightarrow b=1-a$;

(b) $s(n)=\sum_{k=0}^{n}h(n-k)=b\left[\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right]u(n)$

$s(\infty)=\frac{b}{1-a}=1\Rightarrow b=1-a$

2.51 (a) $y(n)=\frac{1}{3}x(n)+\frac{1}{3}x(n-3)+y(n-1)$ 对于 $x(n)=\delta(n)$,
$h(n)=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\cdots\right\}$;

(b) $y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)+\frac{1}{2}x(n-2)$, $y(-1)=y(-2)=0$
当 $x(n)=\delta(n)$, $h(n)=\left\{0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{16},\frac{1}{9},\frac{11}{128},\frac{15}{256},\frac{41}{1024}\cdots\right\}$;

(c) $y(n)=1.4y(n-1)-0.48y(n-2)+x(n)$, $y(-1)-y(-2)=0$
当 $x(n)\delta(n)$, $h(n)=\{1,1,4,1.48,1.4,1.2496,1.0774,0.9086,\cdots\}$;

(d) 这三个系统都是 IIR。

2.54 (a) 卷积相关: $y_1(n)=\left\{\underset{\rightarrow}{1}3,7,7,7,7,4\right\}$
卷积相关: $\gamma_1(n)=\left\{1,3,7,7,\underset{\rightarrow}{7},6,4\right\}$

(c) 卷积相关: $y_4(n)=\left\{\underset{\rightarrow}{1},4,10,20,25,24,16\right\}$
卷积相关: $\gamma_4(n)=\left\{4,11,20,\underset{\rightarrow}{30},20,11,4\right\}$

2.58 $h(n)=[c_1 2^{n}+c_2 n2^{n}]u(n)$
当 $y(0)=1$, $y(1)=3$, 得到, $c_1=1$, 和 $c_2=\frac{1}{2}$

2.61 $x(n)=\begin{cases}1, & n_0-N\leqslant n\leqslant n_0+N\\ 0, & 其他\end{cases}$

$r_{xx}(l)=\begin{cases}2N+1-|l|, & -2N\leqslant l\leqslant 2N\\ 0, & 其他\end{cases}$

2.63 $r_{xx}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n-l)=\begin{cases}2N+1-|l|, & -2N\leqslant l\leqslant 2N\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

因为 $r_{xx}(0)=2N+1$，所以归一化自相关为

$\rho_{xx}(l)=\begin{cases}\frac{1}{2N+1}(2N+1-|l|), & -2N\leqslant l\leqslant 2N\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

第3章

3.1 (a) $X(z)=3z^5+6+z^{-1}-4z^{-2}$ 收敛域：$0<|z|<\infty$

3.2 (a) $X(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})^2}$

(d) $X(z)=\frac{\left[az^{-1}-(az^{-1})^3\right]\sin w_0}{\left[1-(2a\cos w_0)z^{-1}+a^2z^{-2}\right]^2}$, $|z|<a$

(h) $X(z)=\frac{1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z|>\frac{1}{2}$

3.4 (a) $X(z)=\frac{z^{-1}}{(1+z^{-1})^2}$, $|z|>1$

(f) $X(z)=1-z^{-2}+z^{-4}-z^{-5}$, $z\neq 0$

3.8 (a) $Y(z)=\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$

3.12 (a) $x(n)=[4(2)^n-3-n]u(n)$

3.14 (a) $x(n)=[2(-1)^n-(-2)^n]u(n)$

(c) $x(n)=-\left[\frac{3}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\frac{\pi}{4}n+\frac{23}{10}\left(1\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{\pi}{4}n+\frac{17}{20}(12)^n\right]u(n)$

(j) $x(n)=\left(-\frac{1}{a}\right)^{n+1}u(n)+\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}u(n-1)$

3.16 (a) $y(n)=\left[-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$

(d) $y(n)=[-2(n+1)+2^{n+1}]u(n)$

3.19 (b) $x(n)=-\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$

3.24 (a) $x(n)=[0.136(0.28)^n+0.864(-1.78)^n]u(n)$

3.35 (a) $y(n)=\left[\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{\pi n}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{\pi n}{3}\right]u(n)$

(d) $y(n)=\frac{10}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)u(n)$

(h) $y(n)=\left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{4}\right)^n-3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

3.38 (a) $h(n)=\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

$y(n)=\left[\frac{8}{3}-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

(d) $h(n)=\left[2\left(\frac{2}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]u(n)$

$y(n)=\left[\frac{25}{12}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]u(n)$

3.42 (a) $h(n)=\left[-\frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\frac{9}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]u(n-1)$

3.44 (a) $h(n)=b_0\delta(n)+(b1-b_0a_1)(-a_1)^{n-1}u(n-1)$

(b) $y(n)=\left[\frac{b_0+b_1}{1+a_1}+\frac{a_1b_0-b_1}{1+a_1}(-a_1)^n\right]u(n)$

3.49 (d) $y(n)=\left[\frac{4}{3}-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{7}{24}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$

3.56 (a) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(d) $x(n)=\left[\frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{7}{10}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$

3.58 收敛域：$a < |z| < 1/a$
$x(-18) = -32/15\,309$

第4章

4.2 (a) $X_a(f) = \frac{A}{a+j2\pi F}$；$|X_a(F)| = \frac{A}{\sqrt{a^2+(2\pi F)^2}}$；$\angle X_a(f) = -\arctan\frac{2\pi f}{a}$

4.5 (a) $x(n) = \left\{\frac{11}{2}, 2+\frac{3}{4}\sqrt{2}, 1, 2-\frac{3}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 2-\frac{3}{4}\sqrt{2}, 1, 2+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right\}$
因此，$c_0 = 2$, $c_1 = c_7 = 1$, $c_2 = c_6 = \frac{1}{2}$, $c_3 = c_5 = \frac{1}{4}$, $c_4 = 0$

(b) $P = \frac{53}{8}$

4.6 (a)
$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = 3 \\ \frac{1}{2}, & k = 5 \\ \frac{1}{2}, & k = 10 \\ \frac{-1}{2j}, & k = 12 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(d) $c_0 = 0$,
$c_1 = \frac{2j}{5}\left[-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right]$
$c_2 = \frac{2j}{5}\left[\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$;
$c_3 = -c_2$; $c_4 = -c_1$

(h) $N = 2$; $c_k = \frac{1}{2}(1 - e^{-j\pi k})$; $c_0 = 0$, $c_1 = -1$

4.9 (a) $X(\omega) = \frac{1-e^{-j6\omega}}{1-e-j\omega}$

(e) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \to \infty$.
因此，傅里叶变换并不存在

(h) $X(\omega) = (2M+1)A + 2A\sum_{k=1}^{M}(2M+1-k)\cos wk$

4.14 (a) $X(0) = \sum_n x(n) = -1$;

(e) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega = 2\pi\sum_n |x(n)|^2 = (2\pi)(19) = 38\pi$

4.17 (a) $\sum_n x^*(n)e^{-j\omega n} = \left(\sum_n x(n)e^{-j(-\omega)n)}\right)^* = X^*(-\omega)$

(c) $Y(\omega) = X(\omega) + X(\omega)e^{-j\omega n} = (1 - e^{-j\omega})X(\omega)$

(f) $Y(\omega) = X(2\omega)$

4.19 (a) $X_1(\omega) = \frac{1}{2j}\left[X\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) + X\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

(d) $X_4(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega - \pi) + X(\omega + \pi)] = X(\omega - \pi)$

4.22 (a) $X_1(\omega) = \frac{e^{j\omega/2}}{1-a_e j\omega/2}$

(d) $X_4(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega - 0.3\pi) + X(\omega + 0.3\pi)]$

4.23 (b) $Y_2(\omega) = X\left(\frac{\omega}{2}\right)$

第5章

5.1 (a) 因为n的范围是$(-\infty, \infty)$，所以$x(n)$和$y(n)$的傅里叶变换并不存在，然而，$x(n)$和$y(n)$的关系式意味着$y(n) = x^3(n)$，在这种情况下，系统H_1是非线性的。

(b) 在这种情况下，$H(\omega) = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{8}e^{-j\omega}}$，因此该系统是 LTI。

5.3 (a) $|H(\omega)| = \frac{1}{\left[\frac{5}{4}-\cos\omega\right]^{\frac{1}{2}}}$ $\angle H(\omega) = -\arctan\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{1-\frac{1}{2}\cos\omega}$

5.4 (a) $H(\omega) = (\sin\omega)e^{j\pi/2}$

(j) $H(\omega)=(\cos\omega)\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)e^{-j3\omega/2}$

(n) $H(\omega)=(\sin^2\omega/2)e^{-j(\omega-\pi)}$

5.8 $y_{ss}(n)=3\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{3}\right)$; $y_{tr}(n)=0$

5.12 (a) $H(\omega)=\frac{b}{1-0.9e^{-j\omega}}$; $|H(0)|=1,\Rightarrow b=\pm0.1$

$$\Theta(\omega)=\begin{cases}-\frac{\omega M}{2}, & \cos\frac{\omega M}{2}>0\\ \pi-\frac{\omega M}{2}, & \cos\frac{\omega M}{2}<0\end{cases}$$

(b) $|H(\omega_0)|^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{b^2}{1.81-1.8\cos\omega_0}=\frac{1}{2}\Rightarrow\omega_0=0.105$

5.16 (a) $|H(\omega)|=\frac{4}{5-3\cos\omega}$; $\angle H(\omega)=0$

5.18 (a) $H(\omega)=2e^{-j2\omega}e^{j\pi/2}\sin2\omega$

(b) $y(n)=2\cos\pi n/4$, $H\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$, $\angle H\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

5.20 (a) $Y(\omega)=X\left(\frac{\omega}{2}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}\leqslant|\omega|\leqslant p\end{cases}$

(b) $Y(\omega)=\frac{1}{2}[X(\omega-\pi)+X(\omega+\pi)]=\begin{cases}0, & |\omega|\leqslant\frac{3\pi}{4}\\ \frac{1}{2}, & \frac{3\pi}{4}\leqslant|\omega|<\pi\end{cases}$

5.22 (a) $|H(\omega)|=2|\sin5\omega|$,

$$\Theta(\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-5\omega & \sin5\omega>0\\ \frac{\pi}{2}-5\omega+\pi, & \sin5\omega<0\end{cases}$$

(b) $\left|H\left(\frac{\pi}{10}\right)\right|=2$, $\angle H\left(\frac{\pi}{10}\right)=0$; $\left|H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|=\sqrt{3}$, $\Theta\left(\frac{\pi}{3}\right)=\angle H\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$

(1) 因此，$y(n)=2\cos\frac{\pi}{10}n+3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}n-\frac{\pi}{15}\right)$

(2) $H(0)=0$, $H\left(\frac{2\pi}{5}\right)=0$; 因此，$y(n)=0$

5.24 (a) $H(z)=\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-1$; $h(n)=2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\delta(n)$

5.30 $|H(\omega)|=\cos^2\frac{\omega}{2}$; $\Theta(\omega)=\angle H(\omega)=-\omega$

5.33 (a) $H(\omega)=\frac{1}{2M+1}\left[1+2\sum_{k=1}^{M-1}\cos\omega k\right]$

(b) $H(\omega)=\frac{1}{2M}\cos M\omega+\frac{1}{2M}\left[1+2\sum_{k=1}^{M-1}\cos\omega k\right]$

5.39 (a) $|H_1(\omega)|^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos w_2=\frac{4a-1-a^2}{2a}$

(b) $|H_2(\omega)|^2=(\frac{1}{2}\Rightarrow\cos\omega\frac{2a}{1+a^2}$

通过比较(a)和(b)部分的结果，得出结论 $\omega_2<\omega_1$，因此，第二个滤波器的带宽要窄3 dB

5.49 (a) 用 z^8 代替 z。需要 8 个零点，分别在频率 $\omega=0,\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{\pi}{3},\pm\frac{3\pi}{4},\pi$ 处，因此，

$H(z)=\frac{1-z^{-8}}{1-az^{-8}}$; $y(n)=ay(n-8)+x(n)-x(n-8)$

5.53 $H_r(\omega)=2\left[h(0)\sin\frac{3\omega}{2}+h(1)\sin\frac{\omega}{2}\right]$; $H_r\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$; $H_r\left(\frac{3\pi}{4}\right)=1$

$H_r\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2h(0)\sin\frac{9\pi}{8}+2h(1)\sin\frac{3\pi}{8}=1$

$1.85h(0)+0.765h(1)=\frac{1}{2}$

$-0.765h(0)+1.85h(1)=1$

$h(1)=0.56$, $h(0)=0.04$

5.59 (a) $H(z)=\frac{0.1}{1-0.9z^{-1}}$; $H_{bp}(\omega)=H\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{0.1}{1-0.9e^{-j\pi-\frac{\pi}{2}}}$

(b) $h(n)=0.1\left(0.9e^{j\pi/2}\right)^n u(n)$

5.61 (a) $H(z)=\frac{b}{1-az^{-1}}$; $H(\omega)=\frac{b}{1-ae^{-j\omega}}$; $b=\pm(1-a)$

(b) $|H(\omega)|^2=\frac{b^2}{1+a^2-2a\cos\omega}=\frac{1}{2}$; $\omega_3=\arccos\left(\frac{4a-1-a^2}{2a}\right)$

5.66 (a) $h(n)=\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]u(-n-1)$

$y(n)=y(n-1)+y(n-2)+x(n-1)$

5.68 $r_{xx}(n)=\frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)+\frac{16}{15}(4)^n u(-n-1)$; $r_{hh}(n)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\frac{4}{3}(2)^n u(-n-1)$
$r_{xy}(n)=\frac{16}{17}(2)^n u(n-1)-\frac{16}{15}(4)^n u(-n-1)-\frac{128}{105}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$
$r_{yy}(n)=\frac{64}{21}(2)^n u(-n-1)-\frac{128}{105}(4)^n u(-n-1)+\frac{64}{21}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\frac{128}{105}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

5.77 (a) $H(z)H(z^{-1})=\frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}(z+z^{-1})}{\frac{10}{9}-\frac{1}{3}(z+z^{-1})}$
$H(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$

5.82 (a) $B=10\,\text{kHz}$; $F_s=20\,\text{kHz}$; $z_1=\frac{10k}{20k}=0.5$; $z_2=\frac{7.777k}{20k}=0.3889$; $z_3=\frac{8.889k}{20k}=0.4445$;
$z_4=\frac{6.667k}{20k}=0.3334$;
$H(z)=(z-0.5)(z-0.3889)(z-0.4445)(z-0.3334)$

第6章

6.9 (a) $X_a(F)=\frac{1}{j2\pi(F+F_0)}$
(b) $X(f)=\frac{1}{1-e^{-j2\pi(F+F_0/F_s)}}$

6.10
因为 $\frac{F_c+\frac{B}{2}}{B}=\frac{50+10}{20}=3$ 是整数，所以 $F_s=2B=40\,\text{Hz}$

6.14
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^2(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(w)|^2\mathrm{d}w=\frac{E_g}{T}$

6.18
令 P_d 表示量化噪声的功率谱密度，于是
$P_n=\int_{-\frac{B}{F_s}}^{\frac{B}{F_s}}P_d\mathrm{d}f=\frac{2B}{F_s}P_d=\sigma_e^2$
$\text{SQNR}=10\lg\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}=10\lg\frac{\sigma_x^2F_s}{2BP_d}=10\lg\frac{\sigma_x^2}{2BP_d}+10\lg F_s$
因此，若 F_s 加倍，则SQNR 将增加3 dB。

6.20
$H_s(z)=z^{-1}$; $H_n(z)=(1-z^{-1})^2$

第7章

7.1 因为 $x(n)$ 是实数，所以其 DFT 的实部是偶数，虚部是奇数，这样剩余的点就是 $\{0.125+\text{j}0.0518, 0, 0.125+\text{j}0.3018\}$

7.2 (a) $\tilde{x}_2(l)=\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)|l|$, $|l|\leqslant 7$
因此，$x_1(n)\ 8\ x_2(n)=\{1.25, 2.55, 2.55, 1.25, 0.25, -1.06, -1.06, 0.25\}$
(c) $\tilde{R}_{xx}(k)=X_1(k)X_1^*(k)=\frac{N^2}{4}[\delta(k-1)+\delta(k+1)]$
$\Rightarrow\tilde{r}_{xx}(n)=\frac{N}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$
(d) $\tilde{R}_{yy}(k)=X_2(k)X_2^*(k)=\frac{N^2}{4}[\delta(k-1)+\delta(k+1)]$
$\Rightarrow\tilde{r}_{yy}(n)=\frac{N}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$

7.5 (a) $\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)x_2^*(n)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n}+e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)^2=\frac{N}{2}$

7.9 $X_3(k)=\{17, 19, 22, 19\}$

7.12 (a) $s(k)=W_2^kX(k)$
$s(n)=\{3, 4, 0, 0, 1, 2\}$

7.14 (a) $y(n)=x_1(n)\ 5\ x_2(n)=\{4, 0, 1, 2, 3\}$

7.21 (a) $F_s\equiv F_N=2B=6000$ 样本/s
(b) $L=120$ 样本
(c) $LT=\frac{1}{6000}\times 120=0.02\,\text{s}$

7.23 (a) $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=1$, $0\leqslant k\leqslant N-1$
(e) $X(k)=N\delta(k-k_0)$
(h) $X(k)=\frac{1}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$

7.25 (a) $X(w)=3+2\cos(2w)+4\cos(4w)$

7.31 (a) $c_k=\left(\frac{2}{\pi},-\frac{1}{\pi},\frac{2}{3\pi},-\frac{1}{2\pi}\cdots\right)$

7.32 (a) $Y(\mathrm{j}\Omega)=T_0\sin c\left(\frac{T_0(\Omega-\Omega_0)}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{T_0(\Omega-\Omega_0)}{2}}$

(c) $Y(w)=\frac{\sin\frac{N}{2}(w-w_0)}{\sin\frac{w-w_0}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N-1}{2}(w-w_0)}$

第8章

8.5 $X(k)=2+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{5}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{5}}+\cdots+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{8\pi}{5}}$

$x'(n)=\{2,2,1,1,1\}$

$x'(n)=\sum_m x(n+7m),\ n=0,1,\cdots 4$

8.8 $W_8=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{j})$

参照图8.19，蝶形结构的第1级产生序列{2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0}，相位因子的乘积并不会改变此序列。下一级产生序列{4, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0}，该序列对相位因子仍保持不变。最后一级产生序列{8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}，因为将序列转换成适当顺序的反转位都只是零，所以结果保持为{8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}。

8.13 (a) "增益" $=W_8^0W_8^0(-1)W_8^2=-W_8^2=\mathrm{j}$

(b) 给定一个确定的输出样本，由每个输入都存在一条路径得到该输出，这对所有输出都是正确的。

(c) $X(3)=x(0)+W_8^3x(1)-W_8^2x(2)+W_8^2W_8^3x(3)-W_8^0x(4)-W_8^0W_8^3x(5)+W_8^0W_8^2x(6)+W_8^0W_8^2W_8^3x(7)$

8.16 $x=x_R+\mathrm{j}x_I=(a+\mathrm{j}b)(c+\mathrm{j}d)$

$e=(a-b)d$　1次加法，1次乘法

$x_R=e+(c-d)a$　2次加法，1次乘法

$x_I=e+(c+d)b$　2次加法，1次乘法

总共5次加法，3次乘法

8.19 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$

令 $F(t),\ t=0,1,\cdots,N-1$ 为序列 $X(k)$ 的 DFT，$t=0,1,\cdots,N-1$，于是

$$F(t)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{tk}=\{x(N-1),x(N-2),\cdots,x(1),x(0)\}$$

8.21 (a) $W(z)=\frac{1}{2}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}-\frac{1}{4}\frac{1-\left(z^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N-1}}\right)^N}{1-z^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N-1}}}$

$$-\frac{1}{4}\frac{1-\left(z^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N-1}}\right)^N}{1-z^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N-1}}}$$

(b) $x_w(n)=w(n)x(n);\ X_w(k)=W(k)NX(k)$

8.32 $X(k)=\sum_{m-0}^{N-1}x(m)W_N^{-k(N-m)}$

可看成长为N的序列与线性滤波器冲激响应的卷积。

$h_k(n)\triangleq W_N^{kn}u(n)$，计算在$N$时刻的值。

$H_k(z)=\sum_{n-0}^{\infty}W_N^{kn}z^{-n}=\frac{1}{1-W_N^kz^{-1}}=\frac{Y_k(z)}{X(z)}$

则，$y_k(n)=W_N^ky_k(n-1)+x(n),\ y_k(-1)=0$ 和 $y_k(N)=X(k)$

8.34 在DIF情况下，影响给定输出的蝶形结构的数目在第一级为 $\frac{N}{2}$，在第二级为 $\frac{N}{4}$，…。总数为 $N-1$。

每个蝶形结构需要4个实数乘法器，误差的方差为 $\frac{\delta^2}{12}$。假设误差是不相关的，则总输出量化误差的方差为

$$\sigma_q^2 = 4(N-1)\frac{\delta^2}{12} = \frac{N\delta^2}{3}$$

第9章

9.3 $H(z) = \frac{8-z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$

$h(n) = 8(0.5)^n u(n) - (0.5)^{n-1}u(n-1)$

9.6 $c_0 = 1;\ c_1 = -(b_1 + b_2);\ d_1 = b_1;\ c_2 = b_2$

9.8 (a) $h(n) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^n u(n)$

9.11 $H(z) = C\left(1 - \frac{53}{150}z^{-1} + 0.52z^{-2} - 0.74z^{-3} + \frac{1}{3}z^{-4}\right)$，其中 C 是常数

9.15 $k_2 = \frac{1}{3};\ k_1 = \frac{3}{2}$

9.17 $h(n) = \delta(n) + 0.157\delta(n-1) + 0.0032\delta(n-2) + 0.8\delta(n-3)$

9.21 $H(z) = 1 + 1.38z^{-1} + 1.311z^{-2} + 1.337z^{-3} + 0.9z^{-4}$

9.30 (a) $|H(e^{jw})|^2 = \frac{a^2-2a\cos w+1}{1-2a\cos w+a^2} = 1 \forall w$

9.32 $y(n) = 0.999y(n-1) + e(n)$

其中 $e(n)$ 是白噪声，均匀分布于区间 $\left[-\frac{1}{2^9}, \frac{1}{2^9}\right]$，于是 $E\{y^2(n)\} = 0.999^2E\{y^2(n-1)\} + E\{e^2(n)\} = 6.361x10^{-4}$

9.35 (a) $y(n) = Q[0.1\delta(n)] + Q[0.5y(n-1)];\ y(0) = Q[0.1] = \frac{1}{8};\ y(1) = Q\left[\frac{1}{16}\right] = 0$ 和 $y(2) = y(3) = y(4) = 0$；没有极限环

9.37 定义 $\rho_c = r\cos\theta,\ \rho_s = r\sin\theta$，(a)

$$-\rho_s y(n-1) + e_1(n) + x(n) + \rho_c v(n-1) + e_2(n) = v(n)$$

$$\rho_s v(n-1) + e_3(n) + \rho_c y(n-1) + e_4(n) = y(n)$$

9.38 (a) $h(n) = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

$\sigma_q^2 = \frac{64}{35}\sigma_{e1}^2 + \frac{16}{15}\sigma_{e2}^2$

9.40 (a) $G_1\frac{\left(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}{(1-0.5)\left(1+\frac{1}{3}\right)} = 1;\ G_1 = 1.1381$

$G_2\frac{(1+0.25)\left(1-\frac{5}{8}\right)}{\left(1-0.8e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\left(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)} = 1;\ G_2 = 1.7920$

9.41 (a) $k_1 = -\frac{4}{9};\ k_2 = \frac{5}{32}$

(b) $k_2 = -\frac{1}{6};\ k_1 = -\frac{1}{5}$

第10章

10.1 $h_d(n) = \frac{\sin\frac{\pi}{6}(n-12)}{\pi(n-12)};\ h(n) = h_d(n)w(n)$

其中 $w(n)$ 是长 $N = 25$ 的矩形窗。

10.2 $h_d(n)=\delta(n)-\frac{\sin\frac{\pi}{4}(n-2)}{\pi(n-12)}+\frac{\sin\frac{\pi}{6}(n-12)}{\pi(n-12)}$; $h(n)=h_d(n)w(n)$
其中, $w(n)$ 是长为25矩形窗。

10.5 $H_r(\omega)=2\sum_{n=0}^{1}h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{3}{2}-n\right)\right]$
从 $H_r(0)=1$ 和 $H_r\left(\frac{\pi}{2}\right)=1/2$, 得 $h(0)=0.073$, $h(1)=0.427$, $h(2)=h(1)$ 和 $h(3)=h(0)$

10.7 $h(n)=\{0.3133,\ -0.0181,\ -0.0914,\ 0.0122,\ 0.0400,\ -0.0019,\ -0.0141,\ 0.52,\ 0.52,\ -0.0141,\ -0.0019,\ 0.0400,\ 0.0122,\ -0.0914,\ -0.0181,\ 0.3133\}$

10.9 $h_d(n)=\dfrac{\cos\pi(n-10)}{(n-10)}, \quad 0\leqslant n\leqslant 20,\ n\neq 10$

$=0, \quad n=10$

于是 $h(n)=h_d(n)w(n)$, 其中, $w(n)$ 是长为21的汉明窗。

10.12 (a) 令 $T=2$. 则 $H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\Rightarrow y(n)=y(n-1)+x(n)+x(n-1)$

10.13 $H(z)=A\dfrac{\left(1+z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)}$
$H(z)|_{z=1}=1$; $A=\frac{3}{64}$, $b_1=2$, $b_2=1$, $a_1=1$, $c_1=-\frac{1}{2}$, $d_1=-\frac{1}{2}$, $d_2=\frac{1}{4}$

10.15 由设计要求得出 $\varepsilon=0.509$, $\delta=99.995$, $f_p=\frac{1}{6}$, $f_s=\frac{1}{4}$

巴特沃兹滤波器: $N_{\min}\geqslant\dfrac{\lg\eta}{\lg k}=9.613\Rightarrow N=10$

切比雪夫滤波器: $N_{\min}\geqslant\dfrac{\cosh^{-1}\eta}{\cosh^{-1}k}=5.212\Rightarrow N=6$

椭圆滤波器: $N_{\min}\geqslant\dfrac{k(\sin\alpha)}{k(\cos\alpha)},\dfrac{k(\cos\beta)}{k(\sin\beta)}=3.78\Rightarrow N=4$

10.19 (a) 根据Remez算法, 利用MATLAB设计FIR滤波器, 发现长度 $M=37$ 满足设计要求。
注意,在MATLAB中, 采样率的缩放归一化为 $\frac{1}{2}$。

(b) $\delta_1=0.02$, $\delta_2=0.01$, $\Delta f=\frac{20}{100}-\frac{15}{100}=0.05$
根据等式(10.2.94)得出 $\hat{M}=\dfrac{-20\lg\left(\sqrt{\delta_1\delta_2}\right)-13}{14.6\Delta f}+1\approx 34$
根据等式(10.2.95)得出 $D_\infty(\delta_1\delta_2)=1.7371$; $f(\delta_1\delta_2)=11.166$
and $\hat{M}=\frac{D_\infty(\delta_1\delta_2)-f(\delta_1\delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f}+1\approx 36$
注意, 式(10.2.95)是 M 更好的近似

10.21 (a) dc增益: $H_a(0)=1$; 3 dB 频率: $\Omega_c=\alpha$
对于所有 Ω,仅有 $H(j\infty)=0$; $h_a(\tau)=\frac{1}{e}h_a(0)=\frac{1}{e}$; $r=\frac{1}{\alpha}$

10.24 $H(z)=\frac{1}{6}(1-z^{-6})(1-z^{-1})\left(2+z^{-1}+\frac{3}{2}z^{-\alpha}+\frac{1}{2}z^{-3}+z^{-4}\right)$

这个滤波器是FIR, 零点位于 $z=1, e^{\pm j\frac{\pi}{6}}, e^{\pm j\frac{\pi}{2}}, e^{\pm j\frac{5\pi}{6}}, -0.555\,28\pm j0.6823$ 和 $0.3028\pm j0.7462$

10.25 (a) $f_L=\frac{900}{2500}=0.36$; $f_H=\frac{1100}{2500}=0.44$
$h_d(n)=\frac{2\sin 0.08\pi(n-15)}{(n-15)}$; $h(n)=h_d(n)w_H(n)$
$w_H(n)=0.54-0.46\cos\frac{2\pi(n-15)}{30}$

索　引

A

Accumulator　累加器　2.2.1

Adaptive arrays　自适应阵列　13.1.8

Adaptive filters　自适应滤波器　第13章

  applications of　应用于　13.1

    for antenna arrays　天线阵列　13.1.8

    for channel equalization　信道均衡　13.1.2

    for echo cancellation　回波抵消　13.1.3

    for interference suppression　干扰抑制　13.1.4

    for linear predictive coding　线性预测　13.1.7

    for noise cancellation　噪声抵消　13.1.6

    for system identification　系统识别　13.1.1

    for system modeling　系统建模　13.1

  direct-form FIR　直接型FIR　13.2

    properties of　性质　13.3.4

    with FAEST algorithm　采用FAEST算法　13.4

    with fast RLS algorithm　采用快速RLS算法　13.3.3,13.4.1

    with MSE algorithm　采用MSE算法　13.2.1,13.2.2

    with RLS algorithm　采用RLS算法　13.2.3,13.2.4,13.3

    with square-root(LDU) algorithms　采用平方根(LDU)算法　13.3.2

  lattice-ladder filters　格子-梯型滤波器　13.4

    properties of　性质　13.4.3

    with a priori LS algorithm　采用先验LS算法　13.4.1

    with error-feedback algorithm　采用误差反馈算法　13.4.1

    with gradient algorithm　采用梯度算法　13.4.3

    with normalized algorithm　采用归一化算法　13.4.2

Adaptive line enhancer　自适应谱线增强器　13.1.5

Adaptive noise cancelling　自适应噪声抵消　13.1.6

Akaike information criterion(AIC)　Akaike信息准则(AIC)　14.3.7

Algorithms　变换算法　1.1

  Chirp-z　chirp-z　8.3.2

  FFT　FFT　8.1

  Goertzel　Goertzel　8.3

  Remez　Remez　10.2.4

Aliasing, frequency-domain　频域混叠　1.3.3

  time-domain　时域混叠　6.1

Alternation theorem　交错定理　10.2.4

Amplitude　幅度　1.3.2

Analog signals(see Signals)　模拟信号(见信号)

Analog-to-digital(A/D) Converter　模-数(A/D)转换器　1.1.1,1.4,6.3

Autocorrelation, of deterministic signals　确定性信号自相关　2.6

  of random signals　随机信号自相关　5.3.2

Autocovariance　自协方差　12.1.3

Autoregressive(AR) process　自回归(AR)过程　12.2.1

  autocorrelation of　自相关　12.2.2

Autoregressive-moving average(ARMA) process　自回归滑动平均(ARMA)过程　12.2.1,14.3

  autocorrelation of　自相关　12.2.2

Averages, autocorrelation　平均,自相关　12.1.3

  autocovariance　自协方差　12.1.3

  ensemble　系综　12.1.1

  expected value　期望值　12.1.3

  for discrete-time signals　离散时间信号　12.1.6

  moments　矩　12.1.3

  power　功率　12.1.3

  time-averages　时间平均　12.1.7

B

Backward predictor　后向预测器　9.2.4,12.3.2

Bandlimited signals　带限信号　4.2.9

Bandpass filter　带通滤波器　5.4.1,5.4.2

Bandpass signal　带通信号　4.2.9

Bandwidth　带宽　4.2.9,10.1

Bartlett's method(see Power spectrum estimation)　巴特利方法(见功率谱估计)

Bessel filter　贝塞尔滤波器　10.3.4

Bilinear transformation　双线性转换　10.3.3

Binary codes　二进制码　6.3.2

Blackman-Tukey method(see Power spectrum estimation)　布莱克曼-杜基方法(见功率谱估计)

Burg algorithm(see Power spectrum estimation) 伯格算法
Butterworth filters 巴特沃兹滤波器 10.3.4

C

Canonic form 范式 2.5.1
Capon method(see Power spectrum estimation) Capon 方法(见功率谱估计)
Cauchy integral theorem 柯西积分定理 3.1.2
Causality, implications of 因果的含义 10.1
Causal signals 因果信号 2.3.5
Causal systems 因果系统 2.2.4,2.3.5,3.5.3
Cepstral coefficients 倒谱系数 12.2
Cepstrum 倒频谱 4.2.7
Characteristic polynomial 特征多项式 2.4.3
Chebyshev filters 切比雪夫滤波器 10.3.4
Chirp signal 线性调频信号 8.3.2
Chirp-z transform algorithm chirp-z 变换算法 8.3.2
Circular convolution 圆周卷积 7.2.2
Coding 编码 1.4
Comb filter 梳状滤波器 5.4.5
Conjugate-gradient algorithm 共轭梯度算法 13.2.2
Constant-coefficient difference equations 常系数差分方程 2.4
  solution of 求解 2.4
Continuous-time signals 连续时间信号 1.3.3
  exponentials 指数信号 1.3.3
  sampling of 采样 1.3.3,6.1
  sampling theorem for 采样定理 1.4.2,6.1
Convolution(linear) (线性)卷积 2.3
  circular 圆周卷积 7.2
  properties 卷积性质 2.3.4
  sum 卷积和 2.3
Correlation 相关 2.6,12.1.4
  autocorrelation 自相关 2.6,5.3.2,12.1.4
  computation 相关计算 2.6.3
  cross-correlation 互相关 2.6.1,5.3
  of periodic signals 周期信号 2.6.3
  properties 相关性质 2.6.2
Coupled-form oscillator 耦合振荡器 5.4.7
Cross-power density spectrum 互功率密度谱 12.1.6

D

Dead band 死区 9.6.1
Decimation 抽取 11.2
Deconvolution 去卷积 4.2.8,5.5
  homomorphic 同型去卷积 4.2.8,5.5.4
Delta modulation 增量调制 6.6
Difference equations 差分方程 2.4
  constant coefficient 常系数差方程 2.4
    solution 求解 2.4
  for recursive systems 差分方程用于递归系统 2.4.2,2.4.4
  from one-sided z-transform 从单边 z 变换得到的差分方程 3.6.2
  homogeneous solution 齐次解 2.4.3
  particular solution 特殊解 2.4.3
  total solution 全解 2.4.3
Differentiator 微分器 10.2.5
  design of 微分器设计 10.2.5
Digital resonator 数字谐振器 5.4.3
Digital sinusoidal oscillator 数字正弦振荡器 5.4.7
Digital-to-analog(D/A)converter 数-模(D/A)转换器 1.1.1,1.4,1.4.6,6.3
Dirichlet conditions, for Fourier series 傅里叶级数的 Dirichlet 条件 4.1.1
  for Fourier transform 傅里叶变换的 Dirichlet 条件 4.1.3
Discrete Fourier transform(DFT) 离散傅里叶变换(DFT) 7.1
  computation 计算 7.3,8.1
    butterfly 蝶型运算 8.1.3,8.1.4
    decimination-in-frequency FFT algorithm FFT 算法的频率抽取 8.1.3
    decimination-in-time FFT algorithm FFT 算法的时间抽取 8.1.3
    direct 直接型 7.3,8.1
    divide-and-conquer method 分治法(divide-and-conquer method) 8.1
      in-place computations 同址计算(in-place computation) 8.1.3
    radix-2 FFT algorithms 基 2FFT 算法 8.1.3
    radix-4 FFT algorithms 基 4FFT 算法 8.1
    shuffling of data 数据混排 8.1
    split radix 分裂基 8.1
    via linear filtering 通过线性变换 8.1,8.2
  definition 定义 7.1.2
  IDFT 傅里叶逆变换(IDFT) 7.1.2
  implementation of FFT algorithm FFT 算法的实现 8.1,8.2
  properties 性质 7.2
  circular convolution 圆周卷积 7.2.2
  circular correlation 圆周相关 7.2.3
  circular frequency shift 圆周频移 7.2.3

circular time shift 圆周时移 7.2.3
complex conjugate 复共轭 7.2.3
linearity 线性 7.2.1
multiplication 乘法特性 7.2.3
Parseval's theorem 帕塞定理 7.2.3
periodicity 周期性 7.2.1
symmetry 对称性 7.2.1
table 对称性表格 7.2.1
time reversal 时域反转 7.2.3
relationship to Fourier series 与傅里叶级数的关系 7.1.4
relationship to Fourier transform 与傅里叶变换的关系 7.1.4
relationship to z-transform 与 z 变换的关系 7.1.4
use in frequency analysis 用于频率分析 7.4
use in linear filtering 用于线性滤波 7.3
Discrete-time signals 离散时间信号 1.2.2,1.4.7
antisymmetric(odd) 反对称(奇)信号 2.1.2
correlation 相关 2.6
definition 定义 1.2.2,2.1
exponential 指数信号 2.1.1
frequency analysis of 频率分析 4.2
nonperiodic 非周期信号 2.1.2
periodic 周期信号 1.3
random 随机信号 1.2.4
representation of 响应 1.4
sinusoidal 正弦信号 1.3
symmetric(even) 对称(偶)信号 2.1.2
unit ramp 单位斜升信号 2.1.1
unit sample 单位采样信号 2.1.1
unit step 单位阶跃信号 2.1.1
Discrete-time systems 离散时间系统 2.2
causal 因果的 2.2.3,2.3.5
dynamic 动态的 2.2.3
finite-duration impulse response 有限长冲激响应 2.3.7
finite memory 有限存储 2.2.3,2.3.7
implementation of 实现 第9章
infinite-duration impulse response 无限长冲激响应 2.3.7
infinite memory 无限存储 2.2.3,2.3.7
linear 线性 2.2.3
memoryless 无记忆 2.2.3
noncausal 非因果的 2.2.3
nonlinear 非线性的 2.2.3
nonrecursive 非递归的 2.4.1
recursive 递归的 2.4.1
relaxed 驰豫的 2.2.1
representation 表示 1.4.7
shift-invariant 平移不变性 2.2.3
stability triangle 稳定三角形 3.5.6
Discrete-time systems(continued) (BIBO)稳定
stable(BIBO) 静态的 2.2.4,2.3.6
static 时不变的 2.2.3
time-invariant 单位采样(冲激)响应 2.2.3
unit sample(impulse)response 不稳定的 2.3.3
unstable 失真 2.2.4,2.3.6
Distortion, amplitude 幅度失真 5.1.4
delay 延迟失真 5.4.1
harmonic 谐波失真 第5章习题
phase 相位失真 5.1.4
Down sampling 下采样(也见采样率转换) 2.1.3
Dynamic range 动态范围 1.4.3,6.3.2,9.4

E

Echo 回波
far-end 远端 13.1.3
near-end 近端 13.1.3
Echo canceller 回波抵消器 13.1.3
Echo suppressor 回波抑制器 13.1.3
Eigenfunction 特征函数 5.1.1
Eigenvalue 特征值 5.1.1
Elliptic filters 椭圆滤波器 10.3.4
Energy 能量
definition 定义 2.1.1
density spectrum 能量密度谱 4.1.4,4.2.5
partial 偏能 第5章习题
signal 信号能量 2.1.2
Energy density spectrum 能量密度谱 4.1.4,4.2.5
Computation 计算 14.1.1
Ensemble 系综 12.1
averages 平均 12.1
Envelope delay 包络延迟 5.4.1
Ergodic 遍历 12.1.7
correlation-ergodic 相关遍历 12.1.9
mean-ergodic 平均遍历 12.1.8
Estimate(properties) 估计(特性)
asymptotic bias 渐近有偏估计 14.1.2
asymptotic variance 渐近方差 14.1.2
bias 偏差 14.1.2
consistent(see also Power spectrum estimation) 相容的(也见功率谱估计) 14.1.2

Estimate(properties), variance 估计(特性)方差 14.1.2

F

Fast Fourier transform(FFT) algorithms 快速傅里叶变换(FFT)算法 8.1
application to 应用 8.1
application to, correlation 应用于相关 8.1,8.2
application to, efficient computation of DFT 应用于DFT的有效计算 8.1
application to, linear filtering 应用于线性滤波 8.1,8.2
implementation 实现 8.1.6
mirror FFT 镜像 FFT 8.1.6
phase FFT 定相 FFT 8.1.6
radix-2 algorithm 基2算法 8.1.3
decimation-in-frequency 频率抽取 8.1.3
decimation -in-time 时间抽取 8.1.3
radix-4 algorithm 基4算法 8.1
split-radix 分裂基 8.1.5
Fast Kalman algorithms 快速卡尔曼算法 13.4.1
Fibonacci sequence Fibonacci序列 3.6
difference equation 差分方程 3.6
Filter 滤波器 5.4
Bandpass 带通 5.4.1,5.4.2
definition 定义 5.4.1,5.4
design of IIR filters IIR滤波器设计 5.4,10.3
all pass 全通 5.4.6
by pole-zero placement 通过放置零-极点 5.4
comb 梳状滤波器 5.4.5
notch 槽口滤波器 5.4.3
resonators(digital) (数字)谐振器 5.4.4
design of linear-phase FIR 线性相位FIR的设计 10.2
transition coefficient for 转换系数 附录B
distortion 失真 5.1.4
distortionless 无失真 5.4.1
frequency-selective 频率选择 5.4
highpass 高通 5.4
ideal 理想 5.4
lowpass 低通 5.4
nonideal, passband ripple 非理想,带通纹波 10.1
stopband ripple 带阻纹波 10.1
transition band 过渡带 10.1
prediction error filter 预测误差滤波器 9.2.4, 12.3
smoothing 平滑 1.4
structures 结构 9.1,9.2
Wiener filter 维纳滤波器 12.6,12.7
Filter banks 滤波器组 11.10
critically sampled 精密采样的 11.10
quadrature mirror 正交镜像的 11.11
uniform DFT 均匀DFT 11.10
Filtering 滤波 7.3
of long data sequences 长数据序列滤波 7.3.2
overlap-add method for 重叠相加法滤波 7.3.2
overlap-save method for 重叠保留法滤波 7.3.2
via DFT 通过DFT滤波 7.3
Filter transformations 滤波器转换 5.4,10.4
analog domain 模拟域 10.4
digital domain 数字域 10.4.2
lowpass-to-highpass 低通到高通转换 5.4
Final prediction error(FPE) criterion 最终预测误差(FPE)准则 14.3.6
Final value theorem 终值定理 3.6.1
FIR filters FIR滤波器 10.2
Antisymmetric 非对称的 10.2
design 设计 10.2
comparison of methods 方法比较 10.2
differentiators 微分器 10.2.5
equiripple(Chebyshev) approximation 等纹波(切比雪夫)近似 10.2
frequency sampling method 频率采样方法 10.2.3
Hilbert transformers 希耳伯特变换 10.2.6
window method 窗口方法 10.2.4
linear phase property 线性相位特性 10.2.2
symmetric 对称的 10.2
FIR filter structures FIR滤波器结构 9.2
cascade form 级联形式 9.2
direct form 直接形式 9.2.1
conversion to lattice form 转换成格型 9.2.4
frequency sampling form 频率采样形式 9.2.3
lattice form 格型 9.2,9.3,9.4,12.6.1
conversion to direct form 转换成直接形式 9.2.4
FIR filter structures(continued)
transposed form 转置形式 9.3.2
FIR systems FIR系统 2.3.7,2.4.1,2.5.2
Fixed-point representation 定点表示 9.4.1
Floating-point representation 浮点表示 9.4.2
Flowgraphs 流图 9.3

Folding frequency 频率折叠 1.4.2,6.1
Forced response 强迫响应 2.4.2
Forward predictor 前向预测器 9.2.4,12.3
Fourier series 傅里叶级数 1.3.3,4.1,4.2
  coefficients of 系数 4.1.1,4.2.1
  for continuous-time periodic signals 对于连续时间周期信号 4.1
  for discrete-time periodic signals 对于离散时间周期信号 4.2.1
Fourier transform 傅里叶变换 4.2.3
  convergence of 收敛 4.2.4
  inverse 逆变换 4.1.3
  of continuous-time aperiodic signals 连续时间非周期信号的傅里叶变换 4.1.3
  of discrete-time aperiodic signals 离散时间非周期信号的傅里叶变换 4.2.3
  properties 性质 4.4.2
    convolution 卷积特性 4.4.2
    correlation 相关特性 4.4.2
    differentiation 微分特性 4.4.2
    frequency shifting 频移 4.4.2
    linearity 线性 4.4.2
    modulation 调制特性 4.4.2
    multiplication 乘法特性 4.4.2
    of signals with poles on unit circle 在单位圆上有极点的信号 4.2.8
    Parseval's theorem 帕塞瓦定理 4.4.2
    relationship to z-transform 与 z 变换的关系 4.2.6
    symmetry 对称性 4.4
    table 傅里叶变换性质表 4.4.2
    time-reversal 时域反转特性 4.4.2
    time-shifting 时域平移特性 4.4.2
Frequency 频率 1.2.4
  alias 频率混叠 1.3,1.4
  content 频率含义 1.4.2
  folding 频率折叠 1.4.1,6.1
  fundamental range 基本范围 1.3.3
  highest 最高频率 1.3.2
  negative 负频率 1.3.1
  normalized 归一化频率 1.4.1
  positive 正频率 1.3.1
  relative 相对频率 1.4.1
Frequency analysis 频率分析 4.1,4.2
  continuous-time aperiodic signals 连续时间非周期信号 4.1
  continuous-time periodic signals 连续时间周期信号 4.1
  discrete-time aperiodic signals 离散时间非周期信号 4.2
  discrete-time periodic signals 离散时间周期信号 4.2
  dualities 二元性 4.3
  for LTI systems 用于 LTI 系统 第 5 章
  table of formulas for 公式表 4.3
Frequency response 频率响应 5.1.1
  computation 计算 5.2.2
  geometric interpretation of 几何解释 5.2.2
  magnitude of 幅度响应 5.1.1
  phase of 相位响应 5.1.1
  relation to system function 与系统函数关系 5.2
  to exponentials 与指数曲线关系 5.1
  to sinusoids 与正弦曲线关系 5.1
Frequency transformations(see Filter transformations) 频率变换(见滤波器变换)
Full duplex transmission 全双工传送 13.1
Fundamental period 基本周期 1.3.2

G

Gaussian random variable 高斯随机变量 附录 A
  subroutine for 产生高斯随机变量的子程序 附录 A
Gibbs phenomenon 吉布斯(Gibbs)现象 4.2,10.2.2
Goertzel algorithm Goertzel 算法 8.3
Granular noise 颗粒噪声 6.3.3
Group(envelope)delay 群(包络)时延 5.4.1

H

Harmonic distortion 谐波失真 第 5 章与第 6 章习题
High-frequency signal 高频信号 4.2.9
Hilbert transform 希耳伯特变换 10.1.1
Hilbert transformer 希耳伯特变换器 10.2.6
Homomorphic 同型的 5.5.4
  deconvolution 同型去卷积 5.5.4
  system 同型系统 5.5.4
Hybrid 混合的 13.1.3

I

IIR filters IIR 滤波器 10.3
  design from analog filters 由模拟滤波器进行设计 10.3
    by approximation of derivatives 通过导数近似 10.3
    by bilinear transformation 通过双线性变换 10.3.3,10.3.5

by impulse invariance 通过冲激恒等式 10.3.2
by matched-z transformation 通过匹配 z 变换 10.3.4
least-squares design methods 最小二乘设计方法 第 10 章习题
Padé approximation Pade 逼近 第 10 章习题
pole-zero placement 零-极点放置 5.4
Prony's(least squares) Prony(最小二乘) 第 10 章习题
Shanks'(least squares) Shanks(最小二乘) 第 10 章习题
IIR filter structures IIR 滤波器结构 9.3
cascade form 级联形式 9.3
direct form 直接形式 9.3
lattice-ladder 格子-梯型 9.3.5,12.6.2
parallel form 并联形式 9.3.4
second-order modules 二阶模数 9.3
transposed forms 转置形式 9.3
Impulse response 冲激响应 2.4.4
Initial value theorems 初值定理 3.2
Innovations process 创新过程 12.1.9
Interpolation 插值 1.4.2,6.1,11.3
function 插值函数 1.4.2
ideal 理想插值 1.4.2,6.1
linear 线性插值 1.4.7,6.5,6.6
Inverse filter 逆滤波器 5.5
Inverse Fourier transform 傅里叶逆变换 4.1.3,4.2
Inverse system 逆系统 5.5.1
Inverse z-transform z 逆变换 3.1,3.2,3.3,3.4
by contour integration 通过围道积分 3.1.2,3.4
integral formula 积分公式 3.1.2
partial fraction expansion 部分分数展开 3.4
power series 幂级数 3.4

J

Joint-process estimate 联合过程估计 13.4

K

Kalman gain vector 卡尔曼增益矢量 13.3

L

Lattice filter algorithms 格型滤波器算法 13.4
a posteriori form 后验形式 13.4.1
a priori form 先验形式 13.4.1
error-feedback form 误差反馈型 13.4.1
gradient form 梯度型 13.4.3
joint process estimate 联合过程估计 13.4.1
modified form 修正型 13.4.1
normalized form 归一化形式 13.4.2
properties of 性质 13.4.3
square-foot form 平方根形式 13.4.2
Lattice filters 格型滤波器 9.2.4,9.3.5,12.6
ARMA structure ARMA 结构 12.6
AR structures AR 结构 12.6
MA structure MA 结构 12.3
LDU decomposition LDU 分解 13.3
Leakage 泄漏 7.4,14.1.1
Learning curves 学习曲线 13.2.4
Least squares 最小二乘 第 10 章习题
filter design 滤波器设计 第 10 章习题
Least-squares estimation 最小二乘估计 13.2
Levinson-Durbin algorithm 莱文森-德宾(Levinson-Durbin)算法 12.4
Generalized 通用型 12.4
split Levinson 分裂式莱文森 第 12 章习题
Limit cycle oscillations 极限环振荡 9.6
Linear filtering 线性滤波 7.3
based on DFT 基于 DFT 7.3
overlap-add method 重叠相加法 7.3
overlap-save method 重叠保留法 7.3
Linear interpolation 线性插值 6.5,6.6
Linear prediction 线性预测 9.2.4,12.3,12.4,12.5
backward 后向 12.3
forward 前向 12.3
lattice filter for 格型滤波器 12.3
normal equations for 正态方程 12.3
properties of 性质 12.5
Linear prediction filter(see Linear prediction) 线性预测滤波器(见线性预测) 9.2.4
Linear predictive coding 线性预测编码 13.1
of speech 语音线性预测编码 13.1
LMS algorithm LMS 算法 13.2
excess mean-square error of 过量方误差 13.2.3
properties of 性质 13.2
Local loop 本地环路 第 12 章习题
Low-frequency signal 低频信号 4.2
Lowpass filter 低通滤波器 5.4
LTI systems LTI 系统 2.5
moving average 滑动平均 2.5
second order 二阶的 2.5
structures 结构 2.5
canonic form 范式 2.5
direct form I 直接形式 I 2.5
direct form II 直接形式 II 2.5

nonrecursive 非递归的 2.5
recursive 递归的 2.5
weighted moving average 加权滑动平均 2.5

M

Maximal ripple filters 最大纹波滤波器 10.2.4
Maximum entropy method 最大熵方法 14.3.3
Maximum-phase system 最大相位系统 5.5.2
Mean square estimation 均方估计 12.7,13.2
orthogonality principle 正交原理 12.7
Minimum description length (MDL) 最小描述长度(MDL) 14.3
Minimum-phase system 最小相位系统 5.5.2
Minimum variance estimate 最小方差估计 14.4
Mixed-phase system 混合相位系统 5.5.2
Moving-average filter 滑动平均滤波器 5.1.1
Moving-average(MA) process 滑动平均(MA)过程 12.2.2,14.3
autocorrelation of 自相关 12.2
Moving-average signal 滑动平均信号 2.5.2
Multiehannel signal 多径信号 1.2.1
Multidimensional signal 多维信号 1.2

N

Narrowband signal 窄带信号 4.2.9
Natural response 自然响应 2.4.2
Natural signals 自然信号 4.2.10
Noise subspace 噪声子空间 14.5.1
Noise whitening filter 噪声白化滤波器 12.2
Normal equations 正态方程 12.4
solution of 求解 12.4
Levinson-Durbin algorithm 莱文森-德宾(Levinson-Durbin)算法 12.4
Schur algorithm Schur算法 12.4
Number representation 数值表示 9.4
fixed-point 定点 9.4
floating point 浮点 9.4
Nyquist rate 奈奎斯特率 1.4.2

O

One's complement 一进补码 9.4.1
One-sided z-transform 单边 z 变换 3.6
Orthogonality principle 正交原理 12.7
Oscillators(sinusoidal generators) 振荡器(正弦发生器) 5.4.7
CORDIC algorithm for CORDIC算法 5.5
coupled-form 耦合形式 5.4.7
digital 数字的 5.4.7
Overflow 溢出 9.6.2
Overlap-add method 重叠相加方法 7.3
Overlap-save method 重叠保留方法 7.3
Overload noise 过载噪声 6.3.3
Oversampling A/D 过采样 A/D 6.6
Oversampling D/A 过采样 D/A 6.6.2

P

Paley-Wiener theorem 佩利-维纳定理 10.1.1
Parseval's relations 帕塞瓦关系式 4.1,4.2,4.4.2,7.2.3
aperiodic(energy) signals 非周期(能量)信号 4.2,4.4
DFT DFT 7.2
periodic(power) signals 周期(功率)信号 4.1.2,4.2.2
Partial energy 偏能 5.5
Partial fraction expansion(see Inverse z-transform) 部分分数展开(见 z 逆变换)
Periodogram 周期图 14.1.2
estimation of 估计 14.1.2
mean value 均值 14.1.2
variance 方差 14.1.2
Phase 相位 1.3
maximum 最大相位 5.5.2
minimum 最小相位 5.5.2
mixed 混合相位 5.5.2
response 相位响应 5.1.1
Pisarenko method 皮萨论科方法 14.5
Poles 极点 3.3
complex conjugate 复共轭 3.4.3,3.5
distinct 距离 3.3,3.4,3.5
location 位置 3.3,3.4,3.5
multiple-order 多重极点 3.4.3
Polyphase filters 多相滤波器 11.5.1
for decimation 用于抽取 11.5.1
for interpolation 用于插值 10.4.2
Power 功率 2.1.2
definition 功率定义 2.1.2
signal 功率信号 2.1.2
Power density spectrum 功率密度谱 4.1.4,4.1.2
definition 定义 4.1.2
estimation of(see also Power spectrum estimation) 估计(也见功率谱估计) 4.1.2
periodic signals 周期信号 4.1,4.2,4.3,4.2.2
random signals 随机信号 12.1.5

rectangular pulse train 矩形脉冲串 12.1.6
Power spectrum estimation 功率谱估计 14.1.1
Capon(minimum variance)method Capon(最小方差)方法 14.4.2
direct method 直接方法 14.1.1
eigenanalysis algorithms 特性分析算法 14.5
ESPRIT ESPRIT 14.5.4
MUSIC MUSIC 14.5.3
order selection 阶选择 14.5.5
Pisarenko 皮萨论科 14.5
experimental results 实验结果 14.3.9
from finite data 由有限数据 14.1
indirect method 间接方法 14.1.1
leakage 泄漏 14.1.1
nonparametric methods 非参数方法 14.2
Bartlett 巴特利特 14.2.1
Blackman Tukey 布莱克曼-杜基 14.2
computational requirements 计算需求 14.2.5
performance characteristics 性能特征 14.2.4
Welch 韦尔奇 14.2.2
parametric(model-based) methods 参数(基于模型)方法 14.2.4
ARMA model ARMA 模型 14.3
AR model AR 模型 14.3.1
AR model order selection AR 模型阶选择 14.3.6
Burg method 伯格方法 14.3
least-squares 最小二乘 14.3.4
MA model MA 模型 14.3
maximum entropy method 最大熵方法 14.3.4
model parameters 模型参数 14.3.1
modified Burg 修正型伯格方法 14.3.3
relation to linear prediction 与线性预测关系 14.3.1
sequential least squares 序贯最小二乘 14.3.5
Yule-Walker Yule-Walker 方程 14.3.2
use of DFT DFT 的应用 14.1.3
Prediction coefficients 预测系数 12.3
Prediction-error filter 预测误差滤波器 9.2.4,12.3
properties of 性质 12.5
Principal eigenvalues 主特性值 14.5.2
Probability density function 概率密度函数 12.1
Probability distribution function 概率分布函数 附录 A
Prony's method Prony 方法 第 10 章习题
Pseudorandom sequences 伪随机序列 第 2 章习题
Barker sequence Barker 序列 第 2 章习题
maximal-length shift register sequences 最大长度移位寄存器序列 第 2 章习题

Q

Quadrature mirror filters 正交镜像滤波器 11.9
for perfect reconstruction 用于精确重建 11.11
for subband coding 用于子带编码 11.9.4
Quality 质量 14.2.4
of Bartlett estimate 巴特利估计 14.2.4
of Blackman-Tukey estimate 布莱克曼-杜基估计 14.2.4
of Welch estimate 韦尔奇估计 14.2.4
Quantization 量化 1.4,6.3.2
Differential 差分 6.6
differential predictive 差分预测 6.6.1
dynamic range 动态范围 1.4.3,6.3.2,9.4
error 量化误差 1.4.9,5.9.6
in A/D conversion 在 A/D 转换中的量化 6.3
in filter coefficients 在滤波器系数中的量化 9.5
level 量化级别 1.4.3,6.3.2
resolution 量化分辨率 1.4.3,9.4
rounding 舍入误差 1.4.3,9.4.3
step size 量化步长 1.4.3,9.4
truncation 截断误差 1.4.3,9.4.3
Quantization effects 量化影响 1.4,6.3.2,8.4,9.4
fixed-point numbers 定点数 9.4
one's complement 一进补码 9.4
sign-magnitude 有符号数值 9.4
table of bipolar codes 双极性码表 6.3.3
two's complement 二进补码 9.4.1
floating-point numbers 浮点数 9.4.2
in A/D conversion 在 A/D 转换中的量化影响 1.4.4,6.3.3
in computation of DFT 在 DFT 计算中的量化影响 8.4
direct computation 直接计算 8.4
FFT algorithms FFT 算法 8.4
in filter coefficients 在滤波器系数中的量化影响 9.5
limit cycles 极限环 9.6
dead band 死区 9.6.1
overflow 溢出 9.6.2
zero-input 零输入 9.6.1
scaling to prevent overflow 缩放以防止溢出 9.6.2
statistical characterization 静态特性 9.6.3
Quantizer 量化器 6.3.2

midrise 中升型 6.3.2
midtread 中平型 6.3.2
resolution 分辨率 6.3.2
uniform 均匀量化器 6.3.2

R

Random number generators 随机数字发生器 附录 A
Random processes 随机过程 5.3.2,12.1
averages 平均 12.1
autocorrelation 自相关 12.1
autocovariance 自协方差 12.1
expected value 期望值 12.1
for discrete-time signals 对于离散时间信号 12.1
moments 矩 12.1
power 功率 12.1
correlation-ergodic 相关遍历 12.1
discrete-time 离散时间 12.1
ergodic 各态历经 12.1
jointly stationary 联合平稳 12.1
mean-ergodic 平均遍历 12.1
power density spectrum 功率密度谱 12.1
response of linear systems 线性系统响应 5.3.2
autocorrelation 自相关 5.3.2
expected value 期望值 5.3.2
power density spectrum 功率密度谱 5.3.2
sample function 采样函数 12.1
stationary 平稳 12.1
wide-sense 广义平稳 12.1
time-averages 时间平均 830-832
Random signals(see Randomprocesses) 随机信号(见随机过程)
Rational z-transforms 有理 z 变换 3.4
poles 极点 3.3
zeros 零点 3.3
Recursive least squares 递归最小二乘 13.2
direct-form FIR algorithms 直接形式 FIR 算法 13.2
fast LS 快速 LS 13.3,13.4.1
properties of 性质 13.3.4
lattice algorithms 格型算法 13.4
a posteriori form 后验形式 13.4
a priori form 先验形式 13.4
error-feedback form 误差反馈形式 13.4
gradient 梯度型 13.4.3
joint process estimate 联合过程估计 13.4.1
modified form 修正型 13.4
normalized form 归一化型 13.4
properties of 性质 13.4.3
square-root form 平方根型 13.3
Recursive systems 递归系统 2.5
Reflection coefficients 反射系数 9.2.4,9.3.5,12.3
Resonator(see Digital resonator) 谐振器(见数字谐振器)
Reverse(reciprocal) polynomial 反转(倒数)多项式 9.2.4,12.3.2
backward system function 后向系统函数 9.2.4,12.3.2
Round-off error 舍入误差 9.4.3,9.6.3

S

Sample-and-hold 采样保持 6.3.1,6.3.4
Sample function 采样函数 12.1
Sampling 采样 1.2,1.4,6.1
aliasing effects 混叠影响 1.4
frequency 频率采样 1.4
frequency domain 频域采样 7.1
interval 时间间隔 1.4
Nyquist rate 奈奎斯特率 1.4.2
of analog signals 模拟信号采样 1.4,6.1
of discrete-time signals 离散时间信号采样 第 11 章
of sinusoidal signals 正弦信号采样 1.4.1
period 采样周期 1.4
periodic 周期采样 1.4
rate 采样率 1.4
theorem 采样定理 1.4.2
time-domain 时域采样 1.4.1,6.1
uniform 均匀采样 1.4
Sampling-rate conversion 采样率转换 第 11 章
applications of 应用于 11.9,11.10,11.11
for DFT filter banks DFT 滤波器组 11.10
for interfacing 接口 11.9
for lowpass filters 低通滤波 11.9
for phase shifters 移相器 11.9
for subband coding 子带编码 11.9.4
for transmultiplexing 复用转换 11.10.2
by arbitrary factor 通过任意因子 11.8
by rational factor 通过有理因子 11.4
decimation 抽取 11.1,11.2
filter design for 滤波器设计 11.4,11.5
interpolation 插值 11.1,11.3
multistage 多级的 11.6

of bandpass signals 带通信号 11.7
polyphase filters for 多相位滤波器 11.5
Sampling theorem 采样定理 1.4.2,6.1
Schur algorithm Schur算法 12.4.2
pipelined architecture for 管道结构 12.4.2
split-Schur algorithm 分裂 Schur 算法 第 12 章习题
Shanks' method Shanks方法 第10章习题
Sigma-delta modulation Σ-Δ调制 6.6.1
Signal flowgraphs 信号流图 9.3
Signals 信号 1.1
analog 模拟信号 1.2
antisymmetric 反对称信号 2.1.2
aperiodic 非周期信号 2.1.2
bandpass 带通信号 4.2.9
continuous-time 连续时间信号 1.2
deterministic 确定性信号 1.2
digital 数字信号 1.2
discrete-time 离散时间信号 1.2,1.4,7.2.1
electrocardiogram(ECG) 心电图(ECG)信号 1.2
harmonically related 谐波相关信号 1.3
multichannel 多径信号 1.2
multidimensional 多维信号 1.2
natural 自然信号 4.2.10
frequency ranges 频率范围 4.2.10
periodic/ 周期信号 1.3
random 随机信号 1.2,12.1
correlation-ergodic 相关遍历 12.1
ergodic 各态历经的 12.1
expected value of 期望值 12.1
mean-ergodic 平均遍历 12.1
moments of 矩 12.1
statistically independent 统计独立 12.1
strict-sense stationary 严平稳 12.1
time-averages 时间平均 12.1
unbiased 无偏 12.1
uncorrelated 不相关的 12.1
wide-sense stationary 广义平稳 12.1
seismic 地震信号 4.3
sinusoidal 正弦信号 1.3
speech 语音信号 1.1
symmetric 对称信号 2.1.2
Signal subspace 信号子空间 14.5.2
Sign magnitude representation 信号幅度表示 9.4.1
Sinusoidal generators(see Oscillators) 正弦信号发生器
Spectrum 频谱 4.1
analysis 频谱分析 4.1
estimation of 谱估计(也见功率谱估计) 4.1,第 14 章
Split-radix algorithms 分裂基算法 8.1
Spread-spectrum signal 扩频信号 13.1.4
Stability of LTI systems of second-order systems LTI 系统的稳定性 3.5
of second-order systems 二阶系统的稳定性 3.5.6
Stability triangle 稳定三角形 3.5.6
Steady-state response 稳态响应 3.5,5.1
Structures 结构 2.4,2.5
direct form I 直接形式 I 2.4.4
direct form II 直接形式 II 2.5
Subband coding 子带编码 11.9.4
Superposition principle 叠加原则 2.2.3
Superposition summation 迭加求和 2.3
System 系统 1.1,2.2
dynamic 动态系统 2.2.3
finite memory 有限存储系统 2.2.3
infinite memory 无限存储系统 2.2.3
inverse 逆系统 5.5.1
invertible 可逆系统 5.5.1
relaxed 驰豫系统 2.2.1
System function 系统函数 3.3.3
of all-pole system 全极点系统 5.2
of all-zero system 全零点系统 3.3.3
of LTI systems LTI 系统 3.3.3
relation to frequency response 与频率响应的关系 5.2
System identification 系统识别 5.5.1
System modeling 系统建模 5.5.3
System responses 系统响应 12.2.1
forced 强迫响应 2.4.2
impulse 冲激响应 2.4.4
natural(free) 自然(自由)响应 2.4.2,3.6.3
of relaxed pole-zero systems 驰豫零-极点系统响应 3.3
of systems with initial conditions 具有起始条件的系统响应 3.6.3
steady-state 稳态响应 3.5.2
transient 暂态响应 2.4.3,3.5
zero-input 零输入响应 2.4.2
zero-state 零状态响应 2.4.2

T
Time averages 时间平均 12.1
Time-limited signals 有限区间信号 12.7
Toeplitz matrix 托普利兹(Toeplitz)矩阵 12.4,12.7
Transient response 暂态响应 2.4.3,3.5.2,5.1
Transition band 过渡带 10.2
Transposed structures 转置结构 9.3
Truncation error 截断误差 1.4.3,9.4.3
Trunk lines 干线 13.1.3
Two's complement representation 二进补码表示 9.4.1
U
Uniform distribution 均匀分布 6.3.3,8.4,9.4.3
Unit circle 单位圆 4.2
Unit sample(impulse) response 单位采样(冲激)响应 2.4.4
Unit sample sequence 单位采样序列 2.1
V
Variability 变化 14.2
Variance 方差 8.4,9.6.3
W
Welch method 韦尔奇(Welch)方法 14.2.2,12.2
Wideband signal 宽带信号 4.2.9
Wiener filters 维纳滤波器 12.7,13.2.1
FIR structure FIR结构 12.7
for filtering 用于滤波 12.7
for prediction 用于预测 12.7
for smoothing 用于平滑 12.7
IIR structure IIR结构 12.7
noncausal 非因果的 12.7
Wiener-Hopf equation 维纳-霍夫(Wiener-Hope)方程 12.7
Wiener-Khintchine theorem 维纳-欣钦(Wiener-Khintchine)定理 4.4.2
Window functions 窗函数 10.2.2
Wold representation Wold表示 12.2
Wolfer sunspot numbers 乌夫(Wolfer)太阳黑子 1.2
autocorrelation 自相关 2.6
Y
Yule-Walker equations Yule-Walker方程 12.4
modified 修正型 14.3.8
Yule-Walker method Yule-Walker方法 14.3.2
Z
Zero-input linear 零输入线性 2.4.2
Zero-input response 零输入响应 2.4.2
Zero-order hold 零阶保持 1.4,6.3.4
Zero padding 补零 7.1.2
Zeros 零点 3.3
Zero-state linear 零状态线性 2.4.2
Zoom frequency analysis 细化频率分析 第11章习题
z-transforms z变换 3.1
definition 定义 3.1
bilateral(two-sided) 双边(两边)的 3.1
unilateral(one-sided) 单边(一边)的 3.6
inverse z逆变换 3.2,3.3,3.4
by contour integration 通过围道积分 3.1,3.4
by partial fraction-expansion 通过部分分数展开 3.4
by power series 通过幂级数 3.4
properties 性质 3.2
convolution 卷积特性 3.2
correlation 相关特性 3.2
differentiation 微分特性 3.2
initial value theorem 初值定理 3.2
linearity 线性 3.2
multiplication 乘法特性 3.2
Parseval's relation 帕塞瓦关系式 3.2
Scaling 缩放特性 3.2
time reversal 时间反转 3.2
time shifting 时间平移 3.2
rational 有理数 3.3
region of convergence(ROC) 收敛域(ROC) 3.1
relationship of Fourier transform 傅里叶变换关系 4.1
table of z变换表 3.2